ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME CINQUANTUNESIMO

1915-1916

TORINO

Libreria FRATELLI BOCCA

Via Carlo Alberto, 3.

1916

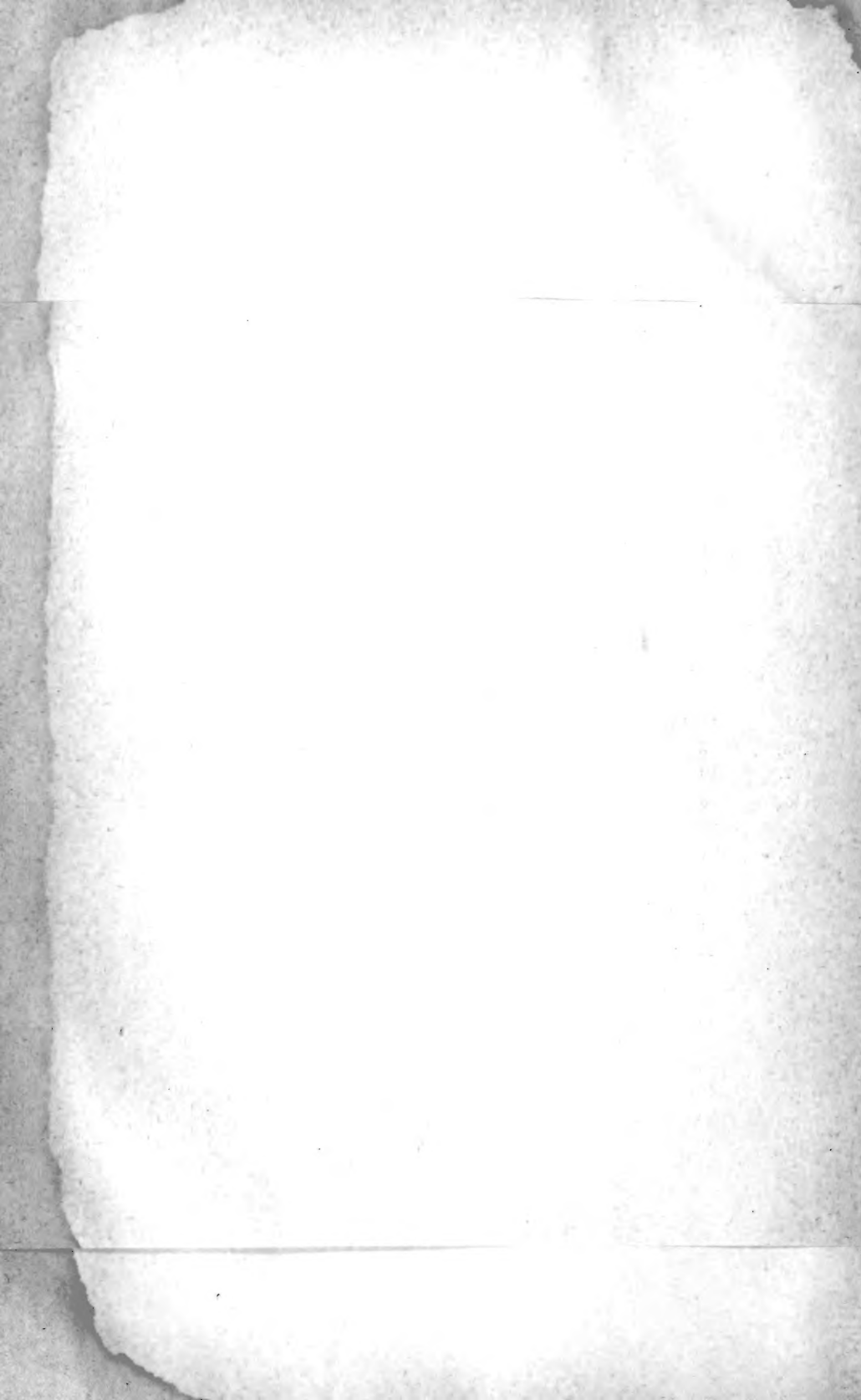
ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

ERRATA-CORRIGE

alla Nota del Dr. Ing. C. L. RICCI: *L'equilibramento delle masse rotanti a grande velocità*, Tomo LI, Anno 1915-1916, Disp. 2ª e 3ª.

			errata	*corrige*
Pag. 98,	linea	24	del	dal
„ 102,	„	4 dal basso denominatore	$\rho'_{ss}{}^2$	$\rho'_{zs}{}^2$
„ „	„	3 dal basso denominatore	aggiungere	$)^2$
„ 103,	„	ultima formola, denominatore	$(\ldots)$	$(\ldots)^2$
„ 104,	„	13 dal basso	della	dalla
„ 105,	„	5 „ „	$G_i N_1 . G_e N_2$	$\overline{G_i N_1} . \overline{G_e N_2}$
„ 107,	„	16	della	dalla
„ 114,	„	3	R	$\mathcal{R}$
„ „	„	4	CK	K
„ 115,	„	7 dal basso	B	$\mathcal{B}$
„ 195,	„	6	B	$\mathcal{B}$
„ „	„	4 dal basso	degli	dagli
„ 197,	„	11 „ „	δ_i'	δ_i''
„ 203,	„	14 „ „	è la fase	è quella della fase
„ 211,	„	penultima	$\rho_{1m} - \rho_{2m} = \lambda 2 S \cos^2 \frac{\varphi}{2}$	$\lambda = \rho_{1m} - \rho_{2m} = 2 S \cos^2 \frac{\varphi}{2}$
„ 212,	„	5	λ	λ'
„ 216,	„	8 dal basso	fascie	faccie
„ „	„	3 „ „	della	dalla
„ 221,	„	16	steccato	staccato
„ 222,	„	13	del	dal
„ „	„	16	del	dal

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1915.

NB. — *La prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

Boselli (S. E. Paolo), P.° Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano e Cancelliere dell'Ordine della Corona d'Italia, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore onorario della R. Università di Bologna, Presidente dell'Istituto Storico Italiano, Presidente del Consiglio degli Archivi, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della Classe di scienze morali della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia Patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Corrispondente dell' Accademia Dafnica di Acireale, Presidente onorario della Società di Storia Patria degli Abruzzi in Aquila, Presidente del Consiglio Centrale della Società *Dante Alighieri*, Presidente del Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico di Torino, Presidente del Consiglio Superiore della Marina Mercantile, Membro del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio Provinciale di Torino, Presidente del Comitato Nazionale per la Storia del Risorgimento, Cav. O. S. SS. A., Gr. Cord. ✠ e ⚜, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo. — *Torino, Piazza Maria Teresa, 3.*

Rieletto alla carica il 18 maggio 1913 — 5 giugno 1913.

Vice-Presidente

Camerano (Lorenzo), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Presidente del Club Alpino Italiano, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro della Società Zoologica di Francia, Socio corrispondente del Museo Civico di Rovereto, della Società Scientifica del Cile, della Società Spagnuola di Storia naturale, Socio straniero della Società Zoologica di Londra, Socio onorario della Società scientifica del Messico, Socio onorario della Società zoologica italiana, Socio onorario dell'Accademia dei Zelanti di Acireale, Uff. ✻, Comm. ✠. — *Torino, Museo Zoologico della R. Università, Palazzo Carignano.*
Rieletto alla carica il 22 giugno 1913 — 11 luglio 1913.

Tesoriere

Einaudi (Luigi), Dottore in legge, Professore di Scienza delle finanze e Diritto finanziario della R. Università di Torino ed incaricato di Economia e Legislazione industriale nel R. Politecnico di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e di quella dei Georgofili, Socio onorario del *Cobden Club* di Londra, Membro del Comitato centrale e della Commissione esecutiva del Consorzio nazionale. — *Torino, Piazza Statuto, 16.*
Eletto alla carica l'11 gennaio 1914 — 5 febbraio 1914.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, incaricato di Geometria analitica e proiettiva e Direttore del R. Politecnico di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio ordinario non residente della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e dell'Ateneo di Brescia, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, Comm. ✠, e ♔. — *Torino, Via Lagrange, 2.*
Eletto alla carica l'8 febbraio 1914 — 12 marzo 1914.

Segretario

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), Membro onorario della Società Filosofica di Cambridge e delle Società Matematiche di Londra e di Calcutta, Socio straniero dell'Accademia delle Scienze del Belgio e di quella di Danimarca, Socio corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ✠, ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 85.*
Rieletto alla carica il 16 novembre 1913 — 21 dicembre 1913.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo Cavour di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio straniero della *British Ornithological Union*, Socio straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio straniero dell'*American Ornithologists' Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Comm. ♔, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo). — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*

29 gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), *predetto.*

29 dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✠, Comm. ♔. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*

5 dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*

10 febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Segre (Corrado), *predetto.*

10 febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della *Sociedad Cientifica* del Messico, Socio del Circolo matematico di Palermo, della Società matematica di Kasan, della Società filosofica di Ginevra, corrispondente della R. Accademia dei Lincei, ♔. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*

25 gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nel R. Politecnico, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, del Circolo matematico di Palermo, dell'Accademia Dafnica di Acireale e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Membro effettivo della R. Commissione Geodetica italiana, Comm. ♔. — *Torino, Via Madama Cristina, 11.*

3 febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

Foà (Pio), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Presidente della Commissione Reale per l'educazione fisica, Assessore per l'Igiene al Municipio di Torino, ecc., ecc., Uff. ✻, Comm. 🜲. — *Torino, Corso Valentino, 40.*

3 febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze naturali, Professore ordinario e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica ed incaricato di Chimica bromatologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina e Vice-Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di Farmacia di Torino, già Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Cittadino onorario di Crespellano (Bologna), Socio onorario dell'Associazione chimico-farm. toscana, Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro corrispondente della Società di Farmacia di Parigi, Membro d'onore della R. Accademia delle Scienze di Romenia (Bucarest); Membro onorario della *Verein Chemiker-Coloristen*; Membro onorario della Società chimica portoghese; Socio onorario dell'Associazione Chimica Industriale di Torino; Socio della *Deutsche Gesellschaft f. Geschichte d. Medizin und Naturwissenschaften*, Membro della Società Chimica di Berlino, della *Berliner Gesellschaft f. Gesch. d. Naturwiss.*, ecc., Comm. 🜲, ✠. — *Torino, Corso Valentino, 11.*

12 gennaio 1896 - 2 febbraio 1896. — Pensionato 28 maggio 1903.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e Scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale dei materiali da costruzione nel R. Politecnico in Torino, Uff. ✻, Comm. 🜲. — *Torino, Corso Valentino, 7.*

31 maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore di Geologia e Direttore del Museo di Geologia e di Paleontologia della R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Ateneo di Brescia e dell'Accademia degli Agiati in Rovereto, Socio onorario dell'Accademia di Verona, Membro del R. Comitato Geologico, ecc., Comm. ✻, 🜲. — *Torino, Palazzo Carignano.*

15 gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina, Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei,

Socio della R. Accademia di Medicina, Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino. Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società Imperiale di Scienze naturali di Mosca, della *Royal Botanical Society* di Edinburgh, della Società Veneto-Trentina, della Società Antonio Alzate di Mexico, ecc., Comm. ♔, *Officier du mérite agricole*. — *Torino, Orto Botanico della R. Università (al Valentino).*
10 marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Politecnico di Torino, Socio ordinario della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia Pontaniana e del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli. Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Membro della Commissione superiore metrica al Ministero di Agricoltura, Industr. e Comm., Membro del Consiglio Superiore dei servizi elettrici al Ministero delle Poste e Telegrafi, Consigliere comunale, Uff. ✠, Comm. ♔. — *Torino, Via Cernaia, 40.*
9 febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Fisica matematica e incaricato di Meccanica razionale nella R. Università di Torino, rappresentante dell'Accademia nel Consiglio amministrativo del R. Politecnico di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della Società italiana delle Scienze (detta dei XL) e corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Comm. ♔. — *Corso Vinzaglio, 10.*
5 marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 20 luglio 1913.

Fusari (Romeo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore ordinario di Anatomia umana, descrittiva e topografica e Direttore dell' Istituto anatomico della R. Università di Torino, Socio dell'Accademia di Medicina di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Fondatore della Società medico-chirurgica di Pavia, Onorario dell'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara, ✠ e Comm. ♔. — *Via Baretti, 45.*
5 marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 17 gennaio 1915.

Balbiano (Luigi), Dottore in chimica, Professore ordinario di Chimica organica nel R. Politecnico di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di medicina di Roma, Socio onorario delle Società di Farmacia di Torino, di Parigi e di Liegi, Uff. ✠. — *Via dei Mille, 7.*
15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Panetti (Modesto), Dottore in Matematica, Ingegnere, Professore di meccanica applicata alle macchine nel R. Politecnico di Torino, Uff. ♔. — *Via S. Francesco da Paola, 36.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Tenente del Genio, Dottore in Fisica, Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania, Dottore onorario in Scienze della Università di Cambridge, Dottore onorario in Filosofia della Università di Stockholm, Dottore onorario in Fisica della *Clark University* di Worcester (Mass.), Professore di Fisica matematica, incaricato di Meccanica superiore, Direttore del Seminario Matematico e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Roma, Professore d'un Corso d'analisi all'Università di Stockholm (1906), *Professeur agrégé à la Sorbonne* (1912), *Louis Clark Vanuxem lecturer* (1912) all'Università di Princeton N. J., uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale della Società degli Spettroscopisti italiani, Membro straniero della Società Reale di Londra, Socio corrispondente nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze di Parigi, Membro straniero nella Classe di Matematica pura della Reale Accademia Svedese delle scienze, Membro onorario straniero della Società Reale di Edimburgo, Membro straniero dell'Accademia nazionale delle Scienze (Stati Uniti d'America, Washington), Membro straniero della *American Philosophical Society for Promoting Useful Knowledge* di Philadelphia (Pa), Membro corrispondente dell'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietrogrado, Membro onorario dell'Accademia Rumena di Bucarest, Membre du Bureau della Società matematica di Francia, Membro onorario della Società Matematica di Londra, Membro onorario della Società matematica di Kharkow, Membro onorario della Società matematica di Calcutta, Membro onorario della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux, Membro corrispondente della Società Scientifica di Buenos Aires, Membro onorario dell'*Harvard Mathematical Club* in Cambridge (Mass.), Vice-Presidente del R. Comitato Talassografico italiano, Presidente della Commissione tecnica per gl'Istituti di Previdenza, ecc., ☼, ✠, ♔. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano, ✠, ♔, ☼. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*
13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi superiore nella R. Università di Pisa e incaricato di Analisi infinitesimale, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei e Presidente della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti, Socio ordinario non residente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli nella Sezione di Scienze matematiche, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti degli Zelanti di Acireale, Membro del Consiglio Direttivo del Circolo matematico di Palermo, Socio della Società italiana per il progresso delle Scienze (Roma), della R. Società delle Scienze di Gottinga, Membro straniero della *London mathemat. Society*, Dottore onorario delle Università di Christiania e di Glasgow, Comm. ✻, Gr. Uff. ✠, ✠. — *Via S. Martino, 32. Pisa.*
13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio Superiore di Sanità, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Membro della Società per la Medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di Medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New-York, Socio onorario della *Royal Microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di Medicina del Belgio, Membro onorario della Società Freniatrica italiana e dell'Associazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio Agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Membro effettivo della Società Italiana d'Igiene e dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro onorario dell'Uni-

versità di Dublino, Socio corrispondente della Società Medica di Batavia, Membro straniero dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro onorario dell'Imperiale Società degli alienisti e neurologi di Kazan, Socio emerito della R. Accademia Medico-Chirurgica di Napoli, Socio corrispondente dell'Imp. Accademia delle Scienze di Vienna, Socio onorario della R. Società dei Medici in Vienna, Comm. ✻ ✠, Cav. ✠.
13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Righi (Augusto), Dottore, Senatore del Regno, Professore ordinario di Fisica, Incaricato dell'insegnamento della Fisica per i Medici, Farmacisti e Veterinari nella R. Università di Bologna, Membro (Benedettino) della Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia di Padova, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Accademia di Scienze naturali ed economiche di Palermo, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro della Società degli Spettroscopisti Italiani, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Dottore in Filosofia *honoris causa* dell'Università di Gottinga, di Erlangen, Membro corrispondente della I. Accademia delle Scienze di Petrogrado, di Lund e della Società Reale delle Scienze di Upsala, Membro onorario della *Philosophical Society* di Cambridge, della Società Reale di Edinburgo, della *Royal Institution* della Gran Bretagna, della Società Antonio Alzate del Messico, della Società di Scienze naturali di Mosca, della Società di Fisica di Ginevra, Uno dei 12 Soci onorari della Società Fisica di Londra, Membro straniero della R. Società delle Scienze di Gottinga, Comm. ✻, Gr. Uff. ✠, ✠. — *Bologna, Via Irnerio, 46.*
24 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

Taramelli (Torquato), Dottore, Professore ordinario di Geologia e Incaricato di Paleontologia nella R. Università di Pavia, Membro del R. Comitato Geologico e del R. Consiglio di Meteorologia e Geodinamica, Socio ordinario del Comizio Agrario di Pavia, Membro effettivo del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio degli Atenei di Brescia e Bergamo, delle Accademie di Udine, di Verona e di Spoleto, della Società Agraria Istriana, della Società dei Naturalisti di Modena, della R. Accademia dei Georgofili di Firenze, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia delle Scienze della Società Reale di Napoli, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, dell'I. R. Accademia delle Scienze di Rovereto, Socio onorario delle Società Alpine di Udine e di Trento, dell'I. R. Istituto geologico di Vienna, della Società Reale delle Scienze del Belgio, della Società Elvetica di Scienze naturali, della Società di Scienze naturali di Filadelfia, ✻, Comm. ✠, Cav. ✠. — *Pavia, Via Volta, 24.*
24 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

Bertini (Eugenio), Dottore, Preside della Facoltà di Scienze fisiche e matematiche e Professore ordinario di Geometria superiore nella R. Università di Pisa, Professore onorario dell'Università di Pavia, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro effettivo del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Lucca, ✻, ⚭. — *Pisa, Lungarno Mediceo, Palazzo Schiff.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Pirotta (Romualdo), Dottore, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Professore ordinario di Botanica e Direttore del R. Istituto e Orto Botanico dell'Università di Roma, Comm. ⚭. — *Roma, Via Panisperna, 89.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Roiti (Antonio), Dottore, Professore emerito del R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei. — *Firenze, Via Gino Capponi, 3.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

ACCADEMICI STRANIERI

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga. — 10 gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena. — 13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Darboux (Giovanni Gastone), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Helmert (Federico Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia, Potsdam. — 14 giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Noether (Massimiliano), Prof. nell'Università di Erlangen. — 15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Baeyer (Adolfo v.), Professore nell'Università di München. — Id. id.

Thomson (John Joseph), Professore nell'Università di Cambridge. — Id. id.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di Heidelberg. — 25 giugno 1876.
Schwarz (Ermanno A.), Professore nella Università di Berlino. — 19 dicembre 1880.
Jordan (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 12 gennaio 1896.
Mittag-Leffler (Gustavo), Professore all'Università di Stoccolma. — 12 gennaio 1896.
Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 10 gennaio 1897.
Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 aprile 1898.
Veronese (Giuseppe), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — 17 aprile 1898.
Zeuthen (Gerolamo Giorgio), Professore nella Università di Copenhagen. — 14 giugno 1903.
Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 giugno 1903.
Enriques (Federico), Prof. nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell' Università di Cambridge. — 27 maggio 1894.
Celoria (Giovanni), Senatore del Regno, Direttore dell'Osservatorio di Milano. — 12 gennaio 1896.
Pizzetti (Paolo), Professore nella R. Università di Pisa. — 14 giugno 1903.
Cerulli (Vincenzo), Direttore dell' Osservatorio Collurania, Teramo. — 15 maggio 1910.
Boussinesq (Valentino), Membro dell' Istituto di Francia, Professore nella Università di Parigi. — Id. id.
Levi-Civita (Tullio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Blaserna (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 30 novembre 1873.
Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 15 maggio 1892.
Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella *Royal Institution* di Londra. — 3 febbraio 1895.

Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 giugno 1903.
Lorentz (Enrico), Professore dell'Università e Curatore del Laboratorio Teyler di Haarlem. — 14 giugno 1903.
Battelli (Angelo), Professore nell'Università di Pisa. — 15 maggio 1910.
Garbasso (Antonio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze. — Id. id.
Neumann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — Id. id.
Zeeman (P.), Professore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.
Cantone (Michele), Professore nell'Università di Napoli. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 gennaio 1881.
Körner (Guglielmo), Professore nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — 2 gennaio 1881.
Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino. — 24 gennaio 1897.
Ramsay (Guglielmo), Professore nell'Università di Londra. — Id. id.
Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 giugno 1903.
Ciamician (Giacomo), Senatore del Regno, Professore nell'Università di Bologna. — 14 giugno 1903.
Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 marzo 1905.
Arrhenius (Svante Augusto), Professore e Direttore dell' Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — 5 marzo 1905.
Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — 5 marzo 1905.
Haller (Albin), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — 15 maggio 1910.
Willstätter (Richard), Professore, Kaiser Wilhelm Institut, Berlin. — Id. id.
Engler (Carlo), Professore nella Scuola superiore tecnica di Karlsruhe. — Id. id.
Meyer (Ernesto v.), Professore nella R. Scuola superiore tecnica in Dresda. — Id. id.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Capellini (Giovanni), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Bologna. — 12 marzo 1882.
Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 febbraio 1885.
Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica, Londra. — 3 dicembre 1893.
Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di Gottinga. — Id. id.
Bassani (Francesco), Professore nella R. Univ. di Napoli. — 14 giugno 1903.
Issel (Arturo), Professore nella R. Università di Genova. — Id. id.
Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 marzo 1905.

Suess (Franc. Edoardo), Professore nella " Deutsche Technische Hochschule " di Praga. — 5 marzo 1905.
Haug (Emilio), Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.
Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.
Kilian (Carlo), Professore nell' Università di Grenoble. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Saccardo (Andrea), Professore nella R. Università di Padova. — 8 febbraio 1885.
Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.
Schwendener (Simone), Professore nell'Univ. di Berlino. — Id. id.
Wiesner (Giulio), Professore nell'Univ. di Vienna. — 14 giugno 1903.
Klebs (Giorgio), Professore nell'Università di Halle. — Id. id.
Belli (Saverio), Professore, Torino. — Id. id.
Baccarini (Pasquale), Professore nell' Istituto di Studi superiori in Firenze. — 15 maggio 1910.
Mangin (Luigi), Membro dell' Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di Parigi. — 1° dicembre 1889.
Waldeyer (Guglielmo), Professore nell'Università di Berlino. — Id. id.
Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 febbraio 1898.
Minot (Carlo Sedgwick), Professore nell' " Harvard Medical School " di Boston (Mass.) (S. U. A.). — 28 gennaio 1900.
Boulenger (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia naturale di Londra. — Id. id.
Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 giugno 1903.
Weismann (Augusto), Professore nell'Università di Freiburg i. Br. (Baden). — 5 marzo 1905.
Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — Id. id.
Dastre (Alberto Giulio), Membro dell' Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.
Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell' Università di Madrid. — 15 maggio 1910.
Metchnikoff (Elia), Vice-Direttore dell'Istituto Pasteur in Parigi. — Id. id.
Kossel (Albrecht), Professore nell'Università di Heidelberg. — Id. id.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Chironi (Dott. Giampietro), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Dottore aggregato della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Socio della R. Accademia delle Scienze di Napoli, della R. Accademia Peloritana di Messina, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio del Diritto comparato, dell'Accademia Americana di Scienze sociali e politiche di Filadelfia, della Società di studi legislativi di Parigi, Membro della Commissione Reale per l'ordinamento dell'istruzione superiore, Comm. ✻, Grand'Uff. ♔. — *Torino, Via Monte di Pietà, 26.*
Eletto alla carica il 18 maggio 1913 — 5 giugno 1913.

Segretario.

Stampini (Ettore), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore ordinario di Letteratura latina e Direttore della Biblioteca della Facoltà di Filosofia e Lettere nella R. Università di Torino, Socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia Peloritana di Messina, dell'Ateneo di Brescia, dell'Accademia Virgiliana di Scienze, Lettere ed Arti di Mantova e della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Direttore della Rivista di Filologia e d'Istruzione classica, già Membro del Consiglio e della Giunta Superiore della Istruz. Pubblica, Decorato della Medaglia del Merito Civile di 1ª Classe della Repubblica di S. Marino, Uff. ✻, Comm. ♔. — *Piazza Vittorio Emanuele I, 10.*
Eletto alla carica il 17 gennaio 1913 — 21 febbraio 1913.

ACCADEMICI RESIDENTI

Manno (Barone D. Antonio), Senatore del Regno, Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Bibliotecario e Conservatore del Medagliere di S. M. (Incaricato), Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ✠ e Gr. Cord. ♔, Balì Gr. Cr. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta, decorato di Ordini stranieri. — *Torino, Via Ospedale, 19.*
17 giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Carle (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, ✠, Comm. ✠, ♔. — *Torino, Via Principi d'Acaia, 5.*
7 dicembre 1879 - 1° gennaio 1880. — Pensionato 4 agosto 1892.

Boselli (Paolo), *predetto.*
15 gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore emerito nella R. Università di Torino, Prof. di Storia moderna nel R. Istituto di Studi Superiori in Firenze, Membro della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria e della R. Deputazione Toscana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e della Società Storica Friulana, Comm. ♔. — *Firenze, Via Lorenzo il Magnifico, 10.*
15 febbraio 1891 - 15 marzo 1891. — Pensionato 4 marzo 1900.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore di Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario dell'Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, dell'Accademia Reale di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, ✠, ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 16.*
8 gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 16 giugno 1907.

Chironi (Dott. Giampietro, *predetto*).
20 maggio 1900 - 31 maggio 1900. — Pensionato 20 maggio 1897.

De Sanctis (Gaetano), Dottore in Lettere, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino, Socio ordinario della Pontificia Accademia romana di Archeologia, ✠. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 44.*
21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. - Pensionato 15 febbraio 1912.

Ruffini (Francesco), Dottore in Leggi, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Professore di diritto ecclesiastico, Uff. ✱, Comm. ✠. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*
21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. — Pensionato 19 giugno 1913.

Stampini (Ettore), *predetto.*
20 maggio 1906 - 9 giugno 1906. — Pensionato 24 gennaio 1915.

D'Ercole (Pasquale), Dottore in Filosofia, Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di Torino, Membro della Società Filosofica di Berlino, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze morali e politiche di Napoli, Professore emerito, Uff. ✱, Gr. Uff. ✠. — *Corso Siccardi, 26.*
17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907.

Brondi (Vittorio), Dottore in Legge, Professore di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore di assistenza e beneficenza pubblica, Socio corrispondente onorario del Circolo di Studi sociali di Firenze, Uff. ✱, Comm. ✠. — *Torino, Via Montebello, 26.*
17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907.

Sforza (Conte Giovanni), Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia patria di Modena per la Sotto-Sezione di Massa e Carrara, Socio effettivo di quelle delle antiche Provincie e della Lombardia, di Parma e Piacenza, e della Toscana, Socio onorario della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Ateneo di Brescia, della Società Ligure di Storia patria, della R. Accademia Lucchese, Socio onorario della R. Accademia di Belle Arti di Carrara, Membro d'onore dell'*Académie Chablaisienne* di Thonon-les-Bains, Membro aggregato dell'*Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Savoie,* Socio della R. Commissione per i testi di lingua, Membro della Commissione Araldica Piemontese, della Società di Storia patria di Vignola, della Commissione municipale di Storia patria e belle arti della Mirandola, della Commissione Senese di Storia patria e della Società storica di Carpi, Corrispondente della R. Accademia Valdarnese del Poggio in Montevarchi, della Società Georgica di Treia, e della Colombaria di Firenze, e del Comitato nazionale per la Storia del Risorgimento, Consigliere del Comitato Piemontese per la Storia del Risorgimento italiano, Presidente onorario della R. Accademia dei Rinnovati di Massa, Soprintendente del R. Archivio di Stato di Torino, Gr. Uff. dell'Ordine del Medjidiè, Comm. ✱ e Comm. ✠. — *Via S. Dalmazzo, 24.*
17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907.

Einaudi (Luigi), *predetto.*
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Baudi di Vesme (Alessandro dei conti), Dottore in Legge, Soprintendente alle Gallerie ed ai Musei medioevali, ecc. del Piemonte e della Liguria, Direttore della R. Pinacoteca di Torino, Vice Presidente della Regia Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie. — *Via dei Mille, 54.*
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Schiaparelli (Ernesto), Dottore in lettere, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro onorario dell'Istituto Khediviale egiziano e della Società Asiatica di Francia, della Società di Archeologia biblica di Londra, Direttore del R. Museo di Antichità di Torino, Uff. ✻, Comm. ♔.
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Patetta (Federico), Dottore in legge, Professore di Storia del Diritto italiano nella R. Università di Torino, Socio effettivo della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Membro della R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, Socio corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per l'Umbria e della R. Deputazione di Storia patria per le provincie modenesi, Socio fondatore della Commissione Senese di Storia patria, Socio effettivo della Società piemontese di Archeologia e Belle Arti, Uff. ♔. — *Via S. Massimo, 44.*
3 maggio 1914 – 11 giugno 1914.

Vidari (Giovanni), Dottore in Lettere e Filosofia, Professore ordinario di Pedagogia e già Preside della Facoltà di Lettere e Filosofia della R. Università di Torino, Membro della Sezione di Giunta del Consiglio superiore per l'istruzione primaria, Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Presidente della Società Filosofica italiana, Direttore del Corso di Perfezionamento per i laureati delle Scuole normali, ✻, Uff. ♔. — *Via Valeggio, 15.*
31 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

Prato (Giuseppe), Dottore in Giurisprudenza, Professore ordinario di Economia politica e Scienza delle finanze nel R. Istituto superiore di Studi commerciali di Torino, Professore incaricato di Diritto industriale nella R. Università di Torino, Membro effettivo della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, Socio ordinario della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia Economico-Agraria dei Georgofili in Firenze, ♔. — *Via Bertola, 37.*
31 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Villari (S. E. Pasquale), Senatore del Regno, Socio dell'Istituto Storico di Roma, Presidente onorario del Consiglio degli Archivi, Professore emerito e Presidente onorario della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, della Pontaniana di Napoli, Presidente della R. Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio straordinario del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Baviera, di Vienna, Socio dell'Accademia di Berlino, dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Scienze morali e politiche), Dott. on. in Legge della Università di Edimburgo, Membro della *Royal Society of Literature* di Londra, di Halle, Dott. on. in Filosofia dell'Università di Budapest, dell'*American Academy of Arts and Sciences* di Boston, Professore emerito della R. Università di Pisa, Cav. dell'Ordine supremo della SS. Annunziata, Gr. Uffiz. ✻ e Gr. Cord. ♔, Cav. ✵, Cav. del Merito di Prussia, Membro del Consiglio dell'Ord. Civile di Savoia e del Consiglio dell'Ordine dei Ss. Maurizio e Lazzaro, ecc.
16 marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen e di Pietroburgo, Dottore *ad honorem* delle Università di Oxford, di Cracovia e di Atene, Uff. ✻, Comm. ♔, Cav. ✵. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*
20 marzo 1892 - 26 marzo 1892.

Savio (Sacerdote Fedele), Professore di Storia ecclesiastica nella Pontificia Università Gregoriana, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, Socio della Società Storica Lombarda. — *Roma, Via del Seminario, 120.*
20 maggio 1900 - 31 maggio 1900.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Dottore in Leggi, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Professore onorario della Università di Camerino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e delle RR. Accademie di Napoli, di Bologna, di Modena e di Messina, Socio onorario della R. Accademia di Palermo, ecc., Gr. Uffiz. ✻, ⚭. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Dottore in Lettere, Dottore *honoris causa* dell'Università di Giessen, Professore ordinario di Lingue e Letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico residente della Crusca, Socio ordinario non residente della Società Reale di Napoli, Socio ordinario della R. Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio Urbano della Società Colombaria, Socio onorario della R. Accademia di Padova, della Società Dantesca americana, della *New Language Association of America,* della *Société néophilologique* dell'Università di Pietroburgo, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, dell'Ateneo Veneto, della R. Accademia di Palermo, della R. Accademia delle Scienze di Berlino, della R. Società delle Scienze di Göttingen, dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles-Lettres), della Società Reale di Scienze e Lettere di Göteborg, dell'Accademia R. Lucchese, ☩, Uff. ✻, Gr. Uff. ⚭. — *Firenze, Piazza d'Azeglio, 13.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Guidi (Ignazio), Dottore, Senatore del Regno, Professore di Ebraico e di Lingue semitiche comparate nella R. Università di Roma, Socio e Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche della R. Accademia dei Lincei, ☩, Uff. ✻, ⚭, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Pigorini (Luigi), Senatore del Regno, Direttore dei Musei Preistorico e Etnografico, Professore nella R. Università di Roma, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei ☩, Comm. ✻, ⚭. — *Via del Collegio Romano, 26.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

D'Ovidio (Francesco), Senatore del Regno, Professore di Storia comparata delle letterature neo-latine nella R. Università di Napoli, Socio ordinario della Società Reale di Napoli, Socio nazionale e Vice-Presidente della R. Accademia dei Lincei, Accademico della Crusca, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Ateneo di Brescia, Socio straniero della *Dante Society* d'America, ☩, Comm. ✻, Comm. ⚭. — *Napoli, Largo Latilla, 6.*
31 gennaio 1915 – 14 febbraio 1915.

Fraccaroli (Giuseppe), Professore di letteratura greca nella R. Università di Pavia, Socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere, della R. Accademia Peloritana di Messina, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova e dell'Accademia di Agricoltura, Scienze, ecc. di Verona, ✠. — *Milano, Via Lazzaretto, 16.* 31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

ACCADEMICI STRANIERI

Meyer (Paolo), Membro dell'Istituto, Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes* (Parigi). — 4 febbraio 1883 - 15 febbraio 1883.

Maspero (Gastone), Membro dell'Istituto, Professore nel Collegio di Francia (Parigi). — 26 febbraio 1893 - 16 marzo 1893.

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — 31 gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.

Wundt (Guglielmo), Professore nell'Università di Lipsia. — 29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Duchesne (Luigi), Membro dell'Istituto di Francia, Direttore della Scuola Francese in Roma. — 12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nel Liceo Carlomagno di Parigi. — 15 marzo 1896.

Chiappelli (Alessandro), Senatore del Regno, Professore emerito della R. Università di Napoli. — 15 marzo 1896.

Masci (Filippo), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Napoli. — 14 giugno 1903.

Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 maggio 1908.

Gentile (Giovanni), Prof. nella R. Università di Pisa. — 17 maggio 1914.

Martinetti (Pietro). Prof. nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — Id. id.

Bergson (Enrico Luigi), Membro dell'Istituto di Francia. — Id. id.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 marzo 1886.

Gabba (Carlo Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Univ. di Pisa. — 3 marzo 1889.

Buonamici (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Pisa. — 16 marzo 1890.

Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Pavia. — 21 giugno 1903.

Toniolo (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Pisa. — 10 giugno 1906.

Brandileone (Francesco), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.

Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.

Fadda (Carlo), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.

Filomusi-Guelfi (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.

Polacco (Vittorio), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — Id. id.

Stoppato (Alessandro), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.

Simoncelli (Vincenzo), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.

Iannaccone (Pasquale), Prof. nella R. Univ. di Padova. — 17 maggio 1914.

Montalcini (Camillo), Prof., Segretario generale degli uffizi amministrativi della Camera dei Deputati. — Id. id.

Sezione di Scienze Storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 marzo 1886.

Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 febbraio 1893.

Bryce (Giacomo), Londra. — 15 marzo 1896.

Venturi (Adolfo), Professore nella R. Università di Roma. — 31 maggio 1908.

Luzio (Alessandro), Direttore del R. Archivio di Stato in Mantova. — 31 maggio 1908.

Davidsohn (Roberto), Socio della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia della Crusca. — 17 maggio 1914.

Meyer (Edoardo), Prof. nell'Università di Berlino. — Id. id.

Lippi (Silvio), Direttore dell'Archivio di Stato di Cagliari. — Id. id.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milano. — 14 marzo 1886.

Barnabei (Felice), Roma. — 28 aprile 1895.

Orsi (Paolo), Professore, Direttore del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 maggio 1908.

Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Geografia.

Dalla Vedova (Giuseppe), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 28 aprile 1895.

Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Univ. di Torino. — 21 giugno 1903.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Marre (Aristide), Vaucresson (Francia). — 1° febbraio 1885.

Salvioni (Carlo), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 maggio 1908.

Parodi (Ernesto Giacomo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.

Schiaparelli (Celestino), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Senatore del Regno, Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 marzo 1890.

Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.

Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio delle Querce in Firenze. — Id. id.

Biadego (Giuseppe), Bibliotecario della Biblioteca Civica di Verona. — Id. id.

Cian (Vittorio), Professore nella R. Università di Torino. — Id. id.

Vitelli (Gerolamo), Professore emerito nel R. Istituto di Studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — 31 maggio 1908.

Flamini (Francesco), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Gorra (Egidio), Professore nella R. Università di Torino. — Id. id.

Sabbadini (Remigio), Professore nella R. Accademia scientifico letteraria di Milano. — Id. id.

Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano — Id. id.

MUTAZIONI

avvenute nel Corpo Accademico dal 31 Dicembre 1914 al 31 Dicembre 1915.

ELEZIONI

SOCI

Ruffini (Francesco) . **Sforza** (Giovanni) . . **Patetta** (Federico) . } Eletti nell'adunanza del 17 gennaio 1915 della Classe di scienze morali, storiche e filologiche per comporre la Giunta per il premio Pollini.

Ruffini (Francesco), eletto nell'adunanza del 17 gennaio 1915 nella Commissione del premio Gautieri per la Letteratura in sostituzione del Prof. Renier.

Stampini (Ettore), eletto a Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 17 gennaio 1915 e approvata la elezione con R. Decreto 21 febbraio 1915.

Panetti (Modesto), Professore nel R. Politecnico di Torino, eletto Socio nazionale residente nell'adunanza del 24 gennaio 1915 della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, e approvata la elezione con R. Decreto del 14 febbraio 1915.

Righi (Augusto), Professore nella R. Università di Bologna.
Taramelli (Torquato), " " " di Pavia.
Bertini (Eugenio), " " " di Pisa
Pirotta (Romualdo), " " " di Roma.
Roiti (Antonio), Professore emerito del R. Istituto di Studi Superiori di Firenze.

Eletti Soci nazionali non residenti nell'adunanza del 24 gennaio 1915 della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, e approvata la elezione con R. Decreto 14 febbraio 1915.

Vidari (Giovanni), Professore nella R. Università di Torino.
Prato (Giuseppe), Professore nella R. Scuola superiore di commercio di Torino.

Eletti Soci nazionali residenti nell'adunanza del 31 gennaio 1915 della Classe di scienze morali, storiche e filologiche, e approvata la elezione con R. Decreto 14 febbraio 1915.

D'Ovidio (Francesco), Professore nella R. Università di Napoli.
Fraccaroli (Giuseppe), Professore nella R. Università di Pavia.

Eletti Soci nazionali non residenti nell'adunanza del 31 gennaio 1915 della Classe di scienze morali, storiche e filologiche, e approvata la elezione con R. Decreto 14 febbraio 1915.

MORTI

31 Dicembre 1914.

Poggi (Vittorio), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di archeologia ed etnografia).

8 Gennaio 1915.

Renier (Rodolfo), Socio nazionale residente e Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

21 Febbraio 1915.

Strüver (Giovanni), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di mineralogia, geologia e paleontologia).

5 Aprile 1915.

Fergola (Emanuele), Socio nazionale non residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

18 Maggio 1915.

Foerster (Wendelin), Socio straniero della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

... Agosto 1915.

Ehrlich (Paolo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di zoologia, anatomia e fisiologia comparata).

8 Settembre 1915.

Schiff (Ugo), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di chimica generale ed applicata).

... Settembre 1915.

Windelband (Guglielmo), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di scienze filologiche).

25 Novembre 1915.

Bréal (Michele Giulio Alfredo), Socio straniero della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

27 Dicembre 1915.

Novati (Francesco), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di filologia, storia letteraria e bibliografia).

. . . .

Amélineau (Emilio), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di linguistica e filologia orientale).

PUBBLICAZIONI PERIODICHE RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1915.

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano: e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

* **Alba**. Società di studi storici ed artistici. Alba Pompeia, rivista bimestrale, anno V, N. 5-6.

Albany. University of the State of New York. Bulletin, N. 591.

* **Albuquerque**. University of New Mexico. Bulletin: Geology Ser., vol. III, 2; — Chemistry Ser., vol. I, 2.

America. American Urological Association. Thirteenth Annual Meeting at Philadelphia, Penn. June, 18, 19 and 20, 1914. Transactions, vol. VIII.

* **Amsterdam**. K. Akademie van Wettenschappen. Verhandelingen Afd. Natuurkunde, 2e Sect., Dl. XVIII, 1-3; Verhandelingen Afd. Letterkunde, N. R., Dl. XIV, 4-5. — Zittingsverlagen Afd. Natuurkunde, année 1913-14, vol. XXII, 1, 2. — Proceedings (Section of Science), vol. XVI, 1, 2. — Verslagen en Mededeelingen Afd. Letterkunde, 4e Reecks, Dl. XI. — Jaarboeck, 1913. — Prijsvers Novem Carmina.

* **Baltimore**. Johns Hopkins University. Circular, 1913, N. 10; 1914, 1-10; 1915, 1-5. — Studies historical and political Science, Ser. XXXII, N. 2 3; XXXIII, 2-3. — American Journal of Philol., vol. XXXV, 1-4; XXXVI, 1. — American Journal of Mathem., vol. XXXVI, N. 2-4; XXXVII, 1, 2.

— Peabody Institute. Annual Report (47°-48°), May 31, 1914; May, 31, 1915.

* **Barcelona**. Real Academia de Ciencias y Artes. Nómina del Personal Académico. 1914-1915. — Memorias, 3a época, vol. XI, 12-23; Boletin, 3a época, vol. III, 6. — Fiestas científicas celebradas con motivo del CL aniversario de su fundación, 1 vol. 4°.

* **Basel**. Naturforschenden Gesellschaft Verhandlungen. Bd. XXXV.

— Catalogue des écrits académiques suisses, 1913-1914.

Basilea. Università. 77 Tesi di laurea dell'anno scolastico 1913-1914.

* **Bassano**. Museo Civico. Bollettino, anno XI, 1914, N. 3, 4.

* **Batavia**. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Notulen, Dl. LII, 1914, 1-4; LIII, 1-2. — Tijdschrift, Dl. LVI, 3-6; LVII, 1-2. — Oudheidkundige dienst in Nederlandisch-Indië, 1914

Tweede-Vierde Kwartaal; 1915 Eerste-Tweede. — Verhandelingen, Dl. LXI, Stuk. 1-4. — Repporten van den Oudheidkundigen dienst in Nederlandisch-Indië, 1913; 1914.

* **Batavia**. Royal Magnetical and Meteorol. Observatory, vol. XXXIV, 1911.

* **Bergen**. Bergens Museums. Aarbok, 1914-1915, 1-3 Hefte; 1915-1916, 1. — Aarsberetning for 1913 og 1ste halvaar, 1914; 1914-1915. — Skriften, Ny Raek, Bd. I, 2. — Sars (G. O.). An account of the Crustacea of Norway, vol. VI, Copepoda prs. 5-10.

* **Berkeley**. University of California. Chronicle, an Official record, vol. XV, 4; XVI, 1-4; XVII, 1-2. — Memoirs, vol. IV, N. 1 (History). — Agricultural sciences, vol. I, 6-8; II, 1, 3. — American Archaeology and Ethnology, vol. X, 6, 7; XI, 2-4; Index, vol. X. — Botany, vol. IV, 1-4 and Index, V, 6; VI, 5. — Economics, Index, vol. III; IV, 1. — Geology, vol. VII, 21-25 Index; vol. VIII, 3-6, 8-21 (Department of Geology-Bulletin). — Modern Philology, vol. III, 2; IV, 1. — Pathology, vol. II, 15, 16. — Physiology, vol. IV, 19-21, Index. — Zoology, vol. IX, Index; XI, 9-15; XII, 1-5-12; XIII, 1-10; XIV, 1.

* **Berlin**. K. Preussischen Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte, 1914.

— Zentralbureau der Internationalen Erdmessung. Veröffentlichungen, N. 27.

* **Bern**. Naturforschenden Gesellschaft. Mitteilungen aus dem Jahre 1913.

* **Bologna**. R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Classe di Scienze fisiche. Rendiconto, N. ser., vol. XVII (1912-1913); XVIII, 1913-14. — Memorie, Ser. VI, t. X (1912-1913); Ser. VII, t. I (1913-1914). — Indice generale dei dieci tomi componenti la Serie sesta.

* — Società Medico-Chirurgica. Bollettino delle scienze mediche, 1914, Ser. IX, vol. II, 12; III, 1-12.

* — Biblioteca Comunale. Bullettino, L'Archiginnasio. An. IX, 6; X, 1-6.

* **Bordeaux**. Faculté des Lettres et des Universités du Midi. Annales. Revue des études anciennes, t. XVI, 4; XVII, 1-4. — Bulletin italien, t. XIV, 4; XV, 1-4. — Bulletin hispanique, t. XVII, 1-4.

* **Boston**. American Academy of Arts and Sciences. Proceedings, vol. L, 1-3.

* — Boston Society of Natural History. Memoirs, vol. VIII, 1. — Proceedings, vol. XXXIV, 13; XXXV, 1. — Occasional Paper, VII.

* — American Philological Association. Transactions and Proceedings, vol. XLIV, 1913.

* **Brescia**. Ateneo. Commentari per l'anno 1914.

* **Brooklyn**. Museum (The) of the Brooklyn Institute of Arts and Sciences. Science Bulletin, vol. II, n. 3-4.

* **Bucarest**. Academia Românâ. Bulletin de la Section scientifique, II^me^ an. (1913-14), N. 4-10; III^e^ (1914-15), 1-10; IV^e^ (1915-16) 1-4. — Bulletin de la Section historique, an. 1912-1913, N. 1-4; 1914, 1-4; 1915, 1.

* **Bucuresti**. Societătii Române de Stiinte. Buletinul, An. XXIII, No. 3 si 6; XXIV, 1-4.

Buenos Aires. Museo Nacional de historia natural. Anales, t. XXVI: Indices de los tomos, I-XX.

Buenos Aires. Museo social Argentino. Boletin mensual, An. IV, N. 39-40. — Boletin bibliográfico mensual. An. I, N. 3-4.
— Ministerio de Agricultura de la Republica Argentina. Boletin mensual de estadística agrícola, An. XVII, N. 5, 6.
— Ville de Buenos Aires. Bulletin mensuel de Statistique Municipale, XXVIII^{me} ann.; 1914, 9-12; XXIX^{e} ann.; 1915, 1-8. — Annuaire Statistique, An. XXIII, 1913.
* — Sociedad Química Argentina. Anales, t. II, 8; III, 9-10.
— Revista Centro Estudiantes de Ingenieria, año XV (1914), N. 145-150.
* **Calcutta.** Geological Survey of India. Records, vol. XLIV, p. 2-4; XLV, 1-3; XLVI, 1. — Memoirs, vol. XLI, 2; XLII, 1.
— Board of scientific advice for India. Annual Report for the year 1913-1914, 1 vol. 8°.
* **Cambridge.** Cambridge Philosophical Society. Proceedings, vol. XVIII. Parts 2-3 — Transactions, vol. XXII, N. 6-7.
* — **Cambridge** (U. S. A.). Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Memoirs, vol. XLVI, 1.
* **Cape-Town.** Royal Society of South-Africa. Transactions, vol. IV, P. 3; V, P. 1.
* **Catania.** Accademia Gioenia di scienze naturali. Atti, Ser. 5^{a}, vol. VI-VIII. — Bollettino delle Sedute, novembre 1914-giugno 1915, n. 33-37.
* — Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie, Ser. 2^{a}, vol. III, 11-12; IV, 1-10.
* **Chicago.** Field Museum of Natural History. Report Ser., vol. IV, 4, 5. — Anthropological Ser., vol. XIII, 2; XIV, 1; XV, 1. — Botanical Ser., vol. II, 9, 10. — Geological Ser., vol. V, 1. — Ornithological Ser., vol. I, 8, 9. — Zoological Ser., vol. X, 10-13.
— Wilson Ornithological Club. Wilson Bulletin, Old. Ser., vol. XXVI, n. 4; XXVII, 1-3.
— John Crerar Library. 20 Annual Report, for the Year 1914.
* **Cincinnati.** Lloyd Library. Bibliographical Contribution, vol. II, n. 1, 4, 1914; vol. II, n. 5-6, 1915.
Coimbra. Academia de Sciencias de Portugal. Estatutos e legislação. — Trabalhos, 1^{a} Ser., t. II, 2^{a} p.
* **Copenhague.** Académie R. des Sciences et des Lettres. Mémoires, Section des Sciences, 7^{e} Sér., t. XI, 4-6; XII, 1-6; 8^{e} Sér., t. I, N. 1. — Section des Lettres, 7^{e} Sér., t. II, N. 4; t. III, 1. — Bulletin (Oversigt), 1914, 3-6; 1915, 1-4.
* **Dublin.** Royal Dublin Society. Scientific Proceedings, vol. XIV, N. 17-23. — Economic Proceedings, vol. II, N. 7-8.
* **Edinburgh.** Royal Society. Proceedings, vol. XXXIV, P. III; XXXV, 1-2. — Transactions, vol. L, Part. II, 1913-14.
* — Royal Physical Society. Proceedings, vol. XIX, N. 7.
* **Erlangen.** Universitäts-Bibliothek, 366 Tesi di laurea dell'anno scolastico, 1913-14.
* **Firenze.** R. Accademia della Crusca. Atti, an. 1913-1914.

* **Firenze**. R. Accademia economico-agraria dei Georgofili. Atti, 5ª Ser., vol. XII, disp. 1-4.

* — R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento. Pubblicazioni: Osservazioni astronomiche fatte all'equatoriale di Arcetri nel 1914, fasc. 33.

— Osservatorio del Collegio alla Querce. Pubblicazioni, Ser. in 4°, N. 24, disp. 1-2.

Formosa. Government of Formosa. Icones plantarum formosanarum nec non et Contributiones ad Floram Formosanam, vol. IV, 1914.

Fukuoka (Japon). Medizinische Fakultät der K. Universität Kyushu. Mitteilungen, Bd. I, 1914.

* **Genève**. Société de Physique et d'Histoire naturelle. Compte rendu des Séances, XXXI, 1914. — Mémoires, vol. XXXVIII, 2-3.

Genova. Museo civico di Storia naturale. Annali, Serie 3ª, vol. VI.

* — Società Ligure di Storia patria. Atti, vol. XLV; XLVI, fasc. 2. — Correzioni critiche di alcune date nel Regesto del Codice Pelavicino per il socio U. Mazzini.

* — Società di letture e conversazioni scientifiche. Rivista ligure di scienze, lettere ed arti, an. XLI, 4; XLII, 1-6.

* — R. Scuola Navale superiore. Relazione del Consiglio Direttivo 1913-14.

* **Göttingen**. K. Gesellschaft der Wissenschaften. Philologisch-historische Klasse. Abhandlungen, N. F. Bd. XIII, 1.

* **Granville** (Ohio). Denison University. Scientific Laboratories. Bulletin, vol. XVII, art. 8-14.

* **Harlem**. Société hollandaise des sciences. Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, Sér. III, B., t. II, 2.

* — Fondation de P. Teyler van der Hulst. Archives du Musée Teyler, Serie 3ª, vol. II. — Verhandelingen rakende den Naturlijken en Geopenbaarden Godsdienstuitgegeven door Teyler's. Godgeleerd Genootschap, N. S. Dl. 19.

* **Hobart**. Royal Society of Tasmania. Papers and Proceeding for the Year 1914.

* **Jena**. Medizinisch- Naturwissenschaftliche Gesellschaft. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, N. F., Bd. XLVI, 2.

* **Jowa City**. University Bulletin from the Laboratories of Natural history, vol. VII, 1.

* **Kansas**. Kansas Academy of science. Transactions, vol. XXVI.

Kodaikánal. Observatory. Bulletin, XLIV-XLVIII.

* **Kristiania**. Videnskapsselskapet. Skrifter, 1913, I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse, Bd. I, II. — Forhandlinger Aar 1913.

* **Kyōto**. College of Science Kyōto Imperial University. Memoirs, vol. I, 1-5.

* **La Plata**. Universidad Nacional. Contribución al Estudio de las ciencias Físicas, Matemáticas y Astronómicas. Annuario, 1914, 1915. — Ser. Matemática, vol. I, entrega 1-2. — Ser. Física, vol. I, entrega 1-4. — Ser. Técnica, vol. I, entrega 1. — Memoria, N. 3 (1913).

* **Lawrance**. University of Kansas. Science Bulletin, vol. VII, N. 1-17; vol. VIII, 1-10.

Lima. Cuerpo de Ingenieros de Minas del Perù. Boletin, N. 79-81.

Lisboa. Instituto de Anatomia (Faculdade de Medicina da Universidad de). Archivo de Anatomia e Anthropologia, N. 3 (1914, vol. I).

* — Comissão do serviço geologico de Portugal. Comunicaões, t. X.

* **London**. Royal Society. Year Book, 1915. Proceedings, Ser. A, vol. XCI, 625-634; XCII, 635-636; Ser. B, vol. LXXXVIII, 604-608; LXXXIX, 609. — Transactions, Ser. A, vol. *214*, *215*, N. 523-237; *216*, 538-540; Ser. B, vol. *205*, *206*, N. 325-334; *207*, 335-338.

* — British Association for the advancement of science. Report for 1914. Australia.

* — Royal Astronomical Society. Monthly Notices, vol. LXXV, n. 2-9. — Memoirs, vol. LX, p. 5ª-6ª. — General Index, vol. XXXIX, t. LX of the Memoirs.

* — Geological Society. Quarterly Journal, vol. LXX, p. 4; LXXI, p. 1.

* — Royal Society of Literature. Report and List of Fellows, 1915. — The Academie Committee Addresses of reception. — Transactions, 2ª Ser., vol. XXXIII, p. 2-4.

* — London Mathematical Society. Proceedings, Ser. 2ª, vol. XIV, 2-7.

* — R. Microscopical Society. Journal 1914, 6; 1915, 1-5.

* — Royal Physical Society. Proceedings, vol. XIX, 8.

* — Zoological Society of London. Proceedings, 1914, p. 3-4; 1915, 1-3. — Transactions, vol. XX, p. 11-15.

* — British Museum (Natural History). Catalogue of Ungulate Mammals, vol. III e IV. — Flora of Jamaica, vol. III. — Catalogue of Fresh-water Fishes of Africa. vol. III. — Revision of the Ichneumonidae, part. 4ª; Syrphidae ot the Ethiopian Region. — Catalogue of Lepidoptera Phalænæ, Supplement, vol. I (Text and Atlas). Guide to fossil Remain of Man. Instructions for Collectors, n. 12. Worms.

* — British Museum (Natural History). British Antartic " Terra Nova " Expedition 1910. Natural history Report, 5 parts, Zoology, vol. I, n. 1-3; II, 2-4, Fishes; vol. II, n. 1, Collecting Stations. — Geology, vol. I, n. 1. Antartic fossil plants.

* **Lucca**. Reale Accademia Lucchese di scienze, lettere ed arti. Atti, XXXIV. — Memorie e documenti per servire alla storia di Lucca, t. XIV, p. 1-2.

* **Lugano**. Società Ticinese di scienze natur. Bollett. IX e X, an. 1913-14.

* **Lund**. Universitatis Lundensis Acta. Nova series. Årsskrift. — Andra Afdelningen-Medicin samt Matematiska och Naturvetenskapliga ämnen, IX, 1913. — Första Afdelningen Teologi, Juridik och Humaniska ämnen, IX. 1913.

* **Madison**. Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters. Transactions, vol. XVII, P. I, n. 1-6; II, 1-6.

Madras. Kodaikánal and Madras Observatories. Annual Report of the Director for 1914.

* **Madrid**. Real Academia de la Historia, t. LXVI, 1-6; quad. 1; LXVII, 1-6.

* — Sociedad Matemática Española. Revista, an. 4°, n. 31–40.

México. Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya. Anuario para el año de 1915.

* **Milano**. R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti, vol. XLVII, 17-20; XLVIII, 1-17. — *Memorie*. Classe di scienze matematiche e naturali, vol. XXI, fasc. 7; Classe di lettere e scienze morali e storiche, vol. XXIII, fasc. 2-5.

* — Società Italiana di Scienze naturali e Museo Civico di Storia naturale. Atti, vol. LIII, fasc. 3-4; LIV, 1. — Memorie, vol. VIII, fasc. 1, parte 1ª.

— R. Osservatorio Astronomico di Brera. Pubblicazioni, n. LII (La Cometa, 1909, I). — Articoli generali del Calendario ed effemeridi del sole e della luna per l'orizzonte di Milano per l'anno bisestile 1916.

— R. Commissione Geodetica italiana. Prima campagna con la bilancia di Eötvös nei dintorni di Padova (Mandria-Montemerlo). — Relazione delle osservazioni gravimetriche compiute nell'estate 1913 col bipendolo Mioni. — La latitudine astronomica dell'Osservatorio Vesuviano determinata nel 1914. — R. Commissione Geodetica italiana. Determinazioni di latitudine astronomica e di gravità relativa eseguite in Umbria e in Toscana nel 1913.

— Università commerciale Luigi Bocconi. Annuario per l'anno scolastico 1913-1914, an. XII.

— (città). Bollettino municipale mensile di cronaca amministrativa e di statistica, an. XXX, 1914, novembre-dicembre; 1915, an. XXXI, gennaio-dicembre.

* **Minneapolis**. University of Minnesota. Agricultural Experiment station. — Bulletin, 122, 130, 132, 134-141, 143-147 (University Farm., St.-Paul). — Minnesota Plant Studies. V Guide to the-Autumn Flowers of Minnesota Field und Garden. — Studies in the Physical sciences and Mathematics, n. 2. — Contribution from the Department of Anatomy, vol. I (1909-1911); II (1912-1913). — Studies in Language and Literature, n. 1. — Studies in Engineering, n. 1. — Studies in the Social Sciences, n. 4. — Courrent Problems, n. 2-4. — Minnesota Geological Survey. Bulletin, n. 11-12. — Minnesota School of Mines-Experiment Station. Bulletin, 1, 3.

— Geological and Natural History Survey of Minnesota. Minnesota Botanical Studies, vol. IV, parte 3ª.

* **Modena**. Società dei Naturalisti e Matematici. Atti, ser. 5ª, vol. I.

Monaco. Institut Océanographique. Bulletin, nᵒˢ 298-300. Table des matières par ordre alphabétique, nᵒˢ 279-313. — Table des matières, n. 301-313.

* **Moncalieri**. Osservatorio del Real Collegio Carlo Alberto. Osservazioni meteorologiche, 1914 dicembre; 1915 gennaio-aprile. — Osservazioni sismiche, 1914, n. 9; 1915, 1-2.

* **Montecassino** (Badia di). Codicum Casinensium manuscriptorum Catalogus cura et studio Monachorum S. Benedicti Archicoenobii Montis Casini, vol. I, pars 1, Cod. 1-100.

Montevideo. Instituto Nacional Físico-Climatológico. Boletin mensual, año 1913, vol. XI, n. 125-132; 1914, XII, 133-144 (in un fasc.). — Sinopsis Meteorológica del año 1913. — Synopsis Météorologique des années 1901–1913.

* **Montpellier.** Académie des Sciences et Lettres. Bulletin mensuel, 1914, 8-12; 1915, 1–12.

* **Napoli.** Società Reale. Annuario 1915. — Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti: Rendiconto delle Tornate e dei Lavori, N. S., an. XXVIII. Atti, N. S., vol. III. — Accademia delle scienze fisiche e matematiche: Rendiconto, Ser. 3ª, vol. XX, fasc. 7-12; XXI, 1-6. — Accademia di scienze morali e politiche: Rendiconto, an. LIII, 1914. Atti, vol. XXIII.

* — R. Istituto d'Incoraggiamento. Atti, Ser. 6ª, 1914.

* — Accademia Pontaniana. Atti, vol. XLIV.

* — R. Osservatorio di Capodimonte. Memorie, 1. Contributi geofisici, 1. — Contributi astronomici, 7-13.

* — Società di Naturalisti. Bollettino, vol. XXVII (an. XXVIII).

* **New-York.** American Mathematical Society. List of Officers and Members, 1915. — Bulletin, vol. XXI, 4-10; XXII, 1-3. — Transactions, vol. XVI, 1-4.

* — New York Public Library. Astor Lenox and Tilden Foundation. Bulletin, vol. XVIII, 11-12; XIX, 1-12.

* — New York Academy of Sciences. Annals, vol. XXIII, pp. 145-353.

— The Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching. The case method in American Law Schools. Bulletin, n. VIII, 1914. — Ninth Annual Report of the President and the Treasurer, 1914.

Ottawa. Royal Society of Canada. Proceedings and Transactions, 3ª Ser., vol. VII, VIII, IX.

* — Canada. Department of Mines. Geological Survey. Museum Bulletin, 5, 7, 12, 17, 20, 21, 22, 37, 43. — Mémoires, n. 1, 2, 5, 19, 21, 23, 28, 29-E, 33, 34, 52; n. 1362. Moose Mountain, Alta; n. 1393. La Telkewa, C. B. — Rapport annuel sur les industries minérales du Canada pour l'année 1905. — Rapport sur une partie des Districts miniers de Conrad et Whitehorse, Yukon. — Manuel du Prospecteur, n. 1. — Rapport sur la Géologie d'une partie de l'Est d'Ontario. — Cartes du Rapport, Moose Mountain. Rapport préliminaire district Similkameen. — Summary Report... for the Calendar Year, 1914. — Rapport sur le Terrain Houiller de Preton, N. E.

— Ministère des Mines–Division des Mines. Bulletin, n. 2–3. — Catalogue des publications en français de la Commission Géologique et de la Division des Mines au 1er juillet 1914. — Mica, gisements, exploitation et emplois, 2ème édition. — Summary Report of the Geological Survey Department of Mines for the Calendar Year 1913. — Gypsum in Canada, its occurrence, exploitation und Technology. — Recherches sur les charbons du Canada, vol. I. II, III. — Report on the Building and Ornamental Stones of Canada, vol. III. — The physical properties of the metal Cobalt, part II. — Economic mineral and mining industries

of Canada. — Pyrites au Canada. — Sables ferrugineux magnétiques. — Les gisements de fer d'Austin Brook au Nouveau-Brunswick. — Products and By-Products of Coal. — Electro-Plating with Cobalt, part III. — Rapport sommaire de 1913 (n. 266).

* **Padova.** R. Università degli Studi. Annuario per l'anno accadem. 1914-15.

* — R. Accademia di scienze, lettere ed arti. Atti e Memorie, nuova ser., vol. XXX, XXXI.

* — Accademia scientifica veneto-trentina-istriana. Atti, 3ª ser., vol. VII.

* — Museo Civico. Bollettino, an. XVII, 1912; an. XVI, 1913.

* **Palermo.** R. Accademia Peloritana. Atti, vol. XXVI.

* — Circolo Matematico. Rendiconti, t. XXXVIII, 2, 3; XXXIX, 1-3.

Paris. Ministère de l'Instruction Publique. Inventaire-sommaire des Archives départementales: *Vaucluse*, Sér. C et D. — Répertoire numérique: *Ariège*, Sér. E et Sér. V; *Creuse*, Sér. L; *Gironde* (6-B et 7-B), Sér. N; *Haute-Garonne*, Sér. U; *Hautes Pyrénées*, Sér. I; *Loire Inférieure*, Sér. V; *Lozère*, Sér. U et V; *Manche*, sér. Y.

* — Institut de France. Séance publique annuelle des cinq Académies du lundi 26 octobre 1914 présidée par M. Paul Appell. — Académie des Sciences: Procès-Verbaux des Séances de l'Académie tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois d'août 1835. Tome V.

* — Muséum National d'Histoire naturelle. Bulletin, an. 1914, n. 3-6.

* — Société Nationale des Antiquaires de France. Bulletin, 1914, 1er-4me trimestre; 1915, 1re.

* — Société de Géographie. La Géographie. Bullet., XXIX, n. 6; XXX, 1-6, 3.

* — Société Mathématique de France. Bulletin, t. XLII, 3-4; XLIII, 1-2. — Comptes rendus des Séances de l'année 1915.

* — Société Zoologique de France. Mémoires, an. 1913, t. XXVI.

* — École Polytechnique. Journal, 2e Sér., 18e cahier.

** — Bureau des longitudes. Annuaire 1915.

* **Perugia.** Università. Annali. Facoltà di Medicina, ser. 4ª, 1914, vol. VI, 2-3.

— R. Deputazione di Storia patria per l'Umbria. Bollettino, vol. XIX, P. 1ª; XX, 2, 3; XXI, 1-2.

* **Philadelphia.** Academy of Natural Sciences. Proceedings, vol. LXVI, p. 1-3: LXVII, 1.

* — American Philosophical Society. Proceedings, vol. LIII, 215-216.

* — Wagner Free Institute of Science. Annual Announcement, 1914-15. — Transactions, vol. VII, p. 3.

* **Pinerolo.** Biblioteca Municipale Alliaudi e Museo Civico. Bollettino annuale, an. 1914.

* **Pisa.** R. Università. Annuario per l'anno accademico 1911-1915.

* — Università toscane. Annali, t. XXXIII.

* — R. Scuola normale superiore. Annali: Filosofia e Filologia, vol. XXVI.

* — Società Toscana di scienze. Processi verbali, vol. XXIII, 3-5.

* **Portici.** R. Scuola Superiore di Agricoltura. Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale agraria, vol. IX.

* **Portland.** Portland Society of Natural History. Proceedings, vol. III, p. 1.

* **Porto**. Academia Polytecnica. Annaes scientificos, vol. IX, 3-4.

* **Prag**. Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Jahresbericht für das Jahr 1913. — Mathematisch- Naturwissenschaftliche Classe. Sitzungsberichte, 1913. — Classe für Philosophie, Geschichte u. Philologie. Sitzungsberichte, 1913.

Princeton. Princeton University Observatory, n. 3. A Study of the Orbits of Eclipsing binaries by Harlow Shapley. — Princeton, n. 1, published by the Observatory.

* **Pusa**. Agricultural Research Institut. Memoirs of the Department of Agriculture of India. Bacteriological Ser., vol. I, 3-4. — Botanical Ser., vol. VI, 8; vol. VII, 1-5, 8. — Chemical Ser., vol. IV, 1, 2, 3. — Report on the Progress of Agriculture in India, for 1913-14. — Report (Including the Report of the Imperial Cotton specialist), 1913-14.

* **Riga**. Naturforscher-Verein. Correspondenzblatt, LVII.

Rio de Janeiro. Annaes, 1909-1910, vol. XXXI, XXXII. tã-txa hu-ni-ku-ĩ a lingua dos Caxinauás do Rio Ibuaçu affluente do Muru (Prefeitura de Tarauacá) por J. Capistrano de Abreu. Rio de Janeiro, 1914, 1 vol,-8°. — Relatorio que ao Sr. Dr. Augusto Tavares de Lyra Ministro da Justiça e Negocios Interiores apresentou o Director Dr. Manoel Cicero Peregrino da Silva, 8°. — Relatorio que ao Sr. Dr. Esmeraldino Olimpio de Torres Bandeira Ministro da Justiça e Negocio Interior apresentou o Director Dr Manoel Cicero Peregrino da Silva.

* — Museu Nacional. Archivos, vol. XVI.

* — Observatorio Nacional. Anuario para o año de 1915 (an. XXXI).

* **Roma**. Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio. Statistica della emigrazione italiana per l'estero negli anni 1912 e 1913. — Movimento della popolazione secondo gli atti dello Stato civile nell'anno 1913.

* — Ministero di Grazia e Giustizia e dei Culti. Statistica Giudiziaria penale per l'anno 1911; 1 vol. 8°. — Atti della Commissione di statistica e legislazione. Relazioni e verbali delle discussioni della Sessione del gennaio 1914; 1 vol. 8°. — Statistica Giudiziaria civile e commerciale per l'anno 1910; 1 vol. 8°. — Statistica della criminalità per l'anno 1910. — Notizie complementari alla Statistica giudiziaria penale. 1 vol. 4°.

* — Ministero delle Finanze. Statistica del Commercio speciale di importazione e di esportazione, 1914 novembre-dicembre; 1915 gennaio-settembre. — Bollettino di legislazione e statistica doganale e commerciale, an. XXXI, 1914 giugno-dicembre; 1915 gennaio-ottobre. — Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1913, vol. II, p. 2ª, 3ª; 1914, p. 1ª. — Movimento della Navigazione del Regno d'Italia nell'anno 1914, vol. I; vol. II (Tavole riassuntive).

* — Ministero dell'Interno. ** Calendario generale del Regno d'Italia pel 1915. — Statistica dei Riformatorî, an. 1913. — Statistica delle carceri e delle Colonie per domiciliati coatti, an. 1913.

* — Senato del Regno. Biblioteca. Bollettino delle pubblicazioni di recente acquisto, 1914, 1-6.

Roma. Biblioteca centrale Nazionale "Vittorio Emanuele". Elenco delle pubblicazioni periodiche e straniere acquistate dalle Biblioteche pubbliche governative del Regno, an. 1913, Roma, 1915, 8°. — Bollettino delle opere moderne e straniere acquistate dalle Biblioteche pubbliche e governative del Regno d'Italia, an. 1914, Roma, 1915.

* — Biblioteca Vaticana. Studi e Testi, n. 25-28.

* — R. Ufficio Geologico. Carta geologica di Roma. — Catalogo della Biblioteca: 7° e 8°. Supplemento 1907-1912.

* — Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei. Atti, an. 1914-15, Sessioni 1ª-7ª (20 dicembre 1914, 20 giugno 1915). — Memorie, vol. XXXII.

* — R. Accademia dei Lincei. Annuario 1915. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali: Rendiconti, vol. XXIII, 1° e 2° semestre 1915. — Memorie, ser. 5ª, vol. X, 12-17; XI, 1-2. — Classe di scienze morali storiche e filologiche: Rendiconti, Memorie, Ser. 5ª, vol. XV, fasc. 1-2. — Notizie degli scavi vol. XI, 7-12; vol. XII, 1-6.

* — Istituto di Diritto Romano. Bullettino, an. XXVII, fasc. 1-4.

* — R. Comitato Geologico italiano. Bollettino, vol. XLIV, 2-4.

* — I. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana. Bull., vol. XXIX.

— Società degli Agricoltori italiani. Bollettino quindicinale, an. XX, 1-24.

* **Rovereto.** I. R. Accademia Roveretana degli Agiati, Atti, Ser. IV, vol. IV.

* **Saint-Louis, Mo.** Missouri Botanical Garden. Annals, vol. I, 4; II, 1, 2.

* — Washington University. Published Quarterly, vol. II, p. I; n. 1.

* **San Francisco.** California Academy of Sciences. Proceedings, Fourth ser., vol. II, p. 1; IV, 3-6; V, 1. — Proceedings Zoology, 3ª Ser., vol. IV. 4, 5.

* **Sendai.** Tōhoku Imperial University. The Science Reports: Second Series (Geology), vol. II, 1-2; III, 1; IV, 1. — Second Series (Mathematics, Physics, Chemistry), vol. III, 6; IV, 1-4.

* **Siena.** Università degli Studi. Annuario accademico, 1914-1915.

* — R. Archivio di Stato. Inventario del R. Archivio di Stato in Siena, parte seconda, Consiglio generale, Siena, 1915, 8°. — Libri dell'entrata e dell'uscita della Repubblica di Siena, detti del Camerlingo e dei quattro Provveditori della Biccherna. Libri primo e secondo. Siena, 1914, 1 vol. 8°.

* — Circolo Giuridico della R. Università. Studi Senesi, vol. XXX, 1-5; XXXI, 1-3.

* **Stockholm.** Académie Royale Suédoise des Sciences. Årsbok för År 1914. — Archiv för matematik, astronomi och fysik, Bd. IX, 3-4; X, 1-3. — Archiv för kemi, mineralogi och geologi, Bd. V, 3-6. — Archiv för botanik, Bd. XIII, 2-4; XIV, 1. — Archiv för zoologi, Bd. VIII, 2-4; IX, 1-2. — Meteorologiska iakttagelser i Sverige, (Observations météorologiques Suédoises, Bd. LIII, LIV, LV). — Meddelanden från K. Vetenskapsakad Nobelinstitut, Bd. III, 1-2. — Les Prix Nobel, 1913. — Iac. Berzelius Bref., I, 3; II. 1.

* — Bibliothèque Royale. Sveriges offentliga Bibliotek Stockolm, Uppsala, Lund. Göteborg. Accensions-Katalog, 28, 29, 1913, 1914.

Stonyhurst. Stonyhurst College Observatory. Results of Meteorological, Magnetical and Seismological Observations, 1914.

* **Strassburg**. Internationale Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt. Veröffentlichungen, Jahrg. 1912, 7.
* **Sydney**. Royal Society of New South Wales. Journal and Proceedings, vol. XLVIII, p. 2.
— Royal Zoological Society of New South Wales. The Australian Zoologist, vol. I, p. 1-2.
* **Tananarive**. Académie Malgache. Bulletin, vol. XI.
Teddington. National Physical Laboratory. Report for the Year 1914-15.
* **Thonon**. Académie Chablaisienne. Mémoires et Documents, t. XXVII.
* **Tōkyō**. Tōkyō Imperial University. Calendar, 2573-2574 (1913-1914).
— Imperial University. College of Science. Journal, vol. XXXV, art. 8; XXXVI, 5, 6; XXXVII, 1; XXXIX, 1.
— Medizinische Fakultät der K. Universität. Mitteilungen, XIII Bd., Heft 1-3; XIV, 1.
— Imperial Academy. Proceedings, vol. I, n. 4.
* **Torino**. R. Accademia di Agricoltura. Annali, vol. LVII, 1914.
* — R. Accademia di Medicina. Giornale, an. 1914, n. 9-12; 1915, 1-4.
* — R. Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia. Miscellanea di Storia italiana, 3ª Ser., t. XVII.
* — Club Alpino italiano. Rivista mensile, vol. XXXIII, 12; XXXIV, 1-12.
— Istituto Giuridico della R. Università. M. Carbone, La dichiarazione dell'enfiteuta di voler affrancare e il perfezionamento dell'affrancazione. — A. Castellari, Sul fondamento delle competenze locali instituite nell'art. 91 c. p. c. — G. P. Chironi, Colpa e risarcimento. — V. A. Cottino, L'inadempienza del " Modo „ nel Codice civile germanico. — C. M. Franzero, Il Sommo Pontefice e la Santa Sede nella legge delle guarentigie. — M. Ricca-Barberis, Sull'estensione della clausola " esente da ogni peso „ nella compra-vendita. — Id., Sulla responsabilità del venditore per le iscrizioni a titolo di separazione di patrimonio esistenti sul fondo venduto. — M. Sarfatti, Per una migliore tutela delle obbligazioni di " fare „ e di " non fare „. — A. Sraffa e P. Bonfante, Solidarietà o mutua fideiussione.
* — Società degli Ingegneri ed Architetti. Atti, an. 1914, fasc. 5-7; 1915, 1. — Supplemento al Catalogo della Biblioteca.
* — Società Meteorologica italiana. Bollettino bimensile, Ser. III, vol. XXXIII, 6-12; XXXIV, 1-4.
* — Osservatorio Astronomico della R. Università. Annuario Astronomico, pel 1916, pubblicato dall'Osservatorio di Pino Torinese.
— R. Politecnico. Annuario per l'anno scolastico 1913-1914.
— Musei di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università. Bollettino, vol. XXIX, 1914.
— Comitato glaciologico italiano. Bollettino, n. 1.
— Biblioteca civica. Cataloghi. Sezione: Risorgimento italiano, 1 vol. 8°.
— Consiglio Provinciale. Atti, an. 1914.
* — Municipio. Consiglio Comunale. Atti, annata 1914, 2 vol. 4°. Verbali delle sedute, n. 1-XXXIII, 1915. — Città. Servizi d'igiene e sanità.

Bollettino statistico. ann. XLIII (1915), 1-13. — Statistica demografica sanitaria, 1913-1914. — Il Comune di Torino nel quinquennio 1909-1914; vol. III.

Torino. Camera di Commercio e d'Industria. Industrie e Commerci del Distretto dell'ann. 1913.

— Cassa di Risparmio. Resoconto dell'anno 1914.

* **Toronto**. University. Studies: Review of historical publications relating to Canada, vol. XIX. Public. of the Year 1914. — Philological Series, n. 3. Philosophy.

* — R. Canadian Institute. Transactions, vol. X, 2.

* **Tortosa**. Observatorio del Ebro. Boletin mensual, vol. V, 2-11.

* **Toulon**. Académie du Var. Bulletin, an. LXXXI, 1913.

* — **Tufts College**. Tufts College Studies. Scientific Ser., vol. III, n. 3-4; VI, 1-2.

* **Uppsala**. Uppsala Universitets Årsskrift, 1913, Bd. I, II.

Upsal. Observatoire météorologique de l'Université. Bulletin mensuel, vol. XLVI, 1914.

* **Upsala**. Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis Nova Acta. Ser. 4ª, vol. III, fasc. 2.

* **Urbana**. Illinois State Laboratory of Natural History. Bulletin, vol. X, art. 6-8; XI, 1.

Utrecht. Konink. Nederlandsch Meteorologisch Institut n. 106. — Ergebnisse Aerologischer Beobachtungen, 3, 1914 und Ergänzung 1912-1913.

Valle di Pompei. Santuario. Calendario, 1915.

* **Venezia**. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Atti, t. LXXIII, 9, 10; LXXIV, 1-10. — Memorie, vol. XXVIII, 8-10. — Parole dette dal Presidente Senatore P. Molmenti nelle adunanze del 23 e 30 maggio 1915. — Concorsi a premio proclamati nell'adunanza del 30 maggio 1915.

— R. Comitato Talassografico Italiano. Bollettino bimestrale, n. 31-32, 5° e 6° del vol. IV.

* — Ufficio idrografico del R. Magistrato delle Acque. — Bollettino mensile, 1914, 9-12; 1915, 1-8. — Pubblicazioni, n. 38, 52, 57, 62, 64, 65. — Livellazione di precisione, 53, 54, 59.

* **Vercelli**. Società Vercellese di Storia e d'Arte. Archivio. — Memorie e Studi, an. VI, 4; VII, 1915, 1-3.

* **Verona**. Accademia di Agricoltura, Scienze e Lettere. Regolamento interno, 1913. — Atti e Memorie, vol. XIV, XV. — Osservazioni meteoriche dell'anno 1913, 1914.

* — Museo civico. Madonna Verona. — Bollettino del Museo civico, an. VIII, 1914, fasc. 33; IX, 1915, 34-35.

* **Vicenza**. Accademia Olimpica. Atti, n. Ser. vol. IV.

Washington. Library of Congress. Report of the Librarian of Congress and Report of the Superintendent, of the Library Building and Grounds for the fiscal year ending June 30, 1914. — Publications issued by the Library since 1897. January 1915.

— Department of Commerce. U. S. Coast and Geodetic Survey. — Hypso-

metry. Special publication 18, 19, 22. — Report (Annual) of the superintendent ... to the Secretary of Commerce for the fiscal year ended June, 30, 1914.

* **Washington.** Department of Commerce. Bureau of Standards. Bulletin. vol. X. 4; XI. 1-4. — Decennal Index, vol. I to X inclusive (1904-1914). — Circular, N. 24. Publications of the Bureau of Standards.

— Department of the Interior. United States Geological Survey. — 35° Annual Report of the Director Geological Survey to the Secretary of the Interior. — Bulletin 540. 543. 546-554. 556-563. 570-580. 580 A-P. 581, 581 A-G. 582-590, 592. 594. 596, 599. 600. 620. 620 A. — Water Supply Papers, 309. 312, 321-331, 336, 338-340 A-J. 340 F-I. 343. 344. 345. 345 A-H. 346, 347. 349. 350, 353. 354. 365. 367. 368. 375 A. — Professional Paper. 81-84, 85-D, E. 8688. 90 B-L. 95 A. — Mineral resources. Calendar Year 1912. part. I. Metals. I. A; II. Nonmetals; Calendar Year 1913. I; 1-12, 14-26; II. 1-35; Calendar 1914. part. II; p. 1-7, H:1. — Geological Atlas of the United States, fol. 190-194. — The Publications of the Geological Survey (March 1915). 1 fasc. 8°.

— U. S. Department of Labor Bureau of Labor statistics. Reail prices, 1890. october. 1913.

* — Smithsonian Institution. Smithsonian Miscellaneous Collections, vol. *57*, 13, Index: vol. *61*. 18. 24. 25; vol. *62*. 2-3: vol. *63*. 2-6. 8-10; vol. *64*. 1-2; vol. *65*, 1, 4, 6. 8. — Opinions rendered by the International Commission on Zoological Nomenclature-Opinions. 57 to 65. 66.

* — Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology. Bulletin, n. 56.

— Smithsonian Institution. United States National Museum. — Contributions from the U. S. National Herbarium. vol. XVII. P. 6; vol. XIX.

* — Smithsonian Institution. Annual Report of the Board of Regents... June 30, 1913.

* — Smithsonian Institution. United States National Museum. Report on the progress and condition of the United States National Museum for the Year ending. June 30, 1913; June, 30. 1914. — Bulletin. n. 50. p. IV; 71, 72. p. I, vol. I, 84-90. — Proceedings. vol. XLVI. XLVII. — Special Bulletin. American Hydrois, part III.

* — The Carnegie Institution of Washington founded by Andrew Carnegie. " To encourage in the Troadest and most liberal manner investigation, research, and discovery, and the application of knowledge to the improvent of mankind ". Publications, 27. III. 90 A, B, 149 III, 165. 182 V, 183 VI. 185 I. 191, 192. 193, 194. 196. 197. 198, 199, 201. 203. 204. 205. 210. — Year Book, n. 13, 1914. — Reports upon the present condition and future needs of the science of Antropology.

* — National Academy of Sciences. Proceedings. vol. I (1915). — Memoirs. vol. XII (First Memoir).

* — Naval Observatory U. S. A. Annual Report of the Chief of the Bureau of Navigation. 1914. — Appendix, n. 2. — Publications, 2ª ser., vol. VIII. — American (The) Ephemeris and Nautical Almanac for the Year 1916. — The America Ephemeris and Almanac for the Year 1917.

* **Wien.** K. Akademie der Wissenschaften. Almanach, Jahrg. LXIII, 1913. — Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse: Sitzungsberichte, 1913. CXXII Bd. Abth. I, 8-10. Abht. IIa, 9-10; Abth. IIb, 9-10; 1914, CXXIII Bd., Abht. I, 1-5; Abth. IIa, 1-6; Abth. IIb, 1-6; Abth. III, 1-7. — Denkschriften, LXXXIX, XC. — Philosophisch-historische Klasse. Sitzungsberichte, 169 Bd., Abth. 2; 171 Bd., 2; 173, 5; 174, 5; 175, 2, 3; 176, 1, 3, 4, 5, 6, 8; 177, 2, 3; 178, 5. — Denkschriften, 57 Bd., Abhn. 1, 2, 58, Abhn. 2, 3, 4. — Erdbeben-Kommission. Mitteilungen, N. F. N., XLVII, XLVIII.

* — K. K. Geologische Reichsanstalt. Jahrbuch, LXIV Bd.. — Abhandlungen, Bd. XXII, 4; XXIII, 1. — Verhandlungen, 1914, 8-18; 1915, 1.

* **Würtzburg.** Physikalisch-Medicinische Gesellschaft. Sitzungsberichte, 1914, 1-2. — Verhandlungen, N. F., Bd. XLIII, 2-3.

* **Zagreb.** Jugoslavenska Akademije znanosti i umjetnosti. Ljetopis, 1913. — Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium, vol. XXXV. — Rad. Razredi historićko-filologićki i filosofićko-juridički, 85, 86 (Ruj, 201, 203). — Zbornik za narodni život i običaje južnih slavena. Kng. XIX, Svez. 1.

* — Società archeologica Croata. Vjesnik, Nove Ser, Sveska, XIII, 1913 i 1914.

— Hrvatsko prirodoslovno društvo (Societas scientiarum naturalium croatica). Glasnik, Godina XXVI, Svez. 4.

* — K. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskoga. Zemaljskog Arkiva. Vjesnik, Godina XVI.

* **Zürich.** Société Helvetique des Sciences naturelles. Nouveaux Mémoires, vol. II.

— Schweiz geologischen Kommission. Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse. N. Sér. 34^{me} et XL^{me} livrs, 1 carte au 1 : 100.000, feuille VIII. Carte spéciale, n. 55 et 73. Texte explicatif, n. 17.

* — Naturforschende Gesellschaft. Vierteljahrsschrift, 58 Jahrg. 3 u. 4 Heft, 1913; 59 Jahrg., 1-4 Heft, 1914.

PERIODICI 1915.

** **Almanacco** italiano. Piccola enciclopedia popolare della vita pratica. Firenze; 16°.
American Journal of Mathematics. Baltimore; 8°.
American Journal of Philology. Baltimore; 8°.
** **Annalen** der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris; 8°.
** **Annales** scientifiques de l'École Normale supérieure. Paris; 4°.
* **Annals** and Magazine of Natural History. London; 8°.
* **Annals** of Mathematics. Charlottesville; 4°.
** **Antologia** (Nuova). Rivista di scienze, lettere ed arti. Roma; 8°.
** **Archiv** für Entwickelungsmechanik der Organismen. Leipzig; 8°.
** **Archiv** für Protistenkunde. Jena; 8°.
** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève; 8°.
** **Archivio** bibliografico coloniale. Firenze; 8°
** **Archivio** storico italiano. Firenze; 8°.
* **Archivio** storico lombardo. Milano; 8°.
* **Archivio** storico sardo. Edito dalla Società storica sarda. Cagliari; 8°.
* **Archivio** storico per la Sicilia orientale. Catania; 8°.
* **Archivum** Franciscanum historicum. Ad Claras Aquas; 8°.
* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia; 8°.
** **Athenaeum** (The). Journal of English and Foreign Literature, Science, the Fine Arts, Music and the Drama. London; 4°.
* **Athenaeum**: Studi periodici di letteratura e storia. Direttore Carlo Pascal. Pavia; 8°.
* **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
** **Berliner** philologische Wochenschrift. Berlin; 8°.
* **Biblioteca** nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Firenze; 8°.
** **Bibliothèque** de l'École des Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Paris; 8°.
** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne; 8°.
** **Bollettino** Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Roma; 8°.
* **Brixia Sacra**. Bollettino bimestrale di Studi e documenti per la Storia Ecclesiastica bresciana. Brescia; 8°.
** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia cristiana. Roma; 8°.
** **Centralblatt** für Mineralogie, Geologie und Paleontologie in Verbindung mit dem neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie. Stuttgart; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa; 8°.

Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des sciences. Paris; 4°.
* **Conferenze** e Prolusioni. Periodico quindicinale. Roma; 4°.
* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma; 4°.
Eranos. Acta philologica Suecana. Göteborg; 8°.
Felix Ravenna. Bollettino Storico Romagnolo edito da un gruppo di studiosi. Ravenna; 8°.
** **Fortschritte** der Physik. Braunschweig; 8°.
* **Gazzetta** chimica italiana. Roma; 8°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma; 4°.
* **Gegenbaurs** Morphologisches Jahrbuch. Leipzig; 8°.
Geografia (La), Comunicazioni dell'Istituto geografico De Agostini. Novara; 8°.
* **Giornale** del Genio civile. Roma; 8°.
** **Giornale** della libreria, della tipografia e delle arti e industrie affini. Milano; 8°.
** **Giornale** storico della Letteratura italiana. Torino; 8°.
Giornale storico della Lunigiana. Spezia; 8°.
** **Guida** commerciale ed amministrativa di Torino. 8°.
* **Historische** Zeitschrift. München; 8°.
* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. Berlin; 8°.
** **Jahrbuch** (Neues) für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, etc. 1909, I. II. Beil. Bd. VIII, 1, 2. Stuttgart; 8°.
* **Journal** (The American) of Science. Edit. Edward S. Dana. New-Haven; 8°.
** **Journal** des Savants. Paris; 8°.
** **Journal** für die reine u. angewandte Mathematik. Berlin; 4°.
* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca; 8°.
** **Minerva**. Jahrbuch d. gelehrten Welt. Strassburg; 16°.
* **Modern** language notes. Baltimore; 4°.
** **Nature**, a weekly illustrated Journal of Science. London; 8°.
* **Nieuw Archieff** voor Wirskunde. Uitgegeven door hel Wiskundig Genootschap te Amsterdam; 8°.
** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographisch. Anstalt. Gotha; 4°.
* **Physical Review** (The); a journal of experimental and theoretical physic. Published for Cornell University Ithaca. New-York; 8°.
* **Prace** matematyczno fizyczne. Warzawa; 8°.
** **Quarterly** Journal of pure and applied Mathematics. London; 8°.
** **Raccolta** Ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia. Roma; 8°.
** **Revue** archéologique. Paris; 8°.
** **Revue** des Deux Mondes. Paris; 8°.
** **Revue** du Mois. Paris; 8°.
** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris; 8°.
** **Revue** numismatique. Paris; 8°.
** **Revue** politique et littéraire, revue bleue. Paris; 4°.
** **Revue** scientifique. Paris; 4°.

* **Revue** semestrielle des publications mathématiques. Amsterdam; 8°.
Riforma (La) Sociale. Rassegna di questioni economiche, finanziarie e sociali (Dono del Socio Prof. Einaudi).
** **Risorgimento** italiano. Rivista storica. Torino; 8°.
* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma; 8°.
** **Rivista** di Filologia e d'Istruzione classica. Torino; 8°.
** **Rivista** d'Italia. Roma; 8°.
** **Rivista** di filosofia. Continuazione della *Rivista Filosofica*, Pavia; 8°.
* **Rivista** internaz. di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Aeronautica. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Sociologia. Roma; 8°.
* **Rivista** storica benedettina. Roma; 8°.
* **Rivista** storica italiana. Torino; 8°.
Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Valle di Pompei; 8°.
** **Science**. New-York; 8°.
* **Science Abstracts**. Physics and Electrical Engineering. London; 8°.
** **Scientia**. Rivista di scienza. Organo internazionale di sintesi scientifica. Bologna, 8°.
* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze; 8°.
** **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino; f°.
Tôhoku (The) Mathematical Journal. Edited by T. Hayashi.
* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap. Amsterdam; 8°.
Yale Review. New Series. Edited by Wilbur L. Cross. New Haven; 8° (dono del Socio Prof. Einaudi).
** **Zeitschrift** für physikalische Chemie. Leipzig; 8°.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

NB. Le pubblicazioni segnate con * si hanno in cambio:
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono

Dal 13 Giugno al 14 Novembre 1915.

Antoniazzi (A. M.). Commemorazione di Giuseppe Lorenzoni. Padova, 1915; 8° (*dall'A.*).

Cassinis (G). L'influenza della oscillazione del supporto sulle misure di gravità relativa, compiute a S. Pietro in Vincoli coll'apparato di Sterneck a tripode. Roma, 1915; 8° (*Id.*).

Celoria (G.). Sulla eclisse totale di sole del 21 agosto 1914 e sul passaggio di Mercurio sul disco solare, avvenuto il 7 novembre 1914. Milano, 1915; 8° (*dall'A., Socio corrispondente dell'Accademia*).

Delgrosso (M.). Note mineralogiche sulla Valle di Cogne. Roma, 1915; 8° (*dall'A.*).

Favaro (A.). Quarant'anni di Studi Galileiani. Venezia, 1916; 8° (*Id.*).

Gay (F. P.) and **Claypole** (E. J.). I. Studies in typhoid immunization. Chicago, 1913; 8°.

Gay (F. P.) and **Force** (J. N.). III. Studies in typhoid immunization. Chicago, 1914; 8°.

Jorge (R.). A guerra e o pensamento medico. Lisboa, 1915; 4°.

— À margem duma revista alemà. Lisboa, 1915; 4° (*dall'A.*).

Kilian (W.). Sur les brèches polygéniques de l'Éocène du Briançonnais. Paris, 1915; 8°.

— Les formations fluvio-glacières de la région du Faucigny (Haute-Savoie). Paris, 1915; 8°.

Kilian (W.) et **Pussenot** (Ch.). Nouvelles données relatives à la tectonique des environs de Briançon. Paris, 1913; 4°.

— — Analyse détaillée des dislocations du Briançonnais oriental. Paris, 1913; 4°.

Kilian (W.) et **Reboul** (P.). Étude monographique du " Témoin „ sédimentaire des ollières (Ardèche). Paris, 1914; 8°.

— — Sur la faune du Valanginien moyen du Col de Frène (Savoie). Paris, 1914; 8° (*dal prof. W. Kilian, Socio corrispondente dell'Accademia*).

Lambe (L. M.). Bibliography of Canadan Zoology for 1912. Ottawa, 1913; 8° (*dall'A.*).

Taramelli (T.). Osservazioni circa la frana di Clauzetto. Udine, 1915; 8°.

— Come si vennero formando i confini naturali della penisola italiana nella catena alpina. Pavia, 1915; 8° (*Id.*).

Dal 20 Giugno al 21 Novembre 1915.

Allemands (Les) destructeurs des Cathédrales et des Trésors du passé. Paris, 1915; 1 vol. 8° (*dal " Sous-Secrétariat d'État des Beaux-Arts "*).

Arnò (C.). L'idea della guerra contro Toscana e Roma accolta e voluta dal Gioberti. Roma, 1915; 8° (*dall'A.*).

Billia (M.). Le ceneri di Lovanio e la filosofia di Tamerlano. Milano, 1915; 8° (*Id.*).

Catalogo alfabetico delle opere possedute dalla Sezione Risorgimento. Torino, 1915; 1 vol. 8° (*Dono della Biblioteca Civica di Torino*).

Fontanella (C.). L'" Aymerillot " de V. Hugo en soi-même et par rapport à la Chanson de geste Aymeri de Narbonne. Livorno, 1915; 8° (*Id.*).

Giorcelli (G.). Tipografi di Alessandria e di Venezia del secolo XV e tipografi monferrini dei secoli XV e XVI che stamparono in Venezia. Alessandria, 1915; 8° (*Id.*).

****Litta**. Famiglie celebri italiane: Carafa di Napoli, fasc. 71; Ruffo di Calabria, fasc. 72.

****Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 136, 1° del T. XXXIII, p. I; 137, 4° e ultimo del T. XXVI, p. I; 138, 1° del T. XII, p. II; 139, 3° del T. XXXIII, p. I.

— Archivio Muratoriano. N. 15.

Nallino (C. A.). Norme per la trascrizione italiana e la grafia araba dei nomi proprii geografici della Tripolitania e della Cirenaica. Roma, 1915; 8° (*dall'A.*).

Orano (P.). Roma imperiale sul mare. Forlì, 1915; 8°.

— Dio in Giovanni Prati. Con una lettera autografa inedita. Roma, 1915; 8° (*Id.*).

****Pagliaini** (A.). Catalogo generale della Libreria italiana. Indice per materie, vol. II, fasc. 9-11. Milano, 1915.

Veronese (Guarino). Epistolario raccolto, ordinato, illustrato da Remigio Sabbadini. Vol. I: Testo. Venezia, 1915; 1 vol. 8° (*Dono del Prof. R. Sabbadini, Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dal 14 Novembre 1915 al 9 Gennaio 1916.

Cabreira (A.). Sobre o quadrado e o cubo polinomios. Coimbra, 1913; 8°.

— Calendrier perpétuel (Dans le système julien: ère chrétienne) et grégorien, inventé le 7 mars 1915. Coïmbre, 1913; 8° (*dall'A.*).

Claypole (E. J.). Human Streptotrichosis and its Differentiation from Tubercolosis. Chicago, 1914 (*Id.*).

Enriques (F.). Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, pubblicate per cura del Dr. Oscar Chisini. Vol. I. Bologna; 8° (*dall'A., Socio corrispondente dell'Accademia*).

Gay (F. P.). Typhusimmunisierung. Berlin, 1914; 8° (*dall'A.*).

— New uses of specific Skin Tests in certain of the infectious diseases. Philadelphia, 1915; 8° (*Id.*).

Gay (F. P.) and **Claypole** (E. J.). Studies in typhoid immunization. IV, V. Chicago, 1914; 8° (*dagli AA.*).

Grassi (G.). Corso di Elettrotecnica. Vol. 2°. Torino-Roma, 1906; 8° (*dall'A., Socio residente dell'Accademia*).

— Principii scientifici della Elettrotecnica. 3ª ediz. Torino, 1915; 8° (*Id.*).

Guareschi (I.). Lavoisier e Berzelius nella Storia della Scienza. Torino, 1915; 8° (*Id.*).

— La calce sodata quale energico reagente generale e sua grande attività chimica. Torino, 1915; 8° (*Id.*).

— La chimica dei gas velenosi e la guerra. Conferenza. Torino, 1915; 4° (*Id.*).

Guidi (C.). Lezioni sulla scienza delle costruzioni. Esercizi. Torino, 1915; 1 vol. 8° (*Id.*).

Mascart (J.). La détermination des longitudes par la télégraphie sans fils et la précision dans la détermination de l'heure. Lyon, 1913; 8° (*dall'A.*).

Dal 21 Novembre 1915 al 16 Gennaio 1916.

***Archivio* Muratoriano. Studi e ricerche in servizio della nuova edizione dei *Rerum italicarum Scriptores* di L. A. Muratori. N. 16. Città di Castello, 1915; 4°.

Ambrosi (L.). L' " Einfuhlung „ nello storico della filosofia. Roma, 1913; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Filosofia*).

— L'Università di Lovanio e Maurizio De Vulf. Genova, 1915; 8° (*dall'A.*).

Boselli (P.). Raccolta di testimonianze e di documenti sulla guerra italo-austriaca. Relazione. Roma, 1915; 8° (*dall'A., Presidente dell'Accademia*).

Cocchia (E.). Il libro del dolore e delle ricordanze. Napoli, 1915; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

— Saggi filologici. Vol. V. Napoli, 1915; 1 vol. 8° (*Id.*).

— Introduzione storica allo studio della letteratura latina. Bari, 1915; 1 vol. 8° (*Id.*).

— Romanzo e realtà nella vita e nella attività letteraria di Lucio Apuleio. Catania, 1915; 1 vol. 8° (*Id.*).

Colamussi (T.). Lo Spirito della pietà. Città di Castello, 1915; 8° (*Id.*).

Einaudi (L.). Il bilancio italiano; quali difficoltà esso ha superate in passato; come è divenuto migliore e quale nuovo sforzo esso è capace di compiere. Roma, 1915; 8° (*dall'A., Socio residente dell'Accademia*).

— The growth and present situation of the public finances of Italy (" The Economic Journal „). London, 1915; 8° (*Id.*).

Mascart (J.), Directeur de l'Observatoire de Lyon, *fa omaggio all'Accademia dei seguenti opuscoli:*

Ai *Maestri* ed alle *Maestre* di tutte le Nazioni.

Bédier (J.). I crimini tedeschi provati con testimonianze tedesche. Traduzione dal francese di A. Rosa. Paris, 1915; 8°.

Durkheim (É.) et **Denis** (E.). Chi ha voluto la guerra? Traduzione dal francese di G. Mazzoni. Paris, 1915.

Nothomb (P.). Il Belgio martire. Tradotto dalla Contessa di Parravicino di Revel. Paris, 1915; 16°.

Weiss (A.). La neutralità del Belgio e del Luxemburgo violata dalla Germania. Traduzione dal francese di Ugo Garinei. Paris, 1915; 8°.

** **Muratori** (L. A.). *Rerum italicarum Scriptores*. Fasc. 140-143. T. XIII, P. I, fasc. unico; T. XXII, P. II, fasc. 1; XXIII, P. I, fasc. 3; III, P. I, fasc. 3.

** **Pagliaini** (A.). Indice per materie del Catalogo generale della libreria italiana dal 1847 a tutto il 1899; Vol. II. Puntata 12-13.

Dal 9 Gennaio al 2 Aprile 1916.

Bado (A. A.) y **Bernaola** (V. J.). Laboratorio de análises de aguas y ensayos de materiales. Estudio de la purificación de las aguas por el solfato de aluminio. Buenos Aires, 1915; 4°.

Berlese (A.) e **Paoli** (G.). Un endofago esotico efficace contro il *Chrysomphalus dictyospermi* Morg. Firenze, 1916; 8° (*dal sig. Berlese*).

Darboux (G.). Rapport sur les Concours de 1915, lu dans la séance publique annuelle du 27 décembre 1915 à l'Académie des sciences de l'Institut de France. Paris, 1915; 4° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Euclide. Il primo libro degli elementi, testo greco, versione italiana, introduzione e note, a cura di Gio. Vacca, con prefazione di N. Festa. Firenze, G. C. Sansoni, ed. 1916; 1 vol. 8° (*dal Prof. G. Vacca*).

Guareschi (I.). Storia della Chimica. XI. Jons Jacob Berzelius e la sua opera scientifica. Brevi cenni sulla chimica nella prima metà del sec. XIX. Torino, 1915; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Guidi (C.). Sulla trave continua solidale coi piedritti. Roma, 1916; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Massachussets General Hospital. Warren triennal prize. Boston, March, 1915, 1 carta.

Oddone (E.). Gli elementi fisici del grande terremoto Marsicano-Fucense del 13 gennaio 1915. Modena, 1915; 1 vol. 8°.

Relazione della Commissione torinese per lo studio dei gas asfissianti e mezzi di difesa. Torino, 1916, 4° (*dal Socio residente I. Guareschi, a nome della Commissione*).

** **Weierstrass** (K.). Mathematische Werke. Bd. V. Theorie der elliptischen Functionen. Berlin, 1915; 1 vol. 4°.

Dal 16 Gennaio al 9 Aprile 1916.

Battuso (G. B.). Il figlio del Reggimento. Dramma lirico. Giarre, s. a.; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Letteratura, triennio 1914-16*).

Biadego (G.). La fiorentina famiglia Ervari trapiantata a Verona, il poeta Donato e il pittore Ranuccio. Verona, 1915, 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Boselli (P.). Cesare Salvarezza. Siena. 1916 (*dall'A. Presidente dell'Accademia*).

Buzzetti (P.). Regesto per Documenti di Carate-Lario. Como, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Storia, triennio 1913-15*).

Carabellese (F.). La coscienza morale. Spezia, 1915; 8° (*dall'A.*).

Cavazzocca-Mazzanti (V.). Gli Alighieri di Verona. Villafranca V., 1915; 8° (*dall'A.*).

Colamussi (F.). Lo spirito della pietà. Città di Castello, 1915; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Letteratura, triennio 1914-16*).

Egidi (P.). Per la storia del *Liber fraternitatis S. Spiritus et S. Marie in Saxia de Urbe* (Cod. Lancisiano, n. 328). Roma, 1914; 8°.

— Un documento Cornetano del secolo decimo. Roma, 1914; 8°.

— La colonia Saracena di Lucera e la sua distruzione. Roma, 1915; 1 vol. 8°.

— Necrologi e libri affini della provincia romana, ecc. Vol. II. Necrologie della città di Roma con note illustrative. Roma, 1914; 1 vol. 8° e Atl.

— La *Communitatis Siciliae* del 1282. Messina, 1915; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Storia, triennio 1913-15*).

Faggiano (C.). L'eloquenza volgare di S. Bernardino da Siena predicatore francescano del quattrocento. Firenze, 1916 (*dall'A. per il premio Gautieri di Letteratura, triennio 1914-16*).

Ferri (F.). La giovinezza di un poeta. Basinii parmensis Carmina. Rimini, 1914; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Letteratura, triennio 1914-16*).

Lattes (A.). Il Regolamento Sardo del 1815 per il ducato di Genova. Lucca, 1916; 8° (*dall'A.*).

Luzio (A.). Isabella D'Este e i Borgia, con nuovi documenti e quattro tavole di fac-simili. Milano, 1916; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Mattiauda (B.). Il nome di Savona e i nomi topografici di origine ligure. Savona, 1916; 8° (*dall'A.*).

Moreau-Nélaton (Étienne). La Cathédrale de Reims. Paris, 1915; 1 vol. 4° (*Dono del " Ministère de Beaux-Arts „ di Francia*).

Musatti (E.). Storia di Venezia. Nuova edizione. Milano, 1914; 2 vol. in 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Storia, triennio 1913-15*).

Palmieri (Matteo). Liber de Temporibus, a cura di Gino Scaramella. Città di Castello, 1915; 1 vol. in 4° (*dal prof. G. Scaramella per il premio Gautieri per la Storia*).

Pascal (C.). Poeti e Personaggi catulliani. Catania, 1916; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Passamonti (E.). Il Giornalismo Giobertiano in Torino nel 1847-1848. Milano, Roma, Napoli, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Storia, triennio 1913-15*).

** **Pepys** (S.). The Diary. Supplementary Volume. London, 1912; 1 vol. 8°.

Pivano (S.). Albori costituzionali d'Italia (1796). Torino, 1913; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Storia, triennio 1913-15*).

Prato (G.). Problemi monetari e bancari nei secoli XVII e XVIII. Torino, 1916; 1 vol. 4° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Rasi (P.). La bibliografia Virgiliana (1912-1913). Mantova, 1915; 1 vol. 8°.

— Varia (1. Catal. XIV, 9-10; 2, Iuven. I, 85 seg.; 3. Verg. Georg. IV, 132 sg.). Torino, 1916; 8° (*dall'A.*).

Rodolfo (G.). Fiorini d'oro del secolo XIV trovati a Carignano. Milano, 1916; 8° (*dall'A.*).

Russo (L.). Pietro Metastasio (*dall'A. per il premio Gautieri di Letteratura, triennio 1914-16*).

Scaramella (G.). Firenze allo scoppio del tumulto dei Ciompi. Pisa, 1914; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Storia, triennio 1913-15*).

Stampini (Hector). In honorem Pauli Boselli scripsit a. d. III. kal. Mart. an. MCMXVI. fol.° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Vidari (G.). Elementi di Pedagogia. Milano, 1916; 1 vol. 16° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Vinardi (A.). Nel mondo dei Titani. Milano, s. a.; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Letteratura, triennio 1914-16*).

Dal 2 Aprile all'11 Giugno 1916.

Balzac (F.). Le Artemisie dei Vermouths e dei Génépis. Torino, 1916; 8° (*dall'Autrice*).

Berger (E.). Zur Geschichte eines optischen Instrumentes. Berne, 1916; 8° (*dall'A.*).

Berlese (A.). *Aspidiotiphagus* How. e *Prospaltella* Ashm. Firenze, 1916; 8° (*dall'A.*).

Boccardi (G.). Lezioni di Cosmografia. Milano, 1916; 1 vol. 16° (*dall'A.*).

— La latitudine di Pino Torinese nel 1915. Torino, 1916; 4° (*id.*).

Chelli (F.). Sul metodo seguìto nel calcolo dei numeri diurni Besseliani. Torino, 1916; 8° (*dall'A.*).

Gualfredo (C.). Il piccolo cerchio meridiano dell'Osservatorio di Pino Torinese. Torino, 1916; 8° (*dall'A.*).

Guidi (C.). Lezioni sulla scienza delle costruzioni: La trave solidale coi piedritti. Torino, 1916; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

— Sul calcolo della trave Vierendeel. Roma, 1916; 8° (*id.*).

Leonardi-Cattolica (P.). Emanuele Fergola. Napoli, 1916; 8° (*dall'A.*).

Mascart (J.). La science à l'Exposition Internationale de Lyon. Lyon, 1916; 8° (*dall'A.*).

Mattirolo (O.). Sulla coltivazione e sul valore delle Artemisie usate nella fabbricazione dei Vermouths. Torino, 1916; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Panetti (M.). I progressi della dinamica nella tecnica dell'Ingegnere. Roma, 1916; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Roccati (A.). Studio litologico e mineralogico del materiale raccolto dal Conte Dr. Cesare Calciati nella spedizione al Karakoram sud-orientale durante l'estate del 1911. Roma, 1915; 8° (*dall'A.*).

Sacco (F.). Geologia applicata della Città di Torino. Torino, 1915; 4° (*dall'Autore*).

— Il pozzo artesiano di Saluggia. Torino, 1916; 8° (*id.*).

— La Geologia e la guerra. Torino, 1916; 8° (*id.*).

— L'italianità geologica della Venezia Tridentina e dell'Adriatico. Novara, 1915; 8° (*id.*).

Sacco (F.). Considérations cosmogoniques sur la nebuleuse M. 51 *Canum Venaticorum*. Torino, 1915; 8° (*id.*).

— Universo. Torino, 1916; 1 vol. 8° (*id.*).

Taramelli (T.). Ferdinando Sordelli. Milano, 1916; 8° (*dall'A. Socio nazionale dell'Accademia*).

— Di Giovanni Maironi da Ponte e di altri naturalisti bergamaschi del secolo scorso. Milano, 1916; 8° (*id.*).

Vecellio (A.). Equilibrio cosmico. Parte I: L'equilibrio nel mondo fisico, Feltre, 1916; 8° (*dall'A.*).

Dal 9 Aprile al 18 Giugno 1916.

Biadego (G.). Medici Veronesi e una libreria medica del sec. XIV. Venezia, 1916; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

— Borgolecco. Verona, 1916; 8° (*id.*).

— Bibliografia Aleardiana. Verona, 1916; 1 vol. 8° (*id.*).

Boffi (F.). Su le tracce della guerra. Lanciano, 1916; 8° (*dall'A.*).

Bonelli (G.). L'Archivio dell'Ospedale di Brescia. - Notizie e Inventario. Brescia, 1916; 8° (*dall'A.*).

Boselli (P.). Bonaventura Zumbini. Parole dette il 10 aprile 1916 nell'adunanza del Comitato Nazionale per la Storia del Risorgimento. Roma, 1916: 8° (*dal Comitato stesso*).

** Cambridge (The) Medieval history planned by J. B. Bury. Cambridge, 1911-1913; 2 vol. Testo e 2 Atl.

Carbonelli (G.). Dieci consigli medici dettati da Maestro Gerardo de Berneriis Medico Alessandrino Lettore nello Studio di Pavia nel sec. XV. Roma, 1916; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Da Como (U.). Mentre si combatte. Brescia, 1916; 8° (*dall'A.*).

Ferrara (F.). Teoria delle persone giuridiche. Napoli–Torino, 1915; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Gattuso di Brancaccio (G. B.). Il Sogno di un pazzo. Romanzo. Giarre, 1913; 3 fascicoli 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Letteratura* (*triennio 1914-1916*)).

Machiavelli (N.). Il Principe e altri scritti minori a cura di Michele Scherillo. Milano, 1916; 1 vol. 8° (*dal Prof. M. Scherillo*).

Orsi (Pietro). Gli ultimi cento anni di Storia Universale 1815-1915. Vol. 1°, Torino, 1915; 1 vol. 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Storia*).

Prato (G.). L'Occupation militaire dans le passé et dans le présent. 2ᵉ édit. Traduction de M. P. B., revue par G. Bourgin. Paris, 1916; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Schiaparelli (E.). La geografia dell'Africa orientale secondo le indicazioni dei monumenti egiziani. Note. Roma, 1916; 1 vol. 4° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Stampini (E.). Il pittore Marcus Plautius. Torino, 1915; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

— Pubblicazioni (1879–1916). Torino, 1916; 8° (*id.*).

Zuccante (G.). Antistene. Milano, 1916 (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dono di S. E. il Presidente BOSELLI:

Abbiate (M). Per l'amore tra le classi sociali. Vercelli, 1901; 8°.
A. F. Un nuovo gabinetto glottologico. Firenze, 1897; 8°.
Agudio (T.). Il sistema Agudio per vincere le forti pendenze coi treni ordinari. Roma, 1879; 8°.
— Conferenza sui sistemi Agudio e Fell. Torino, 1885; 16°.
— Una pronta succursale dei Giovi. Torino, 1887; 4°.
Airoli (G. F.). Zola e Bovio. Firenze, 1894; 8°.
Antonelli (R.). L'idea guelfa e l'idea ghibellina. Roma, 1895; 8°.
Archivio (R.) di Stato in Lucca. Regesti. Vol. I, parte II. Lucca, 1911; 4°.
Ardy (L. F.). Jacopo Stellini. Udine, 1899; 8°.
Arietti (A.). Ricordanze della guerra per l'indipendenza italiana 1860-61. Firenze, 1895; 8°.
Artuffo (G. B.). Il sac. prof. Lorenzo Prinotti. Torino, 1899; 16°.
Atti del X Congresso naz. fra industriali. Torino, 1911; 8°.
Baccarini (A.). La direttissima Roma-Napoli. Firenze, 1888; 8°.
Basile (A.). Delle due scuole economiche in Italia. Roma, 1875; 8°.
Basletta (A.). Cuori e fucili. Roma, 1896; 16°.
Battaglia (G.). Le donazioni dei Merovingi e le precarie ecclesiastiche. Palermo, 1896; 8°.
— La difesa nei giudizi sotto la Monarchia dei Franchi. Palermo, 1900; 8°.
Beltrami (L.). Per la difesa di Roma. Roma, 1902; 8°.
Beltrami-Scalia (M.). Colonie e deportazione. Roma, 1874; 8°.
— Il sistema penitenziario. Roma, 1875; 8°.
— Il lavoro dei condannati all'aperto. Civitavecchia, 1880; 8°.
Benassi (U.). Codice diplomatico parmense. Vol. I. Parma, 1910; 4°.
Berruti (E.). L'inno nazionale argentino. Cordoba, 1906; 8°.
Bertoni (G.). Nozze Segre-Zamorani. Modena, 1909; 8°.
Bodratti (R.). *Er me païse*, ossia monografia di Piampaludo. Acqui, 1897; 8°.
Bonanni (T.). L'antica epigrafia della regione dei Marsi. Aquila, 1890; 8°.
Bonazzi (G.). Nozze G. Giovannini-M. Fiorini. Roma, 1915; 8°.
Bonfigli (F.). Cenno biografico di Giuseppe Bonomi. Roma, 1878; 8°.
Bonito Garofalo (duca di). Narciso e la sua allegoria secondo i Neoplatonici. Roma, 1904; 8°.
Bordoni (A.). Note ed appunti sull'ordinamento delle Società anonime in Italia. Bologna, 1899; 8°.
Borzì (A.). Di Pietro Castelli botanico. Messina, 1888; 4°.
Boselli (P.). Raffaello Giovagnoli. Roma, 1915; 8°.
Brentari (O.). Della vita e degli scritti dell'ab. G. J. Ferrazzi. Bassano, 1887; 8°.
Brini (G.). Commemorazione di Giuseppe Ceneri. Bologna, 1899; 8°.
Brioschi (F.). Lo sbocco occidentale della ferrovia faentina. Roma, 1881; 8°.
Broccoli (A.). Il Museo Campano. S. i., 1902; 4°.

Bruzzone (P. L.). Fatti accaduti nel convento di S. Croce di Bosco. Alessandria, 1905; 8°.
Calderini (G.). Gli archeologi, gl'ingegneri e gli architetti dinanzi ai monumenti dell'arte. Roma, 1901; 4°.
Calenda (A.). L'ex prefetto di Roma innanzi alla Commissione d'inchiesta. Napoli, 1893; 8°.
Calenda di Tavani (V.). I discorsi inaugurali. Napoli, 1900; 8°.
Canavari (M.). Commemorazione del prof. G. Meneghini. Pisa, 1889; 4°.
Canevari (A.). Sulla economia agricola dell'Astigiano. Milano, 1875; 8°.
Canini (M. A.). La questione dell'Epiro. Roma, 1879; 8°.
Cannizzaro (M. E.). Descrizione del laboratorio chimico centrale delle gabelle. S. i., 190...; 4°.
Cantalamessa (G.). Di alcune forme dell'arte contemporanea. Venezia, 1903; 8°.
Cappelli (A.). Aveja. Roma, 1905; 8°.
— Carteggio inedito di L. A. Antinori con C. Amaduzzi. Roma, 1905; 8°.
Capra (G.). La Nuova Zelanda. S. Benigno C., 1913; 8°.
Carlevaris (P.). Il programma da attuarsi in Italia e Giusto Liebig. Torino, 1874; 8°.
Carmi (J. J.). All'assemblea ed al sinedrio di Parigi, 1806-1807. Reggio nell'Emilia, 1905; 8°.
Carpi (L.). La lotta contro la tubercolosi nel Belgio. Napoli, 1900; 8°.
Catalogue d'une très grande vente à Turin composée de tout le mobilier d'un palais princier. Rome, 1899; 8°.
Centenario (Il) di V. Hugo a Roma. Roma, 1902; 8°.
— (Primo) dell'Ateneo di Palermo. Palermo, 1906; 4°.
— (Nel primo) della dedicazione del duomo di Ceva. Savona, 1905; 4°.
Cerlogne (J. B.). Les étapes de la vie. Aoste, 1902; 8°.
— Dictionnaire du patois Valdôtain. Aoste, 1907; 8°.
Cerruti (G. E.). Della deportazione come base fondamentale delle riforme carcerarie. Torino, 1872; 8°.
Ciccone (A.). Del progresso economico intellettuale e sociale. Napoli, 1874; 8°.
Cini (A.). La grande mistificazione del sig. Chamberlain. Malta, 1902; 8°.
Cinquini (A.). Il Codice Vaticano-Urbinate latino 1193. Aosta, 1905; 8°.
— De uita et morte illustris. D. Baptistae Sfortiae Comitissae Urbini. Roma, 1905; 8°.
Concini (L.). Innocente Pittoni. Conegliano, 1906; 8°.
Consegna della nave *Stella polare* alla R. Marina. La Spezia, 1901; 8°.
Conti (V.). Dell'impronta che segna nel diritto amministrativo il carattere e l'educazione dei popoli. Roma, 1876; 8°.
Controversia (La) di S. Girolamo degli Schiavoni. Roma, 1901; 8°.
Contuzzi (F. P.). La protezione dei naufraghi e dei feriti nelle guerre marittime. Napoli, 1904; 8°.
— La telegrafia marittima nei rapporti del diritto penale. Napoli, 1904; 8°.
— Il contrabbando di guerra. Napoli, 1905; 8°.
— Dei naufragi e dei ricuperi. Napoli, 1905; 8°.
— Le funzioni dei consoli. Napoli, 1905; 8°.

Corazza (C.). Il nuovo ponte sul Po lungo la strada Verrua-Crescentino. Torino, 1900; 8°.
Correggio (Il) nei libri. Parma, 1894; 16°.
Corsi (A.). L'autonomia dei porti in Italia. Torino, 1899; 8°.
Corte (La) dei conti nel suo cinquantenario. Roma, 1912; 8°.
Cosentino (G.). La cartha memoriae di Riesi. Palermo, 1907; 4°.
[**Crispi** (F.)]. Cronistoria [1848]. Roma, 1890; 8°.
Cuniberti (F.). Discorso letto nell'occasione della commemorazione del generale G. E. Arimondi. Savigliano, 1896; 8°.
Dallolio (A.). Le colonie scolastiche bolognesi. Bologna, 1913; 8°.
De Blasi (L.) e **Russo Travali** (G.). Esame batteriologico dell'aria e del suolo dei vecchi cimiteri di Palermo. Palermo, 1889; 8°.
De Gregorio (G.). Risposta alla critica del testo dei capitoli dei disciplinati di S. Nicolò di W. Förster. Palermo, 1892; 8°.
— Cenni di glottologia bantu. Torino, 1882; 8°.
— It. *otta*; It. *bazza*, sp. *baza*, cat. *basa*. Halle, s. a.; 8°.
— Il codice De Cruyllis-Spatafora in antico siciliano. Halle, s. a.; 8°.
— Sopra una forma d'infinito attivo nelle lingue classiche. Palermo, 1896; 8°.
— Ultima parola sulla varia origine del Sanfratellano, Nicosiano e Piazzese. Paris, 1899; 8°.
— Fonetica dei dialetti gallo-italici di Sicilia. Torino, 1884; 8°.
— Affinità del dialetto di San Fratello con quelli dell'Emilia. Torino, 1886; 8°.
— Ancora sulle cosidette " Colonie lombarde ". Palermo, 1900; 8°.
— Elenco delle [sue] opere. Palermo, 1906; 8°.
— De Isocratis vita, scriptis et discipulis. Panormi, 1884; 4°.
— Capitoli della prima Compagnia di disciplina di San Nicolò in Palermo del sec. XIV. Palermo, 1891; 8°.
— Per la storia comparata delle letterature neo-latine. Palermo, 1893; 8°.
— Relazione sul Congresso degli Orientalisti tenuto a Roma nel 1899. Palermo, 1900; 8°.
— Scoperta di una iscrizione fenicia. Palermo, 1902; 8°.
— It. (A) *bizzeffe*. Paris, 1902; 8°.
— Notizia di un trattato di mascalcia in dialetto siciliano del sec. XIV. Paris, 1904; 8°.
— Relazione sui risultati generali e sugli studi egiziani ed africani del XIV Congresso degli Orientalisti. Roma, 1905; 8°.
— Relazione sul XIII Congresso internazionale degli Orientalisti. Palermo, 1904; 4°.
De Gubernatis (A.). Il romanzo di una poetessa. Roma, 1901; 8°.
Delarue (G.). Projet d'un nouveau code de commerce maritime. Paris, 1903; 8°.
Della Bona (G.). Delle crisi economiche. Torino, 1888; 8°.
De Lorenzo (F.). Ancora sulla colonizzazione dello Sciotel. Alessandria, 1899; 4°.
Del Vecchio (P.). Adamo Ferraris. Mondovì, 1872; 8°.

De Martini (A.). Di Salvatore Tommasi e dell'indirizzo moderno della medicina. Napoli, 1888; 8°.
— Periodi storici della scoperta della circolazione del sangue. Napoli, 1889; 16°.
De Nino (A.). Discorso inaugurale della mostra di quadri di artisti Vastesi. Vasto, 1899; 12°.
— Saggio archeologico sulla ubicazione di alcuni oppidi, pagi e vici. Sulmona, 1905; 8°.
— Bassorilievi medioevali di Castel di Sangro. Castel di S., 1901; 16°.
— Centenario di Francesco Domenico Guerrazzi. Sulmona, 1904; 8°.
De Toni (G. B.). Di una interessante scoperta del modenese Giambattista Amici. Modena, 1906; 8°.
Drocco (F.). Paolo Gorini. Torino, 1889; 8°.
Erpen (T. van). Grammatica araba. Pavia, 1913; 8°.
Esposizione internazionale delle forze vive dell'operaio. Programma. Torino, 1893; 8°.
Faccio (C.). Carlo Dionisotti. Vercelli, 1899; 8°.
Falchi (I.). Replica alle osservazioni del p. De Cara sul libro *Vetulonia*. Firenze, 1892; 8°.
Faldella (G.). Cenni biografici di Giovanni Scovazzi. Nizza M., 1890; 8°.
— Ricordo di Giovanni Boglietti. Biella, 1901; 8°.
— La vita popolare di Antonio Fontanesi. Torino, 1902; 4°.
— La stella dell'amor patrio. Vercelli, 1903; 8°.
Fani (C.). Commemorazione in onore di Ruggero Bonghi. Assisi, 1896; 8°.
Fascie (C.). Studio sui capitolari dei Re Carolingi. Milano, [189..]; 8°.
Fassini (S.). Il ritorno del Rolli dall'Inghilterra e il suo ritiro in Umbria. Perugia, 1908; 8°.
Fava (R.). Gli ebrei in Romania. Bucuresci, 1895; 8°.
Federici (C.). Patologia e clinica. Firenze, 1888; 8°.
Ferraris (M.). Di alcuni principii di economia ferroviaria. Pisa, 1879; 8°.
— Sulla base principale della economia ferroviaria. Torino, 1880; 8°.
Ferro (A. A.). La critica della conoscenza in Kant e Spencer. Savona, 1900; 8°.
Fighiera (A.). La R. Scuola tecnica *C. Cavour* di Ventimiglia nel cinquantenario del Regno. Sanremo, 1912; 8°.
Fontana (B.). Sommario del processo di Aonio Paleario. Roma, 1896; 8°.
Foresio (G.). Relazione della scuola popolare di Cava dei Tirreni. Salerno, 1894; 8°.
Fornaciari (G.). Il frenocomio di S. Lazzaro presso Reggio nell'Emilia. Reggio E., 1882; 4°.
Fornara (D.). Sugli esperimenti biologici. Genova, 1884; 8°.
Frank (L.). Collisions at sea. London, 1896; 8°.
Frati (C.). Pietro Metastasio e L. A. Muratori. Bologna, 1893; 8°.
Gaduleta (A.). L'acquisto d'Arezzo nel 1384. Trani, 1903; 8°.
Galimberti (L.). Pensieri sopra un corso di storia ecclesiastica. Roma, 1894; 8°.
Gallet (A. E.). Cenni sull'Osservatorio meteorico-sismico della fortezza di Altare. Torino, 1891; 4°.

Gamberale (E.). Sulla riforma del Consiglio superiore della pubblica istruzione. Città di Castello, 1898; 8°.
Garlanda (F.). Versi. Torino, 1915; 12°.
Garofalo (P.). Acrisia Vichiana nella " Scienza nuova ". Napoli, 1909; 8°.
Gassisi Ieromonaco (S.). I manoscritti autografi di San Nilo iuniore. Roma, 1905; 8°.
Gianturco (E.). Commemorazione di R. Bonghi. Roma, 1896; 8°.
Gioda (C.). L'ultimo ambasciatore di Venezia a Roma. Carmagnola, 1904; 4°.
Giurlanda (V.). Studio critico sugli anni sacri greci. I. Catania, 1905; 8°.
Gori (P.). La biblioteca della R. Accademia di belle arti di Firenze, 1906; 12°.
Grita (S.). L'on. M. R. Imbriani e il monumento a G. Mazzini in Roma. Roma, 1897; 8°.
Guala (L.). Lezioni di economia domestica. Vercelli, 1869; 8°.
Huc (T.). Le code civil italien et le code Napoléon. Paris, 1868; 2 vol. 8°.
Inaugurazione del monumento ad Antonio Scialoja. Città di Castello, 1897; 8°.
— del monumento di Matteo Pescatore. Torino, 1883; 8°.
— del ricordo marmoreo in Belluno a S. Barozzi. Belluno, 1888; 8°.
— di un ricordo marmoreo a L. C. Farini in Saluggia. Vercelli, 1894; 8°.
Intra (G. B.). La basilica di S. Andrea. Mantova, 1901; 8°.
— Nozze Gobio-Resti-Ferrari. Bergamo, 1904; 8°.
— Il cenobio di S. Benedetto Po. Mantova, 1897; 8°.
Jona (G.). Delle istituzioni in erede di corpi morali. Bergamo, 1901; 8°.
La Mantia (G.). Documenti inediti in lingua spagnuola in Sicilia. Palermo, 1899; 8°.
— Sul testo antico delle Consuetudini di Messina. Palermo, 1900.
Lampugnani (G.). Sulla vita di Guala Bicchieri. Vercelli, 1842; 4°.
Lessona (C.). L'indirizzo scientifico della procedura civile. Torino, 1898; 8°.
Levi (C. A.). Il vero segreto di Dante e Marco Polo. Treviso, 1905; 8°.
— Dante a Torcello e il Musaico del *Giudizio universale*. Treviso, 1906; 8°.
Lisini (A.). Indice di due antichi libri di imbreviature notarili. Siena, 1912; 8°.
Loevinson (E.). Sulle condizioni religiose della diocesi d'Aiaccio al principio del sec. XVIII. Roma, 1904; 8°.
Losio (C.). Sull'ampliamento del R. Museo industriale. Torino, 1897; 8°.
Lozzi (C.). La magistratura dinanzi al nuovo Parlamento. Bologna, 1883; 8°.
Luchi (L.). Il comm. Egisto P. Fabbri di Firenze. Firenze, 1890; 4°.
Luciani (L.). Lo svolgimento storico della fisiologia. Torino, 1894; 8°.
Lugaresi (V.). La costituzione di un nuovo comune nell'isola d'Elba. Portoferraio, 1882; 4°.
Lumbroso (A.). Nuovi documenti sul Murat nel 1815. Pinerolo, 1901; 4°.
— Dei principali repertori bibliografici per la storia del Direttorio, del Consolato e dell'Impero. Firenze, 1901; 8°.
— La Société bibliographique italienne et son cinquième Congrès. Besançon, 1902; 8°.
Mac Coll (M.). La responsabilità dell'Inghilterra verso l'Armenia. Napoli, 1896; 8°.

Magaldi (V.). La cassa nazionale di previdenza per la invalidità degli operai. Roma, 1899; 8°.
Magliano (R.). Boschi e corsi d'acqua. Torino, 1899; 16°.
Malagola (C.). Programma pel corso di paleografia e diplomatica. Bologna, 1889; 8°.
Malaguzzi Valeri (I.). L'archivio di Stato in Modena nel 1891. Modena, 1893; 8°.
— La Costituzione e gli Statuti dell'Apennino modenese dal secolo VIII al XVI. Rocca S. Casciano, 1895; 8°.
— I sigilli dei comuni dell'Apennino modenese. Bologna, 1897; 8°.
Malgarini (A.). Del valore. Milano, 1874; 8°.
Malossi (F.). Nel primo centenario della nascita di F. S. Gabelsberger. Udine, 1889; 12°.
Malvezzi (N.). Elogio di Giovanni Veronesi. Bologna, 1896; 8°.
— Una scorsa al libro I delle *Istorie fiorentine* del Machiavelli. Firenze, 1898; 8°.
Manara (U.). Il diritto ferroviario. Bologna, 1888; 8°.
Manasia (C.). Cenno storico statistico della biblioteca comunale di Caltanissetta. Caltanissetta, 1904; f°.
Marcelli (F. N.). In difesa del patrimonio artistico nazionale. Firenze, 1901; 8°.
Mariani (F.). L'evoluzione delle artiglierie nel sec. XIX. Roma, 1901; 8°.
— La questione di Genova. Roma, 1902; 8°.
Martello (C.). Gli spezzati d'argento italiani e il sistema monetario della lega greco-latina. Bassano, 1899; 12°.
Mascarello (D.). Scoperta sulla vera origine della mosca olearia. Genova, 1873; 8°.
Massa (C.). Modena a Lazzaro Spallanzani. Modena, 1888; 4°.
Matteotti (L.). Il campanile di S. Marco e i suoi piccioni. Firenze, 1906; 8°.
Mayer (M.). Breve guida del Museo provinciale di Bari. Bari, 1899; 16°.
Mazzini (C.). Cenni storici e descrittivi della stazione idrometrica sperimentale di Santhià. Torino, 1911; 8°.
Memoria (In) di Giovanni Finardi. Bergamo, 1905; 4°.
— del senatore Enrico Poggi. Firenze, 1890; 8°.
— di Gian Carlo Desimoni. Genova, 1897; 8°.
Memoriale al Ministro della marina delle Società degli operai del porto di Savona. Savona, 1904; 4°.
Menghini (M.). Mazzini e Madame d'Agoult. Imola, 1915; 8°.
Merlino (G.). Saggio di una novissima traduzione delle favole greche. Torino, 1899; 8°.
Milani (L. A.). La Bibbia prebabelica. Firenze, 1906; 8°.
Mino (G. E.). Nuove osservazioni sulla peste bubonica. Torino, 1837; 8°.
Montanari (A.). La teoria matematica del valore. Reggio Emilia, 1891; 8°.
Montel (E. de). Principii di teoria e d'applicazioni dell'interesse variabile. Milano, 1906; 8°.
Monti (C.). Sistema delle strade ferrate italiane. Roma, 1880; 8°.
Morana (G. B.). Il colera in Italia negli anni 1884 e 1885. Roma, 1885; 8°.

Morelli (M.) e **Conforti** (L.). La cappella del Monte di Pietà. Napoli, 1899; 8°.
Morelli Dardana (M.). Un letterato piacentino del sec. XVIII. Piacenza, 1914; 8°.
Nathan (E.). L'opera massonica nel triennio 1896-1899. Roma, 1899; 8°.
Neri (A.). Versi. Genova, 1897; 16°.
Nicolini (F.). I manoscritti dell'abate Galiani. Napoli, 1908; 8°.
Norsa (A.). Enrico Poggi. Firenze, 1890; 8°.
Nulli (R.). Visita all'ergastolo di Volterra. Firenze, 1888; 8°.
Occoferri (G.). L'istituto Leardi dal 1858 al 1909. Casale, 1909; 8°.
Oehl (E.). Il lavoro. Milano, 1867; 8°.
Ohlsen (C.). Il sistema penitenziario di Mettray. Torino, s. a., 12°.
Olivari (L.). La Marsiheso dei Latini. Genova, 1894; 8°.
Ondei (D.). Un poeta bresciano. Brescia, 1906; 8°.
Orano (D.). Lettere di P. C. Decembrio, frate Simone da Camerino e Lodrisio Crivelli a Francesco Sforza. Firenze, 1901; 8°.
Orano (G.). La riduzione scientifica del problema dell'ergastolo. Roma, 1901; 8°.
Orsi (D.). Il villaggio ideale. Torino, 1897; 16°.
Orsier (J.). Henri Cornélis Agrippa. Paris, 1911; 8°.
— Notes et documents inédits pour servir à l'histoire d'Eustache Chapuys. Paris, 1912; 8°.
Ottolenghi (C.). La misura delle variazioni dello stato economico delle popolazioni. Torino, 1900; 8°.
Pagliaini. Notizie storiche, bibliogr. e statist. della R. Biblioteca Universitaria di Genova nel 1898. Roma, 1900; 8°.
Pagliani (L.). Relazione intorno all'epidemia di colera in Italia nel 1893. Roma, 1894; 8°.
— La profilassi europea contro i morbi epidemici esotici. Roma, 1894; 8°.
Palazzo (Il) delle assicurazioni generali in Roma. Roma, 1906; 4°.
Palladino (P.). Sur l'unité des forces et de la matière. Turin, 1906; 8°.
Palomba (G.). Studi economico-sociali. Cagliari, 1896; 8°.
Panattoni (C.). Alla ricerca di un furto. Roma, 1887; 8°.
Paniè (A.). Memorie sul corpo di musica della Associazione generale degli operai di Torino. Torino, 1900; 4°.
Pantanelli (G.). Un documento relativo alla moglie di Guido Novello da Polenta. Bologna, 1912; 4°.
Papa (U.). Una questione d'arte per la loggia di Brescia. Roma, 1898; 8°.
— Camillo Tarello agronomo bresciano del sec. XVI. Firenze, 1899; 8°.
— L'Etiopia nella storia. Firenze, 1899; 8°.
Pasquali (E.). A Ferdinanda Pasquali-Calamari. omaggio dei suoi figli. Torino, 1886; 8°.
Patania (C.). Profilassi delle malattie veneree-sifilitiche. Napoli, 1890; 8°.
Paternò Castello (A.). Sulla ferrovia circumetnea. Catania, 1882; 4°.
Patrono (C. M.). Noterelle di storia del risorgimento italiano. Palermo, 1916; 8°.

Pavesi (P.). Il Ponte Lusertino. Pavia, 1895; 8°.
— Un'altra pagina di storia dell'Università pavese. Pavia, 1906; 8°.
Peborgh (L. van). Historique des règles d'York et d'Anvers. Anvers, 1904; 8°.
Pelicelli (N.). Del culto dell'Immacolata in Parma. Parma, 1904; 8°.
Pellizzari (G.) e **Ferro** (A.). Trasformazione dei derivati urazolici in composti triazolici. Genova, 1896; 8°.
Perreau (P.). Intorno la vita e le opere del rabbi Jona Ibn Ganah. Trieste, 1888; 8°.
Pettorelli (A.). Un'opera ignota di Antonio Van Dyck? Milano, 1914; 4°.
Piccolomini N. B. (F.). Il palazzo Pientino di Pio II. Siena, 1905; 8°.
Piccolomini (F. B.). Nozze Piccolomini-Clementini-Cinughi. Siena, 1902; 12°.
— Nozze Piccolomini-Clementini-D'Harcourt di Fiano. Siena, 1902; 12°.
Pizzini (A.). Una pagina d'arte greca. Mantova, 1901; 8°.
Plautus. Miles gloriosus. Trad. da G. Galati. Palermo, 1906; 8°.
Pozzi (F.). Le ordinanze del Senato sul procedimento Breda. Roma, 1899; 8°.
Pozzi (T.). Métope equestri. Torino, 1900; 8°.
Pratesi (P.). Sul vero luogo della battaglia di Gubbio o di Tagina (A. 552). Torino, 1897; 8°.
Prato (S.). Il concetto del lavoro nella mitologia vedica. Palermo, 1885; 8°.
Profeta (G.). Sulla prostituzione. Palermo, 1888; 8°.
Pullé (F. L.). Pietro Merlo. Milano, 1890; 8°.
Question (La) bulgare. Paris, 1888; 8°.
Rada (G. de). Poesie albanesi. Vol. II. Napoli, 1898; 8°.
— Autobiologia. Cosenza, 1898-99; 8°.
— Caratteri della lingua albanese. Catanzaro, 1899; 8°.
Rampoldi (R.). Inaugurandosi in Pavia il monumento a Cairoli. Milano, 1900; 8°.
Rangoni (D.). Dopo un viaggio in Italia. S. Paulo, 1903; 8°.
Ratto (L.). Note a sentenze. Roma, 1898; 8°.
— Il neo-scetticismo nella filosofia del diritto. Napoli; 8°.
Rava (L.). A proposito della Rhodesia. Roma, 1899; 8°.
— Inaugurazione della conferenza dei delegati degli Stati per la fondazione di un Istituto di agricoltura. Roma, 1905; 4°.
— Dal Codice civile al Codice del lavoro. Bologna, 1913; 8°.
Rebaudi (G.). Dell'individualismo. Genova, 1873; 8°.
Relazione ed atti riguardanti il monumento a Paolo Caliari. Verona, 1888; 8°.
Ricordi biografici dell'avv. Paolo Massa. Torino, 1888; 8°.
Ricordo per Biagio Miraglia. Nocera, 1888; 8°.
— di Angelo Beccaria. Torino, 1899; 8°.
Rinaudo (C.). Ricordi della vita di Nicolò Coletti. Torino, 1893; 8°.
Rosa (G.). I boschi e le selve della provincia di Brescia. Brescia, 1870; 8°.
Rosano (P.). In difesa del Comm. Roberto Cattaneo. Torino, 1903; 8°.
Rossi (L.). Sulla eleggibilità del deputato di un collegio in un altro collegio. Verona, 1903; 8°.
Ruata (C.). Contro la rivaccinazione obbligatoria. Città di Castello, 1899; 8°.
Ruggeri (G. B.). Venti anni di accentramento amministrativo in Italia. Milano, 1880; 8°.

Russo (A.). Sulla vita e sugli scritti del prof. G. Carnazza-Amari. Catania, 1900; 8°.
Russo (F.) e **Verdinois** (F.). Il frontone della nuova Università degli studi di Napoli. Milano, 1911; 4°.
Sanminiatelli (D.). Aetas Parentum Pejor Avis. Roma, 1894; 8°.
Sartori-Montecroce (T.). Corso di storia del diritto pubblico germanico. Trento-Venezia, 1908; 8°.
Scala-Rizza (G.). La questione universitaria. Torino, 1894; 8°.
Scalzi (F.). La seconda rivendicazione del Cesalpino. Arezzo, 1885; 8°.
— Quando il 29 agosto 1888 si inaugurava il monumento a Gir. Fabrizio in Acquapendente. Acquapendente, 1888; 8°.
Scarpa (V. G.). La lingua tedesca e i suoi dialetti. Torino, 1900; 8°.
Schettini (F. X.). Ad æternam Christophori Columbi memoriam, epigrammata. Neapoli, 1892; 8°.
— Scholarum piarum quarto ineunte saeculo. Neapoli, 1897; 8°.
Scotto (R.). Notizie ed appunti sulla pesca del tonno. Savona, 1900; 8°.
Scuola (R.). super. di applicazione agli studi commerciali in Genova. Cenni storico-statistici. Genova, 1899; 8°.
Sede (La S.) e l'Italia alla conferenza dell'Aja. Firenze, 1899; 8°.
Senato (Il) italiano e Giacomo Leopardi. Roma, 1899; 4°.
Serafini (P.). Aufidena nei Caraceni. Sulmona, 1902; 8°.
— Intorno a Sulmona del Lazio. Sulmona, 1901; 8°.
Sipione (C.). Profezia di un abate francese (1748) intorno alla Casa di Savoia. Ascoli, 1902; 4°.
Spedalieri (Nicola) (1740-1795). Numero unico. Roma, 1903; 4°.
Sperandeo (F.). La forma innata. Napoli, 1898; 16°.
Spinelli (F.). Sistema razionale automatico destinato ad evitare le collisioni dei treni. Oneglia, 1900; 8°.
Spinelli (A. G.). Mattoni manubriati nell'agro modenese. Modena, 1908: 8°.
— Bio-bibliografia dei due Vignola. Bologna, 1908; 8°.
Spinelli (Al.). Versi del 400 e del 600 attinenti a pittori od a cose d'arte. Carpi, 1892; 8°.
Tarasi (M.). La fine dei Vardarelli, secondo Pietro Colletta. Teramo, 1904; 8°.
Tenerelli (F.). Sulla riforma delle amministrazioni locali. Catania, 1877; 8°.
Tiberi L. Il Palazzo del popolo in Perugia. Perugia, 1902; 8°.
Tibone (D.). Inaugurazione del busto di Ambrogio Bertrandi. Torino, 1889; 8°.
Tonni-Bazza (V.). L'assedio di Cattaro del 1657. Roma, 1915; 8°.
Tononi (A. G.). Giovanni Losi nell'Africa centrale. Firenze, 1900; 8°.
Torrigiani (P.). Intorno all'influenza della economia politica sulle leggi civili. Pisa, 1872; 8°.
— La storia e la economia politica. Firenze, 1875; 8°.
— Sui rapporti fra i principii della popolazione e quelli di economia politica. Pisa, 1873; 8°.
— Lo studio della economia politica. Napoli, 1878; 8°.
Trotto (P.). La scuola elementare a Padova. Firenze, 1909; 8°.
Uhagon (F. R. de). La patria di Colombo. Savona, 1892; 8°.
Valetta (I.). Chopin. La vita; le opere. Torino, 1910; 16°.

Vegezzi-Ruscalla (G.). Del riformatorio di Parkhurst nell'Inghilterra. Torino; 8°.

Virgili (F.). L'applicazione della matematica all'economia politica. Firenze, 1890; 8°.

Vittani (G.). Matrimoni principeschi proposti a G. Piccinino nel 1460. Milano, 1912; 4°.

Vivanet (F.). Cagliari per Vittorio Hugo. Cagliari, 1902; 8°.

Volpicella (L.). Primo contributo alla conoscenza delle filigrane nelle carte antiche di Lucca. Lucca, 1911; 4°.

— Repertorio gentilizio per la città e lo stato di Lucca. Lucca, 1910; 8°.

Zdekauer (L.). Un inventario della libreria capitolare di Pistoia del sec. XV. Pistoia, 1902; 8°.

— Sulla compilazione di un codice diplomatico della Marca d'Ancona. Fano, 1903; 8°.

— La dogana del porto di Recanati nei secoli XIII e XIV. Fano, 1904; 8°.

— Sugli Statuti più antichi del comune di Montolino. Roma, 1909; 8°.

Zucchelli (G.). Relazione che accompagna il progetto di una nuova inalveazione del Tevere attraverso i Prati di Castello. Roma, 1879; 4°.

Annuario della R. Università di Genova. 1907-1908 — 1911-1912. Genova, 1908-1912; 5 voll. 8°.

Bollettino dell'emigrazione (Ministero degli affari esteri). Roma, 1907-1914; 8 voll. 8°.

Bollettino del Ministero degli affari esteri. 1907–1914. Roma; 8 voll. 8°.

Bollettino di statistica e di legislazione comparata. Ann. XI-XIV. Roma, 1910-1914; 4 voll. 8°.

Bullettino della R. Deputaz. abruzzese di storia patria. Ann. I-II, III 1-2, IV. Aquila, 1910-13; 8°.

Comité maritime international. Bulletin. N. 1, 3-6, 8, 20, 21, 24-27, 30-40. Anvers, 1897-1913; 8°.

France-Italie. Revue mensuelle. Année I. Paris, 1913-14; 8°.

Revue de Savoie. Tomes I, II, V. Paris 1912-14. 3 voll. 8°.

Rivista degli studi orientali. Annate I-IV, V 1, VI. Roma, 1907-1915; 6 volumi 8°.

Valentino (Il). Rivista tecnica mensile. Torino, 1911-14; 4 voll. 8°.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Novembre 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Salvadori, Naccari, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Panetti e Segre, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Foà.

Letto e approvato il verbale dell'adunanza precedente, il Presidente, nel dare il saluto ai colleghi, pronuncia le seguenti parole:

" Il nuovo anno accademico comincia mentre ancora la guerra domina, si estende, percote per le terre e sui mari tanti popoli furiosamente.

" Noi salutiamo con viva commozione i meravigliosi soldati d'Italia, noi ci rivolgiamo con ammirazione devota al Re, che con tanto valore impersona le glorie e le vittorie della Patria.

" Pur troppo il momento è tale che sembra sospesa la fraternità fra gli scienziati: ma nulla può infrangere l'universalità della scienza.

" Oggi ogni Nazione, con un senso nuovo e repentino di particolarismo e quasi d'esclusivismo scientifico, esalta se stessa e pare voglia appartarsi dall'eterno consorzio del pensiero umano. Però in questa illusione, in questo movimento di lotta fra le

varie civiltà, ciascuna Nazione afforza il proprio vigore scientifico, stimola la propria operosità intellettuale investigatrice, creatrice, rinnovatrice; e poichè sarà lotta passeggiera ed è indistruttibile l'unione della vita scientifica fra tutti i popoli, il presente movimento onde ciascuna Nazione vuole affrancarsi e primeggiare si risolverà a vantaggio del progresso comune di tutte le genti.

" Che così avverrà è certo.

" Che ciò avvenga presto instaurandosi il diritto della civiltà e della nazionalità fra tutti i popoli è voto nostro ardentissimo e concorde „.

Durante le ferie accademiche la Classe ha fatto la grave perdita del Socio corrispondente Ugo Schiff, morto a Firenze l'8 settembre. Apparteneva all'Accademia dal 28 gennaio 1900. Si dà incarico al Socio Guareschi di commemorarlo in una prossima adunanza.

Sono giunti, fra gli altri, i seguenti opuscoli, in omaggio dai loro Autori:

Dal Socio nazionale Taramelli: *Osservazioni circa la frana di Clauzetto*, e *Come si vennero formando i confini naturali della penisola italiana nella catena alpina.*

Dal Socio corrispondente Kilian cinque Note d'argomento geologico.

Dal Prof. G. Boccardi: l'*Annuario astronomico pel 1916 pubblicato dal R. Osservatorio di Pino Torinese*, e una Nota su *La variazione delle latitudini e le osservazioni di Pino Torinese.*

Dal Prof. L. Colomba: *Sopra una reazione del diamante*, e *Sopra alcune relazioni esistenti fra i caratteri strutturali della leucite e le sue giaciture.*

Inoltre vanno rilevati due nuovi volumi di corrispondenza del Berzelius, gentilmente inviati dal Prof. H. G. Söderbaum. Il Socio Guareschi mette in luce l'importanza di questi volumi, contenenti la corrispondenza scientifica fra Berzelius e Alex. Marcet, e fra Berzelius e Dulong; discorre brevemente dei pregi

che ha tutta quanta la corrispondenza scientifica di Berzelius e fa notare le nuove benemerenze che, con questa pubblicazione, viene ad avere il Prof. Söderbaum per la storia della scienza.

Lo stesso Socio Guareschi offre in omaggio tre suoi opuscoli: *Lavoisier e Berzelius nella storia della scienza*, *La calce sodata quale energico reagente generale e sua grande attività chimica*, e *La chimica dei gas velenosi e la guerra*.

Il Socio Mattirolo presenta in dono un ritratto dell'illustre botanico Gianpietro Maria Dana (1736-1801) che fu Socio della nostra Accademia: dono che proviene da un nipote del Dana.

Il Socio Guareschi presenta, per la stampa negli *Atti*, un suo scritto intitolato: *Delle singolari proprietà della calce sodata*, Nota I; e così il Socio Peano una Nota di S. Catania: *Sulle condizioni che caratterizzano una classe di grandezze*.

Il Socio Segretario, per incarico del Socio Foà, presenta una Memoria di lui col titolo: *Ricerche ematologiche. Sulla produzione delle piastrine del sangue, e sulla patogenesi delle trasformazioni fibroadenoidee nella milza*. È un lavoro che già era stato accolto per gli *Atti*, e che l'Autore preferisce pubblicare fra le *Memorie*. Con votazione unanime la Classe approva questo passaggio.

LETTURE

Delle singolari proprietà della calce sodata.

Nota I del Socio ICILIO GUARESCHI.

Introduzione.

Già da alcuni mesi io ho fatto un cenno più o meno esteso [1]. intorno alle singolari proprietà della *calce sodata*; di questo umilissimo prodotto chimico, ben pochi chimici si sono occupati, se si eccettui per dosare l'azoto nelle sostanze organiche col metodo Varrentrapp e Will, e per disseccare l'aria.

Io ho trovato che molte reazioni le quali colla potassa, la soda o la calce avvengono a temperatura più o meno elevata, colla calce sodata hanno luogo a temperatura ordinaria; e molte reazioni che cogli alcali caustici o cogli alcali terrosi non avvengono quando questi agenti si usano separatamente, hanno luogo invece, e talora violentemente, colla calce sodata. La calce sodata dovrà, a mio parere, quind'innanzi sostituire in molteplici casi gli alcali caustici, specialmente quando questi debbano essere usati allo stato solido od allo stato di fusione. È il migliore reattivo contro i gas detti asfissianti.

Questa sostanza è assai importante sia come agente assorbente, sia come agente decomponente, idrolizzante, ecc., e come agente sintetizzante.

In questi ultimi anni io ne ho consumato molta per depurare e disseccare l'aria che doveva servire per determinazioni

---

[1] I. Guareschi, *La chimica dei gas velenosi e la guerra*: Conferenza tenuta il 14 giugno 1915 all'Associazione Chimica di Torino (Vedi anche in " Conferenze e Prolusioni ,, anno VIII, N. 17). E più ampiamente in un articolo: *La calce sodata quale energico reagente generale e sua grande attività chimica*, in " Supplem. Ann. Enciel. di Chim. ,, agosto 1915.

d'acqua di cristallizzazione; e da più mesi l'adopro per effettuare molte reazioni chimiche, alcune delle quali non erano facilmente prevedibili, e per assorbire i gas velenosi e non velenosi. Come si vedrà nei seguenti capitoli di questo lavoro, la calce sodata assorbe, fissa, o decompone un gran numero di gas o di vapori, di liquidi evaporabili a temperatura più o meno elevata; reagisce anche, a temperatura ordinaria, con sostanze solide, ecc. Assorbe molti dei prodotti della putrefazione.

Il numero de' gas o vapori *velenosi*, *irritanti* o *lacrimogeni* che la calce sodata può assorbire, fissare o decomporre è veramente grandissimo, straordinario: cloro, bromo, acidi alogenici (cloridrico, bromidrico, iodidrico, fluoridrico); anidridi carbonica e solforosa, fosgeno od ossicloruro di carbonio; cianogeno, acido cianidrico o prussico, cloruro di cianogeno, bromuro e joduro di cianogeno, cloruro di solfo S^2Cl^2, cloruro di tionile, i cloruri di nitrosile, iponitride, idrogeno arsenicale e antimoniale; gli acidi solfidrico e selenidrico, mercaptani, acido solfocianico, indolo, scatolo, aldeidi, eteri clorocarbonici, derivati aromatici bromurati e clorurati nelle catene laterali (bromuro di benzile, bromuro di xilene [1] o di *xilile*), eteri monobromoacetico e cloroacetacetico, monocloracetone, ω-monobromacetofenone, anidride acetica, e tante altre sostanze che saranno accennate nelle note seguenti.

Io non conosco nessun'altra sostanza che praticamente possa sostituire la calce sodata in questa magnifica funzione.

---

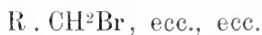
[1] Il collega Albin Haller, professore di chimica alla Sorbonne e membro della Commissione dei prodotti asfissianti, istituita dal Ministero della guerra francese, mi scriveva il 14 settembre p. p. che sul fronte francese avevano trovato delle bombe contenenti del *bromuro di xilene* (o più propriamente $C^6H^4\begin{smallmatrix}CH^3\\CH^2Br\end{smallmatrix}$ e $C^6H^4\begin{smallmatrix}CH^2Br\\CH^2Br\end{smallmatrix}$ e vari isomeri) o *bromuro di xilile* o di xililene, e del clorocarbonato di metile clorurato $CO\langle\begin{smallmatrix}OCH^2Cl\\Cl\end{smallmatrix}$. Io dimostrai poco dopo che il bromuro di xilene o bromuro di xilile è assorbito e fissato dalla calce sodata; e così lo sarà, con quasi certezza, il clorocarbonato di metile monoclorurato $CO\langle\begin{smallmatrix}OCH^2Cl\\Cl\end{smallmatrix}$, date le grandi analogie coll'etere clorocarbonico etilico $CO\langle\begin{smallmatrix}OC^2H^5\\Cl\end{smallmatrix}$, il quale, come pure dimostrai, è fissato avidamente dalla calce sodata.

Dei derivati bromurati o clorurati aromatici sono fissati specialmente quelli che contengono l'alogeno nelle catene laterali, non quelli che contengono l'alogeno nel nucleo centrale. Sempre a temperatura ordinaria, s'intende; ma si faranno delle esperienze anche a temperatura più o meno elevata.

La calce sodata fissa, oltre ad un gran numero di gas venefici, anche tutti quei composti inorganici od organici che contengono gruppi acidi o gruppi elettronegativi, quali:

$R.COBr$ e $COCl$

$R.COCH^2Br$ e $R.COCH^2Cl$

$R.CH^2Br$, ecc., ecc.

e quelli a funzione eterea, di aldeidi e talora di imidi o di fenoli ed altri corpi dei quali terrò parola più avanti.

La calce sodata è dunque la sostanza che coscienziosamente si può proporre come mezzo, anche economico, per preservare il nostro soldato dal maggior numero di prodotti chimici venefici (lacrimogeni, ecc.) che possono essere usati dai nemici in guerra. Tutti i gas detti asfissianti sino ad ora usati in guerra sono assorbiti o decomposti dalla calce sodata; come assorbe e decompone un gran numero di altre sostanze venefiche non ancora usate in guerra.

Può servire, come vedremo, a depurare l'idrogeno che si sviluppa dal ferro coll'acido cloridrico diluito o dallo zinco impuro (specialmente di zolfo e di antimonio) con acido solforico. Come pure potrà essere utilizzata a separare rapidamente l'idrogeno solforato, l'idrogeno antimoniale e l' idrogeno arsenicale dall'idrogeno fosforato e da altri gas.

Ho già detto che la calce sodata ha un grande valore come agente assorbente, decomponente e sintetizzante; può in moltissimi casi sostituire la potassa e la soda caustiche nella preparazione di composti chimici. Ho fiducia che sotto questo riguardo sarà adoperata anche nella preparazione industriale di molti composti. Potrà sostituire gli alcali caustici nella preparazione di fenoli, in molte reazioni sintetiche sia fra gas diversi, sia fra gas e liquidi oppure fra solidi. La calce sodata ben granulata ha il notevole vantaggio di presentare una grande

superficie reagente e di potere essere scaldata ad alta temperatura senza fondere; inoltre, intacca poco il vetro.

Può servire, come vedremo, a preparare dei nitrili, degli isonitrili, delle aldeidi aromatiche, materie coloranti, ecc.

È un agente energico di idrolisi; la maggior parte dei nitrili sono saponificati a temperatura ordinaria. In certi casi la reazione è tanto viva che ha luogo quasi un'esplosione a temperatura ordinaria; tale è il caso del *bromuro di cianogeno*, il quale, mescolato con calce sodata e dibattendo entro una boccia, dà luogo a violenta reazione con uno sviluppo di calore.

Fra i casi di sintesi posso ricordare la formazione rapida di acido cianidrico (e forse di *isocianidrico*) o di cianuri per l'azione della calce sodata, anche a temperatura ordinaria, su un miscuglio di ammoniaca concentrata e di cloroformio. Come pure della metilcarbilamina, sostituendo la metilamina all'ammoniaca, ecc. A temperatura ordinaria si formano la carbilamina dall'etilendiamina, dall'anilina e simili, dalla benzilamina, ecc. Con facilità si forma l'indigotina per l'azione della calce sodata su una soluzione acquosa-acetonica di ortonitrobenzaldeide.

Tutte queste reazioni ed altre numerose saranno esposte nelle mie comunicazioni successive.

Può servire, come è già noto, per assorbire e dosare l'anidride carbonica, invece della soluzione concentrata di potassa caustica.

Può essere utilizzata per depurare l'idrogeno, specialmente quando si tratta di quantità, relativamente piccole, che si usano in laboratorio. Come pure il gas illuminante.

Con apparecchietto adatto la calce sodata potrà essere praticamente utilizzata per respirare liberamente in certe miniere o pozzi, o nelle fogne od altri ambienti ove siano gas o vapori nocivi; come ad esempio nelle gallerie ferroviarie ove sia molto gas solforoso [1]. Vedremo con quale e quanta rapidità assorbe il gas solforoso.

---

[1] Secondo Seidel e Meserve (“Am. Journ. Pharm.„, 1914, t. LXXXVI, pag. 481, e “J. Pharm. Chim.„, 1915, pag. 88), i risultati ottenuti nell'analisi di 88 campioni d'aria dimostrano che i *tunnels* che servono per macchine a vapore contengono circa cinque volte più gas solforoso e ossido di carbonio che non i *tunnels* percorsi da macchine elettriche; l'aria dei primi su 100.000 p. contiene p. 1,5 di SO^2 e p. 26,7 di ossido di carbonio; e quella dei secondi p. 0,29 di SO^2 e p. 2,5 di CO.

Potrà servire benissimo per respirare in quegli ambienti ristretti ove è molto gas acido carbonico.

L'odore sgradevole dei prodotti della putrefazione è dovuto non solamente ad acido solfidrico, a mercaptani, indolo, scatolo, ecc., ma anche ad acidi grassi volatili (propionico, butirrico, valerianico, caproico) ed anche questi sono assorbiti dalla calce sodata. Per l'igiene si potrà usare un apparecchio a calce sodata in quelle fabbriche ove sono operai obbligati a respirare vapori nocivi. Insomma in molti casi questa sostanza può ora ricevere utili applicazioni.

È un vasto campo che spero di poter esplorare in buona parte e che parzialmente ho già esplorato. Ma innanzi tutto spero possa riescire di qualche utilità al nostro Paese.

Cenno storico.

L'idrato di calcio o l'ossido di calcio insieme all'idrato potassico o all'idrato sodico, formano, quando la temperatura è abbastanza alta, delle miscele, o forse anche meglio delle combinazioni o composti, ai quali si sono dati i nomi di *calce potassica* o *potassata,* e di *calce sodata.* Si usarono questi preparati alcalini a preferenza degli idrati alcalini di sodio o di potassio, perchè si hanno in forma solida e possono essere scaldati senza fondere facilmente, e facilmente si possono granulare. Ma si sono usati nell'idea di adoperare della soda o della potassa caustiche.

Io credo che i primi a preparare e ad usare la *calce potassica* siano stati Dumas e Stas, i quali l'impiegarono nel 1840 per decomporre gli alcoli a temperatura elevata. Nella loro memoria: *Second Mémoire sur les types chimiques* (1), J. B. Dumas e Stas a pag. 118 scrivono:

“ Nous allons décrire les expériences au moyen desquelles
“ nous avons déjà pu transformer l'alcol en acide acétique au
“ moyen des alcalis hydratés.

---

(1) “ A. Ch. „, 1840 (3), t. 73, p. 113.

" Ayant trouvé un grand avantage dans l'emploi d'un mé-
" lange de potasse et de chaux anhydre partout où il s'agit
" d'observer l'action des alcalis sur les corps dans des vases
" de verre, nous avons fait usage dans les expériences suivantes
" d'un mélange à parties égales de potasse chauffée jusqu'au
" rouge, et de chaux vive réduite en poudre. Ce mélange fait
" à chaud devient très dur par le refroidissement, et s'emploie
" après avoir été lui-même pulvérisé. Comme il est beaucoup
" moins fusible que la potasse libre, il attaque beaucoup moins
" les vases de verre, et il les attaque d'autant moins que la
" quantité de chaux a été portée plus haut. Nous l'appellerons
" *chaux potassée* ".

Essi studiarono non solamente l'azione della calce potassica a più o meno elevata temperatura sugli alcoli, ma anche sull'aldeide e su diversi eteri composti.

Poco dopo, per consiglio di Dumas, il Delalande [1] fece agire la calce potassica a 300° sul vapore di canfora.

Non ricordo ora se altri abbiano usato a scopi analoghi la calce potassica. Ma è certo che gli autori precedenti credevano che la calce potassica agisse come la potassa; se non che in una forma meno facile alla fusione. Ed invero parlano sempre di *azione della potassa.*

A scopo medico-chirurgico la miscela di calce e potassa era già conosciuta col nome di *caustico di Filhos*, che consiste in una miscela di 4 p. di KOH e 1 p. di calce viva, fusa e colata in istampi in tubi protettori di piombo.

Al Berzelius nel render conto del bel lavoro di Dumas e Stas nel suo " Rapp. Ann. ", 1840, e presentato all'Accademia di Stockholm il 31 marzo 1841, venne l'idea di applicare la *calce potassica* per dosare l'azoto nelle sostanze organiche azotate, trasformando l'ammoniaca che si sviluppa in cloroplatinato di ammonio. Ed invero egli descrive questo suo processo nel " Jahresb. ", 1840 (ediz. franc., 1842, p. 89) con parole molto chiare, dalle quali si scorge che il metodo di Will e Varrentrapp, fatto conoscere dopo, non è che l'applicazione dell'idea di Ber-

---

(1) *Recherches sur l'action que la potasse exerce sur le camphre,* " A. Ch. ", 1841 (3), t. I, p. 120.

zelius. Ed egli giustamente nel " Rapp. Ann. „, 1841, p. 96, si lamenta della dimenticanza. Questo metodo più esattamente dovrebbe denominarsi: *metodo di Berzelius, Varrentrapp e Will.*

Varrentrapp e Will (1), nel 1841, nel laboratorio di Liebig, descrissero il loro noto metodo per dosare l'azoto nelle materie organiche mediante riscaldamento con *calce sodata*, trasformazione dell'azoto in ammoniaca e dosamento di questa allo stato di cloroplatinato. Discussero se dovevano adoperare la calce potassica (2) o la *calce sodata*; preferirono la *calce sodata* preparata con 2 parti di ossido di calcio per 1 p. di soda caustica. Il metodo di preparazione è pressochè identico a quello dato poi dal Fresenius nel suo *Traité d'analyse chimique quantitative*, cap. 66. Fresenius raccomanda di preparare la calce sodata spegnendo la calce viva con liscivia di soda caustica. " Si prepara prima, con del carbonato di sodio cristallizzato del commercio, una liscivia di soda caustica e se ne determina la densità; con un certo peso di questa liscivia si estingue della buona calce caustica, scegliendo delle proporzioni tali che per 1 p. di soda idrata nella liscivia si abbiano 2 p. di calce anidra. Si evapora a secco in vaso di ferro, si scalda il residuo in un crogiuolo di ferro, o di Hesse, mantenendo il tutto per qualche tempo al rosso debole e riducendo la massa ancora calda in polvere fina, triturandola e passandola per setaccio, i cui fori abbiano 3 mm. di diametro. Ripassando la polvere così ottenuta (o meglio dobbiamo dire, i granuli) per un secondo setaccio, i cui fori siano di 2 mm., si ottiene della calce sodata di due grossezze diverse, in grani, che deve essere conservata in vasi ben chiusi „ (3).

La calce in grani più grossi, dice Fresenius, serve perfettamente per assorbire l'acido carbonico e quella in granelli più piccoli pel dosamento dell'azoto col metodo di Varrentrapp e Will.

Anche H. Rose nel suo *Traité d'analyse quantitative*, 1860, t. II, 2a ed., p. 1054, prepara la miscela detta calce sodata

---

(1) " A. „, 1841, t. XXXIX, p. 269.

(2) Della quale dovevano conoscere l'impiego fatto da Dumas e Stas.

(3) *Traité d'analyse quantitative*, § 66.

estinguendo la calce viva con soluzione di idrato di sodio, della quale si deve impiegare una quantità sufficiente affinchè si abbia 1 p. di soda solida per 2 p. di calce anidra. Si scalda in seguito il tutto sino al rosso scuro in un crogiuolo di Hesse e la massa ancora calda si granula. È bene, come raccomandano anche Chancel e Gerhardt *(Traité d'analyse)*, di disseccare prima la miscela in una marmitta di ghisa e calcinare in seguito il residuo in un crogiuolo. La si riduce poi in polvere o in granuli.

Il Jungfleisch, nel suo pregevole libro: *Manipulations de chimie, guide pour les travaux pratiques de chimie*, 1ª ediz., Paris, 1886, p. 754, prepara la calce sodata nel modo seguente:

" La *chaux soudée* se prépare en éteignant 2 parties de " chaux vive, et en mélangeant dans une marmitte de fonte " l'hydrate pulvérulent obtenu avec 1 partie d'hydrate de soude; " celui-ci a été préalablement dissous dans une quantité d'eau " suffisante pour que la liqueur forme avec la chaux une bouillie " homogène. On peut employer à cet effet les lessives de soude " du commerce, prises en quantités correspondantes, soit 228 gr. " de lessive des savonniers ($d = 1,332$ à 36° Bé) pour 100 gr. " de chaux vive, soit encore 170 gr. de lessive de soude à " 45° Bé ($d = 1,450$) pour 100 gr. de chaux vive. En agitant " constamment avec une spatule de fer, on évapore rapidement " la masse jusqu'à ce qu'elle soit devenue solide. On l'introduit " alors dans un creuset et on la chauffe au rouge sombre pen- " dant quelques minutes, pour chasser les dernières traces d'hu- " midité. On amasse le produit refroidi et on le passe à travers " plusieurs cribles métalliques, afin d'avoir de la chaux sodée " granulée de diverses grosseurs. Cette dernière opération doit " être faite en peu de temps, pour éviter l'action de l'humidité " et même du gaz carbonique de l'atmosphère.

" La *chaux potassée* se prépare de la même manière. Elle " est plus hygroscopique ".

Nè Dumas e Boussingault (1), nè Brunner (2) nelle loro ricerche sull'analisi dell'aria atmosferica, non adoperarono la calce sodata per disseccare l'aria e assorbire l'acido carbonico,

(1) " A. Ch. ", 1841 (3), t. III, p. 264.
(2) " A. Ch. ", 1841 (3), t. III, pp. 309-312.

ma solamente la soluzione concentrata di potassa e l'acido solforico da Dumas e Boussingault e la calce idrata e l'acido solforico concentrato da Brunner. Specialmente si usava anche dopo la pomice imbevuta di potassa concentratissima.

Gautier Arm., nella sua bella memoria *Les gaz combustibles de l'air: l'hydrogène atmosphérique* [1], fa notare che colla sola potassa caustica anche concentratissima non si riesce a togliere le ultime traccie d'anidride carbonica quando è in piccolissima quantità nell'aria; egli usa prima un tubo Liebig con potassa concentratissima, poi un tubo ad U pieno di cristalli d'idrato di bario umettati d'acqua. Io credo che si raggiungerebbe lo stesso scopo colla calce sodata recentemente preparata o benissimo conservata in vasi ermetici.

La *calce sodata* è meno igroscopica della calce potassica e da molti anni si usa nei laboratorî per disseccare l'aria o altri gas e assorbire l'anidride carbonica. Però nei Trattati di gazometria è detto poco o nulla della calce sodata come mezzo assorbente. Il Berthelot, nel suo magnifico libro: *Traité pratique de l'analyse des gaz*, Paris, 1906, p. 183, dice solamente che può essere usata la calce sodata per produrre una disseccazione e un assorbimento di acido carbonico, più efficaci che non con la potassa caustica solida e la calce viva. Bisogna però badare all'aria trattenuta dalla calce sodata, causa la sua *porosità*. Ora, secondo me, è precisamente questa porosità che rende ora preziosa la calce sodata per assorbire un gran numero di gas e di vapori.

Intorno alla calce sodata in relazione cogli alcali ho trovato le notizie seguenti, delle quali però, ora, non conosco la fonte originale:

" La calce (ed ugualmente come essa, la barite, la stronziana e la magnesia) si discioglie in copia negli alcali fusi, e più nella soda che nella potassa: 100 parti di potassa possono sciogliere 50 parti di calce.

" Le soluzioni della calce e delle altre terre alcaline negli alcali fusi posseggono un potere ossidante gagliardo, poichè trasformano molti metalli ad un grado elevato di ossidazione,

---

(1) " A. Ch. ,, 1901 (7), t. XII, p. 5.

tanto che sciolgono l'argento metallico, formando una materia che si fa bruna nel raffreddare e diventa nera trattandola coll'acqua; sciolgono il rame in bell'azzurro; il ferro, ma lentamente, con formazione probabile di *ferrati*; il piombo, con produzione di *piombati* „ [1].

Per determinare l'azoto totale delle urine si usava molto il metodo di Schneider-Seegen, basato appunto sull'impiego della calce sodata; tutto l'azoto dell'urina veniva eliminato sotto forma di ammoniaca [2]. Ora questo metodo è quasi sempre sostituito con quello di Kjeldahl.

Credo che si sia esperimentata la preparazione dell'acido ossalico mediante la segatura di legno e calce sodata.

Queste erano le sole notizie che io conoscevo sulla *calce sodata* quando proposi questo prodotto quale mezzo assorbente per i *gas asfissianti* (cloro, bromo, acidi relativi, ossicloruro di carbonio, perossido di azoto, ecc. ecc.). Dovendo adoperare un reattivo solido per assorbire questi gas, dopo aver provato il *carbonato sodico* con $10H^2O$, il *fosfato sodico* con $12H^2O$, il *borace* con $10H^2O$, ecc., pensai alla calce sodata, della quale in questi ultimi anni ne consumai molta per depurare delle grandi masse d'aria che mi serviva per la determinazione dell'acqua di cristallizzazione. Allora mi avvidi quanto era grande e vario il potere assorbente di questa massa granulare e porosa e mi accorsi subito che agiva in modo diverso dalla soda e dalla calce separatamente. Molte reazioni che avvengono a temperatura ordinaria colla calce sodata non si effettuano colla calce o colla soda, o colla potassa sole; e ciò apparirà chiaro dalle esperienze che ora descriverò.

Non è vero, come alcuni affermano, che la calce sodata agisca come gli alcali caustici e che ne differirebbe solamente per un'azione più pronta; essa ha un modo di agire tutto suo speciale; moltissime reazioni si compiono colla calce sodata, mentre non hanno luogo colla calce, colla soda caustica e colla potassa caustica separatamente. Ciò potrà dipendere dall'essere porosa non solo, ma dal contenere più o meno degli agenti catalizzatori.

---

(1) *Encicl. Chim.* del Selmi, 1869, vol. III, p. 543.

(2) Salkowski e Leube, *Die Lehre vom Harn*, Berlin, 1882, p. 59.

Come gli alcali caustici, ha l'inconveniente, è vero, di attirare l'umidità o l'anidride carbonica; anzi in grado elevato, al punto che bisogna conservarla in vasi perfettamente chiusi, o, meglio, entro piccoli vasi chiusi ermeticamente alla lampada, che poi si usano volta per volta.

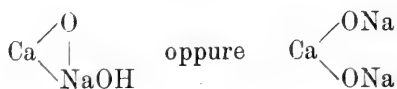
Ma sugli alcali caustici, soda e potassa, ha molti vantaggi: anche quando ha attirato una certa quantità di umidità atmosferica, come vedremo, assorbe e fissa bene egualmente i gas più pericolosi, come cloro, bromo, gas solforoso, ossicloruro di carbonato, eteri clorosi carbonici, ecc. ecc.

Io ho fatto un gran numero di esperienze su gas e vapori di sostanze inorganiche ed organiche le più variate ed ho sempre visto che le calci sodate, quali trovansi in commercio, non hanno lo stesso valore come agente assorbente e decomponente (e anche sintetizzante). L'azione loro è tanto più energica quanto più sono *preparate di recente* e *ben conservate*.

Come agisca la calce sodata, e quale sia il composto definito che contiene, sarà detto in un'altra nota. Intanto ammettiamo che contenga il composto

$$Ca\begin{cases} O \\ \mid \\ NaOH \end{cases} \quad \text{oppure} \quad Ca\begin{cases} ONa \\ ONa \end{cases}$$

od anche

$$Ca\begin{cases} OH \\ ONa \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} Ca\begin{cases} OH \\ \end{cases} \\ \quad O \\ Ca\begin{cases} \\ ONa \end{cases} \end{matrix} .$$

Anche intorno alla quantità di acqua perduta per l'azione del calore, oppure assorbita lasciando all'aria le varie calci sodate, sarà detto in una successiva nota.

Dividerò questo mio lavoro in più parti o capitoli, incominciando dai gas propriamente detti, e tenendo conto specialmente dei gas più velenosi.

Parte I.

Azione della calce sodata sui gas.

Ho fatto questa distinzione empirica tra gas e vapori unicamente per tener conto, anche riguardo ai così detti gas asfissianti, di quelle sostanze che nelle condizioni ordinarie di pressione e di temperatura sono allo stato gasoso e, d'altra parte, di quelle altre sostanze che nelle sopradette condizioni sono liquide o solide ma che più o meno facilmente si trasformano in gas o vapori.

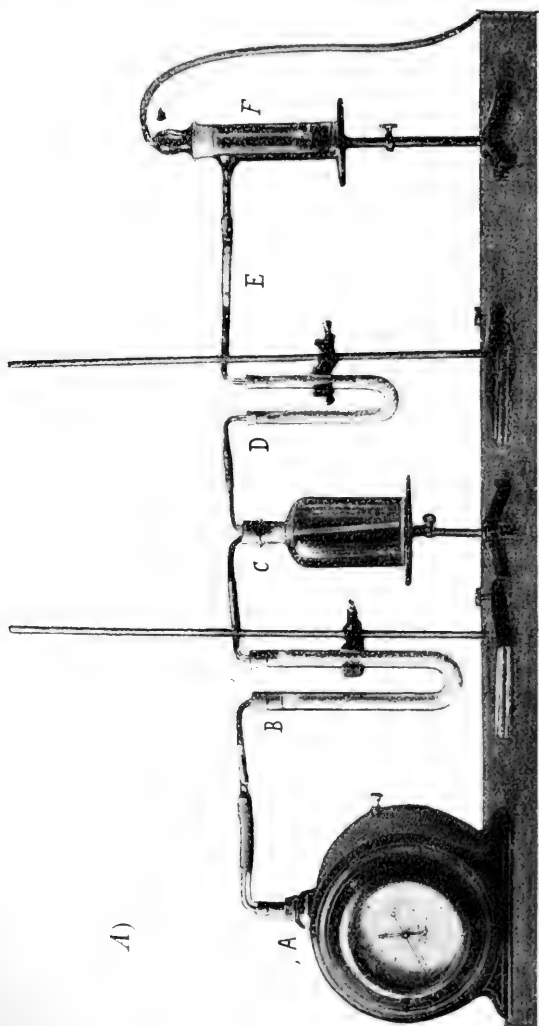
Generalmente le esperienze di assorbimento per i gas furono da me fatte in due modi:

1) Facendo passare il gas contenuto in una boccia di vetro o in un matraccio o in una più o meno grossa bolla di vetro chiusa alla lampada ai due estremi e del contenuto di 2 cm^3 sino a 100 cm^3 e anche 500 cm^3, attraverso la calce sodata di recente o di vecchia preparazione e contenuta entro tubi ad U del diametro da 1 a 2 cm. e della lunghezza totale di 25 a 40 e anche 50 cm. Talora facevo passare il gas schietto per spostamento, oppure più generalmente insieme a corrente d'aria mediante una pompa ad acqua. L'aria era, o nelle condizioni ordinarie, o disseccata con cloruro di calcio o con calce sodata contenuta in un grosso tubo, e così evitare anche l'acido carbonico dell'aria. Se occorreva, univo all'apparecchio un contatore di Riedinger. Dalla parte opposta ponevo i reattivi per vedere se il gas passava od era assorbito e così entro tubetto mettevo le carte reattive e in una boccia Habermann una soluzione reattiva (acqua di calce, di barite, d'anilina, ecc.).

L'apparecchio che generalmente ho usato è rappresentato dalla figura *A*) nella pagina seguente.

In moltissime esperienze che non riguardano la respirazione il contatore può essere eliminato.

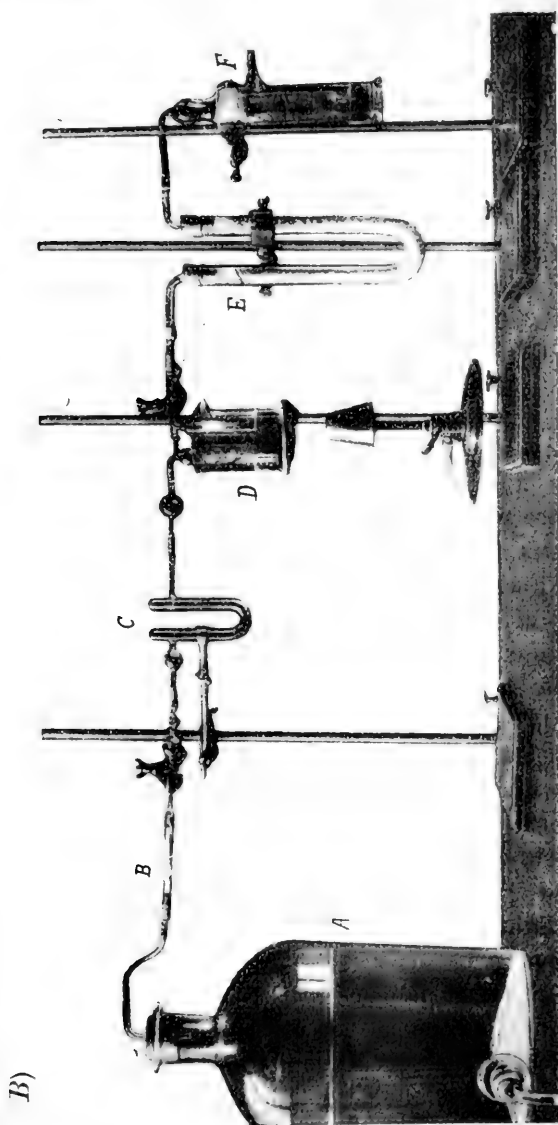
Nel caso di sostanze bromurate, per esaminare se sono o no fissate dalla calce sodata uso l'apparecchietto (fig. *B*) seguente, molto simile a quello che già descrissi per la ricerca dei gas

bromurati (1). In *A* un aspiratore; in *B* un tubetto con cartina bagnata di soluzione di fucsina decolorata col gas solforoso,

A. Contatore. Si usa quando occorre conoscere la quantità d'aria fatta passare.
B. Tubo a calce sodata o a cloruro di calcio per depurare l'aria.
C. Boccia contenente il gas da esaminare; che può essere sostituita da una boccia di Habermann per i liquidi più o meno volatili.
D. Tubo a calce sodata attraverso al quale deve passare il gas. Occorrendo, nella branca a destra si innesta, con un tappo a due fori, un termometro.
E. Tubetto contenente le carte reattive (tornasole, acetato di piombo, ecc.).
F. Boccia di Habermann con acqua o con reattivi (acqua di calce o di barite, ecc.) in comunicazione con una pompa ad acqua o ad altro aspiratore.

C un tubo vuoto per condensare il vapore d'acqua, *D* tubo di Mitscherlich a 5 bolle contenente soluzione satura di acido cro-

(1) I. Guareschi, *Sulla ricerca dei gas e dei vapori bromurati*, "Atti R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1914, vol. XLIX, p. 333.

mico e scaldato a bagno maria; *E* tubo a calce sodata; *F* boccia di Habermann contenente la sostanza da esaminare, e può es-

sere scaldata in un b. m. La boccia di Habermann può essere sostituita da un grande pallone contenente il gas od i vapori della sostanza da esaminarsi.

2) Oppure, per vedere quale era più esattamente la quantità di gas assorbito usavo mettere il gas in una campanella graduata ed entro bagno idrargiro-pneumatico.

3) Per determinare la quantità di gas assorbito dalla calce sodata, nel caso di quei gas che intaccano il mercurio, quali il cloro, il bromo, ecc., mi sono valso di quell'apparecchietto che adoperai per l'ossicloruro di carbonio (Vedi più avanti).

Come dirò più avanti, una delle condizioni principali di *attività chimica* è quella che la calce sodata sia di recente preparazione o conservata benissimo entro vasi chiusi alla lampada; ed io ora la conservo tutta entro grossi tubi o vasi di vetro di varia forma e grandezza a lungo collo, ma chiusi alla lampada.

Questo naturalmente vale per la calce sodata che serva per ricerche scientifiche e che deve conservarsi a lungo. Se deve servire per apparecchi assorbenti dei gas velenosi, insieme alle maschere per soldati, allora non è così rigorosamente necessario che stia in vasi di vetro chiusi alla lampada. Si conserva bene anche in vasi di latta chiusi con viti oppure con buoni tappi di sughero; e in questo caso anche se ha assorbito un poco di umidità funziona benissimo egualmente. Io ho esaminato della calce sodata, ben preparata, rimasta entro apparecchietti o scatole di latta di varia forma chiusi con tappi di sughero e anche dopo più mesi la calce sodata era ancora molto buona, dava ottimi risultati, faceva incandescenza coll'acido solfidrico, assorbiva benissimo l'ossicloruro di carbonio, ecc.

Il tenerla in vasi chiusi ermeticamente è necessario quando, come accade spesso nei laboratori, si debbono tenere dei vasi di calce sodata ripieni per lungo tempo o si deve di tanto in tanto prelevarne.

Del resto anche la calce sodata recentemente preparata e tenuta in boccie ordinarie con un buon tappo di sughero e ricoperto con pergamena, anche dopo 2 mesi produceva una magnifica incandescenza coll'acido solfidrico.

Sotto qualunque aspetto la si riguardi, è indubitato che come assorbente dei gas più o meno velenosi, *praticamente*, la calce sodata è il mezzo migliore.

In quanto poi alla questione: come agisca la calce sodata

e se sia una miscela oppure un composto definito, dirò più avanti dopo esposte le esperienze fatte. Io ho emesso le ipotesi che possa contenere $Ca(ONa)^2$, oppure $Ca\begin{smallmatrix}\diagup OH\\ \diagdown ONa\end{smallmatrix}$, oppure $Ca\begin{smallmatrix}\diagup O\\ |\\ \diagdown NaOH\end{smallmatrix}$; ma come dirò a suo tempo può anche contenere altri composti.

Per comodità di alcuni lettori credo utile riprodurre qui una tabella delle quantità minime di gas tossici che possono essere tollerate; questa tabella si deve principalmente alle ricerche di Lehmann, Lewin ed altri [1]:

Quantità minime di gas che sono ancora tossiche o che possono essere tollerate:

Nome del gas	Quantità ‰			
	rapidamente mortale	in ½ a 1 ora produce fenomeni pericolosi	si sopporta per ½ a 1 ora	anche dopo molte ore non sintomi gravi
Acido cloridrico .	—	1.5 - 2	0.05 a 1	0.01
Cloro e Bromo . .	circa 1	0.01 a 0.06	0.004	0.001
Acido solforoso. .	—	0.4 - 0.5	0.05 - 0.2	0.02 - 0.03
Acido prussico . .	circa 0.3	0.12 - 0.15	0.05 - 0.06	0.02 - 0.04
Ammoniaca. . . .	4 - 5	0.5 - 1	0.3 - 0.4	0.1
Idrog. fosforato. .	—	0.4 - 0.6	0.1 - 0.2	—
Acido solfidrico. .	1 - 2	0.5 - 0.7	0.2 - 0.3	0.1 - 0.15
Ossido di carbonio	—	2 - 3	0.5 - 1	0.2

---

[1] Vedi LEWIN, *Traité de toxicologie*, trad. franc., 1903, p. 129; KOBERT, *Compendio di tossicologia pratica*, trad. ital., 1915, p. 41; e in I. GUARESCHI, Conferenza sulla *Chimica dei gas velenosi e la guerra*, Torino, 14 giugno 1915.

1) Cloro, bromo, e acidi alogenici.

Cloro. — Il gas cloro è avidamente assorbito dalla calce sodata. Come pure il *vapore di bromo*, e i gas *cloridrico, bromidrico, jodidrico*, ecc. Questi gas acidi vengono assorbiti anche dalle soluzioni dei carbonati alcalini, come è noto, ma ben anco dal *carbonato di sodio in cristalli* $Na^2 CO^3, 10 H^2O$ e dal *carbonato* $Na^2 CO^3, 2 H^2O$: in questo caso però si sviluppa molta anidride carbonica, la quale certamente non è senza inconvenienti per la respirazione. Ma se questi gas o vapori acidi si fanno passare attraverso un tubo ad U contenente della calce sodata, questa si scalda, e non lascia fuggire l'anidride carbonica, perchè, se questa viene messa in libertà nella prima branca del tubo, viene poi riassorbita dalla calce sodata che viene dopo nella seconda branca.

Ottimi risultati io ottenni colla *calce sodata* finamente granulata, la quale assorbe avidamente il cloro con sviluppo notevole di calore. Si sono fatte esperienze entro tubi ad U e con aria contenente 4 % di cloro ed anche con bottigliette, o bolle di vetro, contenenti 490 cm^3 di cloro schietto. Appena cominciava a passare la corrente d'aria, il cloro veniva assorbito e dalla parte opposta del tubo non si riconosceva affatto il cloro, nè all'odore nè coi suoi reattivi.

Ecco una delle tante esperienze fatte :

Attraverso 85 gr. di calce sodata (in piccoli grani) contenuta in un tubo ad U di circa 2 cm. di diametro, furono fatti passare circa 2.5 litri di gas cloro schietto mediante spostamento con corrente d'aria ; dopo pochi istanti tutto il cloro era assorbito con sviluppo di molto calore (la temperatura può arrivare a 160° e più) ed i reattivi della parte opposta all'entrata del cloro non diedero affatto segno di questo gas.

In un'altra esperienza, 40 gr. di calce sodata Kahlbaum mista a parti eguali di granuli piccoli e medî assorbirono rapidamente più di 500 cm^3 di gas cloro schietto, con sviluppo di molto calore. Appena la metà del tubo si riscaldò. L'assorbimento si fece in circa $^1/_2$ minuto. La corrente d'aria era rapidissima e abbondante, come nella inspirazione.

Si fecero molte esperienze anche con gas cloro misto a più o meno di aria.

Attraverso 80 gr. di calce sodata contenuta in un tubo [1] di circa 2 cm. di diametro feci passare con corrente d'aria un miscuglio di 1 litro di cloro e 9 litri d'aria. Col passaggio di circa 22 a 24 litri di aria il riscaldamento della calce sodata non salì a più di 50°-60°, e dopo circa 40 litri tutto il cloro era assorbito.

Si fece un esperimento con cloro più diluito e cioè 206 cm³ in 9 litri d'aria, e corrente d'aria. La calce sodata si scalda pochissimo: la velocità dell'aria era pressochè come quella della respirazione, circa 7 litri al minuto. Il cloro è assorbito avidamente.

Gr. 12.254 di calce sodata in piccoli granelli da 1 a 2 mm. assorbirono 2.003 gr. cioè 632 cm³ di cloro fatto passare in lenta corrente d'aria; 100 gr. ne assorbirebbero 5157 cm³.

Questi numeri sono solamente approssimativi, perchè la quantità assorbita varia colla rapidità della corrente, colla grossezza dei granuli, colla qualità della calce sodata, ecc.

Si sono fatti degli esperimenti con un apparecchietto di latta contenente 250 a 300 gr. di calce sodata in comunicazione mediante tubo di gomma con una buona maschera. Si entrò in un camerino di circa 7 m³ e contenente gradatamente da 0.5 ‰ a 1 ‰ e sino a 5 ‰ di cloro. Si respirava benissimo senza che traccia di cloro passasse attraverso alla calce sodata. E ciò anche dopo 10 minuti e un quarto d'ora. Così si è fatto con vapori di bromo, ecc.

L'esperimento di respirazione può farsi anche con un semplice tubo ad U pieno di calce sodata; in tal modo può diventare una dimostrativa esperienza di lezione: un largo pallone con 2-3 litri di cloro, in comunicazione con un tubo ad U contenente circa 200 gr. di calce sodata, e si aspiri dalla parte opposta. Tutto il cloro verrà assorbito senza inconveniente dell'operatore. E così col vapore di bromo, che si vede scomparire a mano a mano che si fanno le inspirazioni.

---

[1] Quando dico *tubo* intendo sempre un tubo a forma di U, perchè l'uso di questi tubi è più comodo di quelli lunghi orizzontali.

Bromo. — Col bromo si hanno risultati simili ai precedenti; il vapore di bromo è evidentemente assorbito dalla calce sodata con sviluppo di molto calore. Si può fare gorgogliare l'aria in corrente rapidissima attraverso al bromo liquido e poi per un tubo di 1.8 mm. e lungo 25-30 cm. contenente 55-60 gr. di calce sodata e in breve tempo si assorbono 13 a 15 gr. di bromo. L'assorbimento è rapidissimo. La temperatura si innalza molto, ma meno che col cloro.

Ho fatto un esperimento di respirazione nel modo seguente: in 9 litri di aria ho messo circa 4 gr. di bromo; il miscuglio era di color rosso vivo. Io respirai attraverso un tubo contenente 127 gr. di calce sodata in modo da far passare una rapida corrente di circa 26 litri d'aria nei miei polmoni senza sentire traccia di bromo. La calce sodata per 100 gr. può assorbire comodamente 25 gr. e più di bromo.

La calce sodata è dunque un eccellente assorbente del *cloro* e del *bromo.*

Acidi cloridrico, bromidrico, e jodidrico. — Sono avidamente assorbiti con sviluppo di molto calore.

Acido fluoridrico. — Riguardo l'acido fluoridrico non ho fatto esperienze, ma indubbiamente deve essere facilmente assorbito, date le analogie cogli altri idracidi.

Per il cloro, per il bromo e per molti dei corpi a netta funzione acida non ha molta importanza che la calce sodata sia o no recente. Della calce sodata vecchia di molti anni, in piccoli granuli, assorbì benissimo il cloro, il bromo, ecc., ma assorbiva poco acido carbonico e non diventava incandescente con acido solfidrico in corrente d'aria, come vedremo.

Un apparecchietto a calce sodata potrebbe essere usato in quelle officine nelle quali gli operai sono obbligati a respirare aria più o meno inquinata da cloro o da vapori di cloro, o di acidi.

Calce sodata e carbonato sodico. — Anche la miscela di 20 p. di calce sodata e 5-10 p. di carbonato sodico contenente 2 H^2O, è una eccellente assorbente dei vapori acidi, del cloro, bromo, ecc.

2) Ossicloruro di carbonio o fosgeno $COCl^2$.

Il fosgeno od ossicloruro di carbonio o cloruro di carbonile fu scoperto da John Davy nel 1812 (1) e non da Humphry Davy come alcuni erroneamente hanno scritto. L'ottenne esponendo alla luce solare un miscuglio di volumi eguali di ossido di carbonio e di cloro. Da ciò il suo nome di gas *generato dalla luce*. Si fabbrica ora in grande quantità e si comprime entro bombe o cilindri metallici, e per piccole quantità in tubi di vetro.

Per ricerche scientifiche e molto puro si usa quello sciolto nel toluene al 20 %: io ho usato questo gas, spostandolo con aria.

Questo gas, incoloro, ha odore irritante, eccita la lacrimazione; respirato, dà senso di soffocazione ed è assai pericoloso. Il Lewin nel suo *Trattato di tossicologia* (2) scrive: " Io ho fatto inalare agli animali il *fosgene gasoso* il quale, in presenza dell'acqua si trasforma in acido cloridrico e acido carbonico (3). Tutti morirono con convulsioni, dispnea e fenomeni di irritazione delle mucose; ma nel sangue io non ho mai osservato dei fenomeni spettroscopici attribuibili all'azione dell'ossido ".

È noto che questo gas non è assorbito nè decomposto dai carbonati alcalini, nemmeno se questi sono in soluzione satura. È assorbito, e pure questo è noto, dagli alcali caustici, ma meno bene che non la calce sodata; questa l'assorbe con grande avidità.

Feci una prima esperienza col gas contenuto in 10 cm^3 di soluzione toluenica al 20 % e lo feci passare attraverso a 70 gr. di calce sodata. Venne immediatamente assorbito, istantaneamente, con sviluppo di calore. La carta reattiva, l'acqua di barite, la soluzione di anilina, l'odore, ecc., non diedero il minimo segno di ossicloruro dalla parte opposta del tubo.

(1) " Philos. Trans. ", 1812, p. 144.

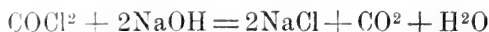
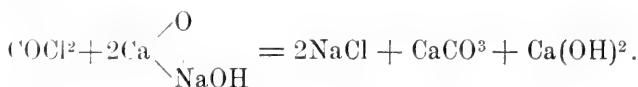
(2) *Traité de toxicologie*, trad. fr., p. 400.

(3) L. Lewin, " Arch f. pathol. Anat. ", 1879, vol. LXXVI.

E si noti che in questa, come in altre esperienze, la corrente d'aria era rapida ed abbondante, come sarebbe nella *inspirazione*, cioè 200 a 300 cm³ per minuto secondo. Tutto rimane fissato, e probabilmente secondo l'equazione:

$$COCl^2 + 2NaOH = 2NaCl + CO^2 + H^2O$$

od anche

$$COCl^2 + 2Ca\begin{matrix} /O \\ \backslash NaOH \end{matrix} = 2NaCl + CaCO^3 + Ca(OH)^2.$$

Comunque sia, l'anidride carbonica non si sviluppa, e nel primo caso rimane fissata dall'eccesso di calce sodata.

Operando nello stesso modo con 70 grammi di cristallini di carbonato sodio $Na^2CO^3 . 10\,H^2O$, il gas passa subito, inalterato, e così fece colla soluzione satura di carbonati alcalini e anche in cristalli e con la soluzione di iposolfito di sodio; in questi casi non si fissa nemmeno se il gas passa lentamente.

Anche se l'aria che passa per trascinare il gas ossicloruro è ben secca passando attraverso ad acido solforico o ad un tubo grosso con calce sodata, l'ossicloruro viene fissato benissimo.

Se invece della calce sodata recentemente preparata e ben conservata si adopera della calce sodata Kahlbaum, già preparata da lungo tempo ma conservata in boccie chiuse con tappo di sughero, il gas si assorbe pure bene, con sviluppo di calore. Vedremo però che vi è differenza nella quantità assorbita.

Nelle stesse condizioni in un tubo simile ai precedenti contenente 100 gr. di *idrato sodico* NaOH in pezzetti (e parte in polvere) l'ossicloruro si assorbe e sviluppa molto calore, ma si nota l'inconveniente che la parte di NaOH che ha assorbito $COCl^2$ diventa durissima, si attacca al vetro e può ostruire, anzi ostruisce, il tubo; il che non accade colla calce sodata anche in piccoli granuli.

Ho voluto fare l'esperimento anche coll'*idrato di potassio* KOH. Circa 62 gr. di potassa in pezzetti, misti a poca polvere, furono posti in tubo simile al precedente, ma più piccolo. Il gas $COCl^2$ si assorbe con sviluppo di molto calore, ma poi *il tubo si ostruisce.* Allora cambio la potassa e ne metto di quella in pezzetti più

grossi; ma in questo caso, dopo poco istanti il gas $COCl^2$ passa inalterato ed il tubo rimane in parte ostruito.

Comunque sia dunque, nè la soda nè la potassa caustica possono convenientemente sostituire la calce sodata.

Ho rifatta l'esperienza con la calce sodata in grani grossi. In un tubo del diametro di 1.8 mm. ho messo 43 gr. di calce sodata Kahlbaum detta *Pfefferkorngrösse*. Ho fatto passare velocemente del $COCl^2$; tutto, e rapidamente, veniva assorbito. All'occhio non appariva nessuna modificazione dei grani, il tubo non restava ostruito, ecc. Risultato ottimo. Dunque la calce sodata anche in granuli grossi, ed anche non recente, assorbe bene l'ossicloruro.

Ho esperimentato il $COCl^2$ anche colla calce sodata *preparata con 1 p. di CaO e 1 p. di NaOH*. Su 50 gr. di questa in tubo di 1.6 mm. e lungo in totale 30-35 cm. si fece passare l'ossicloruro; si riscaldò molto e la calce sodata fissò bene $COCl^2$.

29 grammi di calce sodata *preparata con CaO dal marmo*, fissarono del $COCl^2$, ma poco; si scalda meno della precedente, poi dopo breve tempo il $COCl^2$ sfugge.

Ho fatto esperimento anche con calce sodata Erba (molto simile a quella di Kahlbaum) in grani grossi come quelli del pepe, di circa 5-6 mm. L'assorbì bene e si scaldò.

La stessa calce sodata Erba lasciata all'aria umida per 9 ore a temp. 18°-20° (giornata nuvolosa) assorbì 7.4 % di acqua e anidride carbonica. Poi posta in tubo e fattovi passare l'ossicloruro, anche in questo caso venne assorbito bene, benchè la corrente d'aria fosse molto energica; sviluppò però meno calore. Dunque anche in queste condizioni la calce sodata serve benissimo come assorbente dell'ossicloruro di carbonio.

Della calce sodata buona recente, lasciata all'aria, in strato sottile per 48 ore (tempo nuvoloso, temperatura 18°-20°), assorbì 38 % del proprio peso. Questa calce sodata, che era diventata rossastra, assorbiva ancora l'ossicloruro ma molto incompletamente e dopo poco tempo lo lasciava passare inalterato. Dunque la calce sodata molto umida serve poco bene.

Della calce sodata recentemente preparata, ma stata dentro un vaso di latta, analogo a quello ora proposto per i soldati, ma che era mal chiuso e per cui la calce sodata aveva attirato l'umidità come si scorgeva al colore, dopo 3 mesi, assorbiva

ancora abbastanza bene l'ossicloruro di carbonio. 21 gr. di questa calce sodata mal conservata posta in un piccolo tubo ad U del diametro di 1 cm. e lunghezza totale di 20-25 cm³, assorbirono rapidamente l'ossicloruro fatto passare con rapida corrente d'aria e sviluppò tanta calce da produrre dell'acqua nella parte opposta del tubo. Tutto l'ossicloruro (circa 40 a 50 cm³) fu assorbito. *Dunque anche in queste condizioni poco buone la calce sodata assorbe bene il fosgeno.*

Che il gas fosgeno sia avidamente assorbito dalla calce sodata si può dimostrare anche coll'esperimento seguente: nel fondo di un boccione ad apertura molto larga, della capacità di 10 litri, misi 30 gr. di calce sodata in istrato sottile e poi un cristallizzatore con 4 a 5 cm³ di soluzione toluenica al 20 % di ossicloruro. L'odore acutissimo di questo e la reazione acida erano evidenti. Chiuso il boccione e lasciato a sè circa 2 ore, non vi era più gas fosgeno libero; tutto era stato assorbito; reazione neutra e odore di toluene.

Torino, R. Università, ottobre 1915.

Sulle condizioni che caratterizzano una classe di grandezze.

Nota di SEBASTIANO CATANIA.

Il contenuto di questa Nota presuppone la conoscenza di due Note del Prof. C. Burali-Forti e d'un mio recentissimo opuscolo (*).

In ([b]) è stabilito che *u* è una " classe di grandezze omogenea rispetto all'operazione + per gli *u* ,, o, brevemente, " è una Grand + ,, quando per *u* e + sono sodisfatte ([a]) otto condizioni I-VIII, tra le quali non è compresa la proprietà Comm + per gli *u* (**).

(*) Note ed opuscolo che indicherò con ([a]), ([b]), ([c]), cioè:

([a]) C. Burali-Forti, *Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri.* " R. Accad. delle Scienze di Torino ,, 1904.

([b]) Id., *I numeri reali come operatori per le grandezze.* " R. Accad. dei Lincei ,, marzo 1915.

([c]) S. Catania, *Grandezze e numeri.* Niccolò Giannotta, Catania, maggio 1915.

(**) Nel 1904 il Prof. C. Burali-Forti pubblicò negli " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „ un lavoro intitolato: *Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri.* Egli così comincia il suo lavoro:

" Il sig. E. V. Hungtington ha recentemente pubblicati alcuni interes-
" santi e notevoli articoli in " Transactions of the American Mathematical
" Society „ (1902, 1903), nei quali dà i sistemi di postulati atti a definire,
" rispettivamente, le *grandezze*, gli *interi*, i *razionali*, i *numeri reali*. I po-
" stulati per le grandezze non nulle, e dei quali è dimostrata l'*assoluta in-*
" *dipendenza*, sono in numero di *sei*, e tra essi non è compresa la proprietà
" commutativa della somma, che l'A. dimostra, valendosi dei numeri interi
" e del postulato della continuità, il che costituisce un notevole progresso
" sui lavori precedenti relativi allo stesso argomento „.

Qui il Burali-Forti cita un altro suo lavoro: *Propriétés formales des opérations algébriques*, pubblicato nella " Rivista di Matematica „ di G. Peano, nel quale dice: " In questo lavoro i postulati per le grandezze, compresa
" la grandezza nulla, sono *nove*, tra i quali si trova la proprietà commutativa.
" Il sistema di condizioni I–VIII (che più sotto riporto per comodo del let-
" tore) coincide col sistema di postulati ora indicato da cui si tolga la pro-
" prietà commutativa; differisce da quello del sig. Hungtington in quanto è
" anche atto a individuare la grandezza nulla, ed esprime il postulato della

Occorre tenere presente ([b]) che l'elemento nullo di u (unico, per le I-VIII), lo zero, 0, è caratterizzato da $0 + x = x$, qualunque sia l'x di u, e se x ed y sono u, la relazione $x > y$ significa $x = k + y$, dove k è un u non nullo (*).

" continuità indipendentemente dal concetto di successione e, quindi, di numero intero ". — Io aggiungerò che il *numero totale* dei postulati dell'Hungtington è superiore ad *otto* e anche a *nove*, numero delle condizioni (non più postulati!), dalle quali non solo la teoria delle grandezze ma anche quella dei numeri derivano totalmente. Si ha dunque un notevole progresso scientifico (per non parlare di quello didattico) rispetto all'Hungtington.

Va da sè che essendo il Burali-Forti in ([b]) riuscito a far precedere la definizione dei Q_0 (classe *generale* dei numeri) a quelle delle classi (parziali) N_0, R_0, è venuta fuori una teoria nuova di Grandezze e Numeri, accennata in ([b]), completamente sviluppata in ([c]).

Ed ecco ora le prop. I–VIII delle quali si deve spesso far uso.

Premesso che + (somma) è un'operazione per una classe u, cioè che — posto fra due u produce un determinato u, dice che " u è una classe di grandezze omogenee rispetto all'operazione + per gli u ", se per u e per + sono soddisfatte le seguenti I–VIII condizioni:

[I] $x, y, z \epsilon u \,.\, x + z = y + z \,.\, \supset \,.\, x = y.$

[II] $\exists\, \mathrm{Nul}\,(u, +).$

" Esiste in u almeno un elemento nullo rispetto a + ". Cioè un elemento x tale che se y è un u, si abbia, qualunque sia y, $x + y = y$.

[III] $\exists\, u \sim \mathrm{Nul}\,(u, +).$

" Esiste in u almeno un elemento non nullo rispetto a + ".

[IV] $x \epsilon u \sim \mathrm{Nul}\,(u, +) \,.\, y \epsilon u \,.\, \supset \,.\, x + y \epsilon u \sim \mathrm{Nul}\,(u, +).$

" Non è nulla la somma d'un u non nullo con un u qualunque ".

[V] $x, y, z \epsilon u \,.\, \supset \,.\, (x + y) + z = x + (y + z).$

[VI] $x, y \epsilon u \,.\, \supset \,.\, x \epsilon y + u \,.\, \cup \,.\, y \epsilon x + u.$

" Se x ed y sono u, o x è la somma di y con un u, o y è la somma di x con un u ".

[VII] $x \epsilon u \sim \mathrm{Nul}\,(u, +) \,.\, \supset \,.\, \exists\, u \sim \iota 0 \cap y \ni (y < x).$

" Se x è un u non nullo, esiste almeno un u non nullo minore di esso ".

[VIII] $v \epsilon \mathrm{Cls\,Lim}\,(u, +) \,.\, \supset \,.\, \exists\, u \cap x \ni [\theta\,(u, +)\, x = \theta\,(u, +)\, v].$

" Se v è una classe di u limitata superiormente (rispetto a +), esiste un u, x, tale che ogni u minore di x è minore di qualche v, e ogni u minore di qualche v è minore di x (rispetto a +, sempre sottinteso).

(*) Nella ([a]) invece la $x > y$ equivale a $x = y + k$, k essendo un u non nullo. In tal caso però poche proprietà dell'operazione + si possono ottenere senza fare uso di Comm +, come è indicato in ([b]), pag. 490, 2ª nota a pie' di pagina.

Come risulta dalla ([a]), le condizioni I-VIII sono assolutamente indipendenti.

Però, come mi è accaduto di constatare ([c]) sviluppando le proprietà fondamentali degli u e dei Q_0, le dette condizioni *non sono sufficienti* a fondare una teoria generale delle grandezze e dei numeri: al gruppo I-VIII occorre unire o la proposizione

$$[\alpha] \qquad x, y \varepsilon u \sim \iota 0 \,.\, y < x \,.\, \supset \,.\, x + y > x,$$

oppure la Comm +. Ciò dimostro subito, ed inoltre provo che il gruppo formato con le [I-VIII] e la [α], ovvero la Comm +, è costituito da proposizioni assolutamente indipendenti.

In questa Nota è dimostrato che con il gruppo di condizioni

$$[A] = [\text{I-VIII}]\,[\alpha]$$

si ottengono tutte le ordinarie proprietà delle grandezze e dei numeri.

In ([c]) è dimostrato che le stesse proprietà si ottengono pure dal gruppo

$$[B] = [\text{I-VIII}]\,[\text{Comm} +].$$

Da questa Nota risulta che da [A] si deduce il principio di Archimede, il quale si deduce pure ([c]) da [B].

Indicando con [Ar] il principio di Archimede, si ha dunque che:

$$[\text{I-VIII}]\,[\alpha] \supset [\text{Ar}], \qquad [\text{I-VIII}]\,[\text{Comm} +] \supset [\text{Ar}].$$

Ovvero, esportando:

$$(1) \qquad [\text{I-VIII}] \,.\, \supset \,.\, [\alpha] \supset [\text{Ar}],$$

$$(2) \qquad [\text{I-VIII}] \,.\, \supset \,.\, [\text{Comm} +] \supset [\text{Ar}].$$

Si ammettano ora il gruppo [I-VIII] ed [Ar].

Si dimostra ([b]) ([c]) che se α è un Q_0, si ha $0 + \alpha = \alpha$. Allora, se m è un N_0, si ha $0 + m = m$. Definiti gli N_0 come in ([b]), si dimostra la Comm + per gli N_0 come al n. 8 di questa Nota. Come in ([c]), n. 20, sostituendo $1 + m$ invece di $m + 1$, si dimostra l'esistenza del massimo di una classe

di N_0 sotto determinate condizioni. Tutti questi risultati sono ottenuti con il solo gruppo I-VIII.

In (^{c}), n. 20, si dimostra che se v è una classe limitata di N_0, allora $\max v$ è un N_0. Per tale dimostrazione si fa uso di [Ar] che afferma che le condizioni del massimo sono soddisfatte. Segue che con le I-VIII e la [Ar] si deduce che una classe limitata di N_0 ammette il massimo.

Ciò posto, siano x ed y degli u non nulli. Per [Ar] operando su y con tutti gli N_0 si ottengono degli u maggiori od eguali ad x. Così la classe degli N_0, z, tali che $zy \overline{\lessgtr} x$, è limitata e quindi ammette il massimo. Tanto significa che esiste un N_0, m, tale che

$$my \overline{\lessgtr} x < (1 + m) y.$$

Da $my \overline{\lessgtr} x$ si deduce [(^{c}), nn. 2, 8] $my + y \overline{\lessgtr} x + y$. O anche, essendo $y = 1y$ [(^{c}), 11], e $my + y = my + 1y = (m + 1) y$ [(^{c}), 12] $= (1 + m) y$ [Questa Nota]:

$$x + y \overline{\gtrless} (1 + m) y, \qquad (1 + m) y > x,$$

e quindi $x + y > x$, cioè la [α].

Questo risultato, come si è fatto osservare, risulta esclusivamente da [I-VIII] e da [Ar].

Da questa Nota risulta che dal sistema [I-VIII] [α] si deduce [Ar] e [Comm +]. Così abbiamo dimostrato che

$$[\text{I-VIII}]\,[\text{Ar}] \supset [\alpha], \qquad [\text{I-VIII}]\,[\text{Ar}] \supset [\text{Comm} +].$$

Esportando si ha:

(3) $$[\text{I-VIII}] \,.\supset.\, [\text{Ar}] \supset [\alpha],$$

(4) $$[\text{I-VIII}] \,.\supset.\, [\text{Ar}] \supset [\text{Comm} +].$$

Da (1), (2), (3), (4) si deduce che, rispetto al sistema I-VIII, si ha:

$$[\text{I-VIII}] \,.\supset.\, [\alpha] = [\text{Ar}] = [\text{Comm} +],$$

cioè è indifferente unire al gruppo I-VIII una qualunque di queste tre ultime proposizioni per istituire una teoria di " grandezze e numeri ".

Considerando la classe degli *infinitesimi dei diversi ordini* (*) per gli u si riconosce che per essi sussistono le I-VIII, ma non è verificata la [Ar]. Dunque [Ar], e perciò anche [α] e [Comm +] sono indipendenti dalle I-VIII. In altri termini, i gruppi [A] e [B] sono formati da proposizioni assolutamente indipendenti, e quindi è *necessario* al sistema I-VIII aggiungere o la [α], o la [Comm +].

Da ([c]) e da questa Nota risulta che la trattazione d'una teoria di " grandezze e numeri " riesce più semplice con il gruppo [B] anzichè con il gruppo [A]: ed è quindi naturale che in ([c]), pubblicazione di carattere didattico, io abbia dato la preferenza al gruppo [B], tanto più che la Comm + è così generalmente nota che non sarebbe stato giustificato l'escluderla.

1. — *La* [α] *vale anche per* y = x *e per* y > x. Cioè, in simboli:

[1] $$x, y \varepsilon u \sim \iota 0 \,.\, y \geqq x \,.\, \supset \,.\, x + y > x.$$

a) Se $x = y$ si deduce $x + y = y + y > y$, e quindi $x + y > x$.

b) Se $y > x$, siccome $x + y > y$, segue $x + y > x$.

Da *a)* e *b)* si deduce il teorema.

2. — *Se* x *ed* y *sono* u *non nulli arbitrarii, si ha* x + y > x. In simboli:

[2] $$x, y \varepsilon u \sim \iota 0 \,.\, \supset_{x,y} \,.\, x + y > x.$$

Risulta subito dalla [α] e dalla [1].

3. — *Se* x, y *sono* u *qualunque e* z *e* k *sono* u *non nulli, sarà* (z + k) + y > z + y. In simboli:

[3] $$x, y \varepsilon u \,.\, z, k \varepsilon u \sim \iota 0 \,.\, \supset \,.\, (z + k) + y > z + y.$$

Infatti, dalle ipotesi e dalla [2] si ha $z + k > z$. Oper $+ y$ si ha $(z + k) + y > z + y$, cioè la tesi.

(*) Cfr. ad es.: V. Mago, *Teoria degli ordini*, " Mem. R. Acc. Torino ", 1913.

4. — *Se* x, y, z *sono* u *qualunque, da* $x > y$ *si deduce* $z + x > z + y$. In simboli:

[4] $$x, y, z \epsilon u \,.\, x > y \,.\supset .\, z + x > z + y.$$

Infatti, dalle ipotesi, se $z = 0$ si ha $0 + x = x$, $x > y$, $y = 0 + y$ e quindi $0 + x > 0 + y$.

Se z non è nullo, siccome da $x > y$ si trae $x = k + y$, dove k è un u non nullo, segue dalla [3] che $(z + k) + y > z + y$ (1). Dalla $x = k + y$ aggiungendo z a sinistra si ha $z + x = z + (k + y)$. Ovvero, Assoc +, $z + x = (z + k) + y$. Da questa e dalla (1) si ha $z + x > z + y$, cioè la tesi.

5. — Segue pure, come per le eguaglianze, che *sommando membro a membro più diseguaglianze dello stesso senso si ha una diseguaglianza pure dello stesso senso.* In simboli:

[5] $$x, y, x', y' \epsilon u \,.\, x > x' \,.\, y > y' \,.\supset .\, x + y > x' + y'.$$

Risulta dalla [4] e dall'altro teorema che dice che ([c]) se $x > y$, si ha $x + z > y + z$.

6. — Nella Nota ([b]) la classe N_0 è definita nel seguente modo:

$$N_0 = \iota [\mathrm{Cls}' Q_0 \cap v \ni \{ 0 \epsilon v : 1 + v \supset v : w \epsilon \mathrm{Cls}' v \,.\, 0 \epsilon w \,.\, 1 + w \supset w \,.\supset_w .\, w = v \}].$$

Cioè: si chiama " numero intero ", e si indica con N_0, quella classe di numeri reali tale che:

1° contiene lo 0;

2° contiene la somma di 1 con ogni N_0;

3° se una classe w di N_0 contiene lo 0 e contiene pure la somma di 1 con ogni w, allora w coincide con N_0.

Nel mio opuscolo ([c]) invece, seguendo l'uso comune, si è scritto $v + 1$ invece di $1 + v$, $N_0 + 1$ invece di $1 + N_0$.

Questo mutamento, che non porta conseguenze quando si fa uso di Comm +, non può essere fatto quando di tale proprietà si voglia fare a meno, e si voglia invece adottare la [α].

Secondo la ([b]) gli N_0 sono

(a) $$0, \quad 1 + 0, \quad 1 + 1 + 0, \quad 1 + 1 + 1 + 0, \ldots$$

Ora si ha $0 + 1 = 1$, perchè, come è dimostrato in ([c]), se α è un Q_0 qualunque, si ha $0 + \alpha = \alpha$: ma non può dirsi, senza la Comm $+$, che $1 + 0 = 1$.

Relativamente alle proprietà fondamentali degli N_0 le cose devono essere condotte nel seguente modo, intendendo che se m è un N_0, $1 + m$ è *il suo successivo.*

7. — *Se* m *è un* N_0, *sarà* $m + 0 = m$. In simboli:

[6] $$m \varepsilon N_0 \,.\, \supset .\, m + 0 = m.$$

a) Se $m = 0$, si ha $0 + 0 = 0$, che è vera.

b) La [6] si supponga vera. Siccome Q_0 è una Grand $+$, quando per definire una Grand $+$ si adotta il gruppo di condizioni [A] (*), da [6] e da [4] si deduce $1 + (m + 0) = 1 + m$. O anche, Assoc $+$, $(1 + m) + 0 = 1 + m$.

Da *a)*, *b)* e Induct si deduce la tesi.

Gli (a) ora si possono rappresentare con

(a') $$0, \quad 1, \quad 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1, \ldots$$

Provato, come in ([c]), che $1 > 0$, risulta che nella (a'), e quindi nella (a), ogni elemento è maggiore del precedente, e quindi tutti gli (a) sono diversi fra loro.

8. — Come nel numero precedente, cioè con il metodo di induzione rispetto ad m, si dimostrano i seguenti teoremi, che esprimiamo solamente in simboli:

[7] $$m, n \varepsilon N_0 \,.\, \supset .\, m + n \varepsilon N_0.$$

[8] $$m, n \varepsilon N_0 \,.\, \supset .\, m + (1 + n) = (1 + m) + n.$$

[9] $$m, n \varepsilon N_0 \,.\, \supset .\, m + n = n + m.$$

(*) Che Q_0 soddisfa alle condizioni [I–VIII] si dimostra come in ([c]). Se poi α e β sono Q_0 non nulli, ed x è un u non nullo, anche αx e βx sono u non nulli, e quindi per la [α], $\alpha x + \beta x > \alpha x$. O anche $(\alpha + \beta) x > \alpha x$, e quindi ([c]) $\alpha + \beta > \alpha$.

9. — Il principio di Archimede si dimostra come segue. Esso si enuncia: *Se* a *e* b *sono* u *e* a *non è nullo, esiste un* N_0 *non nullo,* x, *tale che* xa > b. In simboli:

$$[10] \qquad a, b \epsilon u \,.\, a \sim= 0 \,.\, \supset \,.\, \exists\, N_0 \frown x \ni (xa > b).$$

Infatti, ove si ammetta l'ipotesi e si neghi la tesi, $N_0 a$ sarà una classe limitata di u, e quindi esiste [a] [c] $l'(N_0 a)$, che è un determinato u. Intanto $l'(N_0 a)$ è maggiore di a, e quindi esiste un u non nullo, k, tale che $l'(N_0 a) = k + a$ (1). Essendo k ed a non nulli, da [2] si ha $k + a > k$, e quindi, per la (1), $l'(N_0 a) > k$. Essendo k minore di $l'(N_0 a)$, sarà minore di qualche $N_0 a$, ad es. $k < ma$, dove m è un N_0 non nullo. Aggiungendo a a destra si ha $k + a < ma + a$, o anche [b] [c], $k + a < ma + 1a$, o, ancora [b] [c], $k + a < (m + 1)\, a$. Per la (1) si ha allora

$$(2) \qquad (m + 1)\, a > l'(N_0 a).$$

D'altra parte, essendo $(m + 1)\, a$ un $N_0 a$, esso è eguale a $l'(N_0 a)$ o è minore, ciò che contraddice alla (2).

Non può darsi dunque che operando su a con tutti gli N_0 non si ottengano u superiori a b.

10. — Come in [c] si dimostra che

$$[11] \qquad \alpha \epsilon Q_0 \,.\, \supset \,.\, \exists\, N_0 \frown n \ni (n \leqq \alpha < n + 1),$$

e che le leggi Comm + e Comm × valgono per gli R_0 e per le classi di R_0.

11. — *Tra due numeri reali diseguali* α *e* β *cade sempre qualche* R_0. In simboli:

$$[12] \qquad \alpha, \beta \epsilon Q_0 \,.\, \beta < \alpha \,.\, \supset \,.\, \exists\, R_0 \frown \gamma \ni (\beta < \gamma < \alpha).$$

Si supponga β (e quindi α) non nullo. Da β < α risulta $\alpha = k + \beta$ (1), dove k è un Q_0 non nullo. Essendo Q_0 una Grand +, e k non nullo, da [10] si deduce che esiste un N_0 non nullo, m, tale che $mk > 1$. Da questa si deduce che esiste

un Q_0 non nullo, h, tale che $mk = h + 1$ (2). Da (1), operando con m si ha $m\alpha = mk + m\beta$. Sostituendo in (2) si ha $m\alpha = (h + 1) + m\beta$; o anche, Assoc $+$, $m\alpha = h + (1 + m\beta)$, e quindi

$$(3) \qquad m\alpha > 1 + m\beta.$$

Dalla [11] si ha che esiste un N_0, n, tale che

$$n \overline{\gtrless} m\beta < n + 1.$$

Da $m\beta \overline{\gtrless} n$ e da [4] risulta che $1 + m\beta \overline{\gtrless} 1 + n$, che, confrontata con la (3), dà $m\alpha > 1 + n$.

Ma da [9] si deduce che $1 + n = n + 1$, talchè raccogliendo si ha $m\alpha > n + 1$ e $n + 1 > m\beta$, cioè

$$m\beta < n + 1 < m\alpha.$$

Moltiplicando per m^{-1}, che non è nullo, si ha

$$\beta < m^{-1}(n + 1) < \alpha.$$

Il teorema vale anche ([c]) se $\beta = 0$.

12. — *Per i* Q_0 *sussiste la proprietà* Comm $+$. In simboli:

$$[13] \qquad \alpha, \beta \varepsilon Q_0 . \supset . \alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Intanto se a, b, c sono R_0 e $a < b + c$, esistono due R_0, b' e c', tali che $b' < b$, $c' < c$ e $a = b' + c'$.

Infatti, posto $(b + c)^{-1} a = k$ (1), sarà ([c]) k un R_0. Inoltre dall'ipotesi si ha ([c]) $(b + c)^{-1} a < 1$, e quindi $k < 1$. Da (1) si ha $a = bk + ck$, che per essere $k < 1$ dimostra il teorema.

Allora come in ([e]), n. 24, si dimostra che se u e v sono classi di R_0, si ha $\mu(u + v) = \mu u + \mu v$, e poi che $l'(u + v) = l'u + l'v$. Come in ([c]), n. 26, si dimostra che se α è un Q_0, si ha $\alpha = l'(\mu\alpha)$.

Ciò posto si ha:

$$\alpha + \beta = l'(\mu\alpha) + l'(\mu\beta) = l'(\mu\alpha + \mu\beta) = l'(\mu\beta + \mu\alpha) = \\ = l'(\mu\beta) + l'(\mu\alpha) = \beta + \alpha.$$

13. — *La legge* Comm + *vale per gli* u. In simboli:

$$[14] \qquad x, y \in u \,.\, \supset \,.\, x + y = y + x.$$

Infatti, se z è un u non nullo, esistono ([b]) ([c]) due numeri reali α e β tali che $x = \alpha z$, $y = \beta z$. Allora, tenendo conto della [13], si ha:

$$x + y = \alpha z + \beta z = (\alpha + \beta) z = (\beta + \alpha) z = \beta z + \alpha z = y + x.$$

Nota.

Il Prof. G. Peano mi ha fatto cortesemente notare che la formola

$$f, g \in \mathrm{Op} \,.\, \supset \therefore f = g \,.\, = \,.\, u \in \mathrm{Cls} \,.\, f, g \in \mathrm{Op}\, u \,.\, x \in u \,.\, \supset_{u,x} .\, fx = gx$$

che si trova nella mia Nota: *Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da essa derivano*, pubblicata nei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", vol. XXII, serie 5ª, 2° sem., fasc. 11° e 12°, sedute del 4 e 21 dicembre 1913, così come è scritta può indurre in errore. In essa infatti non è esplicitamente indicato che se f ovvero g è operatore per una certa classe, g ovvero f deve esser pure operatore per la stessa classe, come in sostanza è detto nella III · 3 a p. 144 della citata Memoria: *Propriétés formales des opérations algébriques*. Ma, come sempre ha giustamente osservato il Peano, nelle formole simboliche non bisogna omettere nulla.

La formola completa è:

$$(4) \qquad f, g \in \mathrm{Op} \,.\, \supset :: f = g \,.\, = \therefore u \in \mathrm{Cls} \,.\, \supset_u : f \in \mathrm{Op}\, u \,.\, = \,.\, g \in \mathrm{Op}\, u \therefore$$
$$u \in \mathrm{Cls} \,.\, f, g \in \mathrm{Op}\, u \,.\, x \in u \,.\, \supset_{u,x} .\, fx = gx.$$

Data l'importanza di questa formola in studi recentissimi (*), reputo opportuno darne qui una dimostrazione.

(*) Quelli indicati con ([b]) e ([c]), l'altro notevolissimo del Burali-Forti, *Nuove applicazioni degli Operatori*, " Atti R. Accad. Torino ", marzo 1915, e la citata mia Nota dei Lincei.

a) Sia $f = g$.

Se u è una classe, ed f è un Opu, essendo $f = g$, sarà pure g un Opu. Se, viceversa, essendo u una classe, g è un Opu, siccome da $f = g$ si trae $g = f$, sarà pure f un Opu. Le due proposizioni " $f \epsilon \mathrm{Op}\, u$ " e " $g \epsilon \mathrm{Op}\, u$ " sono perciò equivalenti.

Oltre a ciò, se u è una classe, f un Opu ed x è un u, se consideriamo la classe $w = \mathrm{Op}\, u \frown h \ni (fx = hx)$ degli operatori h per gli u, si ha che f appartiene a w, perchè essendo $fx = fx$, si ha che f è un h tale che $fx = hx$. Essendo $f = g$, sarà g un w, cioè un h tale che $fx = hx$, sarà, cioè, $fx = gx$.

b) Valga ciò che afferma il secondo membro della (4). Cioè:

Se u e v sono classi, si abbia, qualunque siano u e v:

(1) $$f \epsilon \mathrm{Op}\, u \,.=.\, g \epsilon \mathrm{Op}\, u:$$

E se u è una classe, x un u, si abbia, qualunque siano u ed x:

(2) $$fx = gx.$$

Sia a una classe ed f un a. Dire che f è un a equivale, in virtù della definizione di Operatore, a dire che: " Esiste un elemento h di a tale che esistono le classi u e v tali che f ed h sono Op(u, v), e tale ancora che qualunque sia l'elemento x di u, si ha $fx = hx$ ". Cioè, in simboli:

(3) $$f \epsilon a \,.=\therefore \exists\, a \frown h \ni [\exists (u, v) \ni \{ u, v \epsilon \mathrm{Cls} \,.\, f, h \epsilon \mathrm{Op}\, u : x \epsilon u \,.\, \supset_{u,x} .\, fx = hx \}].$$

Per la (1) e per la (2) è lecito nel secondo membro della (3) mutare f in g. Facendo allora tale mutamento nel primo membro si ha che $g \epsilon a$.

Se dunque a è una classe ed f è un a, sarà pure, qualunque sia a, g un a, e quindi $f = g$.

Dalla *a)* e dalla *b)* risulta la (4).

Intorno alla teoria della funzione $\Gamma(\rho)$ e sue relazioni con altri integrali definiti.

Nota di F. TAVANI (*).

I metodi finora adoperati per lo studio dell'integrale euleriano $\Gamma(\rho)$ riduconsi principalmente a due, cioè: 1) l'integrazione, o meglio l'insieme di regole applicabili allo studio d'una funzione espressa sotto forma d'integrale, e 2) il metodo della decomposizione in fattori primarii, secondo la teoria generale delle funzioni di Weierstrass.

Dell'applicazione di quest'ultimo gli esempi sono ben pochi in confronto di quelli fornitici dall'uso del calcolo integrale. Ciò è facile constatare dando un'occhiata ai numerosi lavori che costituiscono la vasta bibliografia su questo argomento (1). Fra i lavori in cui il metodo di Weierstrass viene seguìto sono notevoli: LAURENT, *Cours d'Analyse*, vol. III; BARNES, *Messenger of Mathematics*, vol. 29°; in quest'ultima memoria si trovano usati entrambi i metodi surriferiti.

Ai due metodi qui citati mi propongo d'aggiungerne un altro, di cui non s'è fatto uso finora per lo studio di $\Gamma(\rho)$, cioè d'esprimere e considerare $\Gamma(\rho)$ come un vettore o complesso di second'ordine.

I principali vantaggi che possono derivarsi da questo nuovo metodo sono: 1) la classificazione delle proprietà di $\Gamma(\rho)$ in due

---

(*) Pretentata nell'adunanza del 9 maggio 1915.

(1) Per dare una semplice idea del numero grandissimo di lavori pubblicati intorno a $\Gamma(\rho)$ basti citare le fonti seguenti, in cui essi si trovano citati: *Formulario Matematico* edito dal Prof. G. PEANO: tomo V, Cap. VII, *Calcolo Integrale*. — *Acta Mathematica*, vol. XXVII. — I, II, III, VIII. Memorie di MELLIN e BOURGUET. — *Differential and Integral Calculus* di DE MORGAN, pag. 587. *Mémoires couronnées par l'Académie de Belgique*, t. XXII, 1848, ecc.

categorie, cioè quelle dipendenti dai valori del modulo di $\Gamma(\rho)$ ed altre che dipendono dal suo argomento; 2) nuove espressioni di $\Gamma(\rho)$ e delle funzioni $z(\rho)$ e $\xi(\rho)$ colle quali essa è così strettamente collegata; 3) espressioni di nuovi integrali che si presentano considerando le dette funzioni da questo nuovo punto di vista. Di questi tre possibili vantaggi ci occuperemo in questa Nota, particolarmente del terzo ed un po' anche del secondo.

Per ottenere l'espressione vettoriale di $\Gamma(\rho)$ procediamo così: sia x una variabile reale, e ρ una quantità complessa:

$$\rho = \alpha + i\beta\,, \qquad i = \sqrt{-1}\,,$$

s'avrà:

$$x^{\rho} = e^{\alpha \,.\, \log x} \,.\, e^{i\beta \,.\, \log x},$$

e quindi:

$$\text{(I)} \qquad \int_0^\infty x^{\rho-1}\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \,.\, e^{-x} \,.\, \cos(\beta \,.\, \log x)\, dx + \\ + i \int_0^\infty x^{\alpha-1} \,.\, e^{-x} \operatorname{sen}(\beta \,.\, \log x)\, dx\,,$$

onde (¹):

$$\text{(II)} \quad |\Gamma(\rho)| = \sqrt{\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1} . e^{-x} \cos(\beta . \log x) dx\right)^2 + \left(\int_0^\infty x^{\alpha-1} . e^{-x} \operatorname{sen}(\beta . \log x) dx\right)^2}$$

e l'argomento $\Gamma(\rho)$ è l'arco di

$$\text{tangente} = \frac{\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x} \operatorname{sen}(\beta \,.\, \log x)\, dx}{\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x} \cos(\beta \,.\, \log x)\, dx}\,.$$

Chiameremo i due integrali:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \,.\, e^{-x} \,.\, \cos(\beta \,.\, \log x)\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty x^{\alpha-1} \,.\, e^{-x} \operatorname{sen}(\beta \,.\, \log x)\, dx$$

(¹) V. " Comptes Rendus „, 22 février 1915, che contiene un cenno di queste formole.

gl'integrali coordinate di $\Gamma(\rho)$, e come tali essi possono esprimersi mediante il modulo e l'argomento di $\Gamma(\rho)$, ossia si avrà:

$$\text{(III)} \qquad \int_0^\infty x^{\alpha-1} \, . \, e^{-x} \, . \cos(\beta \, . \log x)\, dx = |\Gamma(\rho)| \, . \cos \arg . \, \Gamma(\rho)$$

e

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x} \operatorname{sen}(\beta \, . \log x)\, dx = |\Gamma(\rho)| \, . \operatorname{sen} \arg . \, \Gamma(\rho) \, .$$

Passiamo a procurarci le espressioni di $|\Gamma(\rho)|$ e $\arg . \, \Gamma(\rho)$. Partiamo dall'espressione esponenziale di $\Gamma(\rho)$:

$$\Gamma(\rho) = \frac{1}{\rho}\, e^{-C\rho + \frac{1}{2} S_2 \rho^2 - \frac{1}{3} S_3 \rho^3 + \dots}$$

in cui C è la costante euleriana e $S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$

Mettendo questa espressione sotto forma di prodotto e sostituendovi

$$\text{a} \quad \rho^n = (\alpha + i\beta)^n \quad \text{l'espressione} \quad \sum_{k=0}^{k=n} (n)_k \, \alpha^{n-k} (i\beta)^k$$

s'ottiene:

$$\Gamma(\rho) = \frac{1}{(\alpha + i\beta)}\, e^{-C(\alpha+i\beta)} \prod_{n \text{ pari}}^{n=\infty} \left\{ e^{\frac{S_n}{n} \sum_{k=0}^{k=n} (n)_k \, \alpha^{n-k} (i\beta)^k} \times e^{-\frac{S_{n+1}}{n+1} \sum_{k=0}^{k=n+1} (n+1)_k \, \alpha^{n+1-k} (i\beta)^k} \right\},$$

nella quale k assume tutti i valori: $0, 1, 2, 3 \dots n$; e poichè tutti questi valori possono rappresentarsi con:

$$4m\,, \qquad 4m+1\,, \qquad 4m+2\,, \qquad 4m+3\,,$$

dando ad m tutti i valori da zero ad $\frac{n-3}{4}$, perciò l'espressione anzidetta si converte in quest'altra:

$$\Gamma(\rho)=\frac{1}{(\alpha+i\beta)}\,e^{-C(\alpha+i\beta)}\prod_{n\ \text{pari}}^{n=\infty}\left\{ e^{\frac{S_n}{n}\sum\limits_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n)_{4m}\,\alpha^{n-4m}\,(i\beta)^{4m}}\times\right.$$

$$\times\, e^{\frac{S_n}{n}\sum\limits_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n)_{4m+1}\,\alpha^{n-(4m+1)}\,(i\beta)^{4m+1}}$$

$$e^{\frac{S_n}{n}\sum\limits_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n)_{4m+2}\,\alpha^{n-(4m+2)}\,(i\beta)^{4m+2}}\times$$

$$\times\, e^{\frac{S_n}{n}\sum\limits_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n)_{4m+3}\,\alpha^{n-(4m+3)}\,(i\beta)^{4m+3}}$$

$$e^{-\frac{S_{n+1}}{n+1}\sum\limits_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n+1)_{4m}\,\alpha^{n-4m}\,(i\beta)^{4m}}\times$$

$$\times\, e^{-\frac{S_{n+1}}{n+1}\sum\limits_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n+1)_{4m+1}\,\alpha^{n-(4m+1)}\,(i\beta)^{4m+1}}$$

$$e^{-\frac{S_{n+1}}{n+1}\sum\limits_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n+1)_{4m+2}\,\alpha^{n-(4m+2)}\,(i\beta)^{4m+2}}\times$$

$$\left.\times\, e^{-\frac{S_{n+1}}{n+1}\sum\limits_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n+1)_{4m+3}\,\alpha^{n-(4m+3)}\,(i\beta)^{4m+3}}\right\}$$

e ricordando che $i^{4m}=1$, $i^{4m+1}=i$, $i^{4m+2}=-1$, $i^{4m+3}=-i$ l'espressione suddetta diviene:

(V)

$$\Gamma(\rho)=\frac{1}{(\alpha+i\beta)}\,e^{-C(\alpha+i\beta)}\prod_{n\ \text{pari}}^{n=\infty}\left\{ e^{\frac{S_n}{n}\sum\limits_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n)_{4m}\,\alpha^{n-4m}\,\beta^{4m}}\times\right.$$

$$\times\, e^{i\frac{S_n}{n}\sum\limits_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n)_{4m+1}\,\alpha^{n-(4m+1)}\,\beta^{4m+1}}$$

$$e^{-\frac{S_n}{n}\sum\limits_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n)_{4m+2}\,\alpha^{n-(4m+2)}\,\beta^{4m+2}}\times$$

$$\times\, e^{-i\frac{S_n}{n}\sum\limits_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n)_{4m+3}\,\alpha^{n-(4m+3)}\,(\beta)^{4m+3}}$$

Segue (V)

$$e^{\frac{S_{n+1}}{n+1}\sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n+1)_{4m}\,\alpha^{n+1-4m}\,(\beta)^{4m}}\times$$

$$\times\, e^{i\frac{S_{n+1}}{n+1}\sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n+1)_{4m+1}\,\alpha^{n+1-(4m+1)}\,\beta^{4m+1}}$$

$$e^{-\frac{S_{n+1}}{n+1}\sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n+1)_{4m+2}\,\alpha^{n+1-(4m+2)}\,.\,\beta^{4m+2}}\times$$

$$\times\, e^{-i\frac{S_{n+1}}{n+1}\sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n+1)^{4m+3}\,\alpha^{n+1-(4m+3)}\,.\,\beta^{4m+3}}\Big\}$$

Questa espressione può scriversi sotto la forma seguente più breve:

$$\Gamma(\rho)=\frac{1}{(\alpha+i\beta)}\,e^{-C(\alpha+i\beta)}\prod_{n=1}^{\infty}\Big\{\overset{+}{\prod_{\substack{r=0\\r=2}}} e^{\frac{S_n}{n}\sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n)_{4m+r}\,\alpha^{n-(4m+r)}\,\beta^{4m+r}}\times$$

$$\times\overset{+}{\prod_{\substack{r=1\\r=3}}} e^{i\frac{S_n}{n}\sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n)_{4m+r}\,\alpha^{n-(4m+r)}\,.\,\beta^{4m+r}}\Big\}$$

in cui i segni $\pm$ nel secondo simbolo di prodotto $\prod$ indicano che gli esponenti dei fattori esponenziali devono prendersi successivamente l'uno col segno positivo l'altro col negativo, ossia col segno positivo gli esponenti nei quali r ha i valori 0 e 1, e negativamente quelli in cui r ha i valori 2 e 3.

Dall'ultima espressione di $\Gamma(\rho)$ segue immediatamente quella del suo modulo, cioè:

$$|\Gamma(\rho)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,e^{-C\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\Big\{\overset{+}{\prod_{\substack{r=0\\r=2}}} e^{\frac{S_n}{n}\sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}}(n)_{4m+r}\,\alpha^{n-(4m+r)}\,.\,\beta^{4m+r}}\Big\}.$$

Per ottenere l'espressione dell'argomento di $\Gamma(\rho)$ non avremo che da introdurre le due espressioni già trovate di $\Gamma(\rho)$ e $|\Gamma(\rho)|$ nella formola:

$$\frac{1}{i}\log\Big\{\frac{\Gamma(\rho)}{|(\Gamma\rho)|}\Big\}$$

e s'ottiene immediatamente:

$$\text{Argomento}\ \Gamma(\rho) = -\varphi - C\beta + \sum_{n\ \text{pari}}^{\infty} \left\{ \frac{S_n}{n} \sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}} (n)_{4m+1}\, \alpha^{n-(4m+1)} . \beta^{4m+1} - \right.$$

$$- \frac{S_n}{n} \sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}} (n)_{4m+3}\, \alpha^{n-(4m+3)} . \beta^{4m+3}$$

$$- \frac{S_{n+1}}{n+1} \sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}} (n+1)_{4m+1}\, \alpha^{n-4m} . \beta^{4m+1} -$$

$$\left. - \frac{S_{n+1}}{n+1} \sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}} (n+1)_{4m+3}\, \alpha^{n-4m-2} . \beta^{4m+2} \right\}$$

in cui φ è l'argomento di ρ, e C la costante Euleriana. Anche quest'espressione dell'argomento si può mettere sotto una forma più condensata scrivendo:

(VI)

$$\text{Argomento}\ \Gamma(\rho) = -\varphi - C\beta + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{S_n}{n} \sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}} (n)_{4m+1}\, \alpha^{n-(4m+1)}\, \beta^{4m+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{S_n}{n} \sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}} (n)_{4m+3}\, \alpha^{n-(4m+3)}\, \beta^{4m+3} \right\}.$$

Possiamo dunque esprimere gl'integrali coordinate di Γ(ρ) direttamente in funzione delle coordinate α e β di ρ; queste espressioni sono:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \cos(\beta . \log x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^x+\alpha x} . \cos(\beta . x)\, dx,$$

$$\frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\frac{x}{\beta}}+\frac{1}{\beta}\alpha x} \cos x\, dx$$

che risultano dal primo ponendo e^x, ed $e^{\frac{x}{\beta}}$ invece di x; sono tutti tre uguali a:

$$\text{(VII)} \qquad \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\, e^{-C\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \prod_{\substack{r=0\\ r=2}}^{+} \left(e^{\frac{S_n}{n} \sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}} (n)_{4m+r}\, \alpha^{n-(4m+r)} . \beta^{4m+r}} \right) \right\}$$

$$\cos \left\{ -\varphi - C\beta + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{S_n}{n} \sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}} (n)_{4m+1}\, \alpha^{n-(4m+1)} . \beta^{4m+1} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{S_n}{n} \sum_{m=0}^{m=\frac{n-3}{4}} (n)_{4m+3}\, \alpha^{n-(4m+3)} . \beta^{4m+3} \right\} \right\}.$$

Le uguaglianze che sussistono fra quest'ultima espressione e ciascuno dei tre integrali suddetti continuano a sussistere qualora si cambi in esse la funzione coseno in seno, ottenendo così l'espressione di altri tre nuovi integrali analoghi ai precedenti.

Passiamo a considerare la funzione $z(\rho)$ legata a $\Gamma(\rho)$ per mezzo della relazione:

$$\text{(VIII)} \qquad z(\rho) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\rho-1}}{e^x - 1}\, dx \ (^1).$$

La funzione $z(\rho)$ è rappresentata dalla serie:

$$z(\rho) = 1 + \frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho} + \dots \frac{1}{n^\rho} + \dots$$

in cui la parte reale della variabile complessa ρ resti superiore all'unità.

S'ottiene l'espressione di $z(\rho)$ sotto forma di vettore con un procedimento analogo a quello adoperato per $\Gamma(\rho)$, cioè scrivendo:

$$\frac{1}{n^\rho} = e^{-\log(n^\rho)} = e^{-\log n(\alpha + i\beta)} = \frac{1}{n^\alpha}(\cos(-\beta\log n) + i\sin(-\beta\log n))$$

ossia:

$$\frac{1}{n^\rho} = \frac{\cos(-\beta\,.\log n)}{n^\alpha} + i\,\frac{\operatorname{sen}(-\beta\,.\log n)}{n^\alpha}$$

onde:

$$\text{(IX)} \qquad z(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(-\beta\,.\log n)}{n^\alpha} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(-\beta\,.\log n)}{n^\alpha},$$

dove si osservi che l'aggruppamento dei termini col fattore i è lecito in virtù della convergenza assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(-\beta\,.\log n)}{n^\alpha} + i\,\frac{\operatorname{sen}(-\beta\,.\log n)}{n^\alpha} \right\}.$$

---

(1) RIEMANN, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze* (" Gesammelte Werke ,, p. 145-153, 2ª edizione).

Ora la relazione (VIII) succitata ci fornisce ancora un'altra espressione di $z(\rho)$ sotto forma di vettore. Infatti riducendo a questa forma l'integrale $\int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}}{e^x-1}dx$ si ottiene:

$$\text{(X)}\quad \int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}}{e^x-1}dx = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\cos(\beta\,.\log x)}{e^x-1}dx + i\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\operatorname{sen}(\beta\,.\log x)}{e^x-1}dx$$

onde sostituendo nella (VIII) l'espressione vettoriale dell'ultimo integrale e quella di $\Gamma(\rho)$ si ottiene:

$$z(\rho) = \frac{\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\cos(\beta\,.\log x)\,dx - i\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\operatorname{sen}(\beta\,.\log x)\,dx\right)}{\{|\Gamma(\rho)|\}^2}$$
$$\left\{\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\cos(\beta\,.\log x)}{e^x-1}dx + i\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\operatorname{sen}(\beta\,.\log x)}{e^x-1}dx\right\}$$

ossia:

(X)

$$z(\rho) = \frac{1}{\{|\Gamma(\rho)|\}^2}\left\{\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\cos(\beta.\log x)dx\right)\left(\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\cos(\beta.\log x)}{e^x-1}dx\right)+\right.$$
$$+\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\operatorname{sen}(\beta.\log x)dx\right)\left(\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\operatorname{sen}(\beta.\log x)}{e^x-1}dx\right)+$$
$$+\,i\left(\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\cos(\beta.\log x)dx\right)\left(\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\operatorname{sen}(\beta.\log x)}{e^x-1}dx\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\operatorname{sen}(\beta.\log x)dx\right)\left(\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\cos(\beta.\log x)}{e^x-1}dx\right)\right)\right\}.$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie di questa ultima espressione rispettivamente colle parti reali e quelle immaginarie dell'altra espressione vettoriale (IX) di $z(\rho)$, si ottiene:

$$\text{(XI)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(-\beta\log n)}{n^\alpha} = \frac{1}{\{|\Gamma(\rho)|\}^2}\left\{\left[\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\cos(\beta\,.\log x)\,dx\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\times\left(\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\cos(\beta\,.\log x)}{e^x-1}dx\right)\right] + \left[\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\operatorname{sen}(\beta\,.\log x)\,dx\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\operatorname{sen}(\beta\,.\log x)}{e^x-1}dx\right)\right]\right\}.$$

$$\text{(XII)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(-\beta \log n)}{n^{\alpha}} = \frac{1}{\{|\Gamma(\rho)|\}^2} \Big\{ \Big[\Big(\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} . e^{-x} \cos(\beta . \log x)\, dx \Big) \times$$

$$. \Big(\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} \operatorname{sen}(\beta . \log x)}{e^x - 1} dx \Big) \Big] - \Big[\Big(\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \operatorname{sen}(\beta . \log x)\, dx \Big) \times$$

$$\times \Big(\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} . \cos(\beta . \log x)}{e^x - 1} dx \Big) \Big] \Big\} .$$

Non sarebbe difficile moltiplicare il numero di queste relazioni, il cui principale vantaggio è quello di contenere in un membro integrali legati fra loro per mezzo d'operazioni algebriche e nell'altro membro espressioni libere dal segno d'integrazione; per ora non insisteremo su tal punto e ci limiteremo a far notare che le relazioni dianzi accennate, sebbene a prima vista possano parere complicate, si semplificano mediante l'uso delle funzioni trigonometriche degli argomenti di $\Gamma(\rho)$ e $z(\rho)$.

Passiamo a stabilire le espressioni di altri integrali definiti che hanno una parte importante nella teoria delle funzioni $\Gamma(\rho)$ e $z(\rho)$.

Introducendo nella formula di Riemann le espressioni vettoriali di $\Gamma(\rho)$ e $z(\rho)$ assegnate di sopra, si ha:

$$\Big(\sum_1^{\infty} \frac{\cos(-\beta \log n)}{n^{\alpha}} + i \sum_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(-\beta \log n)}{n^{\alpha}} \Big) \Big(\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \cos(\beta \log x)\, dx \Big)$$

$$(1 + i \operatorname{tang} \arg . \Gamma(\rho)) =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} \cos(\beta . \log x)}{e^x - 1} dx + i \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} \operatorname{sen}(\beta . \log x)}{e^x - 1} dx.$$

Sostituendo all'integrale del primo membro il suo valore:

$$|\Gamma(\rho)| . \cos \arg . \Gamma(\rho)$$

si ottiene:

$$\{ |\Gamma(\rho)| . \cos \arg \Gamma(\rho) + i |\Gamma(\rho)| \operatorname{sen} \arg \Gamma(\rho) \}$$

$$\Big\{ \sum_1^{\infty} \frac{\cos(-\beta \log n)}{n^{\alpha}} + i \sum_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(-\beta \log n)}{n^{\alpha}} \Big\} =$$

$$= |\Gamma(\rho)| . \cos \arg \Gamma(\rho) . \sum_1^{\infty} \frac{\cos(-\beta \log n)}{n^{\alpha}} -$$

$$- |\Gamma(\rho)| . \operatorname{sen} \arg \Gamma(\rho) . \sum_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(-\beta \log n)}{n^{\alpha}} +$$

$$+ i \left\{ |\Gamma(\rho)| \,.\, \text{sen}\arg\Gamma(\rho) \,.\, \sum_1^{\infty} \frac{\cos(-\beta\log n)}{n^{\alpha}} + \right.$$

$$\left. + |\Gamma(\rho)| \,.\, \cos\arg\Gamma(\rho) \,.\, \sum_1^{\infty} \frac{\text{sen}(-\beta\log n)}{n^{\alpha}} \right\} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}\cos(\beta\,.\log x)}{e^x-1}\,dx + i\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}\,\text{sen}(\beta\,.\log x)}{e^x-1}\,dx\,.$$

Uguagliando fra loro le parti reali e quelle immaginarie dei due membri dell'ultima relazione s'ottiene:

(XIII)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}\cos(\beta\,.\log x)}{e^x-1}\,dx = |\Gamma(\rho)| \left\{ \cos\arg\Gamma(\rho) \,.\, \sum_1^{\infty}\frac{\cos(-\beta\log n)}{n^{\alpha}} - \right.$$

$$\left. - \,\text{sen}\arg\Gamma(\rho) \,.\, \sum_1^{\infty}\frac{\text{sen}(-\beta\log n)}{n^{\alpha}} \right\}$$

(XIV)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,\text{sen}(\beta\,.\log x)}{e^x-1}\,dx = |\Gamma(\rho)| \left\{ \text{sen}\arg\Gamma(\rho) \,.\, \sum_1^{\infty}\frac{\cos(-\beta\log n)}{n^{\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \cos\arg\Gamma(\rho) \,.\, \sum_1^{\infty}\frac{\text{sen}(-\beta\log n)}{n^{\alpha}} \right\}$$

e poichè $|\Gamma(\rho)|$ ed $\arg\Gamma(\rho)$ possono esprimersi direttamente per mezzo delle coordinate α e β di ρ, senza implicare l'operazione d'integrazione, perciò i detti integrali restano così espressi sotto forma libera dal segno $\int$.

Ciascuno dei due ultimi integrali dà luogo ad altri due ottenuti dai primi mediante le sostituzioni di $\log x = y$ e $\log x^{\beta} = y$.

In tutto si hanno così le espressioni dei sei nuovi integrali, ciascuna coppia di essi rappresenta le coordinate di $\int_0^{\infty}\frac{x^{\rho-1}}{e^x-1}\,dx$, ossia della funzione $z(\rho)\,\Gamma(\rho)$.

Avendo così ottenute le espressioni degl'integrali coordinate di $\Gamma(\rho)$ e di $\Gamma(\rho)\,.\,z(\rho)$, per mezzo della sostituzione di queste espressioni nella formola fondamentale:

$$\Gamma(\rho) = \frac{1}{z(\rho)}\int_0^{\infty}\frac{x^{\rho-1}}{e^x-1}\,dx$$

si ottengono altre relazioni fra i medesimi; di queste relazioni si farà menzione solo della seguente:

$$\Big\{\Big(\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x} \cos(\beta \log x)\, dx\Big)(1 + i \operatorname{tang} \arg \Gamma(\rho))\Big\}$$

$$\Big\{\Big(\sum_1^\infty \frac{\cos(-\beta \log n)}{n^\alpha}(1 + i \operatorname{tang} \arg z(\rho)\Big)\Big\} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \cos(\beta \,.\, \log x)}{e^x - 1}\, dx + i \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \operatorname{sen}(\beta \,.\, \log x)}{e^x - 1}\, dx$$

ossia:

(XV) $$\Big(\Big(\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x} \cos(\beta \,.\, \log x)\, dx\Big) \,.\, \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(-\beta \log n)}{n^\alpha}\Big)$$

$$(1 + i \operatorname{tang} \arg \Gamma(\rho)\,(1 + i \operatorname{tang} \arg z(\rho) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \cos(\beta \,.\, \log x)}{e^x - 1}\, dx + i \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \operatorname{sen}(\beta \,.\, \log x)}{e^x - 1}\, dx$$

ed uguagliando le parti reali e quelle immaginarie di quest'ultima uguaglianza s'ottiene:

(XVI) $$\Big(\sum_1^\infty \frac{\cos(-\beta \log n)}{n^\alpha}\Big) \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x} \cos(\beta \,.\, \log x)\, dx$$

$$[1 - \operatorname{tang} \arg z(\rho) \,.\, \operatorname{tang} \arg \Gamma(\rho)] =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \cos(\beta \,.\, \log x)}{e^x - 1}\, dx \,.$$

(XVII) $$\Big(\sum_1^\infty \frac{\cos(-\beta \log n)}{n^\alpha}\Big) \,.\, \int_0^\infty x^{\alpha}\, e^{-x} \cos(\beta \,.\, \log x)\, dx$$

$$[\operatorname{tang} \arg z(\rho) + \operatorname{tang} \arg \Gamma(\rho)] =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \operatorname{sen}(\beta \,.\, \log x)}{e^x - 1}\, dx \,.$$

Queste formole esprimono una semplice relazione fra le coordinate di $\Gamma(\rho)$ e quelle di $z(\rho) \,.\, \Gamma(\rho)$ mediante la funzione $\operatorname{tang} \arg z(\rho)$.

Per completare la trattazione di $z(\rho)$ come vettore resta a trovare un'espressione dell'argomento di $z(\rho)$, in funzione della variabile principale ρ.

Ci serviremo a tal uopo della seguente relazione di Eulero (v. *Formulario mathem.*, ed. V, pag. 230, Prop. 37 · 6)

$$z(\rho)=\prod_p\left(\frac{1}{1-p^{-\rho}}\right)$$

in cui p rappresenta tutti i numeri primi positivi, e $z(\rho)$ è definita dalla solita serie $\sum_1^\infty n^{-\varrho}$, come detto sopra.

Per calcolare $|z(\rho)|$ facciamo le seguenti trasformazioni d'indole molto elementare:

$$\frac{1}{1-p^{-\rho}}=\frac{1}{1-e^{-\rho\,.\log p}}=\frac{1}{1-e^{-(\alpha+i\beta)\log p}}=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{p^\alpha}(\cos(-\beta\log p)+i\operatorname{sen}(-\beta\log p))}=$$

$$=\frac{1}{\left\{1-\frac{1}{p^\alpha}\cos(-\beta\log p)\right\}+i\frac{1}{p^\alpha}\operatorname{sen}(-\beta\log p)}$$

onde:

$$\left|\frac{1}{1-p^{-\rho}}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p^{2\alpha}}-\frac{2}{p^\alpha}\cos(-\beta\log p)}},$$

da cui seguono:

$$\text{(XVIII)}\qquad |z(\rho)|=\prod\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p^{2\alpha}}-\frac{2}{p^\alpha}\cos(-\beta\log p)}}\right\}$$

e

$$\text{(XIX)}\qquad \left\{\sum_1^\infty\frac{\cos(-\beta\log n)}{n}\right\}^2+\left\{\sum_1^\infty\frac{\operatorname{sen}(-\beta\log n)}{n}\right\}^2=$$

$$=\prod\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{p^{2\alpha}}-2\frac{1}{p^\alpha}\cos(-\beta\log p)}\right\}.$$

Ora siamo in grado di poterci servire dell'espressione:

$$\frac{1}{i}\log\left\{\frac{z(\rho)}{|z(\rho)|}\right\}$$

per esprimere l'argomento di $z(\rho)$.

Si avrà quindi:

(XX)
$$\text{Argomento } z(\rho) = \frac{1}{i}\log\left(\prod_p \left\{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{p^{2\alpha}}-2\frac{1}{p^{\alpha}}\cos(-\beta\log p)}}{1-p^{-\rho}}\right\}\right) =$$
$$= \frac{1}{i}\sum_p \log\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{p^{2\alpha}}-2\frac{1}{p^{\alpha}}\cos(-\beta\log p)\right)^{\frac{1}{2}}}{1-p^{-\rho}}\right\}.$$

La convergenza dell'ultimo prodotto infinito e quindi della serie di logaritmi che gli è uguale può stabilirsi in varii modi, fra i quali ci basti accennare che il detto prodotto

$$\prod_p \left\{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{p^{2\alpha}}-2\frac{1}{p^{\alpha}}\cos(-\beta\log p)}}{(1-p^{-\rho})}\right\}$$

è il quoziente di due altri simili prodotti entrambi convergenti e diversi da zero.

Si può anche osservare che il modulo del prodotto in parola è l'unità.

Concludendo, i risultati che formano oggetto di questa Nota si riducono principalmente alle espressioni di un gruppo di nuovi integrali strettamente legati alla teoria delle funzioni $\Gamma(\rho)$ e $z(\rho)$, e perciò d'un interesse speciale nel campo della matematica pura. Oltre a ciò siccome questi integrali presentano nella loro forma una certa analogia con quelli impiegati nella rappresentazione analitica di fenomeni fisici periodici, la loro importanza potrebbe anche estendersi al di là dei limiti della pura matematica.

Londra, 15 aprile 1915.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 21 Novembre 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Direttore della Classe, Pizzi, D'Ercole, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci Manno, Carle, Ruffini e Sforza.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 20 giugno. Indi il Presidente S. E. Boselli pronuncia le seguenti parole:

" La nostra Accademia indirizzò sempre il magistero scientifico a promuovere quell'avanzamento civile che deve essere benefizio comune per tutte le genti, e dai migliori anni del Regno di Carlo Alberto in poi divenne focolare d'italianità.

" Qui sedette Cesare Balbo, che proclamò l'indipendenza dagli stranieri come supremo diritto, come supremo dovere del popolo italiano: fu socio Vincenzo Gioberti che intorno al corso della civiltà cristiana dettò pagine di insuperabili sapienza ed eloquenza: qui presiedette Federigo Sclopis, che congiunse il nome dell'Italia a quell'arbitrato che parve promessa di una

nuova vita fra le nazioni e del quale egli legò a noi i luminosi documenti.

“ La guerra che oggi l'Italia combatte coll'ardimento sublime e vittorioso dei suoi figli, col valore mirabile del suo Re, compirà la liberazione nazionale e noi salutiamo con commozione e con orgoglio i nuovi miracoli dell'italiana virtù.

“ Ma rispetto alle sorti della civiltà umana, oggi tanto malvagiamente oscurata ed offesa, noi rimarremmo sconfortati ed incerti, se la fede costante nel progresso non vincesse le tenebre passeggiere: ma da ogni parte dove si pensa e si crede nella verità e nella fraternità umana deve sorgere un grido che sia anatema al presente, invocazione di un prossimo giorno di restaurazione civile, in cui cessi di essere gloria il non aver pietà; in un prossimo giorno in cui le conquiste della scienza tornino ad accrescere la felicità dell'umana famiglia e non proseguano ancora ad essere istrumento di barbariche distruzioni.

“ E con quale animo rammenteremmo le nostre tradizioni, e come si custodirebbe qui il retaggio di Federigo Sclopis se non si levasse alta e solenne la parola nostra contro tante perfidie che straziano il diritto delle genti, il senso civile e la ragione umana per le terre, dall'aria, sulle acque e orrendamente sotto le acque dei mari?

“ I trattati a pezzi, debellate le città indifese, bombardate le città lontane dalla guerra, uccisi gli inermi, devastata come preda la proprietà privata, atterrati i monumenti, sepolte le opere dell'arte, le biblioteche disperse, e rese con incredibili eccidi infeste e micidiali le vie destinate a collegare i commerci, i pensieri, i cuori fra i popoli lontani, così da infrangere il correre di quella spola che creò e ravviva la civiltà.

“ E nella mia gioventù imparai in questa Torino da Pasquale Stanislao Mancini il diritto internazionale dell'èra nuova! E intesi Terenzio Mamiani ad annunziare il nuovo diritto pubblico europeo

“ Considerate, chiarissimi Colleghi, se non sia giunta l'ora in cui ci si appartenga di rivolgere la nostra parola rivendicatrice della scienza, del diritto, dell'umanità ai sodalizi scientifici e ai nostri soci d'ogni nazione e colà dove si serbano le speranze della pace ed anche colà dove prevalgono le cieche furie della guerra.

" Considerate se a noi giovi inaugurando il nuovo anno accademico trarre simile aspirazione dal nostro passato, gettare sull'avvenire questo raggio di fede e di propaganda civile. „

Il discorso del Presidente termina fra gli unanimi applausi, ed il Socio Stampini presenta il seguente ordine del giorno, che è ad unanimità approvato: " La Classe di scienze morali, storiche e filologiche della Reale Accademia delle Scienze, udite e applaudite le parole del Presidente S. E. Boselli, è sicura di rendersi interprete del sentimento di tutta l'Accademia, deliberando che del discorso di lui sia inviata copia a tutti i nostri Soci di ogni paese e alle Accademie scientifiche di ogni nazione „.

Il Presidente dà poscia comunicazione alla Classe delle deliberazioni prese dal Consiglio d'amministrazione relativamente alla pubblicazione degli *Atti* e delle *Memorie* accademiche, e la Classe ne prende atto. Inoltre comunica il programma a stampa del *Comitato Nazionale per la storia del risorgimento,* relativo alla " Raccolta di testimonianze e di documenti storici sull'attuale Guerra Italo-Austriaca „, inviato da Roma il 1° agosto u. s.

Il Socio Segretario Stampini dà notizia dell'estratto di verbale dell'adunanza del 9 agosto u. s. del Consiglio Provinciale di Torino, nella quale S. E. Boselli commemorò il compianto Senatore S. E. Villa. Dopo di che dà lettura della lettera mandata alla nostra Accademia, con data 8 luglio u. s., dalla Presidenza della Académie Chablaisienne di Thonon-Les-Bains (H^{te}-Savoie), ricordante i vincoli antichi che legano i Savoiardi all'Italia e l'amicizia delle due Nazioni latine, già consacrata col sangue sparso nelle giornate gloriose di Palestro, Magenta e Solferino, e auspicante la vittoria del domani che " affirmera l'intégrité entière d'une Italie plus grande encore réalisant désormais le but de ses aspirations séculaires „. Legge in seguito la risposta fatta a questa lettera dalla nostra Presidenza che, rendendosi interprete del pensiero dei Colleghi, esprime vivi ringraziamenti per l'atto squisitamente gentile, e, rievocando i nomi di illustri

Savoiardi che furono ornamento della nostra Accademia, soggiunge: " Noi abbiamo incrollabile fede nel trionfo delle armi che combattono per il diritto, per la giustizia, per l'umanità; e siamo lieti che in questa lotta si trovino uniti a noi i discendenti di quei Savoiardi che già furono prodighi del loro sangue per la causa degli Italiani. Ora la causa, che stringe in patto fraterno le genti latine della Francia e dell'Italia, trascende i limiti d'una guerra nazionale: è la causa dell'umanità che si sente colpita in ciò che essa ha di più rispettabile e di più sacro, e vuole a tutti i costi ristabilito l'impero della giustizia, del rispetto ai diritti delle genti. Fermi in questo volere, noi Italiani stringiamo la mano a Voi, forti figli di quella terra il cui nome è tuttora il grido glorioso de' nostri soldati, quando sereni e baldi corrono alla gloria e alla morte nell'assalto al nostro comune nemico „.

Il Socio Einaudi presenta un suo opuscolo intitolato *Il Bilancio italiano. Quali difficoltà esso ha superate in passato; come è divenuto migliore e quale nuovo sforzo esso è capace di compiere.* L'opuscolo è stato pubblicato dalla Società Italiana per il progresso delle scienze. La Classe ringrazia.

Dopo la presentazione fatta dal Presidente, con parole di vivo encomio, del catalogo a stampa *Sezione risorgimento italiano* della Biblioteca civica di Torino, recentemente pubblicato, il Socio Stampini presenta il volume I, comprendente il *Testo*, dell'*Epistolario di Guarino Veronese raccolto ordinato illustrato* dal nostro Socio corrispondente Remigio Sabbadini, che volle farne omaggio all'Accademia, e pubblicato dalla R. Deputazione Veneta di storia patria. Il Socio Stampini nota la grande importanza di questa nuova pubblicazione del Sabbadini, anche se sia soltanto giudicata dal presente volume, così per la storia dell'umanesimo e della coltura del sec. XV, come per rispetto a quella delle letterature classiche, e mette in rilievo il metodo severo con cui l'epistolario è stato diviso e criticamente pub-

blicato, utilizzando per il testo tutti i numerosissimi codici Guariniani (circa 120) che trovansi sparsi nelle biblioteche d'Italia, non solo, ma altresì, e sono molti, nelle straniere, di Francia, Belgio, Inghilterra, Svizzera, Danimarca, Germania, Austria; e conclude ricordando le altissime benemerenze del Sabbadini riguardo a questi studi e auspicando dall'attuale volume l'insigne contributo che sarà dato alla scienza dalla seconda parte della pubblicazione, la quale comprenderà le introduzioni e gl'indici. — La Classe ringrazia e si rallegra con l'illustre donatore.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Novembre 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO

VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Salvadori, Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari e Segre, Segretario.

Letto ed approvato il verbale della precedente adunanza, vien presentato un opuscolo inviato in dono dall'autore Professor Celoria, Socio corrispondente, *Sulla eclisse totale di Sole del 21 agosto 1914 e sul passaggio di Mercurio sul disco solare avvenuto il 7 novembre 1914.*

Il Socio Grassi offre in omaggio la 3ª edizione dei suoi *Principii scientifici della Elettrotecnica*, e quella del 2° volume del suo *Corso di Elettrotecnica.*

Il Socio Guareschi presenta, per la stampa negli *Atti,* un suo scritto: *Delle singolari proprietà della calce sodata,* Nota II. Ed anche per gli *Atti* vengono presentati i lavori seguenti:

G. Colonnetti, *Elasticità e resistenza degli acciai ad alto tenore di nickel.* Nota I. dal Socio Guidi;

C. L. Ricci, *L'equilibramento delle masse rotanti a grande velocità*. Nota I, dallo stesso Socio Guidi, per incarico del Socio Panetti;

F. Cantelli, *Resti nelle formole di quadratura*, dal Socio Peano;

G. Vitali, *I teoremi della media e di Rolle*, dal Socio Segre.

Raccoltasi poscia la Classe in adunanza privata, procede alla nomina di due delegati presso il Consiglio di amministrazione dell'Accademia: riescono riconfermati per un nuovo triennio i Soci Jadanza e Salvadori.

LETTURE

Delle singolari proprietà della calce sodata.

Nota II del Socio I. GUARESCHI.

Nella Nota precedente su questo stesso argomento ho esposto le generalità che riguardano le curiose proprietà da me osservate nella calce sodata, ed ho fatto vedere come sia un agente assorbente, decomponente, idrolizzante e sintetizzante molto energico. Ho esposto le esperienze fatte con elementi e composti alogenici, e coll'ossicloruro di carbonio o fosgeno. Ora espongo le esperienze fatte con molti altri gas e specialmente con quelli del gruppo dello solfo, del carbonio, del cianogeno, ecc.

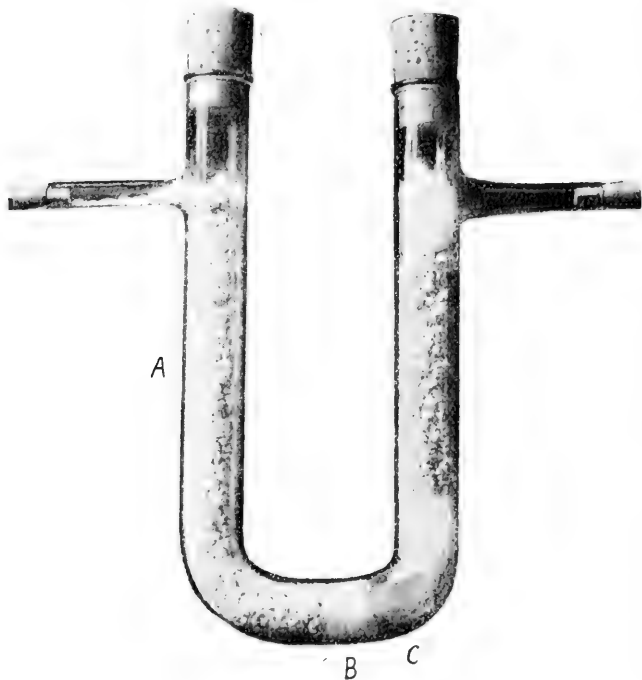
2) Ossicloruro di carbonio o fosgeno $COCl^2$ (contin.) [1].

Alle notizie date nella mia Nota I: *Delle singolari proprietà della calce sodata*, pag. 4, aggiungo ora le seguenti:

Determinazione della quantità di $COCl^2$ assorbito dalla calce sodata. — Per stabilire la quantità in peso di ossicloruro di carbonio assorbito dalla calce sodata ho usato un tubo ad **U** la cui curvatura fosse un poco allungata orizzontalmente come l'indica la figura a pagina seguente.

Nel mezzo della parte orizzontalmente mettevo una carta di tornasole asciutta e piegata compresa fra due batuffoletti di cotone; si pesava così il tubo vuoto munito dei suoi tappi; poi riempivo la branca sinistra del tubo con la calce sodata da esaminare, il cui peso poteva variare da 10 a 14 grammi; si pesava di nuovo, poi riempivo l'altra branca, a destra, con calce

[1] "Atti R. Accad. delle Scienze di Torino", 1915, vol. LI, pag. 4.

sodata e si tornava a pesare il tubo così caricato. Ciò fatto, facevo passare il gas con corrente più o meno lenta di aria; il gas si fissa tutto nella prima branca, la calce sodata si scalda, si formano delle goccioline d'acqua e quando tutta questa calce sodata è saturata da $COCl^2$ allora il gas umido e a reazione acida arrossa la carta di tornasole e andrebbe ad essere fissato nella seconda branca. L'acqua che si produce nella reazione viene assorbita dalla calce sodata della branca a destra e così

nulla si perde. A questo punto si cessa. Se il gas proviene da soluzione toluenica, in ultimo si fa passare un poco d'aria secca depurata attraverso un tubo a calce sodata. Si pesa il tubo; la differenza fra la terza e la quarta pesata ci dà l'*ossicloruro assorbito*.

In questo modo ho stabilito che la calce sodata recentemente preparata e a granelli medi di 1 a 4 mm. assorbe per 100 gr. circa 1000 cm^3 di $COCl^2$; in una prima esperienza in cui il gas passò un po' troppo in fretta ottenni 1097 cm^3 e nella seconda

in cui si colpì giusto il punto di assorbimento, se ne assorbirono 1007 cm^3.

Vedremo poi in un altro capitolo le differenze che vi sono sotto questo riguardo secondo le varie calci sodate.

Esaminai un campione di calce sodata recentemente preparata e in granelli piccoli da 0.5 a 1 mm.

Gr. 10.854 assorbono gr. 0.697 di ossicloruro di carbonio cioè 158 cm^3 e 100 gr. di calce sodata ne assorbirono 1453 cm^3.

Non sono che numeri approssimativi perchè in queste esperienze ha grande influenza la velocità colla quale passa il gas, la grossezza dei granuli e l'essere la calce sodata più o meno recente.

Ed invero gr. 10.077 di un campione della stessa calce sodata che ha assorbito 1.453 cm^3, ma in granelli un poco più piccoli ed usando una corrente molto lenta di ossicloruro di carbonio assorbirono gr. 1.003 di $COCl^2$ cioè 226.9 cm^3 vale a dire per 100 gr. = 2251 cm^3.

Dunque con calce sodata in granelli piccoli e corrente lenta di $COCl^2$ se ne assorbono, per 100 gr., da 1500 a 2250 cm^3.

Un campione di calce sodata Kahlbaum, buona, ma vecchia, conservata in vaso di vetro con tappo di sughero, pesante, che non faceva incandescenza coll'acido solfidrico, assorbì per 100 gr. 804 cm^3 di $COCl^2$.

La calce sodata preparata dal CaO ottenuto dal marmo assorbe molto meno ossicloruro; 100 gr. ne assorbirono 545 cm^3.

Della calce sodata che era stata preparata con calce e soda nel rapporto di 1 : 1 diede pure buoni risultati: gr. 12.455 assorbirono gr. 0.9954 di $COCl^2$ cioè 225.4 cm^3, ossia per 100 gr., 1809 cm^3. L'esperienza durò 15 minuti usando una lenta corrente d'aria secca.

Della buona e recente calce sodata stata in un tubo di latta per circa tre mesi, come quelli proposti per i soldati, si era conservata bene; faceva ancora incandescenza col gas solfidrico e 100 gr. assorbirono 797 cm^3 di $COCl^2$.

Come invece era prevedibile, la calce sodata quando è saturata con acido carbonico ancorchè non abbia assorbito dell'acqua, non fissa più il fosgeno. Io ho saturato della calce sodata in fini granuli con gas anidride carbonica secca, poi vi ho fatto passare del gas fosgeno; questo passava tutto inalterato.

Dunque se la calce sodata ha assorbito dell'acqua e poco o punto di acido carbonico è ancora attiva sul fosgeno, ma non lo è più se saturata con gas carbonico.

Ho fatto passare il gas fosgeno attraverso a molte materie organiche solide e di natura diversa, quali: il β naftolo, la p. toluidina, l'acetanilide, la difenilamina, l'ossalato di diacetanamina, la resorcina, la benzamide, ecc. ecc., ma non veniva assorbito. Veniva assorbito bene dall'anilina e da altre sostanze.

Di altre esperienze fatte recentemente col *gas fosgeno* dirò in un'altra nota.

Conclusione. — L'unica sostanza *praticamente utile* per l'assorbimento del fosgeno è dunque la *calce sodata*.

3) Idruri del gruppo dell'ossigeno e dello zolfo.

Vapor d'acqua, acidi: solfidrico, selenidrico e telluridrico.

I composti H^2O, H^2S, H^2Se vengono assorbiti con grande rapidità dalla calce sodata. Restano da fare delle esperienze coll'acido telluridrico, ma non vi è dubbio che date le sue grandi analogie cogli acidi solfidrico e selenidrico anch'esso verrà assorbito. Il massimo di velenosità di questi corpi si trova nell'acido selenidrico:

H^2O	inattivo.
H^2S	velenoso.
H^2Se	velenosissimo.
H^2Te	poco velenoso.

L'acido telluridrico ha odore meno forte di quello degli acidi solfidrico e selenidrico, ricorda un poco quello dell'idrogeno arsenicale; la sua azione sull'economia animale, scrive il Moissan, è pure assai minore, non provoca nè la tosse, nè la lacrimazione, ecc.; ciò dipende dalla sua facile decomposizione e dalla poca solubilità dell'acido telluroso proveniente dall'ossidazione del tellurio entro l'organismo (Moissan).

Che la calce sodata possa servire ad assorbire il vapore d'acqua e quindi a disseccare l'aria è noto da lungo tempo.

A suo tempo esporrò le esperienze fatte sulla energia colla quale la calce sodata assorbe il vapor d'acqua dell'aria e sulla perdita di peso per riscaldamento.

Acido solfidrico. — L'acido solfidrico è il gas che meglio serve in alto grado a dimostrare il singolare modo di agire della calce sodata, assai diverso da quello della calce, della soda e potassa caustica, prese separatamente.

Era presumibile che l'acido solfidrico fosse assorbito dalla calce sodata, ma non con quei fenomeni che ho osservato io.

Sulla calce sodata *di recente preparata* l'acido solfidrico produce una reazione straordinariamente energica; è assorbito colla più grande avidità e rapidità e con sviluppo di moltissimo calore, anche quando lo si fa passare insieme ad una rapidissima corrente d'aria. La reazione è tanto viva, che in un certo momento la calce sodata, quando passa l'aria in seguito all'acido solfidrico, diventa *incandescente* e manda viva luce. Ecco alcune delle tante esperienze che ho fatto.

Intorno all'azione della calce sodata sull'acido solfidrico non ho trovato nessun lavoro, precedente a queste mie ricerche.

Senza nessun pericolo, anche coll'ossigeno si può ottenere l'incandescenza nel modo seguente:

32 gr. di calce sodata buona furono posti in un tubo ad U di 1.8 mm. e ne fu riempito un tratto di solamente 14-16 cm. Il tubo a destra era munito di un tappo a due fori, uno pel gas solfidrico e l'altro per l'aria o l'ossigeno. Si fece passare una corrente regolare ma rapida di acido solfidrico puro, disseccato o no col cloruro di calcio, sino a che l'annerimento fosse visibile per 10 a 12 cm. Allora si fece passare, chiusa la conduttura dell'acido solfidrico, una corrente di aria, oppure di aria che passava per una boccia contenente un litro di gas ossigeno, poi si accelerò la corrente; dopo pochi minuti si manifesta viva incandescenza e formazione di fumi o nebbia bianca che passa anche nell'aspiratore. Nessun pericolo di esplosione.

Attraverso a 24 gr. di calce sodata recentemente preparata ho fatto passare per spostamento con soluzione satura di cloruro di sodio *1 litro* di gas H^2S puro e disseccato attraverso il cloruro di calcio. La calce sodata annerì, si scaldò, ma non divenne incandescente. Passato il litro di gas solfidrico, feci passare una

corrente d'aria, l'annerimento diminuì, ma la calce sodata *non divenne incandescente*. Ma la reazione ha un andamento ben diverso se si fa passare insieme l'acido solfidrico e l'aria nel modo seguente:

Attraverso un tubo ad U del diametro di poco più di 1,5 cm. contenente 40 gr. di calce sodata di recente preparata feci rapidamente passare un litro di acido solfidrico insieme a corrente d'aria. Il gas solfidrico fu rapidissimamente assorbito e la carta d'acetato di piombo posta nella parte opposta del tubo non dava segno di acido solfidrico. La calce sodata si colora subito in bruno-scuro e rosso, e in alcuni punti in ranciato; si sviluppa molto calore, al punto che non si può toccare il tubo, e dopo pochi momenti, nel punto ove sarebbe il sesto o l'ottavo centimetro della calce sodata, questa diventa *incandescente*, manda viva luce, e nel tempo stesso nella boccia Habermann di aspirazione si notano abbondanti fumi o nebbia bianca, che va sino entro alla pompa ad acqua [1]. L'incandescenza si propaga per cinque o sei centimetri, poi cessa, e nella parte ove si è avuta l'incandescenza tutta la massa diventa bianca: l'aria ha ossidato i solfuri. Cessata la viva reazione, si fece assorbire nello stesso modo un secondo litro di gas acido solfidrico e l'incandescenza della calce sodata ebbe luogo verso la curva del tubo e si propagò per 5-6 cm. ancora, con formazione di densi fumi bianchi; nulla di acido solfidrico passò. La velocità del passaggio dell'acido solfidrico e dell'aria era pressochè quella della inspirazione. Si fece agire un terzo litro di gas acido solfidrico, e nella seconda branca del tubo, a destra, si manifestò per la terza volta l'incandescenza (però senza fumi), ma prima un poco di acido solfidrico era passato ed annerì la carta di acetato di piombo.

---

[1] Cosa siano questi fumi bianchi, o questa intensa ed abbondante nebbia, non ho potuto ancora determinare. Questa nebbia non arrossa il tornasole e passa facilmente attraverso all'acqua. Dubitai fosse dell'anidride solforica, ma non sono riuscito, lasciandola in contatto dell'acqua, ad avere dell'acido solforico. Pare anzi che l'acqua assuma reazione alcalina; dubitai fosse della finissima polvere di calce sodata o anidride che trascina un poco di calce sodata.

Spero di potere meglio studiare questa reazione qualora altri non entri in questo nuovo campo di studi. Ho costruito anche un apparecchio semplice per la formazione degli anelli di Tait.

L'acido solfidrico e l'aria disseccati col farli passare attraverso a un tubo con cloruro di calcio, producono ugualmente l'incandescenza come quando non sono disseccati.

Se nel far passare il gas solfidrico lo si fa precedere da una boccia contenente l'aria, allora non ha luogo l'incandescenza. L'aria deve seguire al passaggio del solfidrico, affinchè prima si formino i solfuri che poi coll'aria producono l'incandescenza. La parte in cui è avvenuta l'incandescenza rimane perfettamente bianca da quasi nera (solfuro di ferro?) che era prima.

Invece la calce sola, in pezzetti, non fissa affatto l'acido solfidrico; l'idrato di sodio e l'idrato potassico in grani o in piccoli pezzi assorbono l'acido solfidrico, ma molto meno avidamente e con sviluppo di poco calore; la potassa ingiallisce e a poco a poco si liquefà. La KOH e NaOH allo stato solido si prestano meno bene della calce sodata anche per assorbire il *cloro* ed il *bromo*.

Il fenomeno che osservai colla calce sodata e l'acido solfidrico in corrente d'aria mi pare nuovo; non ho trovato nessuna notizia in proposito.

Su questo straordinario fenomeno hanno influenza varie condizioni. Innanzi tutto, per chi volesse ripetere questa esperienza e modificarla col far passare l'*ossigeno* invece dell'aria, dirò subito che cadrebbe in errore ed in pericolo. Se nella esperienza precedente si sostituisce all'aria una bottiglia di un litro di ossigeno che preceda quello di un litro di gas solfidrico, poco dopo il passaggio dei gas si scorge l'*incandescenza*, molto più rapida, ma dopo pochi istanti ha luogo una *detonazione* come una cannonata e tutto l'apparecchio è distrutto. Io questo prevedevo, ma ho voluto fare l'esperimento ugualmente munendomi di una grossa maschera di rete metallica e lamine di mica per gli occhi. Alcuni pezzi di vetro caddero alla distanza di 10 a 15 metri. Rimasi quasi sordo per tre o quattro ore. Naturalmente, appena manifestatasi l'incandescenza, questa si comunicò al miscuglio detonante di ossigeno e acido solfidrico. Il solo tubo contenente la calce sodata rimase per caso intatto. Probabilmente in questo punto il miscuglio di H^2S e di O nella bottiglia vicina al tubo era arrivato ad essere nel rapporto di 1 a 3, ossia $H^2S + O^3$, ed allora nell'istante che cominciava l'incandescenza questa determinò l'enorme esplosione del miscuglio. Dalle esperienze di

Freyer e V. Meyer (¹) si sa che scaldando a 250°-270° un miscuglio di H^2S e O nel rapporto 1 : 3 ha luogo esplosione. Ho fatto delle esperienze facendo passare separatamente l'acido solfidrico e l'ossigeno (vedi sopra).

Questa esperienza coll'aria io l'ho ripetuta moltissime volte e non ho mai avuto esplosione. È una elegante e bella esperienza di lezione che si può eseguire nel modo seguente: in un tubo di vetro poco fusibile lungo trenta centimetri circa e del diametro di 1.2 a 1.5 cm. si mette della buona calce sodata tenuta in posto fra due batuffoli d'amianto; segue al tubo una boccia di Habermann con acqua e un'altra boccia anche molto grande vuota, poi la pompa aspirante. Si fa passare 1 litro di acido solfidrico insieme ad aria, la calce sodata imbrunisce e dopo pochi momenti *diventa incandescente* e l'incandescenza si propaga mano a mano dove prima era l'annerimento per solfuro e la calce ridiventa bianca; i fumi o nebbia riempiono la boccia di Habermann, la grossa boccia vuota e vanno nella pompa. Passano attraverso l'acqua come una vera nebbia.

Ma per questa esperienza di lezione serve benissimo l'apparecchio rappresentato dalla figura *A* nella mia Nota I; anzi col tubo a forma di U l'esperienza riesce più elegante.

Sul fenomeno della incandescenza coll'acido solfidrico e l'aria vi ha influenza anche la grossezza dei granuli della calce sodata. La calce sodata in granuli grossi da 4 a 6 mm. o più se anche recentemente preparata non divenne incandescente, e nemmeno se i granuli sono molto piccoli. In queste condizioni sviluppa pure molto calore, ma non arriva all'incandescenza come quando i granuli sono di grossezza media da 1 a 3 mm. misti.

Il fenomeno dell'incandescenza non si produce se non colla calce sodata di recente preparazione. Non l'ho avuto con calce sodata Kahlbaum, con quella detta di Merck, di Erba, di Marquardt, ecc. (²). Nè l'osservai colla calce sodata preparata con

(¹) " Zeit. f. physik. Ch. „ (1893), XI, p. 31.

(²) Ad esempio, 22 gr. di calce sodata Kahlbaum, ricevuta in vasi ben chiusi da circa 8 mesi (e preparata forse molto tempo prima), trattata nello stesso modo sopraccennato con 1 litro di gas solfidrico e corrente d'aria, arrossa, sviluppa poco calore, ed il gas passa subito inalterato e

proporzioni di calce e soda nel rapporto di 1 : 1, mentre l'osservai con calce sodata preparata col metodo di Fresenius spegnendo la calce colla soluzione di soda e calcinando, ma recente. Neppure colla pomice imbevuta di calce sodata e nemmeno con calce sodata recente preparata nel rapporto di 2 : 1 ma con calce viva *dal marmo*, cioè *purissima*.

Tutte le calci sodate vecchie, anche se state ricalcinate, non dànno più l'incandescenza col gas solfidrico. L'essere preparata di recente ha l'influenza principale. Se della calce sodata recente, che dà l'incandescenza, si lascia su cartoncino all'aria per 7 a 8 ore, non produce più il fenomeno dell'incandescenza, per quanto sviluppi molto calore. Ecco come ho fatto l'esperimento. Circa 60 gr. di calce sodata recentissima e che dava l'incandescenza coll'acido solfidrico furono lasciati all'aria per circa 8 ore. Dopo questo tempo, metà della calce sodata fu saggiata coll'acido solfidrico e non dava più incandescenza, come non la dava l'altra metà dopo che fu calcinata.

Così pure, attraverso a calce sodata recentemente preparata e che diventava incandescente coll'acido solfidrico, feci passare una rapida corrente d'aria del laboratorio, per circa 20 minuti (e un'altra volta 10 minuti), e l'incandescenza coll'acido solfidrico non ebbe più luogo.

Come si scorge, l'acido solfidrico è un buon mezzo per giudicare se la calce sodata è preparata di recente e ben conservata.

Non osservai differenza fra l'acido solfidrico nelle condizioni ordinarie e l'acido solfidrico disseccato. 1 litro di questo gas non disseccato, in corrente d'aria attraversò la calce sodata e produsse l'*incandescenza con fumi*, come fu detto più sopra. 1 litro di acido solfidrico disseccato passando con aria attraverso cloruro di calcio produsse pure *incandescenza con fumi bianchi*.

Un fenomeno analogo, ma meno bello, si ha quando si fa passare del gas solforoso puro sul biossido di piombo, ma non si hanno i fumi bianchi o la nebbia come nel caso della mia reazione.

tanto meno fa incandescenza. Così presso a poco si comportarono le calci sodate fornite dalle Case Merck, Marquart, Erba (molto simile a quella di Kahlbaum), ecc. Invece nelle stesse condizioni la calce sodata, recentemente preparata e fornitami dal dott. Rotta, produce subito l'incandescenza.

Ho fatto passare separatamente l'aria o l'ossigeno e il gas solfidrico attraverso la calce sodata, mediante condutture separate. Allora anche coll'ossigeno, come è naturale, non si ha esplosione, ma solamente l'*incandescenza*. Nella branca a sinistra del tubo ad U si mette un tappo a due fori per uno dei quali passa un tubo che conduce l'acido solfidrico e per l'altro l'aria o l'ossigeno; quando è passato tanto solfidrico da annerire metà della calce sodata, si comincia con un aspiratore a far passare l'aria o l'ossigeno; dopo alcuni minuti ha luogo l'incandescenza, che si propaga sino a bruciare tutto il solfuro.

La calce che ho adoperato in alcune di queste esperienze, di recente preparata, conteneva delle piccole quantità di rame; io volli vedere se aumentando la quantità di rame si facilitava l'incandescenza. A circa 25 gr. di calce sodata aggiunsi circa 0.3 di solfato di rame. Poi coll'acido solfidrico si è proceduto come al solito, ma non osservai la incandescenza, benchè fosse calce sodata che per se stessa produceva col solfidrico intensa la incandescenza.

Ponendo il gas solfidrico puro e secco sul mercurio in campanella graduata ho determinato, con approssimazione, la quantità di gas solfidrico che viene assorbito.

In una *prima* esperienza gr. 0.095 di calce sodata recente in grani medi, da 1 a 2 mm., dopo 1 minuto assorbirono 22.5 cm^3 di gas, cioè per 100 gr. sarebbero 26300 cm^3. Dopo 2 minuti = 27360 cm^3, dopo 20 minuti = 29000 cm^3 e dopo 26 ore = 35260 cm^3.

In una *seconda* esperienza gr. 0.174 di calce sodata anche essa recente dopo 2 minuti assorbirono 30 cm^3 di H^2S cioè % = 17200 cm^3, dopo 10 minuti 20640 cm^3, dopo 24 ore = 29240 cm^3 e dopo 47 ore = 31000 cm^3.

In una *terza* esperienza con calce sodata Kahlbaum gr. 0.2282 in granuli introdotti in 96 cm^3 di gas dopo 2 minuti ne assorbirono 13 cm^3, cioè per 100 gr. = 5700 cm^3, dopo 20 minuti = 7880 cm^3, dopo 18 ore = 15780 cm^3; dopo 22 ore s'arrivò a 20590 cm^3, dopo 25 ore = 24540 cm^3 e dopo 40 ore = 30000 cm^3.

Come si scorge, in questo campione di calce sodata l'assorbimento si fa lentamente in principio e più rapidamente dopo.

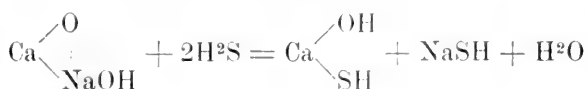
La calce sodata più attiva, più recente assorbe la maggior

parte del gas nei primi minuti e molto lentamente dopo. Ecco perchè facendo passare rapidamente una corrente d'aria con gas solfidrico la calce sodata recente e quella che annerisce molto col gas solfidrico lo fissa subito e non ne passa oltre nemmeno una traccia; mentre la calce sodata Kahlbaum bianca, e che col solfidrico appena imbrunisce, nelle stesse condizioni di rapidità di corrente, lascia passare il gas solfidrico. In questo caso dunque è più questione di differenza nella rapidità dell'assorbimento che non nella quantità di gas assorbito.

Mediante moderata corrente di gas solfidrico ho voluto vedere quanto se ne assorbiva dalla calce sodata nell'apparecchietto sopra cennato. Gr. 10.40 di calce sodata assorbirono 2.48 gr. di gas H^2S, ossia 1616 cm^3. e per 100 gr. $=$ 15540 cm^3. L'esperienza durò 16 minuti.

Come si scorge, in questo caso si assorbe meno acido solfidrico (però sempre molto relativamente ad altri gas) che non ponendo la calce sodata entro il gas.

Come avvenga l'assorbimento non ho potuto stabilire. Se ammettiamo l'esistenza del composto $Ca\begin{cases}O\\NaOH\end{cases}$ e che su questo agiscano due molecole di acido solfidrico, allora si avrebbe:

$$Ca\begin{cases}O\\NaOH\end{cases} + 2H^2S = Ca\begin{cases}OH\\SH\end{cases} + NaSH + H^2O$$

ossia per 100 gr. $=$ 46500 cm^3 di H^2S, si assorbirebbero. Ma se si tiene conto che il composto $Ca\begin{cases}O\\NaOH\end{cases}$ si troverebbe mescolato all'eccesso di calce e di carbonato, si può capire come praticamente 100 gr. di calce sodata possano assorbirne nei primi 2 minuti da 20 a 27000 cm^3 e nelle 24 ore da 30 a 35000 cm^3.

Se invece si ammette la reazione fra idrato di sodio e acido solfidrico, ossia:

$$2NaOH + 2H^2S = 2NaSH + 2H^2O,$$

allora per 100 gr. si assorbirebbero 55870 cm^3 di H^2S, cioè molto più di quello trovato.

L'esistenza del composto $Ca\begin{matrix} / O \\ | \\ \backslash NaOH \end{matrix}$ nella calce sodata fresca o ben conservata spiegherebbe la grande energia che ha questo corpo verso H^2S. Invece nella calce sodata vecchia (Kahlbaum) il composto $Ca\begin{matrix} / O \\ | \\ \backslash NaOH \end{matrix}$ sarebbe già in parte decomposto dall'acqua e dall'acido carbonico assorbiti, e quindi si spiegherebbe come l'assorbimento in principio sia minore e come questa calce non produca incandescenza.

La proprietà che ha la calce sodata di assorbire così avidamente l'acido solfidrico ed altri gas (fra i quali l'idrogeno arsenicale e antimoniale) fa sì che può essere utilizzata, come dirò più avanti, per depurare l'idrogeno proveniente da zinco impuro per solfo, antimonio e arsenico.

Spero di fare delle ricerche con altri composti che reagiscono vivamente coll'acido solfidrico e di trovare le condizioni per osservare il fenomeno dell'incandescenza. Berzelius (*Traité*, II, p. 276) osservò un fenomeno di propagazione luminosa istantanea durante la calcinazione di certi composti antimoniali. Ma questo fenomeno deve essere di natura molto diversa.

Idrogeno seleniato o acido selenidrico. — L'idrogeno seleniato, analogo all'idrogeno solforato, fu scoperto nel 1817 da Berzelius.

È un gas incoloro molto velenoso ed è fissato rapidamente dalla calce sodata al punto che facendo passare il gas attraverso un piccolo tubo contenente calce sodata, dalla parte opposta all'entrata del gas nulla si sente dell'odore acutissimo di questo gas. La calce sodata si colora in bruno rossastro o per seleniuro metallico o anche per selenio svoltosi in libertà. Data la grande velenosità di questo gas poco conosciuto, credo opportuno esporre le mie osservazioni seguenti.

Quando l'acido selenidrico è diluito con molta aria ha un odore analogo a quello dell'acido solfidrico o anche del cavolo marcio, ma quando è concentrato o schietto, e se ne fiuti anche solamente qualche bolla, produce nelle narici un intenso e acuto bruciore, molto doloroso, e pare quasi che la mucosa del naso sia forata da spilli.

Berzelius per il primo s'accorse che l'acido selenidrico è un veleno potentissimo e ne descrisse l'azione fisiologica.

Credo non privo d'interesse riprodurre qui quanto io ho scritto nel mio lavoro intorno alla vita ed alle opere di Berzelius [1].

L'esattezza di Berzelius nella descrizione dei fenomeni che osservava era insuperabile; io ne ho avuto una prova evidente nell'azione fisiologica dell'idrogeno seleniato. In quasi tutti i Trattati si accenna all'azione dell'acido selenidrico come analoga a quella dell'acido solfidrico, coll'aggiunta che l'odore è più irritante e che eccita la lacrimazione. Anche nei Trattati di chimica tossicologica si trova ben poco riguardo all'acido selenidrico. Il Lewin dice solamente che l'H^2Se irrita le mucose sino all'infiammazione e che dall'inalazione prolungata di questo gas nell'uomo risulta un avvelenamento di lunga durata.

Nel giorno 3 di agosto di quest'anno 1915 io volli vedere e provare se l'idrogeno seleniato, come era facilmente prevedibile, fosse fissato bene dalla calce sodata. Preparai un poco di questo gas con seleniuro di ferro e acido cloridrico; durante questa preparazione sentii come un odore di acido solfidrico, ma per accertarmi meglio fiutai qualche bollicina di gas quasi schietto. Al primo momento pareva acido solfidrico, ma dopo pochi istanti sentii nella narice destra, colla quale avevo fiutato, un dolore, un bruciore acutissimo, orribile, come di minuti spilli che si infiggessero nella mucosa, bruciore che eccitava la lacrimazione; la saliva diventava filante e dopo qualche tempo provai dolore forte al lobo frontale destro; il senso dell'odorato diminuì assai al punto che il cotone imbevuto di ammoniaca non mi dava noia; dopo 5 ore cominciò a prodursi una noiosa coriza, acquosa, che mi impedì il sonno per una notte intera e che mi durò più di quattro giorni. Non prevedevo tutta questa serie di sintomi poco gradevoli. Ero in quei giorni appunto occupato intorno ai lavori di Berzelius, e lessi attentamente quanto egli diceva dell'azione di questo gas potentemente venefico, e vi trovai ampie notizie che non ritrovai più in altri libri. Ecco quanto egli scrive nel suo *Traité*, ed. franc., 1845, t. I, pag. 201:

[1] I. Guareschi, *J. J. Berzelius e la sua opera scientifica*. Torino, U. T. Ed. T., 1915, 1 vol. in-4° di pagg. 160, dal " Supplem. Ann. 1915 ".

" Le gaz acide sélénhydrique est incolore: et s'il est mêlé
" de beaucoup d'air atmosphérique, il présente une odeur tel-
" lement semblable à celle du sulfide hydrique, qu'il est difficile
" de l'en distinguer; mais lorsqu'on respire ce gaz dans un état
" plus concentré, on remarque une différence dans l'odeur; ce
" n'est plus alors, à vrai dire, une odeur; c'est la sensation
" d'une douleur brûlante qu'on éprouve dans le nez, qu'on dirait
" irrité par un pinceau de pointes d'aiguilles fines. Il est dan-
" gereux à respirer; et la membrane muqueuse des fosses na-
" sales, même après n'en avoir été frappée que d'une quantité
" insignifiante, est bientôt atteinte de sécheresse; la conjonctive
" même s'injecte, et les yeux rougissent. En manipulant ce gaz,
" il faut donc se garder d'en respirer les moindres traces. Ce
" gaz produit sur la trachée-artère et les organes respiratoires
" les effets les plus violents, qui, à ce qu'il paraît, peuvent fa-
" cilement devenir dangereux. En agissant sur l'organe olfactif,
" il fait d'abord naître une odeur parfaitement semblable à celle
" du gaz sulfide hydrique; mais à peine a-t-on perçu cette odeur,
" qu'on éprouve sur tous les points des fosses nasales, frappés
" par le gaz, une sensation douloureuse de picotement et de
" constriction. Cette sensation rappelle assez celle que produit
" le gaz fluoride silicique, mais elle est infiniment plus vive. Les
" yeux deviennent instantanément rouges; l'odorat disparaît
" complètement. Dans la première expérience que je fis pour
" apprécier l'odeur de ce gaz, après n'avoir inspiré par l'une
" des narices qu'une bulle de gaz de la grosseur d'un pois, je
" perdis tellement la faculté olfactive pour plusieurs heures,
" que je pouvais flairer l'ammoniaque la plus concentrée sans
" éprouver la moindre sensation. L'odorat se rétablit au but
" de cinq à six heures, mais il resta un coryza violent et in-
" commode, qui dura 14 jours. La cause de ces effets tenaces
" réside en ce que la sélénide hydrique se décompose avec une
" facilité extrême, par l'air qui se trouve en contact avec la
" membrane muqueuse du nez et des organes respiratoires; le
" sélénium se précipite, et s'y fixe aussi solidement que les ma-
" tières colorantes sur les étoffes; et les symptômes du coryza
" ne cessent que lorsque la matière étrangère, fixée sur la mem-
" brane muqueuse, est complètement éloignée, ce qui ne s'effectue
" que très-lentement „.

Io penso che anche qui il Berzelius abbia ragione. Secondo me la materia estranea, in questo caso il *selenio ridotto*, sarebbe, non quasi allo stato colloidale come supponeva Berzelius, ma in piccolissimi e microscopici aghetti infitti nel tessuto della mucosa, da ciò il dolore acutissimo. L'osservazione microscopica sarebbe utilissima. Il selenio con facilità cristallizza. L'acido selenidrico in contatto dell'aria umida, e tanto più di materia organica, è decomposto con deposito di selenio rosso cristallino. I corpi porosi facilitano la decomposizione dell'acido selenidrico.

Io pertanto ho avuto il piacere, per quanto doloroso, di confermare ciò che ha scritto il Berzelius da quasi 100 anni sull'idrogeno seleniato.

Per alcuni altri particolari si vegga anche la sua classica Memoria sul selenio (1).

Dopo ciò che ha scritto Berzelius sull'azione fisiologica dell'idrogeno seleniato poco si è aggiunto. La sua azione, scrive Moissan, si porta sovratutto sulle mucose del naso e dei bronchi e produce una coriza tenace e una tosse insistente e dolorosa (2).

I vecchi Trattati di Chimica facevano cenno di quest'azione speciale dell'idrogeno seleniato, ed il Pelouze e Frémy nel loro *Traité de Chimie*, 2ª ediz., 1854, t. I, pag. 433, scrivono:

" Il possède une odeur qui rappelle entièrement celle de " l'acide sulphydrique; il est encore plus vénéneux que ce " dernier acide. Lorsqu'on en respire une certaine quantité, il " irrite fortement la muqueuse des fosses nasales; le sens de " l'odorat est même complètement paralysé et ne revient qu'au " bout de plusieurs heures, souvent même au bout de plusieurs " jours ".

Pressochè come scriveva Berzelius.

Anche il nostro Gazzeri nel suo lodevole *Compendio di un Trattato elementare di Chimica*, Firenze, 1828, t. I, pag. 180, ricorda le proprietà fisiologiche e l'azione venefica dell'idrogeno seleniato, quasi colle stesse parole di Berzelius.

L'acido selenidrico è fissato rapidamente dalla calce sodata, trasformandosi in seleniuro e credo anche in parte riducendosi

(1) *Recherches sur un nouveau corps minéral trouvé dans le soufre fabriqué à Fahlun* (" A. Ch. ", 1818 [2], t. IX, pag. 233-234).

(2) *Traité de Chim. min.*, t. I, pag. 469.

a selenio libero che rimane aderente. Nella parte opposta del tubo pel quale passa l'acido selenidrico non si ha il minimo indizio della sua presenza.

Dunque dato il caso che si costruissero delle bombe contenenti di questo gas, anch'esse riescirebbero inefficaci perchè la calce sodata fissa il gas; ma il rimedio deve essere pronto, perchè l'azione di questo gas si fa sentire istantaneamente.

4) Anidride solforosa o acido solforoso.

Il gas solforoso viene assorbito dagli alcali e dai carbonati alcalini, come è noto a tutti.

Quando si fa passare il gas solforoso per un tubo contenente, ad esempio, 117 gr. di $Na^2CO^3 . 10 H^2O$ in minuti cristalli, viene facilmente assorbito ed il carbonato si liquefà: non si sviluppa calore. Anche facendo passare 2 litri di SO^2 schietto, tutto rimane fissato, e solo la metà del carbonato rimane intaccata.

Facendo passare il gas solforoso attraverso la calce sodata viene immediatamente, rapidissimamente assorbito con sviluppo di molto calore; la temperatura può salire oltre i 150°. L'aria contenente molto gas solforoso può essere facilmente e con sicurezza respirata se passa attraverso calce sodata, la quale ha il vantaggio di restare solida e granulosa e di non lasciar sfuggire l'acido carbonico. In una esperienza io respirai 18 litri di aria che conteneva 3 % di SO^2 senza nessun inconveniente; in questo caso dunque la calce sodata può servire benissimo per respirare l'aria infetta da acido solforoso. In queste condizioni il tubo non si scalda a più di 50°-60°.

Con un tubo contenente 200 gr. di calce sodata si possono assorbire rapidissimamente *sei* litri di gas solforoso puro trascinato da rapida corrente d'aria.

Ho voluto vedere quanto gas si assorbiva dalla calce sodata sia in peso, sia in volume.

Il gas solforoso sul mercurio è assorbito rapidamente, sul principio, e poi mano a mano più lentamente:

Gr. 0.188 di buona calce sodata in 3 granelli dopo 2 minuti assorbirono 9.5 cm^3 di SO^2, e riferiti a 100 gr. di calce

sodata sarebbero 5050 cm³; dopo 20 minuti 6900 cm³; dopo 1ʰ.45 furono 10400 cm³; dopo 6ʰ.15: 14900 cm³; dopo 24 ore 17200 cm³.

In un'altra esperienza gr. 0.30 di calce sodata pure recentemente preparata assorbirono 19.5 cm³ di SO^2 cioè 100 gr. = 6500 cm³.

Gr. 0.0698 di calce sodata identica alla precedente furono messi in contatto con 23.7 cm³ di SO^2, dopo 2-3 minuti se ne assorbirono 6.1 cm³, cioè per 100 gr. di calce sodata 8600 cm³ e dopo 20 minuti 10400 cm³ e dopo 24 ore 15900 cm³. L'assorbimento continuò sino ad arrivare a 20770 cm³ dopo 6 giorni.

In un'altra esperienza con gr. 0.197 di calce sodata e 86 cm³ di gas dopo 2 minuti si ebbe un assorbimento di 6080 cm³ per 100 gr., dopo 20 minuti 8950 cm³ e dopo 6 ore 15480 cm³. Poi l'assorbimento si fa sempre più lento e dopo 10 giorni arrivò a 26640 cm³.

Ciò che importa qui osservare, come in altri casi, non è tanto la quantità totale assorbita dopo più o meno lungo tempo, quanto la rapidità colla quale si assorbe il gas nei primi due minuti, cioè appena viene in contatto colla calce sodata.

Questo è appunto ciò che succede quando si fa passare con corrente d'aria, anche rapidissima e mista con più o meno di gas solforoso, attraverso la calce sodata: il gas viene subito assorbito con sviluppo di calore.

Col mio apparecchietto ho dosato, con una certa approssimazione, la quantità di questo gas quando passa attraverso la calce sodata insieme a corrente d'aria.

5) Iponitride $(NO^2)^x$.

L'iponitride, preparata dal biossido di azoto in presenza di ossigeno, fatta passare mediante una rapidissima corrente d'aria attraverso ad un tubo ad U contenente 45 gr. di calce sodata recentemente preparata, viene subito assorbita con sviluppo di calore (benchè non molto). Anche se mista con altri gas, l'iponitride rimane rapidamente fissata.

La calce sodata è dunque un eccellente assorbente di $(NO^2)^x$.

6) Gas dell'acqua regia, cloruro di nitrosile NOCl e cloruro di nitrile $NOCl^2$.

I gas sviluppati dall'acqua regia, preparata con 1 p. di HNO^3 a 1.40 e 3 p. di HCl a 1.29, costituiti da un miscuglio di HCl, NOCl, $NOCl^2$, Cl (Gay-Lussac) [1] vengono rapidamente assorbiti dalla calce sodata, con sviluppo di calore. In una delle esperienze mescolai 10 cm^3 di HNO^3 a 1.40 e 36 cm^3 di acido cloridrico a 1.19. Scaldai entro largo pallone sino a che incominciasse regolarmente lo sviluppo di gas e questi mediante *rapida* corrente d'aria furono fatti passare attraverso un tubo con 45 gr. di calce sodata. Si notò subito sviluppo di molto calore, ma nulla passò che reagisse colle carte reattive nè che coll'acqua desse una soluzione acida.

7) Biossido di azoto NO.

Questo gas viene discretamente assorbito dalla calce sodata, ma lentamente.

Gr. 0.58 di calce sodata dopo 45 minuti assorbirono 1 cm^3 di gas e dopo 24 ore 5 cm^3; l'assorbimento continua anche dopo moltissimi giorni, dopo qualche mese. Così fu pure osservato colla potassa da Gay-Lussac, da Russel e Lapraìk e da altri. Si trasforma, almeno in parte, in N^2O e nitrito. Sono esperienze che richieggono lungo tempo e sulle quali riferirò in un'altra Nota.

Praticamente la calce sodata è un eccellente reattivo assorbente anche del biossido di azoto qualora questo gas velenosissimo fosse usato per delle bombe, perchè esso all'aria si trasforma istantaneamente in perossido di azoto o iponitride e questo viene rapidamente fissato dalla calce sodata.

---

[1] Gay-Lussac, *Mém. sur l'eau régale*, in " A. Ch. ", 1848 (3), t. 23, p. 203.

8) Cianogeno.

Era importante verificare se a temperatura ordinaria questo gas venefico viene oppure no assorbito, fissato, dalla calce sodata.

Il cianogeno è un gas che colora il sangue defibrinato in scuro (metemoglobina). Negli animali a sangue caldo provoca irritazione od infiammazione delle mucose e provoca delle convulsioni, dispnea, cianosi e paralisi (Lewin). È però meno tossico dell'acido cianidrico.

Il cianogeno ha odore piccante, e taluni dicono abbia odore di mandorle amare. Gay-Lussac nella sua celebre Memoria: *Recherches sur l'acide prussique, présenté à l'Institut le 18 sept. 1815* [1] scriveva: " Son odeur, qu'il n'est point possible de définir, est " extrêmement vive et pénétrante: son dissolution dans l'eau a " une saveur très-piquante ".

Il vero è che quando è schietto l'odore è piccante ed irritantissimo; irrita la mucosa del naso in modo analogo a quello dell'acido selenidrico, ma in grado minore; quando è diluito con aria ha odore di mandorle amare. Dunque anche qui come per l'acido selenidrico si osserva che l'odore è diverso secondo che $(CN)^2$ è puro, concentrato, oppure diluito con aria.

In 50 cm³ di cianogeno sul mercurio furono introdotti 0.18 di calce sodata, buona ma non freschissima, in 5-6 granelli. Dopo 2 minuti erano assorbiti 8 cm³, che riferiti a 100 gr. di calce sodata sono 4440 cm.; dopo 20 minuti sono assorbiti 10 cm³, cioè per 100 sarebbero 5550 cm³, e ancora dopo 3-4 ore in totale furono 12 cm³, cioè per 100 si avrebbero 6660 cm³. La calce sodata sino dal principio diventò *bruna* e poi quasi *nera*.

Gr. 0.1460 di calce sodata recentemente preparata e stata per 10 a 12 giorni in scatola di latta chiusa con tappo a vite, messi in 86 cm³ di cianogeno alla temperatura di 15°-18° e pressione di 740 mm., assorbirono dopo 1 minuto 6 cm³ di gas, cioè 100 gr. = 4100 cm³. I granelli di calce sodata annerirono subito.

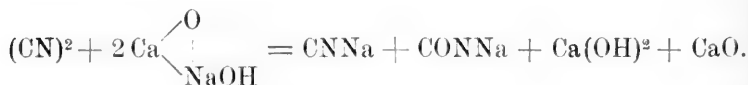
[1] " A. Ch. ", 1815 (1), t. 95, p. 177.

Dopo 20 minuti 8 cm³ ossia 5460 cm³ per 100 gr., e dopo 24 ore 11 cm³ ossia 7510 cm³ per 100 gr. Non se ne assorbì quasi più o con grande lentezza.

In un'altra esperienza in 37 cm³ di cianogeno furono introdotti 0.30 di calce sodata in due grossi grani; dopo 2 minuti si assorbirono 15.5 cm³ e per 100 gr. 5100 cm³; dopo 20 minuti si arrivò a 5830 cm³ (per 100 gr.), dopo circa 4 ore 6500 cm³ e dopo ancora 4 ore si arrivò per 100 gr. a 6600 cm³. Il che corrisponde alla prima esperienza. Come si scorge, l'assorbimento rapido è in principio.

L'imbrunimento o annerimento osservato corrisponde a quanto già il Gay-Lussac aveva notato colla potassa (¹): " Lorsqu'on introduit une solution de potasse bien pure dans " ce gaz, l'absorption en est rapide; si l'alcali n'est trop con- " centré et qu'on ne le sature pas entièrement, il se colorera " à peine en jaune-citrin. Si au contraire le cyanogène est en " excès, on obtiendra une dissolution brune, et comme char- " bonnée ".

Ho fatto poi l'esperienza di far passare il gas con rapida corrente d'aria attraverso la calce sodata, 40 gr. di calce sodata erano contenuti in tubo di 1.5 mm. e per una lunghezza di 35 cm. Mediante corrente d'aria feci passare circa 70 cm³ di gas cianogeno e subito, sin da principio, si sviluppò molto calore e la calce sodata *non si colorò in bruno*. Rimase coll'aspetto di prima. Il riscaldamento ebbe luogo per una lunghezza di 8 a 10 cm. di calce sodata; dalla parte opposta non passò traccia di cianogeno. Lo dimostrò in modo evidente non solo l'odore ma più ancora perchè un poco della calce sodata della branca per la quale entrava il gas trattato con acqua, filtrata, ecc., dava intensissima la reazione del bleu di Prussia, mentre non la diede la calce sodata della branca opposta. La reazione potrebbe essere la seguente:

$$(CN)^2 + 2\,Ca\begin{matrix}\diagup O \\ \vdots \\ \diagdown NaOH\end{matrix} = CNNa + CONNa + Ca(OH)^2 + CaO.$$

(¹) Loc. cit., p. 188.

Non ho cercato l'isocianato che potrebbe formarsi.

Non si produsse dell'ammoniaca, la quale invece fu osservata dal Gay-Lussac quando metteva il cianogeno in presenza della potassa.

Il cianogeno è dunque fissato come *cianuro*.

La calce sodata potrebbe forse servire *a fissare il cianogeno dei gas degli alti forni?* Il cianogeno fu trovato libero nei gas che si sviluppano dagli alti forni, da Bunsen e Playfair [1]; in un'analisi ne trovarono 1.34 %.

Ho voluto vedere come si comportasse il gas cianogeno attraversando la soda caustica solida.

In un tubo analogo al precedente contenente 54 gr. di NaOH in pezzetti fu fatto passare il cianogeno insieme a corrente d'aria; si nota sviluppo di calore, ma minore che colla calce sodata. Ad ogni modo il cianogeno è fissato bene.

Praticamente è più utile usare la calce sodata per assorbire il cianogeno.

9) Cloruro, bromuro e joduro di cianogeno.

Cloruro di cianogeno CNCl. — Il gas cloruro di cianogeno fu preparato col metodo descritto da Dumas nel suo *Traité de chimie*, mediante l'azione del cloro sul cloruro mercurico, depurazione col mercurio, ecc. Questo gas è incoloro, di odore insopportabile, acuto, irritante e che eccita la lacrimazione. Secondo alcuni produce un vivo dolore quando lo si mette in contatto colla pelle, la quale rimane intaccata. È molto velenoso, anche se sciolto in acqua. Gr. 0.050 a 0.100 di soluzione (satura?) bastano per uccidere un coniglio [2].

Gli animali che hanno respirato in una atmosfera contenente 0.3 % (in volume) di CNCl sono colpiti da asfissia e muoiono dopo 3 minuti in preda a convulsioni. Si svela il cianogeno nel sangue.

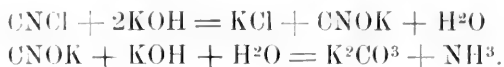
L'acqua ne scioglie 20 volte il suo volume e l'alcol 100 volte.

---

(1) " J. pr. Ch. ", 1847 (1), t. 42, p. 266.

(2) Vedi Lewin, *Traité de Toxicologie*.

Colla potassa dà cloruro e cianato e successivamente dell'ammoniaca:

$$CNCl + 2KOH = KCl + CNOK + H^2O$$
$$CNOK + KOH + H^2O = K^2CO^3 + NH^3.$$

Il gas da me esperimentato aveva tutti i caratteri indicati; il suo odore era acutissimo, irritante specialmente gli occhi; se diluito con aria, pare abbia un poco l'odore di mandorle amare. Fatto passare con corrente d'aria attraverso un tubo di 1.5×35 contenente 42 gr. di calce sodata, viene immediatamente assorbito, con sviluppo intenso di calore: l'assorbimento è rapidissimo. Dalla parte opposta del tubo non si ha traccia di cloruro di cianogeno, ma bensì dell'ammoniaca. La calce sodata non dà, dopo l'esperienza, la reazione dei cianuri. È tanto il calore sviluppato che dalla parte opposta del tubo esce il vapore d'acqua.

In un'altra esperienza circa 1 litro di questo gas fu fatto passare con corrente rapida di aria attraverso 62 gr. di calce sodata recente contenuta in un tubo 1.8×35. Nella branca ove entra il gas misi un termometro e la temperatura salì a 170°-180°. Anche qui si sviluppò ammoniaca riconoscibile anche allo stato di cloroplatinato.

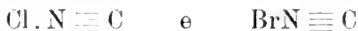
Dunque la calce sodata può servire utilmente ad assorbire questo gas. La reazione potrebbe avvenire nel modo seguente:

$$(CN)^2 + 2Ca\begin{cases}O\\NaOH\end{cases} = CNONa + NaCl + Ca(OH)^2 + CaO$$

e poi:

$$CNONa + 2H^2O = NaHCO^3 + NH^3.$$

La rapidità colla quale il cloruro ed il bromuro di cianogeno dànno dell'ammoniaca e non dei cianuri, mentre il gas cianogeno dà i cianuri, farebbe dubitare che il cloro ed il bromo in questi composti esistessero combinati all'azoto e fossero in realtà degli *isocianuri*:

$$Cl.N \equiv C \quad e \quad BrN \equiv C$$

e non dei veri cianuri:

$$Cl.C \equiv N \quad e \quad Cl.C \equiv N.$$

Ho voluto anche vedere quanto cloruro di cianogeno si assorbe quando si mette la calce sodata in contatto col gas puro sul mercurio.

In una *prima* esperienza: gr. 0.192 di calce sodata in 51 cm³ di gas ne assorbirono dopo 2 minuti 7.5 cm³, cioè per 100 gr. 3900 cm³; dopo 10 minuti 4937 cm³; dopo 20 minuti 5990 cm³; dopo 1 ora 9374 cm³ (sempre per 100 gr.); dopo 1ʰ.30 10880 cm³ e dopo 48 ore 13500 cm³.

Anche qui si scorge che la maggiore rapidità di assorbimento è nei primi minuti.

In una *seconda* esperienza: gr. 0.1946 della stessa calce sodata, in granuli forse un poco più piccoli, assorbirono dopo 1 minuto 7 cm³ di gas, ossia per 100 gr. di calce sodata 3596 cm³ di gas; dopo 2 minuti 4110 cm³; dopo 20 minuti 5650 cm³; dopo 1 ora 8776 cm³; dopo 5 ore 12300 cm³ e dopo 48 ore 12800 cm³.

In un'altra esperienza con calce sodata più recente e in piccoli grani, gr. 0.183 assorbirono dopo 2 minuti 4100 cm³ di gas per 100 gr. di calce sodata e dopo 10 minuti 5200 cm³.

E in un'altra esperienza si ebbero analoghi risultati.

Dunque anche questo gas è assorbito e decomposto benissimo dalla calce sodata, a temperatura ordinaria.

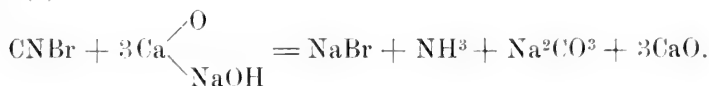
Esperienze di confronto fatte con altre calci sodate, come quella bianchissima di Kahlbaum, hanno dimostrato che queste hanno anche pel cloruro di cianogeno un potere assorbente assai minore.

Bromuro e joduro di cianogeno. — Il bromuro di cianogeno anche allo stato solido è prontamente intaccato dalla calce sodata.

2.7 gr. di bromuro di cianogeno puro in bei cristalli, fusibili 50°-51°, di odore acutissimo ed irritantissimo, furono mescolati con 10 gr. di calce sodata buona; dopo pochi istanti si manifesta una violenta reazione con sviluppo notevole di calore e produzione di grande quantità di ammoniaca. Sulla parete della boccia si depositarono dei lunghi aghi incolori piatti, che poi scomparirono; non li ho esaminati. Naturalmente che anche allo stato gasoso questo corpo avrebbe dovuto essere assorbito dalla calce sodata ed invero:

Feci passare il gas attraverso 50 gr. di calce sodata contenuta in un tubo di 1.6 mm. di diametro e lunghezza di 30-35 cm. in comunicazione col mio apparecchio per la ricerca del bromo. Il bromuro di cianogeno era contenuto in un pallone di circa 6 litri. Fatto passare insieme ad una corrente d'aria, venne subito assorbito con sviluppo di calore e attraverso all'acido cromico caldo non passò traccia di composto bromurato; ma appena ebbi rimosso il tubo a calce sodata il bromo si manifestava subito.

Probabilmente anche in questo caso la reazione ha luogo così (1):

$$CNBr + 3Ca\begin{matrix} \diagup O \\ \diagdown NaOH \end{matrix} = NaBr + NH^3 + Na^2CO^3 + 3CaO.$$

In modo analogo si comporta il *joduro di cianogeno*, il quale però agisce meno vivamente colla calce sodata.

Seguiranno poi in una Nota III le esperienze che ho fatto con altri gas e specialmente coll'anidride carbonica, coll'ossido e coll'ossisolfuro di carbonio e quelli del gruppo dell'idrogeno arsenicale ed antimoniale.

Torino, R. Università, Dicembre 1915.

(1) Dopo queste ricerche ho fatto delle esperienze con calce ordinaria bruna in granelli, con calce ordinaria quasi bianca e con calce dal marmo, *mescolate* semplicemente con potassa o soda caustiche in frammenti misti a polvere. I miscugli erano fatti in rapporti diversi: 2 a 1; 4 a 1; 6 a 1; 15 a 1, ed in ogni caso col gas solfidrico e corrente d'aria si osservava l'incandescenza. Però il gas solfidrico sino da principio passava in parte senza essere fissato. Ora studierò il potere assorbente di questi miscugli su altri gas. Descriverò le esperienze quando discuterò la questione del come agisca la calce sodata.

Elasticità e resistenza degli acciai ad alto tenore di nickel.

Nota I di GUSTAVO COLONNETTI

(Con una Tavola).

Gli acciai al nickel, di cui l'industria utilizza oggi così largamente le belle proprietà fisiche e meccaniche, si possono notoriamente distinguere in tre grandi categorie, a seconda che si presentano con struttura perlitica, martensitica, ovvero poliedrica.

Gli acciai della prima categoria, per la loro resistenza, a parità del tenore di carbonio, alquanto più elevata di quella dei corrispondenti acciai comuni, vengono a questi preferiti nella costruzione dei cannoni, dei pezzi fucinati o stampati che debbono sopportare energiche sollecitazioni dinamiche, degli assi, degli alberi a gomito, degli alberi per macchine o per trasmissioni molto caricati; se dolci, essi si prestano assai bene per cementazione.

Cogli acciai della seconda categoria si possono facilmente ottenere carichi di rottura e durezze elevatissime senza incorrere nella fragilità propria degli acciai comuni temprati. La loro rimarchevole resistenza all'ossidazione contribuisce a renderli apprezzati, malgrado le difficoltà sovente non lievi di lavorazione ed il prezzo di costo relativamente elevato.

Gli acciai della terza categoria sono invece caratterizzati da allungamenti di rottura e da strizioni molto superiori a quelli degli acciai comuni di pari resistenza: pel loro ottimo comportamento a caldo sono ormai universalmente adottati nella costruzione di tubi per caldaie, di valvole per motori ad esplosione, ecc.

La loro inossidabilità è tanto più grande quanto maggiore è la percentuale di nickel.

In determinate condizioni esse possono presentare certe proprietà fisiche speciali (come quella di essere non magnetici alla temperatura ordinaria, ovvero quella di possedere una resistenza elettrica che può perfino essere decupla di quella del ferro) che li rendono indicatissimi anche nella costruzione di strumenti di misura e di apparecchi di precisione.

A questa categoria appartengono l'*invar* (C = 0,20 %, Ni = 36 %), che ha un coefficiente di dilatazione termica bassissimo, e la *platinite* (C = 0,15 %, Ni = 46 %), il cui coefficiente di dilatazione termica eguaglia quello del vetro.

Delle proprietà resistenti di questi acciai si sono occupati diffusamente molti autori: basti citare, fra i più noti, Hadfield, Dumas, Guillaume, Guillet (1).

Poco note sono tuttavia le caratteristiche elastiche di questi materiali: quasi tutti i trattati avvertono che il modulo di elasticità degli acciai al nickel è sensibilmente inferiore a quello degli acciai comuni: ma dati precisi mancano o sono discordanti fra di loro.

Avendo avuto in questi ultimi mesi frequenti occasioni di studiare gli acciai al nickel prodotti nelle acciaierie al crogiuolo della Società Italiana per la Fabbricazione dei Proiettili, ho costantemente osservato che l'influenza del nickel si rende manifesta non soltanto per l'abbassamento del modulo, ma ancor più per la sua variabilità, il comportamento elastico del materiale differendo tanto più sensibilmente dalle condizioni teoriche

(1) Hadfield, *Alloys of iron and nickel*, " Proceedings of the Instit. of civil Engin. ", t. CXXXVIII (1900).

Dumas, *Recherches sur les aciers au nickel à hautes teneurs*, " Annales des mines ", 1902.

Guillaume, *Applications scientifiques des aciers au nickel*, Gauthier-Villars, 1904.

Guillet, *Étude industrielle des alliages métalliques*, H. Dunod et E. Pinat, 1906.

espresse dalla classica legge di Hooke, quanto più alto è il suo tenore di nickel.

Credo pertanto di poter portare il mio modesto contributo alla conoscenza di questi interessantissimi materiali riferendo alcune delle mie osservazioni; osservazioni che per brevità limiterò a tre soli tipi di acciai, scelti rispettivamente tra gli appartenenti alle tre categorie sopra ricordate, ed aventi le seguenti caratteristiche:

Struttura	Composizione chimica			
	C	Mn	Si	Ni
Perlitica . . .	0,24 %	0,45 %	0,21 %	5,08 %
Martensitica . .	0,21 „	0,36 „	0,20 „	12,19 „
Poliedrica . . .	0,24 „	0,65 „	0,20 „	26,08 „

I lingottini destinati alle esperienze, del peso di circa 50 kgr. (2 crogiuoli), vennero tirati al maglio in barre quadre di mm. 20 × 20. Da queste barre, previi i trattamenti che saranno indicati caso per caso, si ricavarono le varie provette, tonde, del diametro di mm. 10 (sezione resistente $F = 78{,}54$ mm²).

Le esperienze vennero eseguite nel laboratorio per le prove sui materiali della Società Italiana per la Fabbricazione dei Proiettili mediante macchine di costruzione Amsler, munite di misuratore degli sforzi a pendolo. Due di queste macchine, una di cinque e l'altra di cinquanta tonnellate di potenza, hanno servito per le prove di elasticità e di resistenza. Una terza era destinata alle determinazioni di durezza, di cui si farà cenno a proposito degli acciai della terza categoria.

Delle indagini tendenti alla determinazione delle caratteristiche elastiche mi riservo di occuparmi in una seconda Nota.

Qui mi limiterò a riferire brevemente i risultati delle prove di resistenza mettendoli in relazione coi trattamenti termici che si sono rivelati più vantaggiosi.

A questo proposito poco o nulla c'è da dire sull'**acciaio al 5 % di nickel,** le cui proprietà non differiscono da quelle di un acciaio comune egualmente ricco in carbonio, se non per una maggiore resistenza. Il materiale, allo stato ricotto, presenta un vantaggio che si può stimare in circa 10 kgr/mm^2; questo vantaggio può però, mediante tempera, essere sensibilmente accresciuto.

Ben diverse sono le caratteristiche degli acciai che contengono il nickel in maggior proporzione.

L'**acciaio al 12 % di nickel** presenta, dopo semplice ricottura a 800°, una resistenza elevatissima, dell'ordine di grandezza di quelle degli acciai duri temprati, dai quali però, come vedremo a suo tempo, esso si differenzia nettamente nel comportamento elastico.

Per effetto della tempera la resistenza non cresce che di 5 o 6 kgr mm^2; si può quindi ritenere che la maggiore o minore rapidità di raffreddamento sia quasi senza influenza sulla proprietà del materiale.

Ciò va messo in relazione col fatto ben noto che tutti i materiali di questa categoria subiscono la trasformazione al raffreddamento anche lentissimo ad una temperatura molto inferiore a quella a cui avviene la trasformazione al riscaldamento.

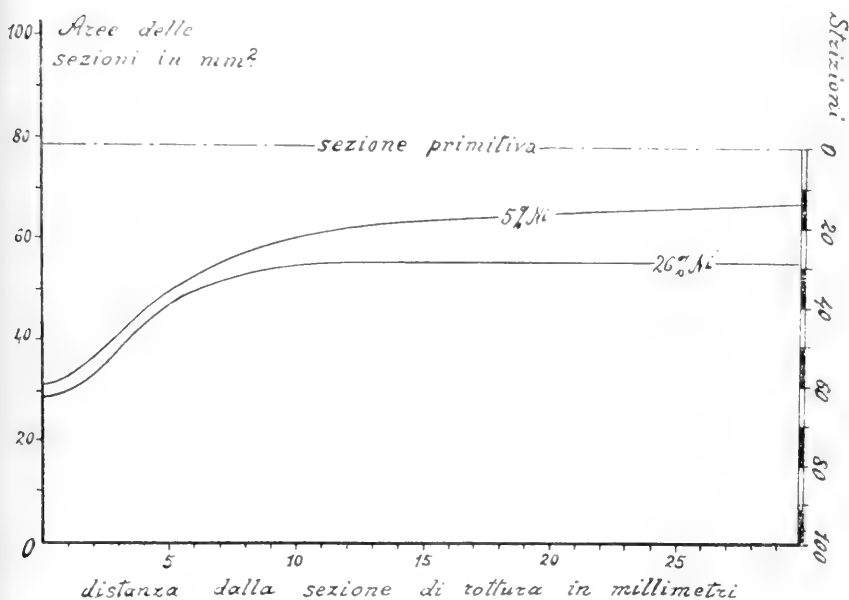
L'unico modo di diminuire la durezza e la resistenza del materiale, accrescendone insieme l'allungamento e la strizione, è pertanto quello di ricuocerlo ad una temperatura di poco inferiore a quella di trasformazione al riscaldamento; l'effetto è tanto più sentito quanto più tale ricottura si prolunga.

L'operazione è però alquanto delicata perchè bisogna avvicinarsi il più possibile alla temperatura di trasformazione senza raggiungerla, inquantochè, ove ciò avvenisse, l'effetto sarebbe assolutamente negativo, e bisognerebbe ricominciare daccapo a raffreddamento completo.

L'**acciaio al 26 % di nickel**, previa la solita ricottura

a 800°, presenta invece una resistenza abbastanza modesta ed una durezza relativamente ancor minore (1), ma accompagnata da allungamenti enormi a fronte di quelli che, a pari resistenza, potrebbe avere un acciaio comune.

Tali allungamenti si possono anzi ulteriormente aumentare mediante tempera, la resistenza restando quasi invariata.

Ciò dipende dal fatto che i materiali di questa terza categoria hanno il punto di trasformazione al raffreddamento al

disotto della temperatura ordinaria: alla quale temperatura essi si trovano perciò nello stato stabile a caldo, sempre quando, s'intende, non siano stati preventivamente portati a temperature sufficientemente basse.

Sempre a proposito degli allungamenti si può osservare che

(1) Le misure da me eseguite su buon numero di campioni di questo acciaio hanno concordemente dimostrato che il coefficiente di Brinell si mantiene assai prossimo a 0,45.

il modo con cui questi si presentano mette in evidenza la grande attitudine che questo materiale offre all'incrudimento.

Questa attitudine, che le esperienze di elasticità confermeranno ampiamente, si rende qui manifesta per la grande prevalenza dell'allungamento uniforme sull'allungamento locale che precede immediatamente la rottura del saggio. Ciò appare chiaramente a chi osservi la forma dei diagrammi di deformazione riprodotti nelle pagine che seguono: si vede anche meglio nel diagramma delle strizioni, specie se, come si è fatto nella presente figura, tale diagramma vien messo in paragone con quello relativo ad un acciaio meno ricco in nickel, il quale, anche a parità o quasi di strizione nella sezione di rottura, presenta sempre allungamenti uniformi di gran lunga inferiori.

Del resto il fenomeno è così marcato che si rileva anche da un esame sommario delle provette strappate a trazione, le quali sono sempre sensibilmente deformate perfino in corrispondenza dei tronchi conici e delle teste. Ciò si vede assai bene nella fotografia che riproduce l'aspetto dopo rottura di tre provette inizialmente identiche per forma e dimensioni. All'energico incrudimento a cui va soggetto l'acciaio al 26 $^0/_0$ di nickel è da attribuirsi l'aspetto opaco del saggio, che ha perduta completamente la sua primitiva lucentezza: lucentezza che l'acciaio al 12 $^0/_0$ di nickel conserva invece quasi inalterata, eccezion fatta soltanto per la regione immediatamente adiacente alla sezione di rottura.

Acciaio al 5 % di nickel		a) Fucinato e ricotto a 800°	b) Fucinato, ricotto a 800°, poi temprato a 900° in olio e rinvenuto a 525°
Carico di snervamento riferito alla sezione primitiva . . .	Kgr/mm²	42.4	89.0
Resistenza massima riferita alla sezione primitiva	"	58.6	96.4
Carico di rottura riferito alla sezione di rottura	"	106.7	183.5
Lavoro di deformazione unitario misurato su dieci diametri .	"	12.3	11.9
Allungamento di rottura su dieci diametri	%	22.6	13.2
Strizione nella sezione di rottura	"	60.0	64.0

Nota. — I diagrammi di deformazione riprodotti in questa e nelle pagine seguenti sono stati disegnati direttamente dall'apparecchio registratore della macchina Amsler e rappresentano colle loro ordinate gli sforzi applicati al saggio, e colle ascisse le variazioni di lunghezza del suo tratto utile (inizialmente eguale a dieci diametri).

Acciaio al 12 % di nickel		a) Fucinato e ricotto a 800°	b) Fucinato, ricotto a 800°, poi ricotto nuovamente in bagno di piombo a 525° per 10 ore
Carico di snervamento riferito alla sezione primitiva . . .	Kgr/mm²	—	—
Resistenza massima riferita alla sezione primitiva	„	162.0	95.6
Carico di rottura riferito alla sezione di rottura	„	228.0	167.0
Lavoro di deformazione unitario misurato su dieci diametri .	„	13.6	11.4
Allungamento di rottura su dieci diametri	%	8.8	12.5
Strizione nella sezione di rottura	„	36.0	57.7

Prove di rottura a trazione su materiali ricotti a 800° (provette inizialmente identiche per forma e dimensioni).
In alto: acciaio al 5 % di nickel. — In mezzo: acciaio al 12 % di nickel. — In basso: acciaio al 26 % di nickel.

Acciaio al 26 % di nickel		a) Fucinato e ricotto a 800°	b) Fucinato, ricotto a 800°, poi temprato a 900° in olio e rinvenuto a 525°
Carico di snervamento riferito alla sezione primitiva . . .	Kgr/mm²	—	—
Resistenza massima riferita alla sezione primitiva	"	56.8	56.4
Carico di rottura riferito alla sezione di rottura	"	139.6	139.3
Lavoro di deformazione unitario misurato su dieci diametri .	"	18.3	20.1
Allungamento di rottura su dieci diametri	%	38.5	42.8
Strizione nella sezione di rottura	"	66.3	64.0

L'equilibramento delle masse rotanti a grande velocità.

Nota I[a] del Dr. Ing. CARLO LUIGI RICCI

(Con 1 tavola).

Introduzione — Generalità.

§ **1**. — L'apparecchio equilibratore per masse rotanti, viene impiegato per correggere gli organi meccanici destinati a rotare a velocità molto elevate, particolarmente i rotori delle turbine a vapore, o delle turbo-dinamo.

Tali masse rotanti devono soddisfare alla condizione che il sistema delle forze centrifughe sviluppate nella rotazione sia in equilibrio; ciò che si ottiene soltanto se l'asse di rotazione è asse principale centrale d'inerzia per la distribuzione delle masse. Questa condizione è necessaria per la buona conservazione dei sopporti e dei perni, e per evitare dannose azioni dinamiche sui basamenti, le quali possono essere molto considerevoli, se è grande la velocità angolare, anche perchè in tal caso si presenta facilmente il pericolo noto della risonanza, pur con sostegni relativamente molto robusti.

L'apparecchio che è oggetto di questo studio, serve anzitutto a verificare se la condizione dell'equilibrio è soddisfatta, ed ove ciò non sia, per inevitabili imperfezioni di costruzione, serve a determinare la posizione e l'entità delle azioni perturbatrici, per potere quindi correggerle coll'aggiunta di opportune masse addizionali.

Questo argomento fu già studiato dallo Stodola ([1]) e dall'Appel ([2]), i quali però si riferiscono all'uso di due diversi apparecchi ch'essi descrivono nei loro lavori citati.

([1]) Stodola, *Die Dampfturbinen,* 1910, cap. V, N. 86, pagg. 278-283.

([2]) Appel, *Machine à déterminer les balourds,* " Journal de l'École Polytechnique ", Paris, 1904, II[e] série, IX[e] Cahier, pagg. 151-162.

L'apparecchio descritto dallo Stodola, che è quello più largamente usato, e del quale perciò più diffusamente ci occuperemo, consta essenzialmente di due sopporti mobili orizzontalmente su sostegni a sfere e trattenuti nella posizione media da apposite molle fissate al basamento; in questi sopporti è impegnato l'albero della massa rotante da sperimentare, la quale vien messa in rotazione mediante un tiro di cinghia verticale (privo perciò di azione diretta sui sopporti), facendo variare gradualmente la velocità di rotazione.

Se la massa è equilibrata, per qualunque valore della velocità il sistema non subisce alcuno spostamento orizzontale, e l'asse di rotazione che chiameremo x si mantiene fisso; se invece si hanno delle masse perturbatrici (che i tecnici francesi chiamano *balourds*), ossia se si sviluppano delle forze centrifughe libere, il sistema della massa coi sopporti vincolati da molle, assume un moto oscillatorio forzato orizzontale, e studiando questo moto si possono analizzare le masse perturbatrici.

Le molle sono di solito situate alle estremità di due espansioni rigide solidali a ciascun sopporto, disposte col loro asse orizzontale e normale all'asse di rotazione, e possono essere molle di torsione ad elica ad asse orizzontale, normale all'asse x, oppure molle di flessione ad asse verticale.

§ 2. — Lo Stodola nell'opera citata suggerisce di far precedere l'uso dell'apparecchio da una correzione *statica* della massa rotante, in modo che questa, poggiata coi suoi perni su regoli orizzontali, stia in equilibrio indifferente in ogni posizione: ciò che si verifica se il baricentro del sistema rotante si trova sull'asse di rotazione.

Ora questa operazione riesce sempre affetta da qualche errore dovuto all'insensibilità della sospensione (attrito volvente), che può essere piuttosto rilevante, dato il peso considerevole che spesso presentano tali organi rotanti.

In questo studio mi propongo di dimostrare come anche tale correzione (del baricentro) si possa fare per *via dinamica* coll'uso dell'apparecchio equilibratore, con una sensibilità che il calcolo fa prevedere e l'esperienza conferma notevolmente superiore a quella che è possibile ottenere per *via statica*.

Inoltre nella teoria citata si presuppone una completa sim-

metria del sistema, ossia si ammette che il baricentro della massa rotante coincida col baricentro elastico del sistema di molle trattenenti i sopporti. Ora è ovvia l'opportunità di non introdurre questa ipotesi restrittiva, sia per maggiore generalità, sia per la probabilità che nei casi concreti detta condizione non possa agevolmente essere realizzata.

E qui mi propongo appunto di trattare la questione nel modo più generale, e di esporre una teoria che permetta di analizzare in modo completo il sistema delle forze centrifughe.

In questa prima Nota mi limiterò ad esporre la teoria dell'apparecchio a molle, riservandomi di studiare in principio di una seconda Nota l'analisi delle forze perturbatrici.

Per la correzione poi delle masse perturbatrici si usa procedere per tentativi, e questi di solito vanno a più riprese ripetuti; vedremo invece nel seguito come introducendo opportunamente apposite perturbazioni *note*, si possa completamente *misurare* con molta approssimazione l'entità delle perturbazioni preesistenti, eliminando così, od almeno riducendo assai di numero i tentativi.

Per quanto riguarda poi lo studio sperimentale del moto oscillatorio, esporrò un metodo di osservazione stroboscopica basato sull'uso di un apparecchio che chiamo *fasometro stroboscopico* [1], il quale permette di realizzare qualche vantaggio per la comodità e l'esattezza delle misure, rispetto ai sistemi comunemente usati.

Dirò poi di alcune ricerche, che sulla guida delle teorie svolte ebbi occasione di eseguire su un modello dell'apparecchio equilibratore che il Prof. Panetti fece eseguire per il Laboratorio di Meccanica applicata alle macchine da lui diretto nel R. Politecnico di Torino [2], dove egli mise a mia disposizione i mezzi sperimentali occorrenti a questo studio ed alla realizzazione del citato apparecchio stroboscopico.

[1] Brevetto N. 130, vol. 449, Reg. gen. N. 148978, 30 giugno 1915.
[2] Questo modello è rappresentato nella tavola I^a.

CAPITOLO I.

Teoria meccanica dell'apparecchio a molle.

§ 1. — La massa rotante si riterrà nel seguito, tale e così disposta che il suo ellissoide centrale d'inerzia sia *di rotazione* rispetto all'asse orizzontale x, intorno a cui ruota la massa, in modo che il suo momento d'inerzia rispetto ad un asse verticale sia indipendente dalle posizioni che la massa può assumere rotando intorno all'asse x, e si mantenga perciò costante; tali sono quasi tutte le masse che si sperimentano su questi apparecchi. Inoltre riterremo che detto momento d'inerzia non venga alterato dalle masse perturbatrici, nè dalle correzioni introdotte in seguito coll'aggiunta o collo spostamento di masse addizionali.

Quest'ipotesi non rigorosa, ma pure opportuna ad evitare soverchie complicazioni di calcolo, ci conduce però a risultati grandemente approssimati, poichè le variazioni del detto momento d'inerzia che con tale ipotesi si trascurano, sono sempre piccolissime in confronto del momento d'inerzia totale, e non possono quindi influire in modo sensibile su quei calcoli che valutano gli effetti dell'inerzia tangenziale dovuta ad eventuali oscillazioni della massa intorno ad assi verticali, nei quali calcoli compare appunto detto momento d'inerzia totale. Notiamo invece che nei fenomeni dovuti alle forze centrifughe sviluppate nella rotazione intorno all'asse x, le masse perturbatrici o quelle di correzione compaiono da sole, poichè l'azione centrifuga della massa supposta da esse liberata è nulla; quindi esse che pure nel primo caso scompaiono di fronte alla massa totale, nel secondo si rivelano invece direttamente.

La determinazione sperimentale del detto momento d'inerzia si può fare col noto metodo delle oscillazioni, sospendendo la massa intorno ad un asse normale ed incidente all'asse x. Poichè i sopporti durante l'esperienza del moto forzato prendono parte alle oscillazioni del sistema, il momento d'inerzia che si considera deve comprendere pure quello dei sopporti, i quali quindi nella determinazione sperimentale del momento d'inerzia devono rimanere uniti alla massa, nelle posizioni che essi occupano du-

rante il funzionamento dell'apparecchio, e disposti coll'asse delle espansioni laterali normale all'asse di sospensione.

§ 2. — Passiamo ora ad esaminare il comportamento elastico del sistema vincolato delle molle. Durante l'esperimento la massa rotante si trova soggetta all'azione delle forze centrifughe, le quali sono normali all'asse di rotazione x; quindi interessa studiare come si comporti il sistema sotto l'azione di forze normali al detto asse.

Poichè i sopporti sostenuti da cuscinetti a sfere possono muoversi in un piano orizzontale, e poichè detti cuscinetti colle loro reazioni eliminano le azioni verticali, basterà considerare le relazioni tra le componenti orizzontali delle forze applicate alla massa e gli spostamenti pure orizzontali da esse prodotti.

Il comportamento elastico di ciascuno dei sopporti vincolati da molle, nel piano orizzontale in cui gli è consentita la mobilità, si può rappresentare al solito con una ellisse longitudinale di elasticità e con un peso elastico, i quali elementi si ottengono *componendo in parallelo* l'elasticità delle singole molle m, in modo analogo a quanto si fa nello studio dei sistemi elastici solidali col noto procedimento del Ritter.

Comincieremo a considerare il caso già indicato delle molle di torsione, ad elica, ad asse orizzontale normale all'asse x. Il comportamento di una di queste molle, la quale, serrata tra i due manicotti di estremità, si deve considerare come in questi rigidamente incastrata, fu da me studiato in una recente nota pubblicata negli " Atti della R. Accademia delle Scienze " di Torino col titolo: *Le deformazioni delle molle ad elica.* Ivi si dimostra come il peso elastico della molla sia:

$$\mathfrak{W} = n\pi R\left(\frac{1}{EJ_a} + \frac{\Psi}{GJ_p}\right)$$

essendo n il numero delle spire, R il raggio del cilindro medio, E e G i soliti moduli di elasticità, J_a il momento di inerzia della sezione della verga costituente la molla rispetto all'asse principale a normale all'asse della molla che chiamiamo z, J_p il momento d'inerzia polare, Ψ il fattore del lavoro di deformazione a torsione. Si ha: $\Psi = \frac{\alpha}{4}\frac{J_p^2}{J_a J_b}$ essendo J_b l'altro momento di

inerzia principale ed α un coefficiente ($1.18 \div 1$) dipendente dalla forma della sezione (1 per il cerchio, 1.18 per il rettangolo non molto allungato: Saint Venant).

Il centro elastico poi è situato sull'asse dell'elica a metà lunghezza. L'ellisse di elasticità ha un semiasse ρ_{x0} disposto lungo l'asse dell'elica, che per una sola spira è dato dalla relazione [1]:

$$\rho_{x0}^2 = \frac{\frac{1}{EF} + \frac{\chi_b}{GF} + \frac{R^2}{EJ_b}}{\frac{1}{EJ_a} + \frac{\Psi}{GJ_p}}$$

ove χ_b è il fattore del lavoro di deformazione a taglio: e ponendo $G = \frac{2}{5} E$ ed in luogo di Ψ il suo valore, ed introducendo i raggi d'inerzia si ha:

$$\rho_{x0}^2 = \frac{1 + \frac{5}{2}\chi_b + \frac{R^2}{\rho_b^2}}{\frac{1}{\rho_a^2} + \frac{5}{8}\alpha\frac{\rho_p^2}{\rho_a^2\rho_b^2}}$$

e per n spire di passo h, indicando con ρ_x, è espresso per n pari da:

$$\rho_x^2 = \rho_{x0}^2 + \frac{2h^2}{n}\sum_{\nu=0}^{\nu=\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2} + \nu\right)^2 \qquad \left(\nu = 0, 1, 2, 3 \ldots \frac{n}{2}\right)$$

e per n dispari:

$$\rho_x^2 = \rho_{x0}^2 + \frac{2h^2}{n}\sum_{\nu=1}^{\nu=\frac{n-1}{2}}\nu^2 \qquad \left(\nu = 1, 2, 3 \ldots \frac{n-1}{2}\right).$$

L'altra semiasse ρ_z normale all'asse dell'elica è data da:

$$\rho_z^2 = 2\,\frac{\frac{\chi_a}{GF} + \frac{\Psi R^2}{GJ_p}}{\frac{1}{EJ_a} + \frac{\Psi}{GJ_p}} = 2\,\frac{\frac{5}{2}\chi_a + \frac{5}{8}\alpha\frac{R^2\rho_p^2}{\rho_a^2\rho_b^2}}{\frac{1}{\rho_a^2} + \frac{5\alpha\rho_p^2}{8\rho_a^2\rho_b^2}}.$$

Si noti che nella prima espressione di ρ_z^2 i due termini al numeratore sono i lavori di deformazione, rispettivamente a

---

[1] V. detta mia nota pagg. 6 e 10.

taglio e torsione, di un tratto di verga di lunghezza 2 per una forza 1 agente lungo l'asse della molla; e i due termini a denominatore sono i lavori di deformazione rispettivamente a flessione e torsione dello stesso tratto di verga lungo 2 per un momento flettente ed uno torcente pure uguali ad 1.

Consideriamo ora l'altro caso, già più sopra accennato, in cui ai sopporti sono applicate le molle di flessione, molle cioè di forma prismatica, le quali sono disposte ad asse verticale, e sono incastrate per un loro estremo ad un'espansione di uno dei sopporti, e per l'altro estremo al basamento, esse hanno per lo più gli assi principali della loro sezione trasversale rispettivamente paralleli e normali all'asse x.

Occorrerà anzitutto stabilire la corrispondenza tra forze e spostamenti, e quindi la relativa ellisse di elasticità per una sola molla; poi si farà al modo solito la composizione.

Questa corrispondenza per il sopporto costretto dai vincoli ad un moto piano orizzontale, e soggetto a forze giacenti nel piano orizzontale π passante per l'asse x di rotazione, è quella stessa che si avrebbe per il sopporto libero da vincoli rigidi e soggetto a forze giacenti nel piano orizzontale π' passante per il punto di mezzo dell'asse della molla (o più in generale per il suo baricentro elastico): invero nell'uno e nell'altro caso gli spostamenti prodotti sono orizzontali; ed inoltre se si trasporta verticalmente una forza del piano π' al piano π, ne nasce una coppia verticale la quale viene equilibrata dalle reazioni verticali sviluppate dai vincoli, e non interessa quindi le molle.

Coi soliti simboli [1] si ottiene per questa corrispondenza:

Peso elastico per una molla di lunghezza l:

$$\mathfrak{W} = \frac{\alpha l}{4} \cdot \frac{J_p}{G J_x J_z}$$

ove α è il coefficiente citato più sopra.

Semiassi dell'ellisse di elasticità:

$$\rho_x = l \sqrt{\frac{G}{3E\alpha} \frac{J_x}{J_p}} \qquad \rho_z = l \sqrt{\frac{G}{3E\alpha} \frac{J_z}{J_p}} .$$

(Ricordiamo che si ha: $J_p = J_x + J_z$).

---

[1] Per essi vedi, p. e., Guidi, *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni*, P^e II^a

Essendo poi:

$$G = \frac{2}{5} E$$

abbiamo:

$$\rho_x = l \sqrt{\frac{1}{15\alpha} \cdot \frac{J_x}{J_p}} \qquad \rho_z = l \sqrt{\frac{1}{15\alpha} \cdot \frac{J_z}{J_p}} .$$

Si noti che introducendo i raggi d'inerzia della sezione trasversale della molla:

$$\rho_{ix},\ \rho_{iz},\ \rho_{ip} \qquad (\rho_{ip} = \sqrt{\rho_{ix}^2 + \rho_{iz}^2})$$

si ha:

$$\rho_x = \frac{l}{\sqrt{15\alpha}} \cdot \frac{\rho_{ix}}{\rho_{ip}} \qquad \rho_z = \frac{l}{\sqrt{15\alpha}} \cdot \frac{\rho_{iz}}{\rho_{ip}} .$$

quindi la cercata ellisse di elasticità è omotetica dell'ellisse di inerzia della sezione trasversale della molla con rapporto di omotetica $= \frac{l}{\sqrt{15\alpha}\,\rho_{ip}}$.

§ 3. — Poichè dunque in ambi i casi le ellissi relative alle due molle vincolanti il sopporto, hanno ciascuna un asse disteso sull'asse z comune alle due molle, questo sarà pure uno degli assi dell'ellisse complessiva relativa al sopporto. Indichiamo con d la distanza dei baricentri elastici G_1 e G_2 delle due molle; supponiamo per maggior generalità che le due molle siano diverse e distinguiamone cogli indici 1 e 2 le grandezze relative.

Il baricentro elastico del complesso dista da G_1 e G_2 rispettivamente delle distanze:

$$d_1 = \frac{\mathfrak{W}_1 \rho_{x1}^2}{\mathfrak{W}_1 \rho_{x1}^2 + \mathfrak{W}_2 \rho_{x2}^2} d \qquad \text{e} \qquad d_2 = \frac{\mathfrak{W}_2 \rho_{x2}^2}{\mathfrak{W}_1 \rho_{x1}^2 + \mathfrak{W}_2 \rho_{x2}^2} d .$$

Il peso elastico sarà:

$$\mathfrak{W}_s = \frac{\mathfrak{W}_1 \rho_{x1}^2 + \mathfrak{W}_2 \rho_{x2}^2}{d^2 + \left(\frac{1}{\mathfrak{W}_1} + \frac{1}{\mathfrak{W}_2}\right)(\mathfrak{W}_1 \rho_{x1}^2 + \mathfrak{W}_2 \rho_{x2}^2)} .$$

L'ellisse relativa al sopporto avrà il semiasse disteso sull'asse del sopporto:

$$\rho_{xs} = \sqrt{\frac{\mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 \rho_{x1}^2 \rho_{x2}^2}{\mathfrak{W}_s (\mathfrak{W}_1 \rho_{x1}^2 + \mathfrak{W}_2 \rho_{x2}^2)}} .$$

L'altro semiasse parallelo all'asse di rotazione sarà:

$$\rho_{zs} = \sqrt{\frac{\mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 \rho_{z1}^2 \rho_{z2}^2}{\mathfrak{W}_s (\mathfrak{W}_1 \rho_{z1}^2 + \mathfrak{W}_2 \rho_{z2}^2}} .$$

Nel caso speciale di simmetria, in cui G_1 e G_2 sono equidistanti dall'asse di rotazione e le due molle uguali, il baricentro elastico del sopporto sta sull'asse di rotazione e si ha:

$$\mathfrak{W}_s = \frac{2 \mathfrak{W}_1 \rho_{x1}^2}{d^2 + 4 \rho_{x1}^2}$$

$$\rho_{xs}^2 = \frac{d^2}{4} + \rho_{x1}^2 \qquad \rho_{zs}^2 = \frac{\rho_{z1}^2}{\rho_{x1}^2} \left(\frac{d^2}{4} + \rho_{x1}^2 \right),$$

essendo poi:

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{W}_2 ; \qquad \rho_{x1} = \rho_{x2} ; \qquad \rho_{z1} = \rho_{z2} .$$

§ 4. **L'involuzione di elasticità.** — Vediamo ora come si comporta l'albero per effetto dell'elasticità dei sopporti e sotto l'azione di forze normali al suo asse.

Detto albero è munito di spalleggiamenti; però tra questi ed i sopporti stessi vi è di solito un certo giuoco, di modo che nella trattazione si deve riguardare l'albero come semplicemente infilato nei sopporti, sicchè questi reagiscano contro l'albero unicamente con forze normali all'asse di rotazione. Sarà infatti lecito trascurare pure l'azione dell'attrito tra perni e cuscinetti, poichè sperimentando coll'albero in moto la velocità periferica dei perni dovuta alla rotazione, è molto grande in confronto della velocità di traslazione dovuta ad eventuali spostamenti relativi tra perni e cuscinetti (invero, dovendo, come già accennammo, essere le vibrazioni del sistema sincrone colla rotazione propria, il rapporto tra la velocità periferica di rotazione ed il valore *massimo* della velocità, dovuta ad un'eventuale oscillazione relativa, è uguale al rapporto tra il raggio del perno ed il massimo spostamento relativo, e questo è sempre molto piccolo in confronto di quello); perciò le resistenze d'attrito tra perno e cuscinetto, che sono dirette in senso opposto alle velocità relative, hanno nella direzione dell'asse componenti del tutto trascurabili.

Poichè dunque l'albero non può risentire dai sopporti alcuna spinta nella direzione dell'asse, e poichè d'altra parte le forze centrifughe, le quali nell'esperienza più sopra descritta eccitano le vibrazioni forzate della massa, non hanno in direzione della massa alcuna componente, è da escludere che il moto vibratorio della massa possa presentare come componente uno scorrimento lungo l'asse; gli spostamenti da prendere in considerazione sono quindi solo le rotazioni intorno a punti dell'asse, ed il sistema rigido si deve considerare come avente *due* gradi di libertà.

L'albero costituisce tra i due sopporti un legame mutuo che ne riduce ad un solo il grado di libertà relativa, e precisamente consente soltanto una traslazione relativa lungo l'asse di rotazione; perciò i due centri di rotazione simultanea dei due sopporti (centri che potranno essere distinti nel caso generale, già considerato, in cui le due ellissi di elasticità dei due sopporti non abbiano entrambe un asse giacente sull'asse di rotazione), dovranno essere situati su una stessa perpendicolare all'asse di rotazione x della massa; inoltre le ampiezze delle due rotazioni dovranno essere uguali. La reazione elastica di un sopporto per uno spostamento dalla posizione media essendo normale all'asse di rotazione x della massa, il centro di rotazione di un sopporto dovrà essere un punto dell'asse dell'ellisse di elasticità di esso, parallelo all'asse x; il centro di rotazione dell'albero sarà quindi il punto dell'asse x in cui si proiettano normalmente ambi i centri di rotazione dei due sopporti.

Sarà quindi facile coi noti procedimenti per una rotazione orizzontale dell'albero intorno ad un dato centro R (situato sull'asse r), trovare i due centri di rotazione dei due sopporti, le reazioni elastiche di questi che composte ci daranno, colla loro risultante, la reazione elastica del complesso; essa incontra l'asse r in un punto X che, per le ragioni note, è coniugato del centro R in una involuzione che potremo chiamare la *involuzione di elasticità* del sistema; questa sarà definita dal punto centrale (o baricentro elastico) G, e dalla distanza da questo dei due punti principali (equidistanti dal centro), distanza che indicheremo con ρ_e, e diremo *semiasse di elasticità.*

Si noti che la considerata dissimmetria dell'elasticità di ciascuno dei sopporti, la quale fa sì che il baricentro elastico di

ciascuno di questi *non* giace sull'asse x, mentre entrambe le ellissi parziali hanno uno degli assi parallelo all'asse x, non influisce sulla determinazione di G_e e ρ_e, la quale si fa quindi come se l'asse x contenesse detti baricentri elastici. Influirebbe invece una dissimmetria la quale desse luogo ad una od a tutte e due le ellissi parziali cogli assi comunque orientati; nel qual caso però la ricerca dell'involuzione di elasticità si farebbe in modo analogo a quello indicato, colla sola avvertenza che i centri di rotazione di uno dei sopporti dovrebbero essere punti del diametro dell'ellisse coniugato colla direzione normale all'asse x.

Escluso questo caso, che abbiamo accennato per amore di generalità, ma che non ha diretto interesse nell'applicazione, la determinazione di G_e e ρ_e e del peso elastico relativo $\mathfrak{W}$ si fa componendo in parallelo le elasticità dei due sopporti, in modo analogo a quello che si indicò più sopra per la composizione dell'elasticità delle due molle, prendendo in considerazione naturalmente solo i semiassi delle ellissi distesi parallelamente all'asse x.

Distinguiamo cogli apici le grandezze relative alle molle dei due sopporti, indichiamo con D la distanza degli assi dei due sopporti, e con D' e D'' i due segmenti in cui D è diviso dal punto G_e baricentro elastico.

Sarà:

$$D' = \frac{\mathfrak{W}'_s \, \rho'^2_{zs}}{\mathfrak{W}'_s \, \rho'^2_{zs} + \mathfrak{W}''_s \, \rho''^2_{zs}} \cdot D \qquad D'' = \frac{\mathfrak{W}''_s \, \rho''^2_{zs}}{\mathfrak{W}'_s \, \rho'^2_{zs} + \mathfrak{W}''_s \, \rho''^2_{zs}} \cdot D$$

$$\mathfrak{W} = \frac{\mathfrak{W}'_s \, \rho'^2_{zs} + \mathfrak{W}''_s \, \rho''^2_{zs}}{D^2 + \left(\frac{1}{\mathfrak{W}'_s} + \frac{1}{\mathfrak{W}''_s}\right)(\mathfrak{W}'_s \, \rho'^2_{zs} + \mathfrak{W}''_s \, \rho''^2_{zs})}$$

$$\rho_e^2 = \frac{\mathfrak{W}'_s \, \mathfrak{W}''_s \, \rho'^2_{zs} \, \mathfrak{W}''^2_{zs}}{\mathfrak{W} \, (\mathfrak{W}'_s \, \rho'^2_{ss} + \mathfrak{W}''_s \, \rho''^2_{zs})} =$$

$$= \frac{D^2 + \left(\frac{1}{\mathfrak{W}'_s} + \frac{1}{\mathfrak{W}''_s}\right)(\mathfrak{W}'_s \, \rho'^2_{zs} + \mathfrak{W}''_s \, \rho''^2_{zs})}{(\mathfrak{W}'_s \, \rho'^2_{zs} + \mathfrak{W}''_s \, \rho''^2_{zs})} \, \mathfrak{W}'_s \, \mathfrak{W}''_s \, \rho'^2_{zs} \, \rho''^2_{zs}.$$

Nel caso, più comune nelle applicazioni, in cui le due molle di uno stesso sopporto sono uguali e simmetriche rispetto al-

l'asse x, ricorrendo alle espressioni più sopra ricavate per $\mathfrak{W}_s$ e ρ_s si ottiene:

$$\mathfrak{W}_s \rho_{zs}^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{W}_1 \rho_{z1}^2$$

e quindi:

$$D' = \frac{\mathfrak{W}'_1 \rho'^2_{z1}}{\mathfrak{W}'_1 \rho'^2_{z1} + \mathfrak{W}''_1 \rho''^2_{z1}} D; \qquad D'' = \frac{\mathfrak{W}''_1 \rho''^2_{z1}}{\mathfrak{W}'_1 \rho'^2_{z1} + \mathfrak{W}''_1 \rho''^2_{z1}} D$$

$$\mathfrak{W} = \frac{\frac{1}{2} (\mathfrak{W}'_1 \rho'^2_{z1} + \mathfrak{W}''_1 \rho''^2_{z1})^2}{D^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{d^2 + 4\rho'^2_{x1}}{\mathfrak{W}'_1 \rho'^2_{x1}} + \frac{d^2 + 4\rho''^2_{x1}}{\mathfrak{W}''_1 \rho''^2_{x1}} \right) (\mathfrak{W}'_1 \rho'^2_{z1} + \mathfrak{W}''_1 \rho''^2_{x1})}$$

$$\rho_e^2 = \frac{\mathfrak{W}'_1 \mathfrak{W}''_1 \rho'^2_{z1} \rho''^2_{z1} \left[D^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{d^2 + 4\rho'^2_{x1}}{\mathfrak{W}'_1 \rho'^2_{x1}} + \frac{d^2 + 4\rho''^2_{x1}}{\mathfrak{W}''_1 \rho''^2_{z1}} \right) (\mathfrak{W}'_1 \rho'^2_{z1} + \mathfrak{W}''_1 \rho''^2_{z1}) \right]}{(\mathfrak{W}'_1 \rho'^2_{z1} + \mathfrak{W}''_1 \rho''^2_{z1})^2}.$$

Se poi entrambi i sopporti si trovano in eguali condizioni, ossia se le 4 molle sono tutte eguali, si ha:

$$\mathfrak{W}_1' = \mathfrak{W}_1'' = \mathfrak{W}_1 ; \quad \rho_{z1}' = \rho_{z1}'' = \rho_{z1} : \quad \rho_{x1}' = \rho_{x1}'' = \rho_{x1}$$

e si ottiene:

$$D' = D'' = \frac{D}{2}$$

$$\mathfrak{W} = \frac{\mathfrak{W}_1 \rho_{z1}^2}{D^2 + d^2 \frac{\rho_{z1}^2}{\rho_{x1}^2} + 4\rho_{z1}^2} ; \qquad \rho_e^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{d^2}{4} \frac{\rho_{z1}^2}{\rho_{x1}^2} + \rho_{z1}^2.$$

È utile qui il confronto tra questi valori e quelli che si otterrebbero considerando le molle ad elica come reagenti soltanto con una forza diretta secondo l'asse (ossia riunite a cerniera alle estremità), come si fa nelle teorie dell'apparecchio che di solito si trovano nei trattati [1]. Limitandosi al caso più frequente in cui le due molle di uno stesso sopporto sono uguali, si trovano D' e D'' aventi le stesse espressioni di più sopra, ed inoltre:

$$\mathfrak{W} = \frac{\mathfrak{W}'_1 \rho'^2_{x1} + \mathfrak{W}''_1 \rho''^2_{x1}}{2 D^2} \qquad \rho_e^2 = \frac{\mathfrak{W}'_1 \mathfrak{W}''_1 \rho'^2_{z1} \rho''^2_{z1}}{(\mathfrak{W}'_1 \rho'^2_{z1} + \mathfrak{W}''_1 \rho''^2_{z1})} D^2.$$

[1] Cfr. STODOLA, l. c.

Se tutte le molle sono eguali si ha:

$$D' = D'' = \frac{D}{2}$$

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 \frac{\rho_{z1}^2}{D^2} \qquad \rho_e^2 = \frac{D^2}{4} \qquad \rho_e = \frac{D}{2}.$$

Si ha così modo di apprezzare l'influenza dei termini che si trascurano coll'ipotesi approssimata ora accennata.

È pure da considerare il caso in cui sia impedito ogni spostamento relativo lungo l'asse x dell'albero rispetto ai sopporti; ciò può verificarsi se lo spalleggiamento per ognuno dei due sopporti è bilaterale e perfettamente registrato, oppure anche se con spalleggiamento unilaterale per ognuno dei sopporti, ma situato da parti opposte, in modo da costituire nel complesso uno spalleggiamento bilaterale, le molle sono nella posizione media, forzate contro gli spalleggiamenti in modo da esercitare su questi una pressione che non diventi mai nulla, neppure per gli spostamenti assiali che il sistema possa assumere vibrando.

In tal caso l'albero coi suoi sopporti, rispetto alle forze ed agli spostamenti nel piano orizzontale, deve considerarsi come un sistema rigido, avente *tre* gradi di libertà (non essendo esclusi gli spostamenti accompagnati da reazione elastica in direzione dell'asse x); e le proprietà elastiche dei suoi legami potranno venir rappresentate da un ellisse di elasticità, la quale si ottiene, insieme col suo peso elastico, della composizione *in parallelo* delle ellissi relative ai due sopporti, nel modo più sopra ricordato (tenendo però conto pure degli assi delle ellissi normali all'asse x).

§ 5. **L'involuzione d'inerzia.** — Studiamo ora l'azione dell'inerzia del sistema, sempre rispetto alle forze ed agli spostamenti nel piano orizzontale.

Come già si disse in principio, le masse che più frequentemente si devono equilibrare nell'apparecchio che studiamo, sono di rivoluzione intorno all'asse x, ossia hanno lo stesso momento d'inerzia rispetto ad ogni asse baricentrico normale all'asse x; dunque per una qualunque posizione della massa, e quindi anche durante la rotazione, il momento d'inerzia di questa

rispetto all'asse baricentrico verticale è costante. Indicheremo con ρ_i il relativo raggio d'inerzia e con G_i il baricentro materiale (o d'inerzia).

Nel piano orizzontale la corrispondenza tra le rotazioni istantanee intorno a punti del piano, e le linee d'azione delle forze d'inerzia tangenziali da esse provocate, è definita dall'antipolarità rispetto al *cerchio d'inerzia longitudinale* [1], che ha il centro in G_i e per raggio ρ_i.

Nel caso più frequente, già considerato sopra, in cui gli spalleggiamenti dell'albero presentino del giuoco, e quindi siano da considerare solo rotazioni intorno a punti dell'asse x, come, per quanto riguarda l'elasticità, interessa solo l'involuzione definita sull'asse x da G_e e ρ_e, così per lo studio dell'inerzia del sistema ci basta considerare l'involuzione individuata su detto asse dall'antipolarità rispetto al cerchio d'inerzia, la quale noi potremo chiamare *involuzione d'inerzia*, ed è definita da G_i e ρ_i.

§ **6. I punti nodali.** — Consideriamo ora la coppia comune a queste due involuzioni e siano N_1 ed N_2 i due punti che la costituiscono, e che risultano coniugati rispetto ad entrambe le due involuzioni. Questi si possono ottenere colla costruzione nota, ribaltando i due semiassi ρ_e e ρ_i normalmente all'asse x intorno ai centri G_e e G_i in E ed I, e quindi facendo passare per E ed I un cerchio col centro sull'asse x; tale cerchio incontra l'asse stesso nei due punti N_1 ed N_2.

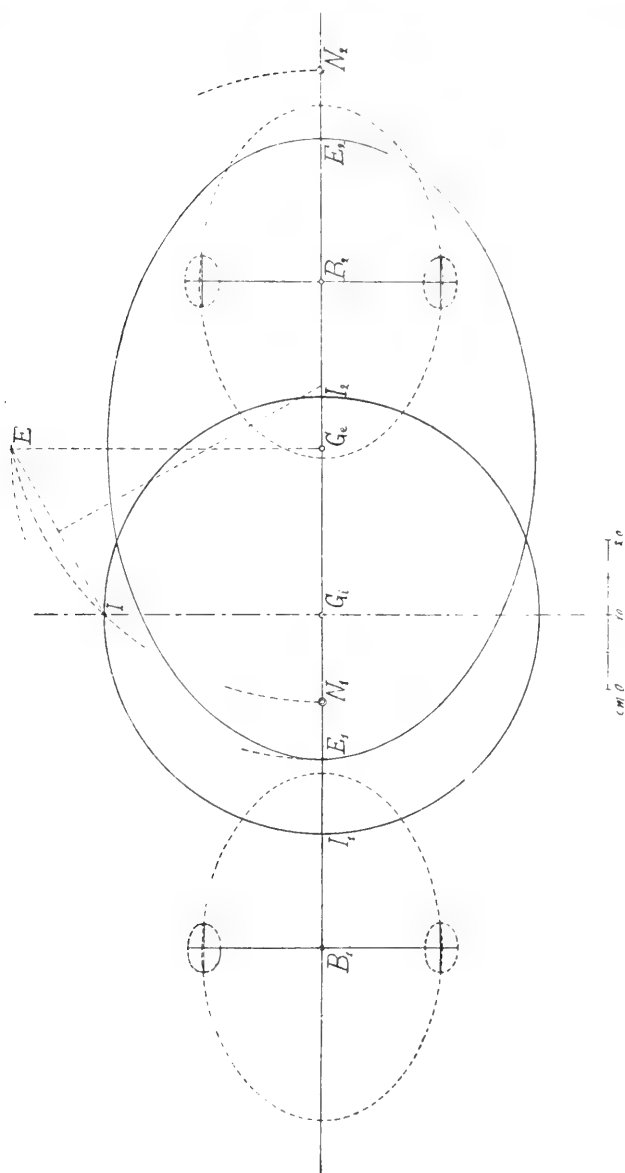
Essi sono definiti pure dalla coesistenza delle due relazioni:

$$G_e N_1 \cdot G_e N_2 = \rho_e^2, \qquad G_i N_1 \cdot G_e N_2 = \rho_i^2.$$

Se indichiamo con x_e, x_i, x_1, x_2 le rispettive ascisse dei punti G_e, G_i, G_1, G_2 contate sull'asse τ da un'origine arbitraria, dette relazioni diventano:

$$(x_1 - x_e)(x_2 - x_e) = \rho_e^2, \qquad (x_1 - x_i)(x_2 - x_i) = \rho_i^2,$$

[1] Per questa denominazione vedi il mio lavoro: *Relazioni tra le forze e gli spostamenti, ecc., ecc. ...*, " Atti della R. Accademia delle Scienze in Torino ", anno 1911, pag. 28, capit. III, § 7.

Fig. 1.

dalle quali si ottiene:

$$x_1 + x_2 = \frac{\rho_e^2 - \rho_i^2 + x_e^2 - x_i^2}{x_e - x_i} = s,$$

$$x_1 x_2 = \frac{x_i \rho_e^2 - x_e \rho_i^2 + x_i x_e^2 - x_e x_i^2}{x_e - x_i} = p,$$

e quindi le x_1 e x_2 sono le due radici dell'equazione quadratica:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

I punti N_1 ed N_2 sono sempre reali e distinti, poichè le due involuzioni sono ellittiche; e ciò si potrebbe anche riconoscere dal discriminante della precedente equazione verificando che risulta: $\frac{s^2}{4} - p > 0$. Li chiameremo i *punti nodali*.

Indicheremo con e_1 ed e_2 le loro distanze dal punto G_e e con i_1 e i_2 le loro distanze dal punto G_i, ossia porremo:

$$x_e - x_1 = e_1 \qquad x_2 - x_e = e_2 \qquad x_i - x_1 = i_1 \qquad x_2 - x_i = i_2.$$

§ 7. **Le oscillazioni proprie**. — Immaginiamo ora che il sistema subisca una rotazione, sempre nel piano orizzontale, intorno ad uno di questi punti nodali, per esempio N_1; se ϑ è lo spostamento angolare della posizione media, la reazione elastica provocata da esso, è normale all'asse x e passa per N_2 perchè questo è coniugato di N_1 nell'*involuzione d'elasticità*; la sua intensità è:

$$E_2 = \frac{\vartheta}{\mathfrak{W}\,\overline{G_e N_2}} = \frac{\vartheta}{\mathfrak{W}\, e_2}.$$

Per il moto si sviluppa pure una forza d'inerzia tangenziale I_2, normale all'asse x, ed applicata pure in N_2 perchè questo punto è coniugato di N_1 pure nell'*involuzione d'inerzia*; la sua intensità è:

$$I_2 = \mathfrak{M}\,\frac{\rho_i^2 + i_1^2}{i_1 + i_2} \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \mathfrak{M}\, i_1 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \quad \text{(poichè: } \rho_i^2 = i_1 i_2\text{)}$$

essendo $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ l'accelerazione angolare del moto rotatorio intorno ad N_1, ed $\mathfrak{M}$ la massa totale del rotore e dei sopporti.

Quindi, facendo per ora astrazione da resistenze passive (dovute all'attrito dei cuscinetti a sfere, alla resistenza dell'aria, all'imperfetta elasticità delle molle), il sistema può continuare a rotare intorno ad N_1 se è verificato in ogni istante l'equilibrio tra le due forze E_2 ed I_2 (principio di D'Alembert), ossia se esse sono uguali ed opposte; e poichè già sappiamo ch'esse hanno la stessa linea d'azione, basta che sia verificata la relazione:

$$E_2 + I_2 = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \mathfrak{M} i_1 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{\vartheta}{\mathfrak{W}_{e_2}} = 0.$$

Questa è la nota equazione del moto armonico senza smorzamento; ed è notorio che essa è soddisfatta dall'integrale generale:

$$\vartheta = \Theta \operatorname{sen} (\omega_2 t + \alpha)$$

ove si ha:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{W} i_1 e_2}}$$

ed essendo Θ (ampiezza) ed α (fase) due costanti dipendenti dalle condizioni iniziali.

Il sistema che consideriamo, spostato dalla posizione media di equilibrio con una rotazione intorno al punto nodale N_1, e lasciato libero, senza smorzamento, oscilla di moto armonico rotatorio intorno allo stesso N_1; le reazioni d'inerzia ed elastica provocate dal moto sono entrambe applicate in N_2 e si fanno in ogni istante equilibrio.

Allo stesso modo si riconosce che il sistema può oscillare liberamente intorno al punto nodale N_2, nel qual caso le due forze provocate dal moto si fanno equilibrio in N_1; ed il moto ha l'equazione:

$$\vartheta = \Theta \operatorname{sen} (\omega_1 t + \alpha)$$

ove:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M} \mathfrak{W} i_2 e_1}}.$$

Questi due moti vibratorî si possono chiamare le *oscillazioni proprie* del sistema [1]; ognuna di esse ha per centro il rispettivo punto nodale.

Le due quantità ω_1 ed ω_2 sono le pulsazioni dei due moti armonici; i periodi di questi sono:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

Le ω_1 ed ω_2 si possono pure interpretare come le velocità angolari dei moti rotatorî di cui i detti moti armonici si possono riguardare come proiezioni. Potrà essere utile considerare pure le forze elastica e d'inerzia come proiezioni di forze rotanti colle stesse rispettive velocità angolari, e facentisi in ogni istante equilibrio.

Un caso speciale è frequente nelle applicazioni, ed è quello che solo contemplano le usuali teorie dell'apparecchio, il caso cioè in cui i due baricentri G_e e G_i coincidono in un unico punto G; allora i due punti nodali sono lo stesso G ed il punto all'infinito X_∞ dell'asse x. Le due oscillazioni proprie sono quindi una rotazione intorno al baricentro G, di pulsazione:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}\mathfrak{W}\rho_i^2}} = \frac{1}{\rho_i\sqrt{\mathfrak{M}\mathfrak{W}}}$$

ed una traslazione normale all'asse x (rotazione intorno ad X_x) la cui pulsazione è:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}\mathfrak{W}\rho_e^2}} = \frac{1}{\rho_e\sqrt{\mathfrak{M}\mathfrak{W}}}.$$

Data la piccolezza degli spostamenti che si verificano in questi moti, possiamo applicare il principio della sovrapposizione

[1] Cfr. Helmholtz, *Vorlesungen über Theoretische Physik*, Bd. III: *Akustik* (Lipsia, 1898), pagg. 19 e 23. — L'H., studiando un sistema generale di punti materiali vincolati da legami elastici con n gradi di libertà, riconosce la presenza di n oscillazioni, rappresentabili colla legge sinusoidale che chiama *Eigenschwingungen*; e l'esistenza di punti che per una data oscillazione propria non si muovono, che chiama *Knotenpunkten*; i quali hanno la proprietà dei punti N_1 e N_2, come vedremo pure in seguito.

lineare dei piccoli movimenti così largamente impiegato nella tecnica, particolarmente nella meccanica applicata alle costruzioni. Esso consiste nel ritenere che le forze, sia elastiche, sia d'inerzia, provocate dalla sovrapposizione di più moti siano le risultanti delle forze analoghe provocate dai singoli moti componenti, in modo che questi non influenzino mutuamente le forze ad essi rispettivamente corrispondenti. È una legittima conseguenza della legge proporzionale con cui le forze elastiche dipendono dagli spostamenti, e le forze d'inerzia dalle accelerazioni, ed inoltre della piccola ampiezza degli spostamenti, che permette di comporre gli spostamenti finiti come moti istantanei.

Secondo quanto è esposto più sopra, un'*oscillazione propria* è possibile se lo spostamento ed il moto istantaneo iniziali del sistema sono rotazioni intorno ad uno dei punti nodali; nel qual caso il sistema abbandonato a sè, continua ad oscillare intorno a detto punto.

Se invece lo spostamento ed il moto iniziali sono due rotazioni intorno a due punti *qualunque* dell'asse x, ciascuna di queste rotazioni si potrà sostituire colle sue due componenti intorno ai due punti nodali N_1 ed N_2; queste componenti si potranno considerare come le condizioni iniziali di due moti oscillatori intorno ai due stessi punti, i quali moti per il principio invocato si sovrappongono senza mutuamente influenzarsi.

Ne risulta che il moto vibratorio più generale che il sistema può assumere, quando venga comunque spostato dalla posizione di equilibrio e lasciato a sè, è la sovrapposizione delle due *oscillazioni proprie* intorno ai due punti nodali N_1 ed N_2, di pulsazioni ω_1 ed ω_2 sopra calcolate, le cui ampiezze e fasi dipendono dallo spostamento e dal moto iniziali.

Per effetto dello smorzamento già accennato, le oscillazioni libere del sistema poco a poco si estinguono, poichè l'energia cinetica posseduta dal sistema viene estinta dal lavoro assorbito dalle resistenze passive. Si ha così il moto smorzato le cui proprietà sono note nella meccanica razionale; e sono particolarmente studiate quelle del moto pendolare semplice, quale è nel caso nostro una delle oscillazioni proprie; il moto generale smorzato sarà pure risultante della sovrapposizione di due oscillazioni proprie; invero la presenza dello smorzamento non può infirmare l'applicabilità del principio della sovrapposizione.

§ 8. Le oscillazioni forzate. — Per il nostro studio ha particolare interesse la considerazione del moto forzato, che si ha quando una forza esterna alternata sinusoidale normale all'asse x (la quale si potrà riguardare come proiezione di una forza rotante) agisce sul sistema, eccitandone le vibrazioni col fornire il lavoro assorbito dalle resistenze smorzanti. Ed appunto questo ufficio della forza eccitatrice di fornire energia all'oscillazione, ci dimostra che una forza non potrà produrre eccitazione su una data oscillazione, se non quando essa generi lavoro per cagione di questa; quindi una data oscillazione propria non sarà in alcun modo influenzata dalle forze agenti nel suo centro, o punto nodale corrispondente, poichè questo loro punto d'applicazione non subisce spostamenti per effetto dell'oscillazione stessa.

Perciò, se una forza eccitatrice agisce in uno dei due punti nodali, essa può provocare soltanto un'oscillazione intorno all'altro punto nodale [1]; e le relazioni tra la forza ed il moto forzato, saranno quelle stesse che la Meccanica razionale insegna per il caso del moto oscillatorio semplice (traslatorio o rotatorio) ad un solo grado di libertà.

Se invece agisce un sistema generico di forze — normali ed incidenti all'asse x — alternate sinusoidali colla stessa pulsazione, esso si potrà sempre sostituire con due componenti (pure normali all'asse x) passanti per i due punti nodali; ciascuna di queste componenti eccita un moto forzato oscillatorio di rotazione intorno al punto nodale a cui è applicata l'altra forza; quindi il moto forzato generale è la sovrapposizione dei due moti oscillatori semplici eccitati da dette componenti.

Questo risultato che abbiamo riscontrato basandoci su un concetto energetico, può assumere anche una maggiore evidenza col ridurre il sistema materiale ed elastico che studiamo a due sole masse concentrate nei punti nodali, e trattenute da vincoli elastici lineari normali all'asse x.

Consideriamo infatti nei due punti nodali N_1 ed N_2, che

[1] Questa proprietà pure è riconosciuta dall'Helmholtz nel caso generale. V. opera citata, § 26, pag. 83.

riterremo collegati dall'albero rigido, ma privo di massa, le due masse seguenti:

$$m_1 = \mathfrak{M} \frac{i_2}{i_1 + i_2}, \qquad m_2 = \mathfrak{M} \frac{i_1}{i_1 + i_2}.$$

Esse equivalgono al sistema materiale dato, per quanto riguarda il nostro studio, poichè la loro somma vale M, il loro baricentro è G_i ed il raggio d'inerzia baricentrico è ρ_i; gli elementi che definiscono il comportamento di inerzia sono quelli stessi del sistema dato.

Ciascuna di queste masse sia vincolata da un legame elastico lineare normale all'asse x, capace cioè di reagire soltanto per uno spostamento normale all'asse, con una forza pure normale allo stesso asse ed applicata nello stesso punto nodale; i rapporti costanti tra le forze elastiche e gli spostamenti rispettivi siano:

$$C_1 = \frac{1}{(e_1 + e_2)\, e_1\, \mathfrak{W}}. \qquad C_2 = \frac{1}{(e_1 + e_2)\, e_2\, \mathfrak{W}}.$$

È facile verificare che questi vincoli elastici fittizî equivalgono ai vincoli effettivi sopra considerati del sistema, poichè dànno luogo allo stesso peso elastico $\mathfrak{W}$, allo stesso baricentro elastico G_e ed allo stesso semiasse di elasticità ρ_e.

Il comportamento complessivo di questo sistema ridotto, per quanto riguarda forze e spostamenti normali all'asse, equivale a quello del sistema dato, poichè è definito dagli stessi elementi.

Ora le oscillazioni che una delle masse può assumere normalmente all'asse x, non hanno influenza alcuna sull'altra massa; le due masse si comportano indipendenti, soltanto collegate dal vincolo rigido costituito dall'albero, il quale trasmette alle masse stesse, delle forze ad esso applicate, le componenti passanti per N_1 ed N_2.

Ognuna delle masse, sotto l'azione di una forza alternata ad essa trasmessa dall'albero, e della reazione del vincolo elastico, assume un moto forzato rettilineo normale all'asse x; e per effetto di questo moto l'albero oscillerà rotando intorno all'altro punto nodale; ed il moto forzato più generale sarà la sovrapposizione dei moti semplici di oscillazione intorno ai punti N_1 ed N_2. Ciascuno di questi moti si può studiare come

il moto forzato di un punto guidato in linea retta, o di un corpo rotante intorno ad un asse; questo studio è comune nella meccanica razionale, e senza che occorra riportare qua le equazioni differenziali da cui dipende, e la relativa integrazione [1], ne ricorderemo i risultati per tenerne presenti le proprietà, e ne esporremo una rappresentazione mediante vettori rotanti, che può presentare quei vantaggi di semplicità e chiarezza che sono noti nelle analoghe rappresentazioni usate nella elettrotecnica.

È noto che se la forza eccitatrice è alternata sinusoidale di ampiezza costante, e se si ha uno smorzamento che ben presto estingue l'influenza delle condizioni iniziali, il moto forzato si presenta come periodico, e tutte le varie grandezze ad esso relative sono sinusoidali e si possono riguardare come proiezioni di vettori rotanti, che ne mettono bene in evidenza i caratteri essenziali, ampiezza e fase.

Per fissare le idee considereremo il moto di un punto materiale, e parleremo quindi di massa, di spostamento, velocità, accelerazioni lineari, di forze, essendo ovvie le sostituzioni da fare qualora si volesse studiare un moto rotatorio intorno ad un asse di un corpo rigido: d'altra parte abbiamo calcolate le masse puntuali ed i legami elastici lineari che si possono al nostro sistema rigido sostituire.

Riterremo, come si fa pure di solito nello stabilire le equazioni differenziali del moto, che lo smorzamento sia rappresentabile con una forza proporzionale alla velocità cambiata di segno: la legittimità di quest'ipotesi non del tutto rigorosa, ma abbastanza plausibile, mancando anche per lo più gli elementi per un'analisi più accurata del fenomeno, potrà venire indirettamente confermata da risultati sperimentali.

Useremo i simboli seguenti, indicando con lettere corsive i vettori:

$\mathcal{S}$ = spostamento
$\mathcal{V} = i\omega\mathcal{S}$ = velocità $(i = \sqrt{-1})$
$\mathcal{A} = -\omega^2\mathcal{S}$ = accelerazione
$\mathcal{E} = -C\mathcal{S}$ = reazione elastica

[1] Cfr., p. es., HELMHOLTZ, *Vorlesungen ecc.*

($\mathcal{C}$ = costante del vincolo elastico)
$\mathcal{J} = - m\mathcal{A}$ = forza d'inerzia
$\mathcal{R} = - K\mathcal{V}$ = resistenza smorzante
(CK = coefficiente di smorzamento)
$\mathcal{F}$ = forza eccitatrice.

Poichè, per il principio di D'Alembert già citato, durante il moto le forze agenti nel punto materiale, comprese le forze d'inerzia, si devono fare in ogni istante equilibrio, così nella rappresentazione mediante vettori rotanti (con velocità angolare ω) il moto a regime periodico viene caratterizzato dall'equilibrio tra le varie forze rotanti, applicate al punto considerato. Esse sono la forza elastica $\mathcal{E}$, la forza d'inerzia $\mathcal{J}$, lo smorzamento $\mathcal{R}$, e la forza esterna eccitatrice $\mathcal{F}$.

La forza $\mathcal{J}$ è in fase, la $\mathcal{E}$ in opposizione collo spostamento $\mathcal{S}$. La $\mathcal{V}$ essendo notoriamente in quadratura in anticipo rispetto ad $\mathcal{S}$, la $\mathcal{R} = - K\mathcal{V}$ sarà in quadratura in ritardo rispetto ad $\mathcal{S}$.

La forza eccitatrice $\mathcal{F}$ dovendo fare equilibrio alle altre tre, avrà per proiezione sulla direzione di $\mathcal{S}$, la differenza $\mathcal{J} - \mathcal{E}$, e sulla direzione normale la $-\mathcal{R}$, diretta come la $\mathcal{V}$: essa è quindi sfasata in anticipo rispetto ad $\mathcal{S}$ di un angolo che indicheremo con α.

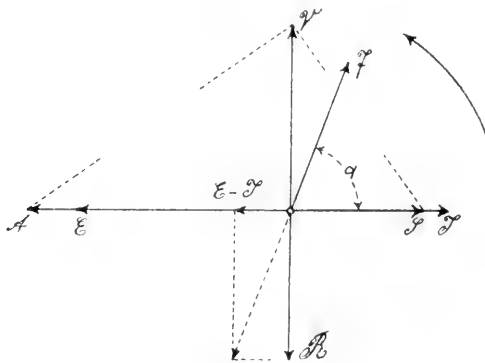



Fig. 2.

Dalle espressioni su esposte risulta:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = (C - m\omega^2)\,\mathcal{S}, \qquad \mathcal{R} = - i K \omega \mathcal{S}.$$

Sarà quindi, in valore assoluto:

$$F = S\sqrt{(C - m\omega^2)^2 + K^2\omega^2}.$$

Risulta poi:

$$\tang \alpha = \frac{K\omega}{C - m\omega^2}.$$

Se ne deduce che $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ossia il moto forzato è in quadratura, in ritardo, rispetto alla forza eccitatrice per la pulsazione $\omega_1 = \sqrt{\frac{C}{m}}$, uguale a quella dell'oscillazione propria (sincronismo o risonanza).

Inoltre è $\alpha \gtreqless \frac{\pi}{2}$ secondo che è $\omega \gtreqless \omega_1$.

Nella speciale applicazione che a noi interessa la forza $\mathcal{F}$ è un'azione centrifuga dovuta alla velocità angolare ω; quindi si può esprimere: $\mathcal{F} = \mathcal{B}\omega^2$, ove $\mathcal{B}$ è il momento statico rispetto all'asse di rotazione x, della massa che rotando sviluppa la forza centrifuga. Si noti che in questa trattazione i *momenti statici* devono essere considerati come *forze normali ed incidenti all'asse di rotazione* x *e dirette all'infuori*. Se il moto oscillatorio forzato che si considera è rotatorio intorno ad un punto (p. es.: uno dei punti nodali), l'azione eccitatrice $\mathcal{F}$ è una coppia, e $\mathcal{B}$ indica il vettore-momento, rispetto al centro di oscillazione, del sistema delle forze-momenti statici della massa rotante, rispetto all'asse di rotazione: B è quindi un vettore-momento centrifugo.

Sostituendo dunque quest'espressione di F, si ottiene per l'ampiezza dello spostamento S in valore assoluto:

$$S = \frac{B\omega^2}{\sqrt{(C - m\omega^2)^2 + K^2\omega^2}} = \frac{B}{\sqrt{\left(\frac{C}{\omega^2} - m\right)^2 + \frac{K^2}{\omega^2}}}.$$

Lo spostamento S è massimo quando è minimo:

$$\left(\frac{C}{\omega^2} - m\right)^2 + \frac{K^2}{\omega^2}.$$

La pulsazione o velocità angolare ω_m a cui corrisponde il moto di ampiezza massima ha quindi quel valore che annulla la derivata rispetto ad ω della precedente espressione: ciò conduce all'equazione:

$$\frac{C_2}{\omega_m^2} - mC + \frac{K^2}{2} = 0$$

da cui si ottiene:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{C}{m - \frac{K^2}{2C}}}.$$

La derivata seconda dell'espressione precedente è positiva per $\omega = \omega_m$ se è:

$$K^2 < 2Cm,$$

relazione che è sempre verificata nei casi pratici, nei quali, per il piccolo valore dello smorzamento, è soddisfatta con molta larghezza la condizione nota per le oscillazioni libere periodiche:

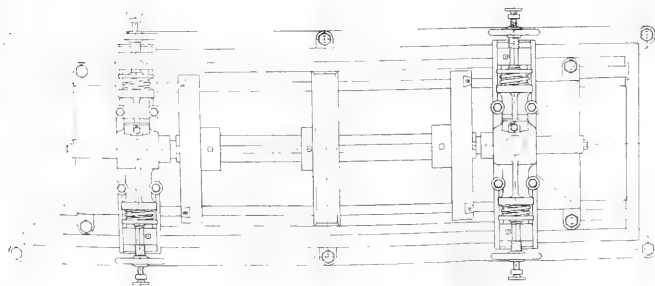
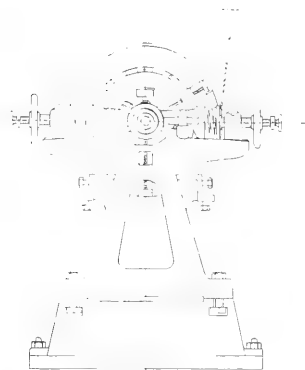
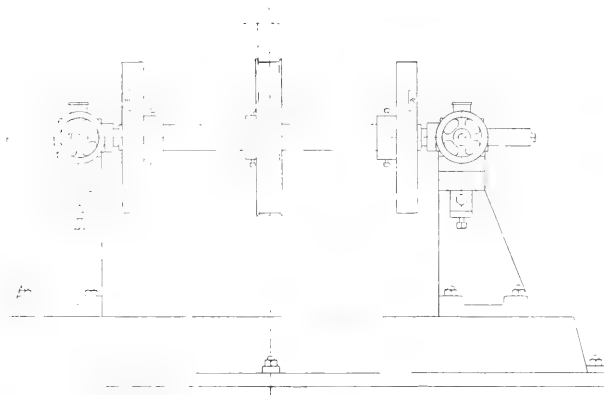
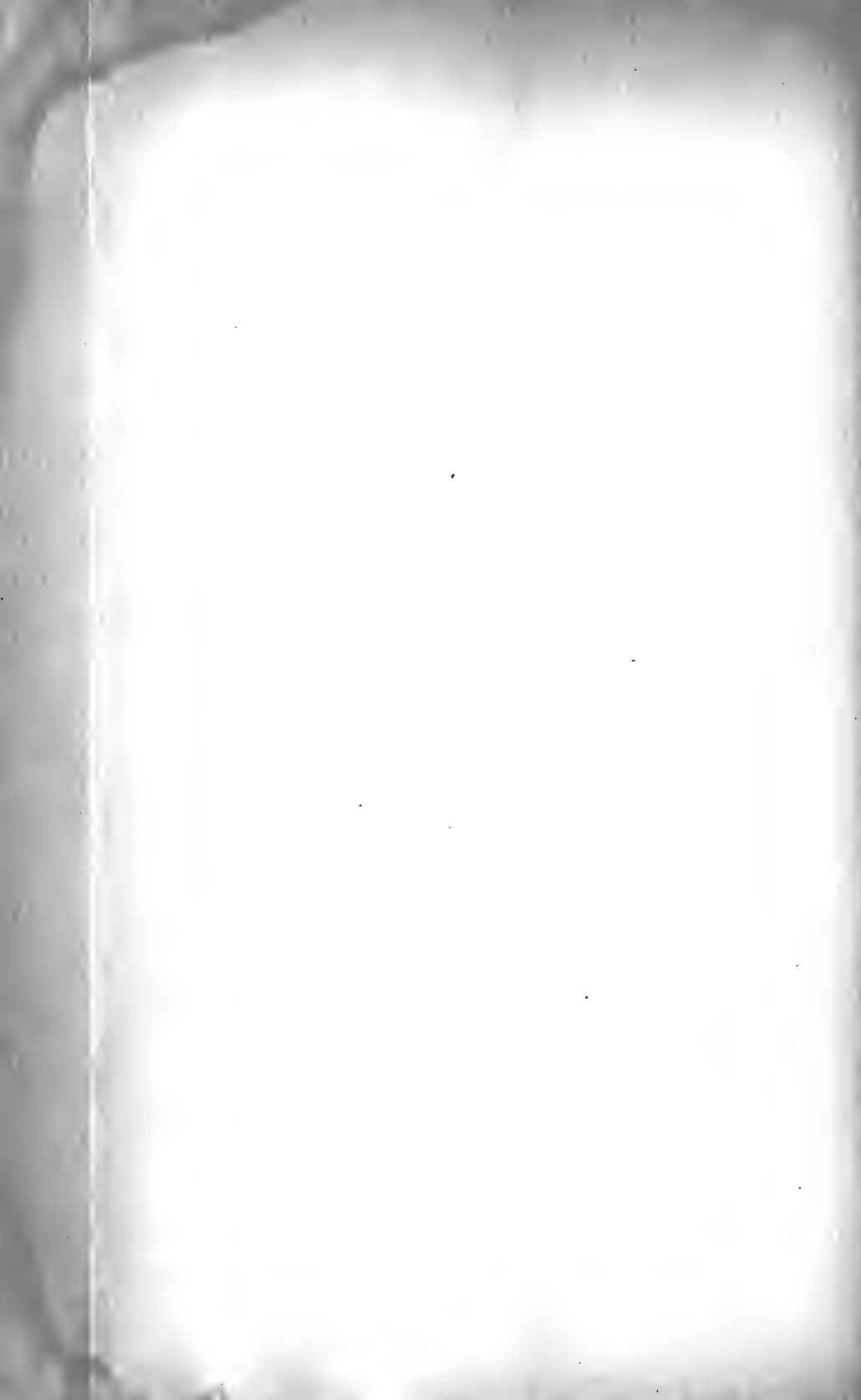
$$K^2 < 4Cm.$$

Per $K > 0$ si ha $\omega_m > \omega_1$; cioè la pulsazione che corrisponde alla massima ampiezza supera la pulsazione dell'oscillazione propria (di risonanza), tanto più quanto più grande è lo smorzamento K; anzi per $K^2 = 2Cm$ si ha $\omega_m = \infty$, per $K^2 > 2Cm$ sarebbe poi ω_m immaginario, ossia non c'è pulsazione di massima ampiezza, ma questa cresce sempre col crescere di quella.

La massima ampiezza S_m dello spostamento è data da:

$$S_m = \frac{B}{K} \sqrt{\frac{C}{m - \frac{K^2}{4C}}},$$

mentre alla pulsazione di risonanza ω_1 corrisponde l'ampiezza:

$$S_1 = \frac{B}{K} \sqrt{\frac{C}{m}} = \frac{B}{K}\,\omega_1.$$

cm 0 10 20 30 40 50

Può essere opportuna la considerazione della *curva di risonanza* descritta da un punto di coordinate ω ed S; essa è del 6° ordine e la sua equazione è la precedente espressione di S in funzione di ω; può tornare utile confrontarla con l'analoga curva dedotta sperimentalmente e ciò vedremo nella Nota II[a].

Per $\omega = 0$ nasce tangente all'asse delle ω, raggiunge la massima ordinata per $\omega = \omega_m$; e per $\omega = \infty$ tende asintoticamente alla retta parallela all'asse delle ω a distanza $= \frac{B}{m}$. Si scosta dalla curva di risonanza del moto forzato che di solito si considera nella meccanica razionale supponendo costante l'intensità della forza eccitatrice, giacchè nel caso nostro la forza stessa è proporzionale al quadrato di ω.

Se lo smorzamento è molto piccolo, le ampiezze del moto hanno valori notevoli solo in un breve intervallo adiacente alla pulsazione di risonanza; per valori delle pulsazioni anche relativamente poco differenti da quello della risonanza, l'ampiezza è piccolissima e praticamente insensibile.

Perciò nel moto forzato della massa rotante montata sul nostro apparecchio, se i valori delle due pulsazioni (o velocità angolari) di risonanza ω_1 ed ω_2 corrispondenti ai due punti nodali N_1 ed N_2 sono abbastanza differenti tra loro, quando una delle due oscillazioni semplici componenti intorno ad N_1 od N_2 ha ampiezza ragguardevole, prossima alla massima per essere ω prossimo al valore di risonanza (o ad ω_m), l'altra oscillazione semplice intorno all'altro punto nodale ha ampiezza trascurabile ed insensibile anche se la forza eccitatrice corrispondente ha notevole valore.

Così ciascuna delle due oscillazioni forzate semplici nell'intervallo delle ampiezze apprezzabili, compare da sola, indipendentemente dall'altra; ciò si può pure esprimere dicendo che le due oscillazioni semplici *non si influenzano mutuamente*; esse quindi si possono anche coll'esperimento studiare separatamente.

Resti nelle formole di quadratura.

Nota di FRANCESCO CANTELLI.

1. — L'uso delle formule di quadratura si rende necessario, come è noto, in molte applicazioni; in particolare, ad esempio, quando si applichi il metodo dei momenti o quello delle aree [1] alla determinazione dei parametri di una espressione $y = f(x, c_1, c_2, \ldots\ldots c_n)$ perchè questa rappresenti una serie di misure o di osservazioni.

Di tali formole se ne conoscono molte e, nelle pratiche applicazioni, occorre non di rado di dovere escogitarne qualcuna che si adatti al caso speciale che si considera. Ma le formole stesse, di molte delle quali non si conoscono ancora le espressioni dei resti, non si saprebbero considerare come complete quando queste espressioni mancassero e, per tanto, indico una regola che permette di scrivere il resto di una formola di quadratura, che sia stata dedotta dalla considerazione di una funzione intera di grado n, in base all'esame della formola stessa e in una forma che, per le applicazioni, mi sembra più conveniente di quella che non risulti per deduzione dalle note formole interpolatorie di Lagrange o di Newton col resto sotto forma di derivata.

[1] Cfr. K. Pearson, *On the systematic fitting of curves to observations and measurements*, *Biometrika*, vol. I e vol. II; F. Cantelli, *Sull' adattamento delle curve ad una serie di misure o di osservazioni*, Roma, tip. Bodoni e Bolognesi, 1905; Em. Czuber, *Wahrscheinlichkeitsrechnung, etc.* vol. II, Leipzig-Berlin, 1910.

Tale regola ho ottenuto per mezzo di considerazioni elementari, ponendo a base di esse la nota formola di Taylor col resto sotto forma di integrale. L'indagine di essa mi è stata consigliata dalla lettura di una recente Nota [1] del Prof. Peano, nella quale l'A. stesso, movendo dalla formola indicata, perviene in modo diretto e con considerazioni elementari a determinare il resto della formola di quadratura di Simpson la quale, come è noto, si ricava dalla considerazione di una funzione intera di grado non superiore al terzo.

Aggiungo che avendo esaminato in seguito una regola generale proposta dal Peano [2], per determinare i resti delle formole di quadratura, ho potuto riconoscere che essa, pur differendo da quella qui proposta nella forma e nelle considerazioni sulle quali è fondata, non ne differisce nei risultati.

2. — Consideriamo la formola di Taylor col resto sotto forma di integrale:

$$(1)\qquad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-y)^n f^{(n+1)}(y)\,dy.$$

Da essa si deduce, trasportando $f(a)$ nel primo membro, scrivendo $\int_a^x f'(x)$ in luogo di $f(x) - f(a)$, sostituendo $f(x)$ a $f'(x)$, cambiando n in $n+1$ e considerando l'integrale, precedentemente scritto, tra i limiti $x = a$ e $x = b$:

$$(2)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1!}f^{(n)}(a) + \frac{1}{n+1!}\int_a^b (b-y)^{n+1} f^{(n+1)}(y)\,dy,$$

formola che potrebbe dedursi direttamente mediante l'integrazione per parti.

---

[1] *Resto nella formola di quadratura di Cavalieri-Simpson*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ,, anno 1914-1915.

[2] *Resto nelle formole di quadratura, espresso con un integrale definito*, " Rendic. Accademia Lincei ,, 1913.

Indicando con $P_n(x)$ il polinomio che figura nel secondo membro della (1), le (1) e (2) possono scriversi:

$$f(x) - \frac{1}{n!}\int_a^x (x-y)^n f^{(n+1)}(y)\,dy = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{n+1!}\int_a^b (b-y)^{n+1} f^{(n+1)}(y)\,dy =$$

$$= \int_a^b P_n(x)\,dx = a_0(b-a) + \frac{1}{2}a_1(b^2-a^2) + \ldots$$

$$+ \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$

nelle quali alcuni dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ potrebbero supporsi nulli coerentemente a presupposte assegnate forme della $f(x)$.

Se supponiamo che $P_n(x)$ si componga di $k+1$ termini, $k \leq n$, allora la conoscenza dei $k+1$ valori $P_n(x_0), P_n(x_1), \ldots P_n(x_k)$, corrispondenti ai valori *distinti* $x_0, x_1, \ldots, x_k$ della variabile x, di cui nessuno inferiore ad a, permetterà di scrivere, in base alla prima delle (3), $k+1$ equazioni con $k+1$ incognite rappresentate dai coefficienti che figurano in $P_n(x)$. Se il determinante di tale sistema risulta diverso da zero, si potranno ottenere i valori degli indicati coefficienti che, sostituiti nella seconda delle (3), forniscono il valore di

$$\int_a^b P_n(x)\,dx$$

come funzione lineare omogenea dei valori assegnati $P_n(x_i)$, ossia una eguaglianza della forma:

$$(4) \qquad \int_a^b P_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=k} A_i\, P_n(x_i) \qquad k \leq n$$

nella quale i coefficienti A_i dipendono da $a, b, x_0, x_1 \ldots x_k$, nonchè dagli esponenti delle potenze di x che effettivamente figurano in $P_n(x)$, e possono anche risultare nulli per alcuni valori di i.

In due casi particolari, che qui interessa specialmento rilevare per le applicazioni che seguiranno, il determinante del si-

stema di equazioni sopra accennate risulta certamente non nullo, essendo un determinante di Vandermonde con elementi tutti diversi. Uno di questi casi è quello in cui $k = n$; l'altro è quello in cui $P_n(x)$ contiene solamente tutte le potenze pari della x, il termine indipendente da x compreso, e in cui i valori assoluti di $x_0, x_1, \ldots x_k$ $\left(k\right.$ risulta eguale al massimo intero compreso in $\left.\frac{n}{2}\right)$ sono tutti diversi.

Supposto che si sia resa possibile la deduzione della (4) e tenuto presente che si ha per le (3):

$$(5) \qquad \begin{aligned} P_n(x_i) &= f(x_i) - \frac{1}{n!}\int_a^{x_i}(x_i - y)^n f^{(n+1)}(y)\,dy \\ \int_a^b P_n(x_i) &= \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{n+1!}\int_a^b (b-y)^{n+1} f^{(n+1)}(y)\,dy, \end{aligned}$$

si ricava, sostituendo nella (4) stessa:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=k} A_i f(x_i) &+ \frac{1}{n+1!}\int_a^b (b-y)^{n+1} f^{(n+1)}(y)\,dy \\ &- \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{i=k} A_i \int_a^{x_i}(x_i - y)^n f^{(n+1)}(y)\,dy, \end{aligned}$$

essendo $k \leq n$.

Conviene di porre i termini che contengono integrali, nel secondo membro della (6), sotto la forma di un unico integrale definito; a tale scopo, indicando con α il maggiore dei valori $b, x_0, x_1, \ldots x_k$ e, brevemente, con $\gamma(u)$ una funzione di y, la quale sia eguale all'unità per $y < u$ e nulla per $y \geq u$, scriviamo:

$$(7) \qquad \varphi(y) = \frac{1}{n+1!}(b-y)^{n+1}\gamma(b) - \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{i=k} A_i (x_i - y)^n \gamma(x_i)$$

che è una funzione continua di y la quale permette di porre ovviamente la (6) sotto la forma:

$$(8) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=k} A_i f(x_i) + \int_a^\alpha \varphi(y) f^{(n+1)}(y)\,dy.$$

In definitiva, se è noto che una formola di quadratura:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=k} A_i f(x_i), \qquad k \leq n$$

può dedursi, nel modo sopra detto, dall'ipotesi che $f(x)$ sia una funzione intera di grado non superiore a n, il suo resto, nell'ipotesi che $f(x)$ sia una qualunque funzione alla quale sarà sufficiente richiedere che, nell'intervallo $(a\, b)$, sia dotata delle derivate dell'ordine n finite e continue e delle derivate di ordine $n+1$ generalmente finite e atte all'integrazione, è dato dall'ultimo termine della (8) in cui la $\varphi(y)$ è espressa dalla (7).

3. — Se è nota una eguaglianza della forma generale (8), tra i limiti a e b, ad essa può ricondursi con la trasformazione

$$z = \frac{d-c}{b-a}\,x + \frac{cb-ad}{b-a}, \tag{9}$$

la ricerca della eguaglianza corrispondente tra i limiti c e d. È chiaro *a priori*, e sarebbe facile dimostrare, che l'espressione così dedotta dalla (8) coincide con quella che si otterrebbe in modo diretto.

Se la funzione $\varphi(y)$ che, come si è visto, è finita e continua, si mantiene dello stesso segno, nell'intervallo in cui è considerata, e la $f^{(n+1)}(x)$ è sempre finita, nell'intervallo stesso, si potrà pure scrivere, come è noto:

$$\int_a^\alpha \varphi(y)\, f^{(n+1)}(y)\,dy = f^{(n+1)}(\beta)\int_a^\alpha \varphi(y)\,dy \tag{10}$$

indicando con β un valore compreso tra a e α; in tal caso si otterrà dunque il resto anche sotto forma di derivata.

È da osservare, ancora, che, in casi speciali, non si rende necessaria la considerazione della funzione $\gamma(u)$, per il fatto che i vari termini del resto della formola di quadratura possono disporsi sotto la formola di un unico integrale definito senza bisogno di alcun artificio: uno di questi casi è appunto quello che riguarda la formola di Cavalieri-Simpson, trattato dal Peano.

4. — Richiamiamo brevemente un metodo di generalizzazione di una formola di quadratura, il quale si rende utile nelle applicazioni.

Sia da valutare:

$$\int_{a_1}^{a_l} f(x)\,dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_{l-1}}^{a_l} f(x)\,dx \tag{11}$$

e sia noto che

$$\int_{a_r}^{a_{r+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=k} A_i f(x_{i,r}) + R_r; \tag{12}$$

si deduce allora:

$$\int_{a_1}^{a_l} f(x)\,dx = A_0 \sum_{r=1}^{r=l-1} f(x_{0,r}) + A_1 \sum_{r=1}^{r=l-1} f(x_{1,r}) + \ldots \tag{13}$$

$$+ A_k \sum_{r=1}^{r=l-1} f(x_{n,r}) + R,$$

essendo:

$$R = \sum_{r=1}^{r=l-1} R_r. \tag{14}$$

I termini della formola di quadratura (13) potranno porsi, nelle pratiche applicazioni, anche sotto forme più convenienti; in quanto al resto R, potrà ad esso darsi la forma di un unico integrale definito e se è

$$R_r = A f^{(n+1)}(\xi_r), \tag{15}$$

essendo ξ_r un valore compreso tra a_r e a_{r+1}, potrà pure scriversi:

$$R = A(l-1)\frac{\sum_{r=1}^{r=l-1} f^{(n+1)}(\xi_r)}{l-1},$$

onde sarà pure, come è noto, tra i limiti $x = a_1$ e $x = a_l$, indicando con ξ un valore compreso tra i limiti stessi:

$$R = A(l-1) f^{(n+1)}(\xi). \tag{16}$$

5. – In questo paragrafo sarà fatta qualche applicazione della teoria accennata.

Funzione intera di 2° grado.

Si consideri la funzione intera di 2° grado:

$$F(x) = f(x) + f(-x) = a_0 + a_2 x^2 \tag{17}$$

dalla quale si ha:

$$\int_0^1 F(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = a_0 + \frac{1}{3} a_2 . \tag{18}$$

La conoscenza dei valori $F(1)$ e $F(0)$ permette di ricavare dalle precedenti:

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx &= \frac{2}{3} F(0) + \frac{1}{3} F(1)\\ &= \frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)].\end{aligned} \tag{19}$$

Ciò premesso, ponendo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2} \\ y &= \frac{2}{b-a} x - \frac{a+b}{b-a} .\end{aligned} \tag{20}$$

la seconda delle quali formole si deduce dalla prima, si ha:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2}\right) dy \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 F\left(\frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2}\right) dy ,\end{aligned} \tag{21}$$

avendo posto:

$$F\left(\frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a-b}{2} y + \frac{a+b}{2}\right). \tag{22}$$

Ora, se $F\left(\frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2}\right)$ è una funzione intera di 2° grado in y essa sarà della forma (17) e, pertanto, si potrà scrivere per la (19):

$$\int_0^1 F\left(\frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2}\right) dy = \frac{2}{3} F_{y=0} + \frac{1}{3} F_{y=1}; \tag{23}$$

si deduce ancora agevolmente, tenute presenti le (21) e (22):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \tag{24}$$

la quale costituisce la formola di quadratura di Simpson, della quale il Peano ha rivendicato la priorità a B. Cavalieri che per primo l'ha pubblicata, sotto forma geometrica, nel 1639.

Nel caso che $f(x)$ sia una funzione intera di grado superiore al 3° o una funzione qualunque, la (24) avrà un resto. Ora, è noto che quando si tenti di esprimere questo resto per mezzo della derivata terza di $f(x)$, ricorrendo alle formole interpolatorie di Lagrange o di Newton col restó sotto forma di derivata, si incontrano delle difficoltà [1]. Risulta, infatti, per la espressione del resto:

$$\frac{1}{6}\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b) f'''(\xi)\,dx; \tag{25}$$

in cui è ξ un valore compreso nell'intervallo $(a\ b)$ e in cui il polinomio sotto l'integrale cambia segno nell'intervallo stesso.

Applichiamo il procedimento indicato in questo scritto per esaminare se sia possibile evitare gli inconvenienti che presenta l'applicazione delle formole indicate.

Determiniamo, in primo luogo, il resto della (23) ricordando che essa è dedotta dalla considerazione di una funzione intera di 2° grado; per le formole generali (7) e (8) si può dunque scrivere:

$$\begin{gathered} A_0 = \frac{2}{3}, \qquad A_1 = \frac{1}{3}, \qquad n = 2, \\ \varphi(y) = \frac{1}{3!}(1-y)^3\,\gamma(1) - \frac{1}{2!}\left[\frac{2}{3}(0-y)^2\,\gamma(0) + \frac{1}{3}(1-y)^2\,\gamma(1)\right], \end{gathered} \tag{26}$$

[1] Cfr. E. Pascal, *Calcolo delle variazioni e delle differenze finite*, p. 265, Hoepli, Milano, 1897.

e poichè nell' intervallo $(0, 1)$, nel quale è considerata la (23), è costantemente $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, si può scrivere:

$$(27) \qquad \varphi(y) = -\frac{1}{6} y(1-y)^2,$$

e per il resto della (23):

$$(28) \qquad R = -\frac{1}{6}\int_0^1 y(1-y)^2 F_y'''\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right)dy.$$

Ritornando, adesso, alla variabile x, per mezzo delle (20), e tenendo presente la (22), si deduce agevolmente:

$$(29) \quad R = -\frac{1}{3(b-a)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)[f'''(x)+f_x'''(a+b-x)]dx,$$

per cui, tenute presenti le (21), (23), (24):

$$(30) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$
$$- \frac{1}{6}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)[f'''(x)+f_x'''(a+b-x)]\,dx.$$

Ora, poichè nella (30) il polinomio che si trova sotto il secondo integrale non cambia segno, tra i limiti dell'integrale stesso, si deduce agevolmente per l'espressione del resto, quando $f'''(x)$ si mantenga finita nell'intervallo (a, b):

$$(31) \qquad R_1 = -\frac{(b-a)^4}{1152}[f'''(x) + f_x'''(a+b-x)]_{x=\xi},$$

essendo ξ un valore compreso tra $\frac{a+b}{2}$ e b.

Se $f(x)$ è una funzione intera di 3° grado, l'espressione

$$f'''(x) + f_x'''(a+b-x)$$

è identicamente nulla e risulta, quindi, che la formola di Cavalieri-Simpson è rigorosa anche per una funzione intera di tale grado.

Funzione intera di 3° grado.

a) La funzione

$$F(x) = f(x) + f(-x) = a_0 + a_2 x^2$$

può considerarsi come una funzione intera di 3° grado nella quale è nullo il coefficiente del termine di 3° grado, cioè $F'''(0)$.

Ricordando che è:

$$(32) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 F\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right)dy$$
$$= \frac{b-a}{2}\left(\frac{2}{3}F_{y=0} + \frac{1}{3}F_{y=1} + R\right)$$

e tenendo presenti le formole (7) e (8), si ha per la determinazione del resto R_1 della formola di quadratura:

$$A_0 = \frac{2}{3}, \qquad A_1 = \frac{1}{3}, \qquad n = 3,$$

$$(33) \quad \varphi(y) = \frac{1}{4!}(1-y)^4\gamma(1) - \frac{1}{3!}\left|\frac{2}{3}(0-y)^3\gamma(0) + \frac{1}{3}(1-y)^3\gamma(1)\right|$$
$$= \frac{1}{24}(1-y)^4 - \frac{1}{18}(1-y)^3.$$

$$R_1 = \frac{b-a}{2}R = -\frac{b-a}{2}\,\frac{1}{24}\int_0^1(1-y)^3\left(y+\frac{1}{3}\right)\left|f_y^{(4)}\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right)\right.$$
$$\left. + f_y^{(4)}\left(-\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right)\right|dy.$$

Poichè il polinomio sotto l'integrale si mantiene positivo, (≥ 0), tra i limiti $y=0$ e $y=1$, si può scrivere, nel caso che $f_y^{(4)}$ sia finita nell'intervallo $y=-1$, $y=+1$ e indicando con η un valore compreso tra $y=0$ e $y=1$:

$$R_1 = -\frac{b-a}{2}\,\frac{1}{24}\left[f_y^{(4)}\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right) + f_y^{(4)}\left(-\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right)\right]_{y=\eta}$$
$$\times \int_0^1 (1-y)^3\left(y+\frac{1}{3}\right)dy.$$

Se, ora, indichiamo con η_1 un valore compreso tra -1 e $+1$, sarà:

$$\left[f_y^{(4)}\left(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}\right)+f_y^{(4)}\left(-\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}\right)\right]_{y=\eta}$$
$$=2f_{y=\eta_1}^{(4)}\left(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}\right),$$

ma risultando allora $\frac{b-a}{2}\eta_1+\frac{a+b}{2}$ compreso tra a e b si avrà, indicando con ξ un valore compreso nell'intervallo indicato:

$$2f_{y=\eta_1}^{(4)}\left(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}\right)=2\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f_{x=\xi}^{(4)}(x).$$

In definitiva risulta:

$$R_1=-\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}. \tag{34}$$

Il resto sotto la precedente forma è stato pubblicato dal Peano sin dal 1887 [1]; sotto la forma di integrale e di derivata, oltre che nella sua più recente Nota, già citata, è stato dedotto dall'A. stesso dalla applicazione della regola generale da lui proposta [2].

Chiamando h la differenza $\frac{b-a}{2}$ tra due valori successivi della variabile x, ai quali corrispondono i valori di $f(x)$ che figurano nella formola di quadratura, si può scrivere:

$$\int_{x_0}^{x_2}f(x)\,dx=\frac{1}{3}h\,[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi) \tag{35}$$

---

(1) Cfr. *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale*, Torino, Fratelli Bocca, 1887.

(2) Mem. cit., " Accademia Lincei ", 1913.

dalla quale si deduce, applicando il metodo di cui è stato detto al § 4:

$$(41) \qquad \int_{x_0}^{x_{2p}} f(x)\,dx = \frac{1}{3} h \{ f(x_0) + 2\,[f(x_2) + f(x_4) + \dots$$
$$+ f(x_{2p-2})] + f(x_{2p}) + 4\,[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2p-1})] \} + R\,,$$

essendo:

$$(36) \qquad R = -p \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\Xi)\,. \qquad x_0 < \xi < x_{2p}\,.$$

b) Consideriamo ancora:

$$(37) \qquad F(x) = f(x) + f(-x) = a_0 + a_2 x^2$$

dalla quale si deduce:

$$(38) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} F(x)\,dx = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{24} a_2\,.$$

Noti i valori $F(0)$, $F(1)$, si ottiene dalle precedenti:

$$(39) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} F(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{11}{24} F(0) + \frac{1}{24} F(1)$$
$$= \frac{1}{24}\,[f(-1) + 22 f(0) + f(1)]\ \text{(1)}$$

e, posto:

$$(40) \qquad \begin{aligned} x &= (b-a)\,y + \frac{a+b}{2} \\ y &= \frac{1}{b-a}\,x - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{b-a}\,, \end{aligned}$$

si ricava:

$$(41) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left[(b-a)\,y + \frac{a+b}{2}\right] dy$$
$$= (b-a) \int_0^{\frac{1}{2}} F\left[(b-a)\,y + \frac{a+b}{2}\right] dy$$
$$= \frac{b-a}{24} \left[f\left(\frac{3a-b}{2}\right) + 22 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{3b-a}{2}\right) \right].$$

---

[1] Per le applicazioni statistiche di questa formola cfr. ELDERTON W. P., ***Frequency curves and correlation***, London, Charles and Edwin Layton.

Determiniamo il resto della (41) nell'ipotesi che $f(x)$ sia una funzione intera di grado superiore al terzo oppure una funzione qualunque. In tal caso sarà:

$$(42) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} F\left[(b-a)\,y+\frac{a+b}{2}\right] dy = \frac{11}{24}\, F_{y=0} + \frac{1}{24}\, F_{y=1} + R$$

e il resto della (41) sarà espresso da

$$(43) \qquad R_1 = (b-a)\, R.$$

Si ha per la determinazione di R, tenendo presenti le (7), (8):

$$A_0 = \frac{11}{24}, \qquad A_1 = \frac{1}{24}, \qquad n = 3,$$

(44)

$$\varphi(y) = \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}-y\right)^4 \Upsilon\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3!}\left[\frac{11}{24}\,(0-y)^3\,\Upsilon(0) + \frac{1}{24}\,(1-y)^3\,\Upsilon(1)\right]$$

e però:

$$(45) \qquad R = -\int_0^1 \left[\frac{1}{144}\,(1-y)^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}-y\right)^4 \cdot \Upsilon\left(\frac{1}{2}\right)\right] \times F_y^{(4)}\left[(b-a)\,y+\frac{a+b}{2}\right] dy.$$

Si può dimostrare facilmente che la espressione

$$(46) \qquad \frac{1}{144}\,(1-y)^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}-y\right)^4 \Upsilon\left(\frac{1}{2}\right)$$

si mantiene positiva tra i limiti $y=0$ e $y=1$. Infatti, poichè $\Upsilon\left(\frac{1}{2}\right)$ è nulla tra i limiti $y=\frac{1}{2}$ e $y=1$, è ovvio che la (46) si mantiene positiva tra questi ultimi limiti; tra i limiti $y=0$ e $y=\frac{1}{2}$, essa può scriversi, a meno del fattore $\frac{1}{144}$:

$$(47) \qquad (1-y)^3 - 6\left(\frac{1}{2}-y\right)^4 = (1-y)^3 - \frac{3}{8}\,(1-2y)^4,$$

ed essendo:

$$1-y \geq 1-2y \geq 0,$$

la (47) acquista valori non inferiori a

$$(1-2y)^3-\frac{3}{8}(1-2y)^4=(1-2y)^3\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{4}y\right)\geq 0.$$

Indicando con ξ un valore di x compreso tra a e b, si ricava agevolmente, alle solite condizioni, per il resto della (41):

$$R_1=-\frac{17}{5760}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi). \tag{48}$$

Chiamando h la differenza costante $b-a$ tra due valori successivi della variabile x, ai quali corrispondono i valori di $f(x)$ che si trovano nella formola di quadratura, si può scrivere:

$$\int_{x_0+\frac{1}{2}h}^{x_1+\frac{1}{2}h} f(x)\,dx=\frac{h}{24}\left[f(x_0)+22f(x_1)+f(x_2)\right]-\frac{17}{5760}h^5 f^{(4)}(\xi) \tag{49}$$

e, applicando il metodo di generalizzazione del § 4:

$$\begin{aligned}\int_{x_0+\frac{1}{2}h}^{x_p-\frac{1}{2}h} f(x)\,dx=\frac{h}{24}\Big\{f(x_0)+23f(x_1)+24\left[f(x_2)+f(x_3)+\ldots\right.\\ \left.+f(x_{p-2})\right]+23f(x_{p-1})+f(x_p)\Big\}+R,\end{aligned} \tag{50}$$

essendo:

$$R=-\frac{17}{5760}(p-1)\,h^5 f^{(4)}(\xi) \qquad x_0<\xi<x_p. \tag{51}$$

c) Dalla considerazione di

$$\begin{aligned}&F(x)=f(x)+f(-x)=a_0+a_2x^2,\\ &\int_0^1 F(x)\,dx=a_0+\frac{1}{3}a_2,\end{aligned} \tag{52}$$

noti che siano i valori $F\left(\frac{1}{3}\right)$, $F(1)$, si ricava:

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,dx=\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx&=\frac{3}{4}F\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}F(1)\\ &=\frac{1}{4}\left[f(-1)+3f\left(-\frac{1}{3}\right)+3f\left(\frac{1}{3}\right)+f(1)\right]\end{aligned} \tag{53}$$

e, posto ancora:

$$(54)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{b-a}{2}\,y + \frac{a+b}{2}\,, \\ y &= \frac{2}{b-a}\,x - \frac{a+b}{b-a}\,, \end{aligned}$$

si può pure scrivere:

$$(55)\qquad \begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b-a}{2}\,y + \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= \frac{b-a}{2}\int_0^1 F\left(\frac{b-a}{2}\,y + \frac{a+b}{2}\right) dy \\ &= \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{2b+a}{3}\right) + f(b)\right], \end{aligned}$$

che è la formola di quadratura di Newton.

Determiniamo, nelle solite ipotesi, il resto R_1 di questa formola. Osservando al solito che è:

$$(56)\qquad \int_0^1 F\left(\frac{b-a}{2}\,y + \frac{a+b}{2}\right) dy = \frac{3}{4}\,F_{y=\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}\,F_{y=1} + R,$$

determinato che sia R sarà:

$$(57)\qquad R_1 = \frac{b-a}{2}\,R.$$

Per la determinazione di R si ha, tenute presenti le (7), (8):

$$(58)\qquad \begin{aligned} &A_0 = \frac{3}{4}\,, \qquad A_1 = \frac{1}{4}\,, \qquad n = 3, \\ &\varphi(y) = \frac{1}{4!}\,(1-y)^4\,\Upsilon(1) - \frac{1}{3!}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} - y\right)^3 \Upsilon\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\,(1-y)^3\,\Upsilon(1)\right], \end{aligned}$$

e quindi:

$$(59)\qquad \begin{aligned} R = -\frac{1}{24}\int_0^1 &\left[(1-y)^3 + 3\left(\frac{1}{3} - y\right)^3 \Upsilon\left(\frac{1}{3}\right) - (1-y)^4\right] \\ &\times F_y^{(4)}\left(\frac{b-a}{2}\,y + \frac{a+b}{2}\right) dy. \end{aligned}$$

È da esaminare se la funzione

$$(60) \qquad (1-y)^3 + 3\left(\frac{1}{3} - y\right)^3 \Upsilon\left(\frac{1}{3}\right) - (1-y)^4$$

mantenga lo stesso segno tra i limiti $y = 0$ e $y = 1$. Ora è chiaro che la precedente si mantiene positiva tra i limiti $y = \frac{1}{3}$ e $y = 1$, perchè, tra tali limiti, si riduce a

$$(61) \qquad (1-y)^3 - (1-y)^4 = y\,(1-y)^3,$$

e che si mantiene pure positiva tra i limiti $y = 0$ e $y = \frac{1}{3}$, perchè, tra questi limiti, si riduce alla (61) aumentata del termine sempre positivo:

$$3\left(\frac{1}{3} - y\right)^3.$$

Indicando, al solito, con ξ un valore compreso tra a e b, si ricava agevolmente per il resto della (55):

$$(62) \qquad R_1 = -\frac{3}{80}\left(\frac{b-a}{3}\right)^5 f^{(4)}(\xi).$$

Questo resto è stato dedotto dalla D.^{sa} Paolina Quarra [1] dalla regola generale indicata dal Peano.

Introducendo la solita differenza h che, nel caso esaminato, è uguale a $\frac{b-a}{3}$, si può scrivere:

$$(63) \qquad \int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3}{8}\,h\,[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3}{80}\,h^5 f^{(4)}(\xi)$$

---

[1] Cfr. Dr. P. Quarra, *Resto in alcune formole di quadratura*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", anno **1913**.

e generalizzando:

$$(64)\quad \int_{x_0}^{x_{3p}} f(x)\,dx = \frac{3}{8} h \{ f(x_0) + 3 [f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_8) + \ldots] + f(x_{3p}) + 2 [f(x_3) + f(x_6) + \ldots + f(x_{3p-3})] \} + R,$$

essendo:

$$(65)\quad R = -\frac{3}{80} p\, h^5 f^4(\xi), \qquad x_0 < \xi < x_{3p}.$$

Funzione intera di 5° grado.

Determiniamo i resti di due formole di quadratura, delle quali la prima di quelle esaminate è riportata da G. Boole nel suo *Trattato sul calcolo delle differenze finite* e l'altra è indicata da W. P. Elderton nel lavoro già citato.

Tali formole possono anche ricavarsi dalla considerazione di un polinomio di 4° grado.

a) Da

$$(66)\quad F(x) = f(x) + f(-x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4,$$

che può considerarsi come una funzione intera di 5° grado nella quale sono nulli i coefficienti dei termini di primo, terzo e quinto grado in x, si ricava:

$$(67)\quad \int_0^1 F(x)\,dx = a_0 + \frac{1}{3} a_2 + \frac{1}{5} a_4.$$

Noti i valori $F(0)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$, $F(1)$, si ottiene dalle precedenti:

$$(68)\quad \int_0^1 F(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{6}{45} F(0) + \frac{32}{45} F\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{45} F(1)$$
$$= \frac{1}{45}\left[7f(-1) + 32 f\left(-\frac{1}{2}\right) + 12 f(0) + 32 f\left(\frac{1}{2}\right) + 7 f(1)\right]$$

e, posto ancora:

$$(69)\quad x = \frac{b-a}{2} y + \frac{a+b}{2}, \qquad y = \frac{2}{b-a} x - \frac{a+b}{b-a},$$

si deduce:

$$(70)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right)dy$$
$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 F\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right)dy$$
$$= \frac{b-a}{90}\left[7f(a) + 32f\left(\frac{3a+b}{2}\right) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right.$$
$$\left. + 32f\left(\frac{3b+a}{2}\right) + 7f(b)\right].$$

Per la determinazione del resto R_1 della (70) determiniamo prima, come al solito, il resto R della seguente:

$$(71)\quad \int_0^1 F\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right)dy = \frac{6}{45}F_{y=0} + \frac{32}{45}F_{y=\frac{1}{2}} + \frac{7}{45}F_{y=1} + R;$$

si ha per tale determinazione, tenendo presenti le (7), (8):

$$(72)\quad \begin{aligned} &A_0 = \frac{6}{45}, \qquad A_1 = \frac{32}{45}, \qquad A_2 = \frac{7}{45}, \qquad n = 5,\\ &\varphi(y) = \frac{1}{6!}(1-y)^6\,\Upsilon(1) - \frac{1}{5!}\left[\frac{6}{45}(0-y)^5\,\Upsilon(0)\right.\\ &\left.+ \frac{32}{45}\left(\frac{1}{2}-y\right)^5\Upsilon\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{45}(1-y)^5\,\Upsilon(1)\right], \end{aligned}$$

per cui, semplificando:

$$(73)\quad R = -\frac{1}{5!\times 45}\int_0^1\left[7(1-y)^5 + 32\left(\frac{1}{2}-y\right)^5\Upsilon\left(\frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{15}{2}(1-y)^6\right]F_y^{(6)}\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right)dy.$$

Si può dimostrare rapidamente che la funzione:

$$(74)\quad 7(1-y)^5 + 32\left(\frac{1}{2}-y\right)^5\Upsilon\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{15}{2}(1-y)^6$$

si mantiene positiva tra i limiti $y=0$ e $y=1$. Essendo infatti:

$$(75)\quad 7(1-y)^5 - \frac{15}{2}(1-y)^6 = 7(1-y)^5\left(\frac{15}{14}y - \frac{1}{14}\right)$$

costantemente positiva tra i limiti $y=\frac{1}{15}$ e $y=1$, basterà dimostrare che la (74) è pure positiva tra i limiti $y=0$ e $y=\frac{1}{15}$. Ora è facile vedere che se dentro questi ultimi limiti è:

$$32\left(\frac{1}{2}-y\right)^5 > \frac{1}{2}(1-y)^5, \tag{76}$$

la (74) si mantiene maggiore di

$$7(1-y)^5\,\frac{15}{14}\,y \tag{77}$$

che non diventa negativa tra $y=0$ e $y=\frac{1}{15}$; ma perchè la (76) sia soddisfatta è necessario e sufficiente che sia:

$$\begin{gathered}(1-2y)^5 > \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{5}}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}}\right)^5 \\ y < \frac{2^{\frac{1}{5}}-1}{2 \cdot 2^{\frac{1}{5}}-1} \simeq \frac{15}{130}\end{gathered} \tag{78}$$

la quale è ovviamente soddisfatta tra i limiti $y=0$ e $y=\frac{1}{15}$.

Indicando, allora, con ξ un valore compreso tra a e b, si ricava agevolmente per il resto della (70):

$$R_1 = \frac{b-a}{2}\,R = -\frac{1}{7!\times 3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(6)}(\xi). \tag{79}$$

Essendo nel caso esaminato:

$$h=\frac{b-a}{4},$$

si può scrivere:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{2}{45}\,h\,[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) \\ + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8}{945}\,h^7 f^{(6)}(\xi)\end{aligned} \tag{80}$$

e generalizzando:

(81)
$$\int_{x_0}^{x_{4p}} f(x)\,dx = \frac{2}{45} h \{ 7f(x_0) + 14[f(x_4) + f(x_8) + f(x_{12}) + \ldots + f(x_{4p-4})] + 7f(x_{4p}) + 32[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \ldots + f(x_{4p-1})] + 12[f(x_2) + f(x_6) + f(x_{10}) + \ldots + f(x_{4p-2})] \} + R,$$

essendo:

(82)
$$R = -\frac{8h^7}{945} p f^{(6)}(\xi), \qquad x_0 < \xi < x_{4p}.$$

b) Da

(83)
$$F(x) = f(x) + f(-x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4,$$
$$\int_0^{\frac{1}{4}} F(y)\,dx = \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{192} a_2 + \frac{1}{5120} a_4.$$

noti che siano i valori $F(0)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$, $F(1)$, si ottiene:

(84)
$$\int_0^{\frac{1}{4}} F(x)dx = \int_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{4}} f(x)dx = \frac{2589}{11520} F(0) + \frac{308}{11520} F\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{17}{11520} F(1)$$
$$= \frac{1}{11520} \left\{ 5178 f(0) + 308\left[f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right] - 17[f(-1) + f(1)] \right\},$$

e, posto:

(85)
$$x = 2(b-a)y + \frac{1}{2}(a+b)$$
$$y = \frac{1}{2(b-a)} x - \frac{1}{4} \frac{a+b}{b-a},$$

si può scrivere:

(86)
$$\int_a^b f(x)\,dx = 2(b-a) \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} f\left[2(b-a)y + \frac{1}{2}(a+b)\right] dy$$
$$= 2(b-a) \int_0^{\frac{1}{4}} F\left[2(b-a)y + \frac{1}{2}(a+b)\right] dy$$
$$= \frac{b-a}{5760} \left\{ 5178 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 308\left[f\left(\frac{3a-b}{2}\right) + f\left(\frac{3b-a}{2}\right)\right] - 17\left[f\left(\frac{5a-3b}{2}\right) + f\left(\frac{5b-3a}{2}\right)\right] \right\}.$$

Si ha, al solito, per la determinazione del resto R_1 della precedente:

$$R_1 = 2(b-a)R, \tag{87}$$

essendo:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} F\left[2(b-a)y + \frac{1}{2}(a+b)\right] dy \tag{88}$$

$$= \frac{2589}{11520} F(0) + \frac{308}{11520} F\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{17}{11520} F(1) + R.$$

In base alle (7), (8), si ha per la determinazione di R:

$$A_0 = \frac{2589}{11520}, \quad A_1 = \frac{308}{11520}, \quad A_2 = -\frac{17}{11520}, \quad n = 5$$

(89)

$$\varphi(y) = \frac{1}{6!}\left(\frac{1}{4} - y\right)^6 \Upsilon\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{5!}\left[\frac{2589}{11520}(0-y)^5 \Upsilon(0)\right.$$

$$\left. + \frac{308}{11520}\left(\frac{1}{2} - y\right)^5 \Upsilon\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{17}{11520}(1-y)^5 \Upsilon(1)\right],$$

da cui, semplificando:

$$R = \frac{1}{6!}\int_0^1 \left[\frac{17}{1920}(1-y)^5 - \frac{308}{1920}\left(\frac{1}{2} - y\right)^5 \Upsilon\left(\frac{1}{2}\right)\right. \tag{90}$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4} - y\right)^6 \Upsilon\left(\frac{1}{4}\right)\right] F_y^{(6)}\left[2(b-a)y + \frac{1}{2}(a+b)\right] dy.$$

L'espressione:

$$\frac{17}{1920}(1-y)^5 - \frac{308}{1920}\left(\frac{1}{2} - y\right)^5 \Upsilon\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - y\right)^6 \Upsilon\left(\frac{1}{4}\right) \tag{91}$$

si mantiene positiva tra i limiti $y = 0$ e $y = 1$. Infatti si mantiene positiva tra i limiti $y = \frac{1}{2}$ e $y = 1$ perchè si riduce al primo termine, ovviamente positivo tra i limiti indicati; tra i limiti, poi, $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$, osservando che si ha:

$$\frac{308}{1920}\left(\frac{1}{2} - y\right)^5 = \frac{9{,}625 \times 2^5}{1920}\left(\frac{1}{2} - y\right)^5 = \frac{9{,}625}{1920}(1-2y)^5,$$

(92)

$$0 \leq 1 - 2y \leq 1 - y,$$

si potrà scrivere, per i primi due termini della (91):

$$\frac{17}{1920}(1-y)^5 - \frac{308}{1920}\left(\frac{1}{2}-y\right)^5 \tag{93}$$
$$\geq \frac{17}{1920}(1-y)^5 - \frac{9{,}625}{1920}(1-y)^5 \geq 0,$$

e però risulta, a maggior ragione, la (91) positiva tra i limiti considerati. Indicando, allora, con ξ un valore compreso tra a e b, si ottiene agevolmente:

$$R_1 = 2(b-a)R = \frac{367(b-a)^7}{7!\times 3\times 2^6} f^{(6)}(\xi), \tag{94}$$

ed essendo

$$h = b - a,$$

si può scrivere:

$$\int_{x_1+\frac{1}{2}h}^{x_3+\frac{1}{2}h} f(x)\,dx = \frac{h}{5760}\{5178 f(x_2) + 308 [f(x_1) + f(x_3)] \tag{95}$$
$$-17[f(x_0)+f(x_4)]\} + \frac{367 \cdot h^7}{7!\times 3\times 2^6} f^{(6)}(\xi),$$

in cui ξ è compreso tra x_0 e x_4.

Applicando, infine, il procedimento indicato al § 4, si deduce per $p \geq 8$:

$$\int_{x_1-\frac{1}{2}h}^{x_{p-2}-\frac{1}{2}h} f(x)\,dx = \frac{h}{5760}\{-17[f(x_0)+f(x_p)] \tag{96}$$
$$+291[f(x_1)+f(x_{p-1})] + 5469[f(x_2)+f(x_{p-2})]$$
$$+5777[f(x_3)+f(x_{p-3})] + 5760[f(x_4)+f(x_5)$$
$$+f(x_6)+\ldots+f(x_{p-4})]\} + R,$$

essendo:

$$R = \frac{367}{7!\times 3\times 2^6}(p-3)\,h^7 f^{(6)}(\xi), \qquad x_0 < \xi < x_p. \tag{97}$$

6. — Il metodo indicato, nei paragrafi 1-2, per determinare i resti nelle formole di quadratura è tale da produrre *a priori* l'impressione, anche considerata la introduzione della funzione $\gamma(u)$ che permette di scriverli sotto la forma di un unico integrale

definito, che i resti stessi non risultino espressi nel modo più conveniente per la loro rapida determinazione sotto forma di derivata, anche a causa delle difficoltà che *a priori* si possono supporre nella discussione delle funzioni $\varphi(y)$. Dall'esame però dei casi che qui mi sono limitato a considerare e da altri che ho potuto esaminare, relativi anche alla considerazione di funzioni intere di grado più elevato, credo si possa concludere che tali difficoltà non si presentino, almeno nella determinazione dei resti delle formole di quadratura di più comune applicazione.

In quanto ai casi in cui la $\varphi(y)$ cambia segno, tra i limiti in cui è studiata, mi limito a dare un solo esempio.

Da

$$F(x) = f(x) + f(-x) = a_0 + a_2 x^2,$$

considerata come funzione intera di 3° grado, nella quale sia nullo il coefficiente di x^3, si deduce, supposti noti i valori $F\left(\frac{1}{2}\right)$, $F(1)$:

$$\int_0^1 F(x)\,dx = \frac{24}{27} F\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{27} F(1) \tag{98}$$

$$= \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{27}\left\{24\left[f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right] + 3\left[f(-1) + f(1)\right]\right\}.$$

Risulta per la determinazione di R, e nell'intervallo $y = 0$, $y = 1$:

$$\varphi(y) = \frac{1}{24}(1-y)^4 - \frac{4}{27}\left(\frac{1}{2} - y\right)^3 \Upsilon\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{54}(1-y)^3 \tag{99}$$

che per $y = 0$ è eguale a $-\frac{1}{8}$ e per $y = \frac{1}{2} + \epsilon^2$ è eguale a

$$\frac{1}{54}\left(\frac{1}{2} - \epsilon^2\right)^3\left(\frac{1}{8} + \frac{9}{4}\epsilon^2\right) \geq 0. \tag{100}$$

7. — Della formola generale di quadratura di Cotes è stato considerato precedentemente qualche caso particolare: è noto che una sua caratteristica è che i coefficienti dei valori

$$(b-a) f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right) \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{101}$$

che in essa figurano sono indipendenti dai valori a e b.

Interessa rilevare, specialmente, che le formole di quadratura di Gauss rientrano nella formola (8). Si potrà dimostrare, infatti, per diverse vie che se nella (8), supposto $k = n$, i valori $x_0, x_1, \ldots x_n$ sono radici dell'equazione:

$$(102) \qquad X_{n+1} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[(x-a)^{n+1} (x-b)^{n+1} \right] = 0 ,$$

la (8) stessa è deducibile, rigorosamente con $R = 0$, da funzioni intere di grado $n+1$, $n+2$, ..., $2n+1$, e potrà, pertanto, scriversi:

$$(103) \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{i=n} A_i f(x_i) + \int_a^x \varphi(y) f^{(2n+2)}(y)\, dx .$$

nella quale la $\varphi(y)$ è sempre fornita dalla (7).

Per la dimostrazione si può ricorrere ad un noto procedimento che basterà ricordare.

Una formola di quadratura può dedursi ovviamente scrivendo il polinomio di interpolazione che assume i valori assegnati $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ e integrandolo tra i limiti a e b.

Ora, se supponiamo assegnati i valori:

$$(104) \qquad f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_{2n+1}),$$

si avrà per il relativo polinomio di interpolazione:

$$(105) \quad P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{i=2n+1} f(x_i) \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{2n+1})}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

il quale, evidentemente, assume i valori (104) in corrispondenza, rispettivamente, dei valori $x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1}$.

Ma è noto che la (105), che non è che la formola di Lagrange, può pure scriversi sotto la forma:

$$(106) \qquad P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{i=2n+1} \frac{f(x_i)}{\psi'(x_i)} \frac{\psi(x)}{x - x_i} f(x_i)$$

in cui è:

$$(107) \qquad \psi(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n) \ldots (x - x_{2n+1})$$

e, per tanto, si ha per la formola di quadratura:

$$(108)\qquad \begin{gathered} \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=2n+1} A_i f(x_i) + \int_a^x \varphi(y) f^{(n+2)}(y)\,dy \\ A_i = \frac{f(x_i)}{\psi'(x_i)} \int_a^b \frac{\psi(x)}{x - x_i}\,dx . \end{gathered}$$

Supponiamo, adesso, che siano $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ radici della (102); allora è noto come si dimostri che sono nulli i valori $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{2n+1}$, e come i valori $A_1, A_2, \ldots, A_n$ restino indipendenti dai valori $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}$; in altri termini: la formola di quadratura di Gauss determinata per mezzo dei valori $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ è pure deducibile dalla considerazione di funzioni intere di grado $n+1, n+2, \ldots, 2n+1$.

La prima delle (108) fornisce il resto delle formole di quadratura di Gauss per mezzo di un integrale definito.

Il resto di queste formole di quadratura è stato espresso dal Prof. P. Mansion (1) per mezzo di $f^{(n+2)}(\xi)$, essendo ξ un valore compreso nell'intervallo (a, b).

Roma, Novembre 1915.

(1) Cfr. " Bulletin de l'Académie Royale de Belgique ", 1886; G. Peano, *Applicazioni geometriche etc.*

I teoremi della media e di Rolle.

Nota del Prof. GIUSEPPE VITALI

(Da una lettera al Prof. GUIDO FUBINI).

. . . .

Nella tua Nota: *Esiste un corpo a densità nulla?* [1] ti domandi se alle funzioni additive $f(\tau)$ possedenti in ogni punto derivata finita si possono estendere i teoremi di Rolle e della media, e dimostri questi teoremi facendo un'ipotesi lievemente restrittiva per le funzioni di cui ti occupi e precisamente supponi che, se J è il campo d'esistenza di $f(\tau)$ e della sua derivata e τ è quel pezzo di J che è compreso fra due rette parallele poste alla distanza h una dall'altra, sia $\lim\limits_{h=0} f(\tau) = 0$.

Successivamente nella tua Nota *Il teorema del valor medio* [2] tornando sull'argomento, dimostri, senza fare ipotesi restrittive sulla funzione additiva, un teorema [3] che può sostituire quello della media nella dimostrazione della uguaglianza di funzioni additive che hanno la medesima derivata, ma che non ha tutta la portata del teorema della media.

(1) " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. L, a. 1914-15, pag. 293 e seg.

(2) " Rendic. Reale Accad. dei Lincei ", vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem., fasc. 7°, 1915, pag. 69 e seg.

(3) Se $f(\tau)$ è funzione additiva e derivabile dei dominî τ parziali di un dominio finito e misurabile J e se L, l sono i limiti superiore ed inferiore dei valori $f'(A)$ della derivata f' nei punti A di J allora $L \geq \frac{f(J)}{J} \geq l$. Ed anzi se $L > l$ è proprio $L > \frac{f(J)}{J} > l$.

Ebbene, anche senza fare ipotesi restrittive sulla funzione additiva, i teoremi di Rolle e della media possono essere dimostrati purchè si limiti convenientemente la natura del campo in cui la funzione si considera.

Dimostro il seguente teorema:

Se J *è un rettangolo* ABCD *e se* f (τ) *è una funzione additiva definita in ogni campo* τ *di* J, *che ammette derivata finita in ogni punto di* J *e se* f (J) = 0, *esiste un punto* P *di* J *in cui* f′ (P) = 0.

Per ogni numero n intero e maggiore di zero si divida ciascuno dei lati AB e BC in 2^n parti uguali e per i punti di divisione si tirino le parallele rispettivamente a BC ed AB. Il rettangolo J resta allora diviso in un sistema di 4^n rettangoli a due a due uguali, che indicheremo con S_n. Qualunque sia n ciascun rettangolo del sistema S_n è costituito esattamente di 4 rettangoli del sistema S_{n+1}.

Poichè $f(J) = 0$, esisteranno due rettangoli τ_1', τ_1'' di S_1 consecutivi (cioè con un lato comune) per cui

$$f(\tau_1') \geq 0 \qquad f(\tau_1'') \leq 0.$$

Poniamo

$$\tau_1 = \tau_1' + \tau_1''.$$

Per le disuguaglianze precedenti esisteranno due rettangoli τ_2', τ_2'' di S_2 consecutivi e contenuti in τ_1 per cui

$$f(\tau_2') \geq 0 \qquad f(\tau_2'') \leq 0.$$

Poniamo

$$\tau_2 = \tau_2' + \tau_2''.$$

Per le disuguaglianze precedenti esisteranno due rettangoli τ_3', τ_3'' di S_3 consecutivi e contenuti in τ_2 per cui

$$f(\tau_3') \geq 0 \qquad f(\tau_3'') \leq 0.$$

Poniamo

$$\tau_3 = \tau_3' + \tau_3''$$

e così via di seguito.

I rettangoli

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$$

essendo ciascuno contenuto nel precedente avranno un punto comune P.

Esisteranno infiniti τ_n' o infiniti τ_n'', p. es. infiniti τ_n', che contengono P.

Siano essi

$$\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \tau_{i_3}, \ldots$$

È

$$f'(P) = \lim_{r=\infty} \frac{f(\tau_{i_r}')}{\tau_{i_r}'},$$

e poichè per ogni r è

$$f(\tau_{i_r}') \geq 0,$$

si ha

(1) $$f'(P) \geq 0.$$

È poi

$$\frac{f(\tau_{i_r}'')}{\tau_{i_r}''} = \frac{f(\tau_{i_r}) - f(\tau_{i_r}')}{\tau_{i_r}''} = \frac{2f(\tau_{i_r})}{\tau_{i_r}} - \frac{f(\tau_{i_r}')}{\tau_{i_r}'},$$

poichè

$$\tau_{i_r}' = \tau_{i_r}'' = \frac{1}{2}\tau_{i_r}.$$

Ma è

$$\lim_{r=\infty} \frac{f(\tau_{i_r})}{\tau_{i_r}} = f'(P) \qquad \text{e} \qquad \lim_{r=\infty} \frac{f(\tau_{i_r}')}{\tau_{i_r}'} = f'(P),$$

e quindi è anche

$$\lim_{r=\infty} \frac{f(\tau_{i_r}'')}{\tau_{i_r}''} = 2f'(P) - f'(P) = f'(P);$$

e poichè per ogni r è

$$f'(\tau_{i_r}'') \leq 0,$$

sarà

(2) $$f'(P) \leq 0.$$

Dalle disuguaglianze (1) e (2) consegue che

$$f'(P) = 0.$$

Esiste dunque un punto P di J per cui

$$f'(P) = 0 \qquad \text{c. d. d.}$$

Il teorema ora dimostrato si può considerare come la naturale estensione del teorema di Rolle, se si pensa il rettangolo come la naturale estensione del segmento.

Dal teorema di Rolle consegue subito quello della media con noti procedimenti.

Ma i teoremi di Rolle e della media valgono per campi più generali.

Così se per es. J fosse un cerchio e se $f(J) = 0$, si potrebbe con una parallela all'asse delle x dividerlo in due parti di ugual area.

Se esse sono τ_1' τ_1'', si può sempre supporre che

$$f(\tau_1') \geq 0 \qquad f(\tau_1'') \leq 0.$$

Dividiamo *ciascuna* di queste parti in due parti di ugual area con una parallela all'asse y. Delle 4 parti risultanti ve ne saranno due consecutive (cioè con parte del contorno in comune) τ_2' τ_2'' per cui

$$f(\tau_2') \geq 0 \qquad f(\tau_2'') \leq 0.$$

Dividiamo ciascuna di queste parti in due parti di ugual area con una parallela all'asse delle x. Delle 4 parti che risultano ve ne saranno due consecutive τ_3' τ_3'' per cui

$$f(\tau_3') \geq 0 \qquad f(\tau_3'') \leq 0$$

e così via di seguito.

Così procedendo si può accompagnare tutto il ragionamento fatto quando J era supposto un rettangolo, e quindi venire alla stessa conclusione.

Lo stesso ragionamento si può ripetere tal quale se J è un ellisse o qualche altra area del genere.

Il ragionamento varrebbe anche se J fosse una corona circolare, e quindi dunque anche per aree non semplicemente connesse.

Sarebbe possibile fissare i caratteri dei campi per cui si può ripetere il nostro ragionamento. Ma l'elenco di questi caratteri, che sarebbe facile desumere dalla dimostrazione stessa, non potrebbe concentrarsi in poche parole, e d'altra parte la poca importanza che, a mio parere, avrebbe questa generalità sconsiglia dal farlo seguire qui per disteso. Si noti che qui la derivata in un punto A è definita come il $\lim\limits_{\tau=0} \frac{f(\tau)}{\tau}$, quando τ è un campo tale che A sia interno o sul contorno di τ.

. . . .

Genova, 10 Novembre 1915.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 5 Dicembre 1915.

PRESIDENZA DEL SENATORE GIAMPIETRO CHIRONI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci Carle, D'Ercole, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza di S. E. Boselli, Presidente dell'Accademia, e dei Soci Manno, Ruffini, Brondi e Sforza.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 21 novembre.

Il Socio Segretario Stampini dà lettura di una lettera del Socio nazionale non residente Pio Rajna che plaude " di lon-
" tano calorosamente alle parole alte, vigorose, sapienti del
" venerato Presidente dell'Accademia: parole alle quali accre-
" scono efficacia il passato e il presente di Chi le ha profferite,
" e l'aver risonato nella nobile città che fu massima officina
" del nostro riscatto nazionale. „

Il Socio Stampini presenta per la stampa negli *Atti* una sua Nota col titolo *Il Codice Bresciano di Catullo. Osservazioni e confronti*.

LETTURE

Il Codice Bresciano di Catullo.

Osservazioni e confronti.

Nota I di ETTORE STAMPINI, Socio nazionale residente.

Robinson Ellis, nell'ultima pagina della *Praefatio* che si legge nella edizione dei *Catulli carmina* pubblicata ad Oxford nel 1904 (1), nomina il codice Bresciano A.VII.7. fra i codici " minoris aestimandos „ che egli adoperò soltanto " rarius „. Di fatto solo in via veramente eccezionale lo menziona (p. e., a c. XXXIX, 11. LXVI, 83.84. LXXIX, 4.), e molto meno ancora del *Caesenas* e del *Carpentoractensis 357* che egli pur cita di rado e che mette nella stessa categoria dei codd. di minor valore. Bisogna credere che l'Ellis non abbia esaminato il codice di Brescia, nell'anno 1901 in cui visitò la biblioteca civica *Queriniana* (2), se non molto superficialmente, quasi di sfuggita e senza aver davanti a sè la sua seconda edizione

(1) L'edizione non porta data, secondo un pessimo costume che pur troppo è stato esteso a tutta la *Scriptorum classicorum Bibliotheca Oxoniensis*, di cui l'edizione fa parte; ma A. E. Housman, che ne fece una recensione in *Classical Review*, vol. XIX, 1905, fasc. di marzo, pp. 121-123, aggiunge al titolo: " Published 29 luly 1904 „. Fu pertanto in errore lo Schanz che diede come data l'anno 1906 (*G. d. röm. Lit.*, I, 2³, p. 84).

(2) Devo questa indicazione alla cortesia dell'attuale direttore della *Queriniana* Nob. Antonio Soncini, il quale, oltre ad altre notizie sul fondo dei mss. di quella biblioteca, mi comunicò che il cod. *A.VII,7.* fu pure esaminato il 27 marzo 1905 da C. H. Beeson (Chicago), e il 13 giugno dello stesso anno da L. Richmond (Cambridge). E qui colgo l'occasione per porgere altri vivi ringraziamenti all'egregio Bibliotecario, il quale permise che io studiassi con tutta comodità il codice nella Biblioteca nazionale universitaria di Torino.

del 1878 (che chiamerò *editio maior*), perchè indubbiamente si sarebbe accorto, ai primi confronti anche dei soli titoli premessi ai carmi di Catullo, che egli aveva sotto gli occhi un fratello gemello di quel codice *Harleianus 2574*, da lui indicato con *h*, del quale l'apparato critico di quella edizione dà uno spoglio accurato e assai particolareggiato, spoglio che si ripete con la medesima minuziosa diligenza e quasi con la medesima frequenza nella *editio minor* (chè così chiamerò l'ed. del 1904). Ora, dato il fatto che il *Brixianus A.VII.7*, che designerò con *Br*, coincide con *h*, e che questi due codd. hanno un numero notevole di lezioni, fra cui alcune buone e sicure, che non si riscontrano negli altri codd., e moltissime le quali si trovano solamente in singoli altri codd., o in pochissimi, o in pochi, parmi non meritasse d'essere così trascurato, come fu sinora, non fosse per altro che per un avviamento ad ulteriori ricerche sulla paternità di essi, cioè sull'esistenza di un codice catulliano che non è un semplice trascurabile *asseclu* di *O* (1), ma che ha una sua individualità distinta pur nelle lezioni corrotte, le quali appaiono in numero alquanto maggiore di quello che si verifica in alcuni dei mss. più apprezzati, ma, rispondendo ad una tradizione sincera del testo, devono senza dubbio attribuirsi alla imperizia e all'ignoranza dell'amanuense che trascrisse il manoscritto da cui fu a sua volta derivato, specialmente, ma non solamente, a causa dei *compendia scripturae*, come può essere agevolmente provato. Ma del manoscritto, donde provennero *Br,h,* ed altresì di quello da cui esso manoscritto a sua volta fu copiato, sarà discorso più sotto al luogo opportuno. Diamo qui, invece, la descrizione dei due codici completi, i quali io ho chiamato gemelli nella semplice considerazione del testo catulliano, chè, lasciando da banda il testo di Tibullo e di Properzio, quanto alla materiale fattura e alla stessa intera contenenza di *Br,h,* pur troppo mi mancano parecchi elementi per venire ad una recisa affermazione: sebbene le cose che dirò

(1) Cfr. la diss. di Alph. Morgenthaler *De Catulli codicibus*, Argentorati, MCMIX, p. 12. Egli così chiama *h*, mettendolo " deteriorum in numero ", quantunque in esso " nonnulla reperiuntur in quibus mirum in modum cum *O* concinere videatur " (p. 58).

possano inclinare, almeno parzialmente, a ritenere molto simili anche sotto tale rispetto i due mss.

La ragione di questa mia dubbiezza sta nelle scarse, anzi scarsissime indicazioni che l'Ellis ha fornito del suo cod. *h*. Ecco le sue parole (1):

" *h*. Harleianus 2574. Cartaceus forma octonaria crassiore. Habet folia 214; singulae paginae plerumque 30 uersus comprehendunt. Scriptus est nitidissime, manu Italica tenui ac rotundiore. Ff. 1-34 Tibullus, 34^{b}-102^{b} Propertius, 103-141^{b} Catullus, ceteris Epigrammata et poemata uaria, Italorum praecipue saec. XV, scripta sunt. „

Più manchevoli ancora sono le indicazioni che a tal riguardo troviamo nel catalogo del Museo Britannico (2), salvo in un particolare, cioè che la quarta parte del cod. comprende: " Epigrammata et Poemata varia, Maffei Vegii, Joviani Pontani, et aliorum „. Finisce la magra descrizione con le parole: " Codex cartaceus, elegans „. Per altro sono sempre indicazioni preziose, perchè *Br*, come ognuno può rilevare dalla particolareggiata descrizione del suo contenuto fattane da Achille Beltrami (3), dopo i tre poeti (prima è Properzio, poi Catullo, terzo viene Tibullo), seguìti da parecchi *epigrammata, etc.*, contiene precisamente carmi di Maffeo Veggio, ai quali tengon dietro molti di Gioviano Pontano ed altri.

Anche il formato di *Br*, che è un cartaceo di 0,205 $\times$ 0,146, corrisponde alla " forma octonaria crassior „ di *h*. Tuttavia l'intero codice Bresciano consta di fogli 220, mentre *h* ne ha 6 di meno, cioè 214. Se non che la cosa non deve meravigliare, dato che, come scrisse l'Ellis, sono per lo più 30 versi per pagina, mentre le pagine di *Br* portano tracciate 29 linee, di cui la scrittura ne occupa 28, a cominciare dalla seconda, compresi i titoli dei carmi i quali sono scritti normalmente in una sola riga fra carme e carme, ad eccezione, quanto a Catullo, del ti-

(1) *Ed. maior, Proleg.*, p. LIV.

(2) *A catalogue of the Harleian manuscripts, in the British Museum.* Vol. II, 1808, p. 701.

(3) Nel suo *Index codicum classicorum latinorum qui in bybliotheca Quiriniana Brixiensi adservantur* (negli *Studi it. di Filol. class.*, Vol. XIV, 1906, pp. 56-66.

tolo premesso a c. I, che è di due righe. Il solo foglio 83^{v} ha 29 righe scritte, trovandosi il titolo *Ad vibenium* al di sopra della prima linea vuota; ma questo titolo fu evidentemente aggiunto dopo che era stato copiato il primo verso del carme (XXXIII). Si vede che l'amanuense tenne a conservare la scrittura su 28 righe, perchè, p. e., il f. 80^{r} fu fatto terminare col titolo *Ad varrum poetam,* mentre il primo verso del carme (XXII) fu scritto nel f. 80^{v}; lo stesso avvenne del titolo *Ad aurelium et Furium,* che leggesi in fine del f. 79^{r}, laddove il principio del carme (XVI) è nel f. 79^{v}. Così ci è dato di comprendere la ragione del minor numero di fogli di *h*, come si capisce che, se il contenuto di *h* che tien dietro ai carmi di Catullo si estende da f. 141^{v} sino a f. 214, cioè occupa 73 fogli interi, e se *Br* dopo le elegie del *Corpus Tibullianum* da f. 152^{v} va sino a f. 220 abbracciandone 79, se ne può in qualche maniera inferire che l'identità della materia compresa ne' due codici non è esclusa.

Ma questa è per noi cosa di secondaria importanza, l'essenziale essendo qui il dimostrare l'identica fonte di *Br*, *h* per riguardo al testo catulliano. Del resto, per terminare la descrizione di *Br* sotto questo punto di veduta, va notato che la sua scrittura è nitidissima, come quella di *h*, ma presenta non pochi cambiamenti di carattere, dal più grande e più pesante al più piccolo e più leggero, e parecchie volte il più piccolo e più leggero si presenta più fitto senza che vi sia alcuna ragione di spazio a ciò render necessario. Lo stesso carattere più piccolo varia talora in leggerezza; ma io esiterei a parlare di mani diverse, pur non escludendone la possibilità. Certo nelle rare correzioni e aggiunte interlineari o marginali il sottilissimo carattere che talvolta si scorge e la conformazione differente di certe lettere induce a sospettare un'altra mano; ma, come vedremo, trattasi di pochi casi e non c'è da farne gran conto.

Ignoro quanta parte dia *h* alle abbreviature di vocaboli. A giudicare dalle numerose lezioni radunate nell'apparato critico dell'Ellis, si direbbe quasi che non ve ne sono; ma son sicuro che l'Ellis avrà fatto ciò che farò io per *Br,* vale a dire avrà trascritto il vocabolo nella sua interezza quando non giudicava necessario, per ragioni speciali, riprodurre esattamente la parola compendiata. Quanto a *Br,* le abbreviature sono molte, indubbiamente più numerose che in *G*, di cui ho avuto alla

mano la riproduzione fotolitografica (1): non parlo di *M*, che tutti sanno quanto poche abbreviazioni presenti (2) in confronto di *G* (3). Pochi esempi ne daranno la dimostrazione (4).

X,18.	*Br*	Non inq̃, tm̂ ᶦm fuit maligne
	G	Non inq̃, michi tam fuit maligne
„ 32.	*Br*	Vtor tâ bn̂ q̃, mihi pararim
	G	Utor tam bene q̃ michi pararim
XX,23.	*Br*	Nûc eû uolo de tuo pôte mittẽ p̧num
	G	Nûc euȝ uolo de tuo ponte mittere pronuȝ
L,18.	*Br*	Nûc audax caủis: p̂cesqȝ nr̂as
	G	Nunc audax caueris precesqȝ nostras
LXII,61.	*Br*	Ip̂e pr̂ cû mr̂e q̧bus parẽ necesse est
	G	Ipse pater cuȝ matre quibȝ parere necesse est
LXIV,167.	*Br*	Ille autê p̧pe iâ medijs ủsat' in undis
	G	Ille autem prope iam mediis uersatur in undis
„ 169.	*Br*	Sic nimis insultâs ex̃mo tp̂re seua
	G	Sic nimis insultans extremo tê̂pore seua

E gli esempi si potrebbero moltiplicare. Ma veniamo alle correzioni e alle varie lezioni di *Br* (5).

---

(1) *Catulle. Manuscrit de St-Germain-des-Prés (Bibliothèque Nationale, nº 14137) précédé d'une étude de* M. Émile Chatelain. *Photolithographie de* MM. Lumière. Paris, 1890.

(2) Ho anche sempre avuto presente il *Liber Catulli bibliothecae Marcianae Venetiarum* pubblicato *heliotypica arte* in 30 esemplari numerati da Costantino Nigra nell'aprile del 1893. Io lo indico col segno *M*.

(3) Di *O* non posso parlare, chè non ho potuto fare alcun confronto, non conoscendone un numero sufficiente di fogli in fototipia.

(4) La numerazione dei carmi e dei versi da me data è quella che si ha nella *editio minor* dell'Ellis.

(5) A proposito di lezioni, non deve essere taciuto il fatto che in *Br* manca sempre la prima lettera della parola con cui il carme incomincia, salvo per quei carmi di Catullo che si continuano senza titoli e senza spazî intermedî. Quella lettera doveva essere scritta in proporzioni più grandi da estendersi sino alla riga del secondo verso, così che i primi due versi sono sempre allineati più in dentro: nel margine a sinistra poi vedesi quasi sempre una sottilissima lettera minuscola (sembra d'altra mano) per

Le correzioni o varie lezioni in margine sono pochissime e si riducono alle seguenti, o a poche più:

I, 1. modo *marg.* dono 5. tum *ma.*tñ *a.m.* (1) III, 10. pipillabat *ma.*pipiabat *a.m.* 18. tument *ma.*rubent *a.m.* VIII, 2. ducas *ma.*latet XII, 12. extimatione *ma.*expectatione XVII, 1. ligno *ma.*lungo 26. mula *ma.*nulla XXIII, 16. salina *ma.*saliua XXXIX, 12. lamininus *ma.*flaminus XLVIII, 4. sacer *ma.*satur LX, 3. tetra *ma.*cetra 5. uero corde *ma.*fere LXI, 225. boltiei *ma.*al. bonci (*o* bonti?) *a.m.* LXII, 36. multis *ma.*nuptii LXIII, 18. here citatis *ma.*excitatis 27. atris *ma.*actis LXIV, 298. natisque *ma.*gnatis LXV, 7. Cidia *ma.*troia *a.m.* LXVI, 12. sedes *ma.*fines 74. uestre *ma.*uere LXVIII, 42. Inuenit *ma.*iuuerit LXXVI, 6. amittere *ma.*amore tibi LXXXIV, 2. arrius insidias *ma.*anus infida h' CXVI, 7. amictu *ma.*aîca (= amica).

Nel testo le correzioni sono del pari in picciol numero, e, fatta la debita riserva per qualche possibile omissione, si limitano pressochè al seguente elenco:

r as u nec q̃
II, 12. auleolum VI, 1. tuo *a.m.* (2) VIII, 4. docebat 10. Neq;
đ qd'
X, 19. que (*vale a dire* quod *sopra scritto; e cfr. la lezione di h* que)
mus qui id o i
XI, 23. ultimi XII, 7. quia uel 14. sethaba XIV, 23. Seculi
n
(*si osservi che* Siculi *è la lezione di Harleianus 4094* XV, 11. moueto
u sti t
17. tn (= tamen *sopra scritto* tum) XXI, 12. desinat *a.m.* XXIII. 27. desine
tale t s a
XXV, 4. tulle 10. lacusculum XXXII, 4. irriserit XXXVII, 15. indignũ
n
16. semitarii *a.m.* LXI, 8. hŭc (*la* c *deriva da correzione di altra lettera*
e ac
che non ho distinto bene, forse i) 145. patet LXII, 55. coluere LXIII,

---

indicare la lettera mancante da aggiungere alla seconda, la quale è anche quasi sempre in carattere maiuscolo. Per il solo carme I la lettera iniziale doveva toccare la linea del terzo verso.

(1) Con *a.m.* (*altra mano*) non intendo fare un'affermazione assoluta: voglio solo dire che muta la proporzione o la finezza o la rotondità del carattere, talora anche l'inchiostro.

(2) Si deve intendere che *a.m.* in questo elenco si riferisce alla correzione scritta sopra alla parola del testo.

28. linguis repete (*col segno* // *messo sopra ciascuna parola per correggere*
l u . pthi
la collocazione: repente linguis) 77. Renunque LXIV, 35. phyotica *a.m.*
si sydere s
319. calachisti *a.m.* 329. coniuge 331. Languiduloque (o *corr. da* e)
h r
339. aud *a.m.* (d *corr. da* t) LXV, 7. letheo 24. orbe LXVI, 3. obscu-
l o c tecti b n
retur 27. adeptus 39. gessi 70. tethi *a.m.* 82. libet *a.m.* 87. uras
r
(*già* u *era stato corr. in* n *dalla stessa mano*) *a.m.* LXVIII, 3. eiectum *a.m.*
o ,
4. Subleue *a.m.* 63. uentis nautis 76. herus (*la lettera sopra* u *è incerta; pare*
un ' *piuttosto che un'*o) 113. *Dopo* stymphalia *leggonsi punteggiate le parole*
a t
certa figura; *segue* mōst sagitta 115. feretur 153. *Sulla* t *di* temis *un*
l u
segno a.m. che sembra quasi F LXX, 1. male LXXIV, 3. ipsam
a b ri
LXXIX, 4. notorum LXXXI, 3. pisaurum LXXXIX, 6. *Dopo* sit *leggesi*
sic *puntegg.*

E veniamo ai confronti di *Br* con *h*, che valgono a stabilire la loro parentela in rapporto al testo catulliano.

La stretta cognazione tra *Br* e *h* si manifesta subito anche solo esaminando i titoli in rosso premessi ai carmi, molti de' quali differiscono notevolmente da quelli che si leggono negli altri codd. Cominciamo dunque da questi titoli, tralasciando, naturalmente, quanti non presentino un divario meritevole di nota nel confronto coi titoli corrispondenti o di tutti o di parecchi degli altri manoscritti (1) che fanno parte dell'apparato critico dell'Ellis.

(1) Indico qui, nell'ordine che generalmente terrò, i mss., cominciando dai principali: *O* = Oxoniensis Bodl. Canon. Lat. 30 — *G* = Sangermanensis, Paris. 14137 — *R* = Romanus (Vat. Ottob. 1829) — *M* = Marcianus (Cod. Lat. LXXX Class. XII) — *D* = Datanus Bibl. Berol. (Diez. B. Santen. 37). De' secondari (così li chiamo per conformarmi all'uso, chè, secondo me, alcuni valgon più di *D*, del quale è tuttora esagerata l'importanza) indico con lettere, quasi per ordine di parentela con *Br*, *h*, i seguenti: *a* = Brit. Mus. Add. 11915 — *H* = Hamburgensis, cod. Philolog. Scrin. L. 139 — *B* = Bononiensis 2621 — *A* = Ambrosianus M. 38 — *P* = Perusinus = Cuiacianus Scaligeri (anche codex Alani, Ellis *Proleg. ed. mai.* LIV segg.) — *C* = Colbertinus, Paris. 8234 — *b* = Mus. Brit. Add. Mss. 12005 — *c* = Mus. Brit. Add. Mss. 11674. A questi aggiungo, senza sigle, i seguenti: *Vicentinus* — *Phillippicus* (si indica il *Phill.* segnato con 9591 = Bodl. Lat. Class.

I. Clarissimi poete catulli veronensis liber quintus (1) Incipit. Ad cornelium *Br* Clarissimi poetae Catulli Veronensis liber incipit ad Cornelium *h* XII. Ad Matrucinum asinium (*con Laur.XXXIII,12,Laur. XXXIII,13; nella maggior parte dei codd. si legge* asinum) XIII. Ad Fabulum (*con a* Ad Fabullum Ω) XVI. Ad aurelium et Furium *Br,h* (*negli altri codd. il carme è senza titolo e si continua senza interrallo col carme prec.*) XVII. Ad amicum quendam *Br,h, con B* (*mancano interrallo e titolo in O,G; varia il titolo negli altri codd.*) XXII. Ad varrum poetam *Br,h* (Ad Varum *opp.* Ad Varium Ω Ad Varum (Varrum *a*) laus suffeni poetae *a,H*) XXVII. Ad furium *Br,h* (Ad Pincernam suum Ω) XXVIII. Ad veranium (Verannium *h*) et Fabulum *Br,h, con a* (Ad Veran(n)ium et Fabullum Ω) XXIX. Ad romulum (*manca in Br* Catamithum *che leggesi in h,A* Ad Romulum Chata mittam *H* In Romulum Cathamitum Ω) XXXII. Ad ipsithilam *Br,h* (*varia il nome negli altri codd.*) XXXIII. Ad vibenium *Br* In Vibennium *h* (In Vibennum *a* In Vibennium Furium *P; mancano interrallo e titolo in* Ω) XXXIV. Ad dianam de eius laudibus *Br,h* (Carmen Dianae et eius laus *a* Hymnus (Hinnus *Burneianus 133*) in dianam *P,Burn.* Carmen Dianae Ω) XXXV. Ad cecilium libellum loqui iubet *Br,h* (Ad Cecilium (Celum *D*) iubet libellum (libello *G,R,M,D*) loqui (loquere *a*) Ω Ad libellum suum de Cicilio *A* iubet libello suo loqui ad Cecilium *Laur. XXXIII,12* Coecilium (Cecilium *P*) rogat ut ueniat Veronam (Romam *P*) *P,Burn.*) XXXVI. Ad lusicam catham (catam *h*) cartham *Br,h* (Ad Lusicacatam (Lusicatam *C*) Ω; *altre variazioni in H,B,P,Burn.*) XL. Ad Ranidum *Br,h* (In Rauidum *P* In Rauidam *Burn.* Ad Rauidum Ω) XLIX. Ad M. T. Ciceronem *Br con B* Ad Mar. Tul. Ciceronem *h* (Ad M. (Marcum *H*) Tullium Ciceronem *H,Laur.XXXIII,13* Ad Marcum *opp.* M. *opp.* Mar.

e. 17) — *Burneianus 133* (Mus. Brit.) — *Vaticanus 1630* — *Ricardianus 606* — *Harleianus 4094* — *Laurentianus XXXIII, 12* — *Laurentianus XXXIII, 13* — *Santenianus*, e qualche altro, come i già menzionati *Caesenas* e *Carpentoractensis* (Carpentras) *357*, il *Codex Ashburneri*, il *Dresdensis*, ecc. Il segno Ω vale, come nell'*ed. min.* dell'Ellis, a indicare il consenso dei codd. principali insieme coi più fra i secondarî. Ricordo poi di nuovo che trascrivo le lezioni di *Br* sciogliendo le abbreviature. E siccome *Br* solo rarissimamente usa i dittonghi *ae* ed *oe*, adoperando la *e* semplice, così nel confronto con *h* trascuro la differenza che può intercedere fra i due codd. a tal riguardo: la stessa avvertenza devo fare circa le iniziali maiuscole o minuscole delle parole.

(1) Ricordo che in *Br* il *liber* di Catullo fa seguito al lib. IV di Properzio: di qui lo sproposito dell'amanuense che aggiunse la parola *quintus*.

Tullium *A,P,Santen.,Laur.XXXIII,12* Ad Ciceronem *G* Ad Tullium *C* Ad Romulum *R,M prima della corr. in* Ad Ciceronem) L. Ad ly(i *h*)cinum *Br,h* (Ad Licimum *H* Ad Licinium *R,a,B,A,C,Sant.,Laur.XXXIII,13* Ad Lycinium *Laur.XXXIII,12* Ad Lucinium *G,M che ha in marg.* ad licinium Ad licinium Caluum *P*) LIII,4. *Tra questo v. e il v. 5 intervallo e titolo* De othonis capite in *Br,h; lo stesso spazio e titolo con qualche variante grafica si ha in M,a,H,B,A, etc.; il titolo è scritto al marg. del v. 5 in G,R,C; tra il v. 5 e il v. 1 del carm. seg. più nessun intervallo e titolo* LIV,5. *Tra questo e il v. 6 spazio e titolo* In camerium *Br con B.Sant.,Laur.XXXIII,12* Ad Camerium *h,H* (In Camerum *A,C,Burn.* In Camertum *a* Ad amicum suum *P; il titolo è in G scritto in marg.*) LVI. Ad M. Ca. porcium *Br* Ad Mar. Ca. Portium *h* (Ad Catonem (Cathonem *A*) Ω) LVIII. Ad Celium *Br con P* Ad Caelium *h* (Ad Coelum *Burn.; nella maggior parte dei codd. con O,G nessun titolo e nessun intervallo*) LIX. Ad ruffum *Br,h* (In Ruffum *a,H* In Rufum Ω In Rufam bononiensem *P*) LXI. Iulie et manlii Laudes *Br.* de Iuliae et Manlii laudibus *h* (Epythalamius Iunie et Mallii *opp.* Epithalamus Iuliae et Malii Ω, *con altre variazioni dello stesso titolo in alcuni codd.*) LXIV. Argonauta thesei et adriane *Br* Argonautica Thesei et Adrianae *h* (Argonautia Ω Argonautica exametrum *a*) LXIV,322. *Dopo questo v. intervallo d'una riga in Br,h,R,M,a,H,B,A,Sant., Laur.XXXIII,12,13, con titolo che è in rosso* Epithalamium thethidis (thetidis *h*) et pelei *in Br,h: variazioni dello stesso tit. negli altri codd.* LXV. Ad hortalem *Br,h. con H* (Ad Ortalem *G,R,M,A,C,Sant.,Laur.XXXIII,12* Ad Orientalem *a*) LXVII. Ad ianuam *Br,h, con a,P,Burn.* (*gli altri codd. continuano senza intervallo e titolo*) LXVIII. Ad manlium pre tristicia sui fratris non posse consolari alterum *Br* Ad Manlium prae tristitia non posse consolari alterum *h* (Ad Manlium *P* Ad Malium *a* Ad Mallium Ω) LXIX. Ad ruffum immondiciam suam ei obiciendo *Br* ad Rufum immundiciam suam ei obiciendo *h* (In Ruffum *opp.* in Rufum Ω*; manca tutto il carme in D, Ric.606*) LXXX. Ad gelium *Br,h* (Ad Gellium Ω Ad Celium *a* In Gellium *P,Burn.*) LXXXIX. Ad gelium ironica laudatio *Br* Ad Gellium Ironica Laudatio *h* (In Gellium Ω Ad Gellium *H*) XCII. Ad lesbiam de ipsa conquerens in amore *Br,h* (In Cesarem Ω in Caesarem *B* Ad Cesarem *H*) C. Ad celium Quintum *Br* Ad Celium Quintium *h* (In Celium et Quintium Ω De celio (Coelio *Burn.*) et quintio *P,Burn.* Ad Celium *a*) CI. Carmen pro morte fratris *Br,h* (Fletus de morte (amore *D*) fratris *marg. G,R,M,D,H,A,B, Laur.XXXIII,12,13* Elegi de morte fratris *a*) CII. Ad cornelium *Br,h, con D corr.,a,P,Burn.* (*nessuno spazio nè titolo negli altri codd.*).

A proposito di intervalli tra carme e carme e di titoli, non va taciuto, nel confronto di *Br,h* con altri codd., che in *D,a,P* e *Burn.* si trova un numero più o meno grande di carmi segnati da distacco e da titoli varianti, o anche da un semplice intervallo, mentre in *Br,h* v'è continuazione di versi senza spazi intermedi e senza iscrizione di sorta. Così *P* e *Burn.* hanno titoli in principio dei carmi 45, 70, 73, 74, 75, 76, 79, 86, 91, 94, 95, 98; *P* solo prefigge un titolo a 46, 57, 112; *P,D corr.,a,Burn.* premettono titoli diversi a 81, 82, 83, 88, tra il v. 2 e il v. 3 di c. 92, a 96, 97; *P,marg.D,a,Burn.* al c. 105; *P,a,Burn.* al 78; *P,D corr.,Burn.* ai carmi 87, 99, 103, 107, 108, 109, 111, 116; *P,D corr.* ai carmi 106, 110, 113, 114; *P,a* al c. 44; e *D corr.* solo al 104; mentre inoltre in *a* solo v'è semplice spazio vuoto che separa dai precedenti i carmi 86, 99, 103, 104, 107, 108, 109, 114, 116; e parimente c'è puro intervallo di distacco prima di c. 71 in *P,Burn.*; prima di c. 110 in *a,Burn.*; e prima di c. 115 in *D,a*.

Sono entrato in questi particolari, perchè sin d'ora mi preme richiamare l'attenzione sui codd. *D,a,P,Burn.*, come quelli che, per certi rispetti, dimostrano più o meno notevoli affinità con *Br.h.*; ma, come sarà provato con la massima evidenza anche in seguito, vanno invece nettamente da essi distinti, e confermano, con quegli altri elementi che saranno messi in rilievo, che, nonostante parziali coincidenze e perciò una cotale parentela, non possono mettere capo, come indubitabilmente mettono capo *Br,h*, ad un unico esemplare.

E passiamo all'esame del testo catulliano propriamente detto in *Br,h*, cominciando da ciò che appare esclusivamente proprio di questi due codici e ad entrambi comune, sia riguardo alle lezioni, sia anche per rispetto a qualche lacuna o trasposizione che essi soltanto presentano.

III, 3. est mortuus 10. pipillabat *marg.* pipiabat 15. mihi bellum V, 8. Deinde mille altera da secunda centum 10. multa alia mille VII, 6. uerteris VIII, 14. Aut tu X, 7. In bithinia quo modo possem 9. nihil neque nunc ipsis 17. *Manca il verso.* 19. que *con* quod *sopra scritto.* 28. non *invece di* modo 33. tu insulsa XII, 7, quia (qui *sopra scritto*) tu *inv. di* tua id *inv. di* uel (*anche H; in Br* id *scritto sopra* uel)

12. extimatione *marg.* expectatione   XIII, 3. bona   XVII, 1. ligno *marg.* longo (lungo *Br*) 3. rediniuis (*om.* in) 6. sali sub scyli 10. latus (*inv.* di lacus) 22. sit *om. dopo* utrum 24. potes   XXI, 12. desinat (*ma* sti *scritto sopra* si)   XXV, 1. tulle 4. tulle (*ma sopra scritto* tale *Br*) XXVIII, 13. Fati   XXIX, 15. aut   XXX, 3. perdère 7. iubeas 8. quasi tuta omnia   XXXI, 5. thimina   XXXIV, 6. proles 8. oliriam 23. Ancique XXXVI, 14. alchos   XXXVII, 12 ulla   XXXVIII, 3 magis magisque XXXIX, 11. porcus   XL, 1. ranide   XLII, 5. Pugilaria 13. olidum XLIV, 11. minatium 13. grando 20. sentio   XLV, 4. assiduo 12. Illa 15. macrior   XLVI, 3. locundum   L, 5. hos *invece di* hoc 13. simul utque 15. lecto 17. prospiciens (prospitiens *h*) LV, 1. molestum est (5ª) huic LVI, 7. cendi   LVIII, 2 tu catullus 5. Glulit   LX, 5. uero corde fere LXI, 21. Floridus 36. ite insimul 104. ad tuum 107. rubile 115. Flameum 134. At *davanti a* diceres 151. siue seruit 174-178. *Mancano questi vv.* 196. Inuerit 202. uestri   LXII, 9. cauent quo uiscere parent 12. Aspice ut 22. *Manca il v.* 40. *Manca il v.*   LXIII, 5. letas (laetas *h*) 7. recenti 9. tu mater *invece di* tubam 12. galli 19. cadat 27. atris *marg.* actis 31. omina gens 46. sine que is 49. est ista uoce miseriter maiestates 56 pupilla 67 solum   LXIV, 27. contempsit 61. heu he 71. miser 89. flamina myrtos 101. esse *invece di* contra 109. late cum (qum *h*) eius 119. gnata 135. ac deuota 165. mala 208. Conscius 224. infesto 228. troni 246. ingressa 247. Monte 252. Et *invece di* Cum 258. intingebant 271. exurgente 283. colores *invece di* corollis (*ma* i *sopra* e *in Br*) 285. penitus 294. prosequitur 304. mensa 312. sub ipsis *invece di* supinis 316. Lanaque 317. leni 321. facta 331. parat 344. tergo *invece di* teucro 360. permutata 376-378. *Mancano* 391. hesit (*ma in marg.* egit *h*) LXV, 1. assidue defecit 7. Cidia *marg.* troia quam 8. Erreptus (*ma* Ereptus *h*) 16 bacchiade (*ma* bachiade *marg.* baetiade *h*) 21. ligatum LXVI, 3. et *invece di* ut 15. Et ne 18. geniũ iuuerunt 43. mos quam 47. faciant 67. bootem 72. Nam 83. iure 84. Sed que si 86. ego *om.* 87. o neptune 90. numinibus 93. uti *inv. di* utinam   LXVII, 15. est *om.* 28. Quo 40. aperire *invece di* operire 45. addebit 47. que *invece di* cui LXVIII, 3. erectum (eiectum *con* r *sopra* i *Br*) 8. oblectat 22. nostra est tota 27. quod hic 31. me 39. postea est 46. curua 52. Sitis 69, 70. *Il v.* 70 *è messo prima del* 69. 85. abiisse 93. frater 101. quem 108. abductum 115. et celsi 116. fuit *invece di* foret 117. altius 121. in uetus (inuetus *h*) 125. illa 132. sic *invece di* se 133. circum uersans 151. tangit 155. uice LXX, 3. cupit *invece di* cupido   LXXI, 2. sequar 3. nostrum (*anche G corr.*) LXXII, 5. uxor *invece di* uror 6 ita me ne 7. inquit quem   LXXIV, 4. ad

invece di et LXXV, 3. tot si LXXVI, 4. Durum 6. amittere *marg.* amore tibi 12. deis 16. Nec 26. mi *om.* LXXX, 2. fient 3. exissem cum (qum *h*) 8. Illic te mulso LXXXI, 1. Nemo te 5. quam *invece di* quem LXXXIV, 8. Audiebam 12. isse LXXXVI, 6. unus LXXXVIII, 1. geli 5. geli LXXXIX, 5. ut *om.* XC, 1. gelii XCI, 1. geli 4. mete (me te *h*) *invece di* mentem XCII, 3. signa XCIII, 1. studio 2. uirum *invece di* utrum XCV, 3. *Dopo questo v. ne mancano due. Segue senza intervallo il v.* At uolusi *etc.* XCVI, 6. Quintille XCVII, 6. ploxino 11. illa XCIX, 3. nanque 7. simul hoc factum est 8. abstersis 14. heleboro (*ma* helleboro *h*) 16. bassia (*così sempre Br*) C, 6. Profecta CI, 7. que prisco (priscoque Ω) CIII, 1. sillo 3. nummi CIV, 2. mihi *messo davanti a* carior CVI, 1. precone CVII, 2. gratum *om.* CVIII, 3. duorum CX, 5. pudica CXI, 4. mater, *e spazio tra* mater *e* fratres CXVI, 6. Geli 7. *Dopo* amictu *è scritto* aica (amictu *anche in P. Vat. 1630 soli*) 8. nobis.

Come si vede, abbiamo qui oltre a 220 esempi di peculiarità comuni a *Br.h* e solo proprie di essi due, peculiarità le quali sono, ad un tempo, prove e di strettissima parentela e di distinta individualità di fronte a tutti gli altri codici catulliani presi in esame nelle due edizioni dell'Ellis. Si aggiunga che questa individualità, invece di essere attenuata, piglia una figura più spiccata ancora dalle lezioni e dalle altre particolarità che *Br.h* hanno comuni con singoli o con pochissimi o con pochi altri codici. E la ragione va cercata nel fatto che, mentre dal confronto con gli altri codd. si ricava una veramente notevole quantità di lezioni (fra le quali, si noti bene, parecchie buone e accettabili), che *Br.h* hanno in comune or con questo or con quel codice singolo, oppure, caso per caso, or con pochissimi (due o tre) or con pochi (1), si osserva invece che all'accordo costante di *Br,h* non corrisponde quello degli altri codd., i quali variano continuamente nelle loro concordanze; di guisa che avviene che un codice, il quale in una lezione consuona con *Br.h* e con qualche altro, discordi poi in un'altra lezione o da tutti o da alcuni, e così di seguito in altre lezioni

(1) Non menziono in generale i codici quando il loro numero è superiore ai quattro. Se faccio eccezioni, lo si deve a speciali motivi che il lettore esperto può facilmente comprendere.

ora convenga ora no, vuoi con tutti, vuoi con parte di essi, come è eloquentemente dimostrato dal seguente prospetto:

I, 1 [Q]ui (*con D,A,Phill.*) 5. tum es (*con b*) II, 11. puelle ferunt III, 14. Orcique (*con O,M,C*) IV, 24. Nouisse (*con Vat. 1630*) V, 7. mihi VI, 9. et hic et illic (*con a*) VII, 10. etiam (*con H*) VIII, 4 uetitabas (*con H*) 9. impotens (*con Vic., marg. Burneianus 133*) IX, 4. uno animo sanamque X, 8. habere *invece di* aere 20. cito *in luogo di* octo (*con D*) XI, 7. qui (*con B,Phill.*) 9. latas 13. ferre (*con D,H*) XII, 13. nemo sinunt 15. fabulus 16. almeni (*con Vat. 1630, Phill.*) 17. fabulum XIII, 1. fabule 6. Nec XIV, 5. perdere (*con B,H,Harl. 4094*) 16. Non non hec XV. 10. bonis malisque (con *b*). 11. ut iubet XVI, 7. tum (*con D*) 9. pruria (*con D*) XXI, 1. esuritionum 5. et iocaris 8. irrumatione. 13. irrumatus (*con a, Vat. 1630*) XXII, 4. Puto ego esse 6. nouem. 15. uel neque nec idem (*con O*) 16. ac XXIII, 2 nec araneus (*con Sant.*) 3. est pater (*manca il primo* et) 6. linea (*con B*) 7. Nimirum (*con D*) 19. cullus (*con a*) XXIV, 1. inuentiorum 5. cui nec (*con D*) XXV, 5. ostendet (*con O,D*) 6. palium (*con a,A*) 8. Inepteque (*con O,H*) 12. minuta (*con Caesen.*) XXVII, 5. Ad uos (*con O*). XXVIII, 3. Veranni (*con Sant.*) fabule 11. pari fuistis 14. nobis XXIX, 20. timent (*con A,Sant.*) XXX, 9 Idem XXXI, 4. libenter. 5. bithinos (*con Burn.*) XXXII, 8. futuitiones 11. paliumque (*con A*) XXXIII, 5. oras (*con a,P,Sant.*) XXXIV, 5. latona. 12. Omniumque sonantium XXXV, 6. suique meique XXXVI, 7. tradipedi (*con C*) 16. reditumque (*con a, B, Vat. 1630*) XXXVII, 5. esse *duranti* hyrcos (*con B,Vat. 1630, ma* hircos *h*) 10. scipionibus 18. celtiberie XXXIX, 2. sed (*con H,Vic.*) 4 *e* 5. *Mancano* (*con D*) 12. acer (*con H,Phill.*) 13. ut 19. rufam (*con A,Sant., Ashburn.*) 20. deus 21. lotum XLII, 12. *Manca il verso* (*con D,H*) 15. tamen hoc satis (*corr. da* hoc tamen satis *Br*) XLIV, 5. seu nerius (*con D*) 7. expulsus sum (*con D*) 8. meus ueretur (*con a*) 11. Oratione (*con O*) petitorem (*con O*) XLV, 7. Cessio 19. hospitio 21. septimius. 23. septimo (*con Hpr.m.,a,C*) XLVI, 3. aureis 5. estuore XLVIII, 1. uiuenti (*con a,H,B*) 4. Nec unquam inde ero (*con Vic.*) XLIX, 7. patronus L, 5. illos (*con O*) 20. nemesis (*con A,P,Sant.*) reposcat (*con G,D*) LI, 5. que *per* quod 11. Tintinat (*con Laur. XXXIII, 12*) 12. Lumina (*con O,D,a*) LII, 3. peierat LIII, 5. salapputium LIV, 2. Et en (*con Vic.*) 7. Immerentibus LV, 4. id circo (*con O*) 8. sereno (*con Phill., Burn.*) 9. Ah uel te (*con P*) (4[a]). niuee (*con G,D,a*) (7[a]). uinctos (9[a]). perseus (*con b*) 19. proiicies LVII, 1. cynedis LIX, 1. ruffa (*con a,H,P*) 2. memini (*con B*) LX, 1. libissinis

(*con O,a,Burn.*) 5. Contentam (*con O,D*) LXI,12. concinens (*corr. da* continens, *lezione di* Ω, *in Br.*) 16. Nanque iulia manlio (*con P,Phill.*) 33. reuinciens (*con a,P*) 63. ac (*con H,P*) 104. *Leggesi* complexum *anche in fine di questo v.* (*con B,Harl.4094*) 108. leti 129. uilice (*con O*) 187. uelut (*con O,C,Paris.7989*) LXII,12. meditamine querunt (*con Paris.7989*) 45. dum cara 60. equum (aequum *h*) LXIII, 16. pelasgi (*con P*) 18. animum *non preceduto da* an (*con Bodl. Lat. Class. e. 15 = Phill. 3364*) 28. Thiasis (*con O*) 32. athis (*con A,Sant.*) 42. athim (*con D*) 43. recipit (*con a*) 47. extuanter usum (*con Sant.*) 53. Ut apud (*con a,b,c*) stabilia (*con O*) 56. ad te (*con b*) 81. terga (*con O,b*) 88. athim (*con Vat. 1630,Sant.*) LXIV,4. leti (lęti *h*) 10. texta (*con O,H,P,c*) 11. prima (*con D,a,P*) 22. Omnis (*con H*) 25. thethidis (thetidis *h*) 26. iupiter 28. neptune (*con H*) 35. schyros 48. que (*con D*) 52. Nanque 56. tunc (*con O*) 77. androgeane (*con O,Vat.1630*) 89. progignunt (*con P,Vat. 1630*) 92. pectore *invece di* corpore (*con a,b,c*) 96. Queque (*con P*) 106. fundanti (*con O,Gpr.m.*) 108. Erruit (*con a*) radicibus 109. obuia 116. in primo (*con Carpentor.*) 121. ut *dopo* Aut *om.* (*con O,P*) 130. hec 132. oris 133. littore (*con O,a,P*) 136. crudeles mentes 137. dementia (*con B,P*) 138. Immite 139. blanda *invece di* nobis 140. non hec (haec *h*) 142. aerei discerpunt 150. Erripui (*con a,B*) 165. Externata (*con O*) 172. littora 174. incertam (*con H*) 183. Qui me (*con A*) lentos (*con O,marg.Sant.,Carp.*) 193. anguineo 196. nunc *davanti a* misera (*con Vic.*). 201. funescet 203. fatis (*con c*) 208. demisit (*con b*) 219. nundum (*con A*) 224. Caniciem 231. Tum 239. seu 249. tum prospectans (*con Ric.2242*) 253. Et *invece di* Te (*con O,A,C,Sant.*) 260. prophani (*con O,B,A*) 263. efflabant 271. sub limina *invece di* sublimia (*con a*) 274. increbrescunt (*con a,P,Burn.*) 276. tum (*con a,P,b*) 288. illa (*con H*) 291. Flammati (*con D,a,b*) 296. cathena 312. cum (*con H, ma* qum *h*) 322. *Dopo questo v. spazio d'una riga ove è scritto in rosso* Epithalamium thethidis (thetidis *h*) et pelei 324. tu tamen 326. sequuntur 331. somnos 341. peruertet (*con O,a*) 344. trunci *invece di* campi (*con Vic.; tenen opp* teuen Ω) 350. Cum in cinerem 353. Nanque messor (*con O,Ric.2242, marg.Sant.*) 355. prosternet (*con O,P,b,Burn.*) 357. squamandri 370. submisso 383. cecinerunt 386. nundum. 388. cum (*con Vic.; ma* qum *h*) uenissent (*con D,P,b,Burn.*) 393. lacti (*con O,Gpr.m.,Phill.*) 395. ranusia 407. dignatur LXV, 2. hortale (*con P,Burn.*) 3. fletus (*con a*) 5. Nanque (*con P,C*) 7. littore (*con O,a,C*) 12. carmina (*con D,a*) 15. hortale (*con P, Burn.*) LXVI, 5. sub lamia (*con B,Paris.7989*) 6. clino (*con Vic.*). 12. Vastatum 18. diui 21. Et 25. atque ego 27. adeptus (*con Vic.*) 30. Iupiter 35. autem (*con Vic.*) 44. phytie 45. cumque (*con O,D,a*) 48. scelerum

(*con Vic.*; celerum *O*) 49. terras (*con c*) 50. ferris frangere (*con H*) 54. elocidicos (*con Vic.*) 59. in lumine (*con Burn.*) 66. lycaonia 81. detecta (*con D,Ric.606*) 83. colitis (*con O,G,marg.Sant.*) 86. Nanque (*con C*) indignis 94. o arion (*con D*) LXVII, 1. iocunda ... iocunda 5. maligne (*con O,Dresd.*) 8. ueterem (*con O,Sant.*) 20. attigerat (*con Vic., Burn.*) 30. nati (*con D,H,Burn.*) 31. non solum hoc dicit se (*con O*) 37. Dixerat 38. lumine 39. hoc (*con H,Laur.XXXIII,12*) 44. sperent (*con O,Vic.*) 48. mendatii (*con R,B*) LXVIII, 2. mittis (*con O,D,a,Ric.606*) 3. spirantibus (*con Vic.*) 13. Aspice (*con D*) miser (*con Sant.pr.m.*) 16. Iocundum 30 manli (*con P,Ric.606*) 38. ingenuo 41. fallimus (*con D,Vic.,Ric.606*) 44. hec (*con H,B*) 50. alii (*con M,Paris.7989*) 54. oetheis (*con a,c,Ric.606*) 55. nummula (*con O,marg.Ric.606*) 57. aerei (*con D,a,P,c*) 63. Flet *in luogo di* Hic (*con Vic.*) 64. Lenius (*con a,P,Burn.*) 65. implorata (*con P,Burn.*) 69. comunes 81. uouit 89. nephas 91. Que uetet (*om.* id *con P*) 91. frater (*con O,G,Laur.XXXIII,13*) 93. iocundumque (*con O*) 101. puppes (*con Vic.*) 104. paccato (*con O,H*) 105. cum *invece di* tum (*con Burn.*) 119. nec tam 124. uoluntarium (*con H,B*) 147. uobis (*con Vat. 1630*) id 151. nostrum (*con M,D,a,Vat.1630,Ric.606*) 159. ipse (*con M,D*) LXXII, 1. nosce (*con H,A*) LXXIII, 4. Imo LXXIV, 1. Gelius (*con H*) LXXV, 2. prodidit (*con D*) LXXVI, 11. tui *inv. di* tu (con *O,G*) instincteque (*con O, ma* instinctęque *h*) 14. officias (*con O,H*) 21. subrepens 26. pro pietate (propietate *h*) LXXVII, 1. amice (*con O*) 4. Si 5. Erripuisti (*con a,B*) 6. *Una sola volta* heu (*anche O,Vic.*) 9. Verum id non (*con O,P,Burn.*) 10. qui sis famuloque tanus LXXX, 3. domum (*con D*) 5. uerum (*con a,c*) 6. tenta (*con D,Ric.606,Laur. XXXIII,12,Paris.7989*) LXXXI, 3. ab LXXXIV, 3. Et cum (*con D,H, Burn.*) 7. Hoc (*con D,a*) requierunt (*con Sant.*) 8. et leniter (*con H, Vat.1630,c*) LXXXV, 2. si *inv. di* sed (*con O*) excrutior (*con a,H,Sant., Burn.*) LXXXVI, 6. subripuit (*con O,D,Vat.1630*) LXXXIX, 1. Gelius ([g])Elius *Br; con a*) XC, 6. Omentum (*con D,a,P,c,Burn.,Ric.606*) XCI, 3. cognoscam (*con a*) constantemue (*con O,G*) XCII, 2. amo 3, 4. *Questi vv. sono in Br,h,O,Ambr.I,67,Carp.,Sant.sec.m.* 3. ea (*con O,Sant.,Ambr.I,67, Carp.*) 4. non (*con Ambr.I,67*) *invece di* uerum (uero *O,Sant.*) XCV, 1. nouam (*con H*) 2. nouamque (*con D,H,c,Ric.606*) XCVI, 1. gratum *non prec. da* et 5. dolori est (*con D,c,Burn.*) XCVII, 9. facit XCIX, 1. uiuenti (*con A,Paris.7989pr.m.*) 2. ambrosia (*con D,a,c,Burn.,Ric.606*) 7. diluta (*con B*) 9. Ne (*con D,P,c,Vat.1630,Burn.,Ric.606*) nostrum (*con Ric.606*) manaret (*con O*) 10. committi (*con Vic., che ha in marg.* commictae) C, 2. ueronensium 6 exigitur (*con D,P,c,Vat.1630,Ric.606*) CI, 7. interea hec (*con O,P*) CV, 2 furcillis (*con P,Burn.,Laur.XXXIII,12*) CVI, 1.

esse (*con O,G,marg.Sant.*) 2. Qui (*con Burn.,Ric.606*) CVII, 1. quicquam 7. hac est (*O,Vic.*) CX, 5. ingenue (*con a,H,Burn.*) CXI, 1. Aufilenam CXII, 1. homo est (*con a,P,Burn.*) *in fine* CXIV, 1. mentula (*con P,c,Burn.*) 3. An cupiam (*con O*). 4. Nec quicquam (*con O,D,a,H,P,c*) CXV, 4. tot modo (*con a,H*) CXVI, 7. euitamus (*con D,P,Burn.,Ric.606*).

Sarebbe senza dubbio non solo cosa meravigliosa, ma addirittura portentosa, che due codici, per quanto trascritti dallo stesso esemplare, presentassero una identità assoluta; sta invece il fatto che sempre un numero più o meno grande di cause produce delle differenze negli apografi dello stesso ms. Mi basti rilevare, p. es., la preferenza che un amanuense dia ad una sola lezione fra due o più che l'esemplare presenti o in margine o fra le linee, mentre un altro trascriva esattamente quanto legge nel cod.; e ciò spiegherà non pochi divari nei due apografi. Un copista, data la speciale peculiarità della grafia dell'esemplare, può leggere p. e. *t*, dove un altro legge *c*; *u* dove un altro legge *n*; *m* può essere da lui interpretato per *ui*, oppure per *iu*; *m* può essere interpretato per *m* anzichè per *ni*; *ci* (1) *co* per *a* (cfr. LXIV, 212. *moenico* in *Br*, *moenia* in *h* (2); LXI, 225. *bonci* oppure *bonti* in marg. *Br*, *bona* in marg. *h*), come per *ti* o *to*; un punto sotto una lettera, per indicare che questa deve considerarsi come cancellata, visto da un copista può determinarlo a non trascriverla, ma può essere che un altro la trascriva tale e quale con o senza il punto. Così un copista trascurerà, p. e., il segno ⌒, poniamo, sopra *e* (ẽ), e trascriverà, p. e., *haeres* in luogo di *haerens* (cfr. sotto, XXI, 6 (3)); un copista interpreterà in una maniera una abbreviatura, un altro in un'altra (cfr. XLII, 6. *Persequamur* in *Br* e *Prosequamur h*, per lo scambio dell'abbreviatura di *per* (p) con quella di *pro* (ꝓ), come è provato da *Br* in LX, 3. con la lezione *pcreauit*, che non è già *percreauit*, bensì

(1) Per lo scambio di *ci* con *n*, cfr. la lezione *cendi* (LVI, 7) invece di *cecidi*, in *Br*, *h*. L'errore era già stato commesso dal copista del loro esemplare.

(2) Cfr. LXVIII, 80. *amisso* in *Br*, ma *comisso* in *h*.

(3) Più curiosa ancora è la lezione *mete* di *Br*, *me te* di *h*, in XCI, 4, derivata dall'aver trascurato il segno ⌒ in *mētē* = *mentem*. Si vede che già l'esemplare dei due codd. mancava del duplice segno.

procreauit) (1); uno avrà, in fatto di grafia, le sue predilezioni per le consonanti doppie, altri no; l'uno avrà l'abitudine di scrivere, supponiamo, con l'*y* una parola, pur avendo una *i* nell'esemplare, l'altro invece trascriverà fedelmente la *i*; insomma, dati due copisti — peggio poi se si tratti di tempi, di luoghi, di coltura, di condizioni differenti —, necessariamente i loro apografi devono riuscire qua e là con differenze che qualche volta possono sembrare, ma tali non sono, sostanziali. Così in XXII,13. si comprenderà che il *tritius* di *h* e il *tristius* di *Br* son dovuti alla circostanza che il copista di *h* soppresse la *s* che nell'esemplare doveva essere stata espunta, laddove il copista di *Br* la conservò trascurando il punto. Può esserne prova la lezione *pa^e^tet* (LXI,145.) di *Br* (ove la *e* è della stessa mano) di fronte al *patet* puro e semplice di *h*. Viceversa in LXIV,259. la lez. di *h* è *c^e^istis*, e quella di *Br* semplicemente *cistis*. Parimente, se in LX,3. *Br* ha *tetra*, ed *h* ha *cetra*, la cosa si spiega, in quanto che il copista di *h* deve aver copiato la parola che si leggeva nel margine dell'esemplare, quando quello di *Br* avrebbe trascritto per intero l'originale, mettendo la lezione *tetra* nel testo e *cetra* in margine. E si comprende come sia successo, p. e., che *Br* abbia *uiro* e *h* abbia *uirgo* in LXVIII,80. L'esemplare poteva benissimo avere, come ha *G*, *uirgo* nel testo e *uiro* in margine: l'amanuense di *Br* avrebbe copiato la sola lezione del margine, e quello di *h* si sarebbe attenuto semplicemente a quella del testo (2): come anche potè darsi che nell'esemplare il *g* di *uirgo*

(1) Caratteristico è l'esempio di LXIV, 97, dove *Br* ha *Qualib*ꝫ = *Qualibus*, mentre *h* ha *Qualibet*, per iscambio della desinenza contratta equivalente a *bus* con quella rispondente a *bet*, causato dalla somiglianza delle due contrazioni. E cfr. XV, 11, ove in *Br* leggesi pure *qualib*ꝫ (il segno quasi uguale a quello di *O*), che può essere interpretato per *qualibet* (così *h*) e anche per *qualibus*. E così si comprende che il copista di *Br* abbia scritto *nō* (= *non*) in XCVII, 6. in luogo di *uero*, la cui abbreviatura (*uo* con un segno sopra) può dar luogo all'equivoco. Per analoga ragione si ha *non* invece di *modo* (X, 28) in *Br*, *h*.

(2) Nell'elenco che vien più sotto se ne troveranno parecchie di queste spiegabilissime differenze. Veggasi, p. e., LXII, 30. *hora* in *Br* *urbe* marg. *hora* in *h*; LXIII, 18. *here citatis* marg. *excitatis* in *Br* *aere citatis* in *h*; LXIV, 63. *mitram* in *Br* *crinem* marg. *mitram* in *h*; LXVI, 12. *sedes* marg. *fines* in *Br* *fines* in *h*; 74. *uestre* marg. *uere* in *Br* *uere* in *h*; etc.

fosse cancellato con un tratto di traverso o segnato con un punto sotto, tratto o punto negletto da uno dei due copisti. Così del pari in un apografo entra talora a far parte del testo una glossa o una lezione arbitraria interlineare dell'esemplare in luogo della parola sottoposta, che è la lezione autentica: nessuna meraviglia pertanto che, p. e., in LXIV, 286. *Br* abbia *cingunt*, che è la vera lez., e solo in *h* leggasi *tegunt*.

Io ho parlato di due copisti diversi, facendo persino la ipotesi di condizioni diverse di tempo, di luogo, di coltura. Ma anche il medesimo copista, dopo di aver tratto un apografo da un cod., può, ricopiandolo di nuovo, incorrere in diversità di trascrizione, in quelle stesse diversità che sono state segnalate e in tant'altre ancora. A quale filologo de' nostri tempi non è mai capitato di trascrivere una lezione erroneamente, e di accorgersi, in una nuova lettura del cod., di essersi sbagliato? Se ciò accade al moderno filologo, al dotto, al paleografo, che si dovrà dire di quegli amanuensi ignoranti o, peggio ancora, semidotti? Conseguentemente tutto ciò che ho detto nella ipotesi di due copisti, sta sempre in piedi anche nella supposizione che i due codici siano usciti dalla stessa fabbrica, vergati dalla mano della stessa persona. Non ho sufficienti elementi per attenermi risolutamente all'una piuttosto che all'altra delle due spiegazioni che si possono dare, chè, come s'è veduto, troppo scarse e troppo poco particolareggiate sono le indicazioni fornite dall'Ellis a proposito di *h*, perchè sia lecito stabilire l'identità della fabbrica, tanto meno della mano (1), per quanto le cose dette nella esposizione sommaria del suo contenuto e di quello di *Br* potrebbero inclinare a non escludere come inverosimile l'opinione di un'unica origine altresì per la composizione materiale dei due manoscritti. Ma noi atteniamoci qui alle sole prove che riguardano l'unicità dell'esemplare donde scaturirono *Br* e *h*, la quale dalle differenze del testo fra i due codici, che io pre-

(1) Poichè, come s'è notato, in *Br* s'impiega sempre, salvo rarissimi casi, la *e* in funzione di *ae*, *oe*, ed invece l'Ellis adduce alquante lezioni di *h* col dittongo, ciò potrebbe essere, se la trascrizione dell'Ellis è stata esatta, un indizio serio di diversità d'amanuense. Ma la diversità dell'amanuense non contrasterebbe, del resto, con la identità della fabbrica, come è ovvio.

sento qui sotto raccolte con la massima cura, mi pare non possa essere come che sia infirmata, quando si abbia ognora presente con quali criteri debbansi considerare le varianti di un testo in manoscritti che han pur tanta parte di mirabili concordanze fra loro.

II,3. Quoi *Br* Cui *h* III,6. mellitus *Br* melitus *h* 18 tument *marg.* rubent *Br* tument *h* IV,8. tracem *Br solo* tracam *h solo* 11. citeorio *Br* citrorio *h sol.* 22. littoribus *Br* littoralibus *h.* 26. Se nec *Br sol.* Sed nec *h sol.* V,11. Conturbemus *Br sol.* Conturbabemus *h sol.* VI, 1. delicias *Br* delitias *h* 8. Sertis *Br* Sertis *con e soprascritto all'r h* assyrio *Br* asyrio *h* 13. panda *Br* pandas *h* VIII,7. nollebat *Br* nollebat *con* u *scritto sopra alla* n *h* X,1. Varius *Br* Varrus *h* 26. commoda *Br* comoda *h* XI,10. uisens *Br* uidens *h pr.m.* 23. Ultimi (mus *scritto sopra* mi) *Br* Ultimus *h sol.* XII,6. credis *Br* credas *h sol.* XIII,6. unquam *Br* nunquam *h sol.* 8. sacculus *Br* saculus *h* XIV,1. [n]E *Br* Ni *h* 11. dispererint *Br sol.* dispereant *h sol.* 19. Suffe,nam *Br* Suffenam *h* 20. Ac *Br sol.* At *h* XV,9 tuoque *Br* tuo *h sol.* 11. qualib; *Br* qualibet *h* XVI,9. quod *Br* que *h sol.* XVII,1. ledere *Br* ludere *h sol.* 26. Ferream *Br* Feream *h* XXI,6. Herens *Br* Haeres *h sol.* XXII,10. capri mulgris *Br* capri mulgus *h* 13. tristius *Br* tritius *h* XXIII,8. concoquitis *Br* conquitis *h sol.* 24. commoda *Br* comoda *h* XXIV,4. Mallem *Br* Malem *h* 9. abiice *Br* abice *h* XXV,2. innula *Br sol.* inula *h sol.* moricula *Br* morecula *h sol.* 5. aues *Br* alios *marg. h* 13. Deprehensa *Br* Deprensa *h* XXVII,3. postumie *Br.* posthumiae *h* XXVIII, 10. Tota *Br* Tosta *h sol.* XXIX,4. cum te et *Br* qum te et *h sol.* XXX,10. Vento *Br* Ventos *h* 12. facti *Br* facta *h* XXXI, 14. cachinnorum *Br* cachinorum *h* XXXII,1. ipsitilla *Br sol.* ipsithilla *h sol.* XXXIII,2. Vibenni *Br* Vibeni *h* XXXV,10. iniciens *Br* initiens *h* 13. ellegit *Br* elegit *h* 15. interiorem *Br* interiores *h* XXXVII,1. [f]Allax *Br* Falax *h sol.* 5. hyrcos *Br* hircos *h* 6. quid *Br sol.* qui *h sol.* XXXIX,11. et thuscus *Br sol.* et tuscus *h sol.* 12. lamininus (*marg.* flaminus) *Br sol.* flaminus *h sol.* 17. celtiber celtiberia *Br* celtiber in celtiberia *h* XLI,1. A me an a *Br* A me an *h* XLII,4. reddituram *Br* redituram *h* 6. Persequamur *Br* Prosequamur *h* 8. incedere *Br* incidere *h sol.* XLIII,6. prouincia *Br* prouintia *h* 8. insipiens *Br* inscipiens *h* XLIV,8. immerenti *Br* imerenti *h* 15. ocio *Br* otio *h* 18. nefaria *Br* nepharia *h* XLV,14. uni *Br* uno *h* 18. Dexteram *Br* Dextram *h* 21. Unus *Br sol.* Unum *h* 24. delicias *Br* delitias *h*

XLVII,3. nerraniolo *Br sol.* neraniolo *h* XLVIII,1. Mellitos *Br* Melitos *h* L,8. laceni *Br* laceti *h* LII,2. curruli *Br* currulli *h* LV,(4ª). rhesi *Br* resi *h* 17. Nunc *Br* Num *h* 20. loquela *Br* loquella *h* 22. Tum *Br* Tu *h* LVI,7. rigida mea *Br* mea rigida *h* LVII,7. erruditili *Br* eruditili *h* LX,3. mente *Br* monte *h* tetra (*marg.* cetra) *Br sol.* cetra *h sol.* LXI,1. helliconii *Br sol.* heliconii *h sol.* 40. *Manca questo verso in h* (*la lezione è* O hymenee hymen *in Br*) 49, 50. *Tra questi due vv. in Br non leggesi* Compararier " *quod correctum est in h* " (Ellis) 50. O hymenee hymen *Br* hymen o hymenee *h* 56. iuueni *Br* iuuem *h* 60. *Manca il v. in Br* 62. Fama *Br* Phama *h* 66–70. *Mancano in h* 120. Fessennina *Br sol.* Fesscemina *h sol.* 139. licent *Br* liceret *h sol.* 145. patet *con un punto sotto ed una* e *sopra* a *Br* patet *h* 146. Ne *Br* Ni *h* 155. annilis etas *Br* anilis aetas *h* 193. rememorare *Br* remorare *h* 222. thelamaco *Br* telamaco *h sol.* 225. boltiei *marg.* bonci (*opp.* bonti?) *Br sol.* boltiei *marg.* bona *h sol.* LXII,15. dimisimus *Br* diuisimus *corr. in* dimisimus *con* m *scritta sopra la prima* u *h sol.* 30. hora *Br* urbe *marg.* hora *h* 37. quam *Br* quem *h* 39. ortus *con un punto sotto la seconda asta di* u *Br sol.* ortis *h* 55. coluere *con* ac *sovrapposto a* c *Br* coluere *h* 56. dum intacta manet *Br* dum inculta manet *marg.* intacta *h* 57. connubium *Br* coniugium *h* 63. Tercia *Br* Tertia *h* patri data (*om.* est) *Br* patri data est *h* LXIII,18. here citatis *marg.* excitatis *Br sol.* aere citatis *h sol.* 64. gynnasii *Br* gymnasii *h* 71. colibus *Br sol.* collibus *h sol.* LXIV,20. Cum *Br* Qum *h* 29. thethis *Br* neptis *h sol.* 35. phyotica *con* pthi *sovrapposto a* phy *Br* pthiotica *h* 36. Gramnonisque *Br* Graninonisque *h* 63. mitram *Br* crinem *marg.* mitram *h* 65. strophio *Br* straphyo *h* 69. te *om. h* 71. exterminauit *Br sol.* externauit *h* 89. Quales *Br* Qualis *h* 90. producit *Br* producit *con* ed *sovrapp. a* od *h* 97. Qualib; *Br* Qualibet *h* 100. expalluit *Br* expaluit *h* 125. Clarisonas *Br* Clarissonas *h* 141. connubia *Br* conubia *h* 146. nihil *Br* nil *h* 149. ego te *Br* te ego *h* 153. incacta *B.pr.m.* (*la stessa mano corresse* c *in* t) intacta *h con* Ω 156. caribdis *Br* carybdis *h* 158. connubia *Br* conubia *h* 192. uindice (uĩdice) *Br* uīde *h* 210. sustollens *Br* sustolens *h* 211. erreptum *Br* ereptum *h* 212. moenico *Br* moenia *h* 259. cistis *Br* cistis *con* e *sovrapp. alla prima* i *h* 285. ut *om. h* 286. cingunt *Br* tegunt *h* 298. natisque *marg.* gnatis *Br* gnatisque *h* 300. idri *Br* hydri *h* 301. Palea *con* e *soprascritto al primo* a *Br* Palea *h* 304. multiplici constructe sunt *Br* sunt multiplici constructae *h* 320. Hec *Br* Hae *h sol.* 342. *Il secondo* currite *è stato om. davanti a* fusi *h* 363. excelso *Br* aduerso *marg.* excelso *h*

368. polixenia *Br* polisenia *h* 397. nefando *Br* nephando *h* 401. primeui *Br* primeuo *con una* i *soprascritta all'*o *h* funera *Br* funera *con* e *scritta sull'*a *h* LXV, 7. letheo *con* r *soprascritta all'* l *Br* rheteo *h sol.* 14. Baddas *Br sol.* Baiulas *h* assumpti *Br* asumpti *h sol.* 18. Effluxisse *Br* Efluxisse *h* LXVI, 2. habitus *Br* abitus *h* 4. sidera *Br* sydera *h* 12. sedes *marg.* fines *Br* fines *h* 24. tunc *Br* nunc *h* 28. quod *Br* quo *h* 41. adiuraret *Br* adiurarit *h sol.* 57. ziphiritis *Br* ziphiricis *h* 59. Hi dii neu ibi *Br sol.* Ni dii neu ibi *h sol.* 68. nix *Br* uis *h* 70. tethi *soprascr.* tecti *Br* theti *h* 71. ra͡nusia *Br* ranusia *h* 72. nullo *Br* ullo *h* 74. uestre *marg.* uere *Br* uere *h* euolue *Br* euoluere *h* 82. libet *con* b *sovrapp. a* l *Br* bibet *h* (*con Burneianus 133*) 92. effice *Br* efflue *h* LXVII, 11. a me *om. h* 14. culpa tua est *Br* tua culpa est *h* 17. Quid *Br* Qui *h* LXVIII, 1. [q]Vod *Br* Quid *h* 10. et *om. h* hinc *Br* huic *h* 11. mali *Br* manli *h* 29. tepefacit *Br* tepefecit *h* 39. utriusque *Br* (*con* Ω) uirtusque *h solo.* 42. Inuenit *marg.* iuuerit *Br* Inuenit *h* (*con O sol.*) 46-49. *Dopo il v.* 46 *non v'è nessun intervallo in Br che, come gli altri codici, dopo il v.* 49 *inserisce il v.* 16 *del medesimo carme in questa forma*: Iocundum cum etas florida uer (*così anche h,a,P*) ageret. 54. manlia *Br* maulia *h* (manlia *con* u *soprascritto a* n *Vic.*) 61. in sudore *Br* in subdoie *h* 63. uentis *punteggiato* (uentis) *prima di* nautis *Br* 71. tuto *Br* (*con P, Burn. 133*) lento *h sol.* 74. Prothesilaeam *Br* Prothesileam *h* 75. nondum *Br* nundum *h* 80. amisso *Br* comisso *h sol.* laudomia *Br* laodomia *h* uiro *Br* uirgo *h* 84. ut innupto *Br sol.* abinnupto *h* (*con O sol.*) 86. iliacos *Br* illiacos *h* 89. sepulcrum *Br* sepulchrum *h* 101. defertur undique *Br sol.* fertur undique *h* 103. Nec *Br* Hec *h* 109. graii *Br* grai *h* 114. Pertulit *Br* Perculit *h* 115. feretur *con* t *soprascr. a* f *Br* teretur *h* 121. auitis *Br* aiutis *h* 124. Seu sitata *invece di* Suscitata *Br sol.* Seu suscitata *h sol.* cano *om. h* 131. paulo *Br* paruo *h* 139. quotidiana *Br* quottidiana *h* 147. nimis *invece di* unis *Br* *h* ininis? LXIX, 8. qui cum *Br* cui cum *h* LXXI, 1. hircus *Br* hyrcus *h* LXXII, 3. Dilexi *Br* Dillexi *h* LXXIV, 3. ipsam *con* u *scritta sopra all'*a *dalla stessa mano Br* ipsum *h sol.* LXXVI, 5. manent *Br* manenti *h* longa *om. h* 10. excrucies *Br* excruties *h* 25. hunc *om. h* LXXVII, 2. imo *Br* uno *h* 3. subrepti *Br* surrepti *h* 5. te heu *Br* heu *h* LXXIX, 1. ꝗdm ꝗ, *Br* quid ni quem *h* LXXXII, 2. aliud *Br* aliquid *h* 4. quid *Br* quod *h* LXXXIII, 3. nihil *invece di* nostri *Br sol.* non *h sol.* 5. res *om. h* 6. loquitur *Br* obloquitur *h* LXXXIV, 1. Commoda *Br* Comoda *h* 2. insidias *marg.* anus infida h' *Br* insidias *h* LXXXVIII, 5. thethis *Br* thetis *h* XC, 1. nefando *Br* nephando *h* XCV, 2.

hiemem *Br* hymen *h* XCVI,4. amicitias *Br* amicicias *h* XCVII,1. quicquid *Br* quicquid *marg.* quicquam *h* C.6. amicitia *Br* amicicia *h* CII,4. esse puta *Br* puta esse *h sol.* CIV,4. cum tapone *Br* cuncta pone *h* CV,2. eiiciunt *Br* eiciunt *h* CVI,1. obelio *Br* oebelio *h* qui *Br* quid *h* CVII,1. cupido optantique *Br* cupido optantique cupido *h* CIX,1. amorem (amorē) *Br* amore *h* 6. amicitiae *Br* amiciciae *h* CXIII,2. Mecilia *Br* Metilia *h* 3. milia *Br* millia *h* CXV,4. possederat *corr. da* possiderat *Br* possiderat *h* (*con O sol.*) CXVI,5. Hunc *Br* Nunc *h* 8. Afflissus *Br* (*cfr.* Afflixus *M*) *Br* Affixus *h* (1).

(1) Tanto l'elenco delle concordanze di *Br,h* quanto quello delle differenze fra loro e, parimente, la lista della varia loro consonanza con altri codd. non possono dirsi completi, perchè ho ritenuto prudente tener conto delle lezioni di *h* soltanto quando *h* è espressamente citato dall'Ellis. Perciò un buon numero di lezioni di *Br* resta senza confronto, non avendo io la p r o v a p r o v a t a della loro rispondenza alle lezioni di *h*. Così, nonostante la grande probabilità di non errare — data la scrupolosa diligenza dell'Ellis in tal materia — ricavando da altri elementi, come fu osservato, siffatta rispondenza, devo riferirmi al solo *Br* in tutti i casi di mancanza della detta prova. Per averne un'idea più precisa, basterà esaminare la *varia lectio*, che sarà tosto presentata, di alcuni carmi catulliani in rapporto con *Br*. Nel c. I, p. e., troviamo queste lezioni, per le quali manca l'e s p r e s s o confronto con *h*: 2. *Arido* 4. *aliquid tu* 7. *iupiter*. 10. *tibi habe*. Nel c. II si ha: 2. *Qui cum* 6. *Carum .... libet* 7. *solatiolum.* 9. *ludere* 12. *auleolum.* Nel c. III notiamo: 4. *delitie* 7. *Ipsam* 11. *tenebrosum* 12. *Illud* 14. *deuorantis* (che si trova pure in *Harl. 4094*) 16. *bonus. passer ille.* Si comprenderà pertanto che dal presente lavoro comparativo non può risultare per intero la figura di *Br*, sia nelle lezioni buone, sia nelle corrotte e nelle corrette. Fra queste ultime qui cito una sola, della stessa mano e interessantissima, cioè LXIV, 67. *allidebant* (sulla *i* è scritto, non *u*, ma v che si trova adoperato di rado nel cod., p. e. *vno* in c. I, 10). Quale delle due lezioni è propria di *h*?

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 12 Dicembre 1915.

PRESIDENZA DEL SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Panetti e Segre, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Somigliana.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza. Indi i Soci Parona, Guidi, Panetti e Segre (a nome di Somigliana) presentano per la pubblicazione negli *Atti*, rispettivamente, le seguenti Note:

F. Sacco, *Apparati dentali di " Labrodon „ e di " Chrysophrys „ del Pliocene italiano.*

G. Colonnetti, *Elasticità e resistenza degli acciai ad alto tenore di nickel.* Nota II.

C. L. Ricci, *L'equilibramento delle masse rotanti a grande velocità. Il fasometro stroboscopico a ciò destinato.* Nota II.

A. Vergerio, *Sull'equazione integrale di Fredholm di seconda specie.*

LETTURE

Apparati dentali di "Labrodon" e di "Chrysophrys" del Pliocene italiano.

Nota di FEDERICO SACCO.

(Con una tavola).

Mentre è relativamente frequente l'incontro di resti isolati di denti di Pesce fra i terreni terziarii, è invece assai raro il trovarne gli apparati dentali un po' completi. Orbene, siccome i denti variano spesso moltissimo di forma in una stessa specie a seconda della loro posizione, ne deriva che si è talora indotti a creare specie diverse per denti, effettivamente assai diversi, ma che in realtà appartengono ad una sola specie; inoltre talora non si conosce la precisa posizione naturale di certi denti trovati sempre isolati.

È perciò che, avendo avuto la fortuna di venire in possesso di due bei resti dentari di Actinopterigi, parvemi opportuno di brevemente illustrarli, nello stesso tempo accennando anche a qualche resto analogo stato raccolto, più di mezzo secolo fa, dal Capitano Pisani a Pianosa. Quest'ultimo materiale, della già Collezione Pisani, acquistata nel 1861 dal Prof. B. Gastaldi pel Museo della Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Torino e poi ceduta al Museo geologico universitario della stessa città, fu già esaminato, pei resti ittiolitici, dal Prof. O. G. Costa (1863, *Descrizione di alcuni fossili dell'Isola di Pianosa*); potei ora riesaminarlo per gentile concessione dell'amico Prof. C. F. Parona, Direttore di detto Museo universitario, nel quale sono anche conservati gli altri resti ittiolitici qui illustrati, già da me posseduti ed ora naturalmente donati al Museo stesso.

Chrysophrys cincta (Ag.).

(1843, *Sphaerodus cinctus* Ag. — Agassiz, *Poiss. foss.*, p. 214, tav. 73, fig. 68-70).

Questa specie fu stabilita dall'Agassiz sopra alcuni denti isolati del Neogene della Stiria. In seguito denti analoghi furono trovati non raramente in diversi terreni terziarii d'Europa in generale e moltissimi nell'Italia continentale ed insulare, ma sempre isolati; salvo però l'apparato mascellare quasi completo del Pliocene volterrano stato illustrato dal Lawley (1875, *Osservaz. sopra una mascella foss. del gen. " Sphaerodus "*) ed a cui poco dopo il Gervais (1875, *Observ. mach. foss. genr. " Sphaerodus "*, Addit.), riproducendone la figura, credette di poter dare un nuovo nome specifico (*Lawleyi*), ciò che può forse solo accettarsi come distinzione di varietà.

Chr. cincta (Lawl.) var. astensis Sacc.

(Fig. 1[a, b]).

Il fossile in esame proviene dal Pliocene superiore marino di Montegrosso d'Asti ed è rappresentato dal mascellare inferiore sinistro, mancante però della sua parte anteriore, mentre è quasi completa la sua parte posteriore montante. Il suo massimo diametro trasversale è di 34 millim.; il suo sviluppo antero-posteriore, quando completo, doveva essere di circa 13 centim., indicandoci così una forma assai grande rispetto alle attuali viventi.

I *denticini* che giacciono sul montante sono tre, disposti irregolarmente, ed hanno un diametro da 1 a 3 millim.

Si susseguono, disposti in modo alterno abbastanza regolare, i *denti molari*, cioè: *primo posteriore-interno*, piccolo, rotondo, elevato 3 millim., largo 6 millim.; *primo posteriore-esterno*, piccolo, rotondo, alto 5 millim., largo 7 millim.; *secondo posteriore-interno*, subrotondo, alto 11 millim., largo 5 millim.; *primo medio-esterno*, subovale, alto 8 millim., con larghezza massima (antero-posteriore) di 13 millim. e minima (trasversale) di 11 millim.; *primo medio-interno* (il maggiore), subrotondo, alto 7 millim., largo 16 millim.; *secondo medio-esterno* irregolarmente rotondeggiante, largo 12 millim., alto 9 millim. e largo circa 14;

secondo medio-interno subrotondo, emisferico, assai elevato, cioè circa 10 millim., largo 12 millim., con anello bruno basale molto alto.

I *molari anteriori* mancano, ma dalle loro impronte basali risulta che erano rotondeggianti e larghi circa 1 centim.

Se paragoniamo questa mandibola con quella del Pliocene volterrano (*Lawleyi*) si constata che vi sono alcune differenze, ma non molto forti e che del resto esistono anche, un po' analoghe, se si confrontano le due mandibole, destra e sinistra, dell'esemplare *Lawleyi*, indicandoci la variabilità della forma e della disposizione dei denti anche in uno stesso individuo.

Ad ogni modo notandosi nella mandibola astese in esame: *a)* una relativa povertà di denti nella sua parte posteriore montante, giacchè ivi manca affatto il piccolo molare posteriore esterno, ed inoltre i denticolini invece di nove o dieci sono appena tre; *b)* una qualche maggiore irregolarità ed un maggior isolamento dei molari medio-posteriori, si può distinguere la forma esaminata come una semplice var. *astensis* della *Chrysophrys cincta* (Ag.).

Astiano. — Montegrosso d'Asti, in terreno giallastro.

Labrodon pavimentatum (Gerv.).

(1857, P. Gervais, " Mém. Acad. Montpellier „. Sect. Sc., vol. III, p. 515, Pl. V, fig. 6).

Questa specie che il Gervais ha stabilita nel 1857 e poco dopo ancor meglio descritta nella " Zool. et Paléont. franç. „, pp. 511 e 512, 1859, fu già incontrata in diversi giacimenti, specialmente pliocenici, del Bacino mediterraneo.

Purtroppo queste placche dentali faringee sono molto variabili, per cui si è spesso tentati di stabilire specie diverse sopra semplici varietà di una stessa specie. Così ha fatto il Cocchi nella sua Memoria sopra una " Nuova famiglia di Pesci labroidi „, 1864, dove vedesi, p. es., proposto un *Pharyngodopilus alsinensis* che non rappresenta assolutamente altro che una semplice varietà del *L. pavimentatum*; può forse dirsi qualcosa di analogo pel *Ph. dilatatus* e pel *Ph. crassus*.

Così pure il Sauvage nella sua " Note sur le genre *Nummopalatus*, etc. „, 1875, istituì numerose specie nuove che credo

dovranno in parte considerarsi solo come varietà di specie già prima stabilite, come p. e. il *Nummopalatus Chantrei*, che è interpretabile come una forma miocenica del *L. pavimentatum*.

Se a queste considerazioni fondate sulle placche faringee inferiori si aggiungono quelle derivanti dall'esame delle due placche faringee superiori, risulta evidente che, allorquando si potrà esaminare e comparare un materiale più completo e più abbondante che non ora, dovrà ridursi di molto il numero delle vere specie di *Labrodon* terziarii.

Labr. pavimentatum Gerv., var. **ligustica** Sacc.

(Fig. 2^a, 2^b).

Si tratta di un quasi completo osso faringeo inferiore assai ben conservato, avente una larghezza massima, trasversale, di circa 70 millim. (mentre la sua placca dentale ha solo una larghezza trasversa di 50 millim.) ed uno sviluppo massimo, antero-posteriore, di circa 29 millim.; la sua altezza è di circa 28 millim.

Le sue branche laterali sono robuste, subarcuate, taglienti verso l'alto, subsulcate verso l'esterno, pianeggianti nella parte infero-posteriore. Inferiormente l'osso è compatto, subrotondo-levigato, quantunque trasversalmente si presenti fibrilloso per sovrapposizione di piccolissime laminette ossee.

Se ora paragoniamo la piastra dentale del faringeo in esame con quella (che è l'unica parte conservata) del *L. pavimentatum* tipico di Montpellier, vi notiamo le seguenti differenze principali:

Forma meno triangolare, più sviluppata trasversalmente; estremità anteriore più individualizzata, meno triangola; bordo basale un po' più rettilineo; i grandi denti molari (della regione media e posteriore) un po' più numerosi e naturalmente un po' diversi e diversamente distribuiti, data la loro grande variabilità da individuo ad individuo; la superficie masticante presenta due leggiere depressioni, una più accentuata mediana o medio-posteriore fra i grandi molari, e due laterali (una per parte) poco spiccate, nella regione dei piccoli dentini subrotondi che sono già parzialmente smussati per l'uso.

Il numero dei denti è di circa 140 piccoli ed una trentina un po' più grandi, fra cui sette oblunghi sul margine posteriore.

Nella parte posteriore della placca faringea i denti appaiono meno numerosi e più irregolarmente disposti; nella loro parte marginale superiore presentano una ondulazione che è in rapporto coll'ondulazione sovraccennata della superficie triturante.

Piacenziano. — Zinola presso Savona, nella marna grigia.

Labrodon multidens (Münst.).

(1846, *Phyllodus multidens.* — Von Münster, " Beiträge zur Petrefacten-Kunde ", parte VII, p. 7, tav. I, fig. 5).

È una specie non rara nel Miocene ed a cui parmi debbasi riferire la forma seguente:

L. multidens, var. **Pisanii** (Costa).

(Fig. 3[a], 3[b]).

1863, *Plinthodus Pisanii* Costa. — O. G. Costa, *Descrizione di alcuni fossili dell'isola Pianosa presso quella d'Elba* (" Atti R. Istituto Incoragg. delle Scienze Nat. di Napoli ", tomo XI, p. 39, tav. II[b], fig. A e B (*tantum*)).

1889, *Nummopalatus pavimentatum* P. Gervais. — Simonelli, *Terreni e fossili di Pianosa nel mar Tirreno* (" Bollettino R. Comit. geol. ital. ", X, p. 212).

La placca faringea inferiore in esame si distingue da quella tipica del Münster pei seguenti caratteri principali:

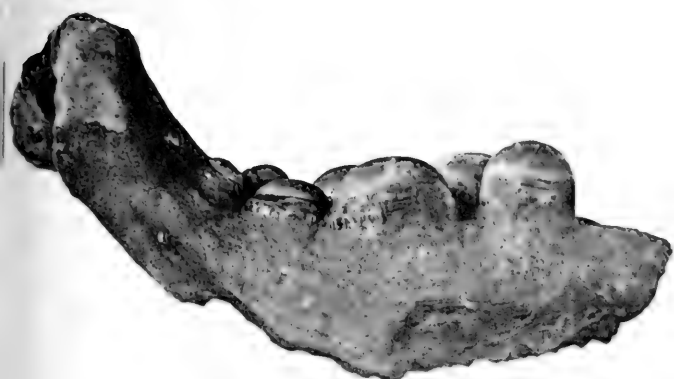
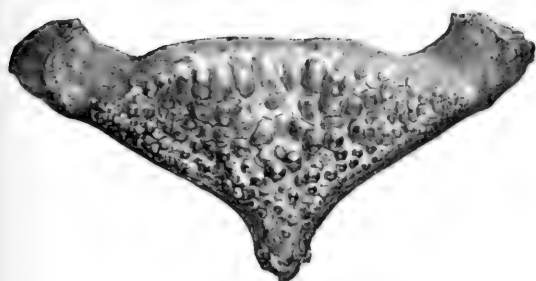
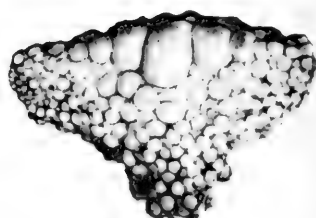
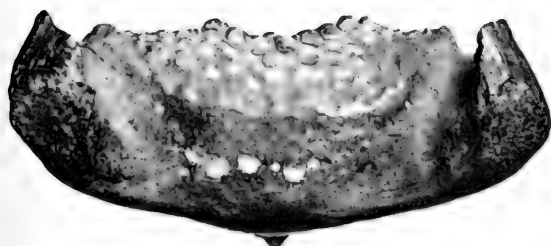
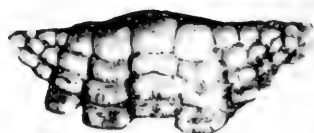
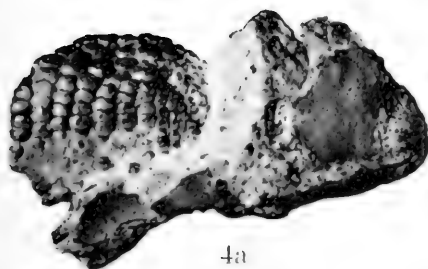
Dimensioni minori, cioè circa 20 millim. di diametro trasversale per 12 millim. di sviluppo antero-posteriore. Forma complessiva meno triangola. Estremità anteriore più prominente. Estremità laterali più allargate, non angolose. Denti più addensati, contigui.

Pliocene (sup.?). — Isola di Pianosa: nel calcare un po' travertinoide, ma essenzialmente organogenico.

Labrodon superbum (Cocchi).

1864, *Pharyngodopilus superbus* Cocc. — Cocconi, *Nuova famiglia di Pesci labroidi*, p. 72, tav. IV, fig. 16 (Firenze, 4°).

L. Malfettani phot.

Officina Fototecnica Ing. G. Molfese. Torino

L. superbum, var. **ex Pisanii** Sacco.

(Fig. 4[a], 4[b]).

1863, *Plintodus Pisanii* Costa. — O. G. Costa, *Descrizione di alcuni fossili dell'isola di Pianosa presso quella dell'Elba* („ R. Ist. Incoragg. alle Sc. Nat. di Napoli „, XI, p. 39, tav. II, fig. 3, A, B, C).

Il nome *Pisanii* dovendo già utilizzarsi come fu sovradescritto per una varietà di *L. multidens*, propongo a sostituirlo il nome *exPisanii*.

Si tratta di una placca faringea superiore sinistra probabilmente di forma affine al *L. superbum*; siccome però il tipo di quest'ultima specie è rappresentato da una placca faringea inferiore, non riesce sicura l'identificazione specifica delle placche inferiori. Il Cocchi riferì al suo *Ph. superbus* varie placche faringee superiori analoghe a quella in esame (tav. V, fig. 6[a, b], 7 e tav. VI, fig. 7, 8), ma propose pure il nome di *Ph. Soldanii* per forme un po' simili e che paiono identificabili specificamente col *L. superbum*.

Pliocene (sup.). — Isola di Pianosa (*ut supra*).

Nella Collezione Pisani, conservata ora nel Museo geologico dell'Università di Torino, sonvi molti altri resti di placche faringee di *Labrodon* (specialmente del *L. superbum*) provenienti da Pianosa; ma, essendo incompleti, sembra più opportuno attendere a descriverli quando si potrà avere sottomano più copioso materiale, per non complicare ulteriormente uno studio che fu reso forse già troppo complesso da troppe denominazioni specifiche.

Elasticità e resistenza degli acciai ad alto tenore di nickel.

Nota II di GUSTAVO COLONNETTI

(Con una Tavola).

Nel riprendere la descrizione delle caratteristiche proprie degli acciai al nickel, mi restano da illustrare quelle tra le mie esperienze che hanno avuto per iscopo di precisare la legge di dipendenza delle deformazioni piccolissime dalle forze che le producono.

Come ho già accennato nella Nota precedente, non è la prima volta che si istituiscono ricerche intese alla determinazione del modulo di elasticità delle leghe di ferro e nickel. Già si sapeva da tempo che questo modulo varia sensibilmente colla composizione della lega, assumendo valori sempre inferiori a quelli che spettano ai due metalli costituenti presi allo stato puro. Si sapeva anche che il minimo valore del modulo si verifica presso a poco per quelle medesime leghe che presentano il minimo coefficiente di dilatazione termica.

Ma i risultati citati dai varii Autori, anche i più recenti, sono assai discordanti fra loro. La grande variabilità che il modulo di questi materiali presenta dipendentemente dall'intensità del carico a cui si sperimenta, variabilità che ho già annunciata e che metterò qui in luce in tutta la sua importanza, può far pensare che i valori medii ottenuti dai varii sperimentatori differiscano a volte soltanto per i diversi limiti di carico da essi adottati; ma le esperienze in discorso sono in genere così scarsamente documentate che riesce difficile precisare con sicurezza quale può essere stata la causa delle discordanze.

Del resto il problema di cui io ho inteso occuparmi è in un certo senso assai più limitato: io non mi sono proposto di

tracciare le curve delle variazioni dei moduli al variare della composizione chimica, ma soltanto di precisare il comportamento elastico di quei pochi tipi di acciai che più frequentemente trovano impiego nelle applicazioni tecniche.

Lasciando dunque da parte le leghe che vengono utilizzate soltanto nella costruzione degli strumenti e degli apparecchi speciali, e limitandomi agli acciai descritti nella Nota I, io passerò senz'altro a documentare nel modo più completo le mie esperienze, rappresentandone anche in parte graficamente l'andamento nella Tavola che accompagna questo scritto.

Tale rappresentazione grafica verrà limitata agli acciai quali si presentano dopo ricottura ad 800°: nelle tabelle numeriche però trovansi raccolti anche i risultati delle osservazioni eseguite sugli stessi acciai diversamente trattati, così come si è fatto nella Nota I a proposito delle loro proprietà resistenti.

Le misure di deformazione sono state eseguite per mezzo di un estensimetro tipo Ewing (1) appartenente al Laboratorio sperimentale dei materiali da costruzione della R. Università di Pisa.

Questo apparecchio, costruito in modo veramente inappuntabile dalla " Cambridge Scientific Instrument Company „ permette di apprezzare per lettura diretta mediante microscopio micrometrico $\frac{1}{2000}$ di millimetro.

Le due sezioni che limitano il tronco utile della provetta distano inizialmente tra loro di 200 mm.; di questo tronco si possono pertanto misurare le variazioni di lunghezza con una approssimazione pari ad $\frac{1}{400\,000}$ della lunghezza primitiva.

Una vite micrometrica opportunamente disposta permette di ricondurre il traguardo nell'interno del campo del microscopio quando all'accrescersi della deformazione esso ne fosse uscito.

Si può così con questo apparecchio seguire l'andamento della deformazione assai più a lungo di quanto non lo consentano la maggior parte degli strumenti che posseggono una eguale approssimazione.

(1) Cfr. J. A. Ewing, *The Strength of Materials*, Cambridge, 1899.

Tabella I.

Acciaio al 5 % di nickel, *fucinato e ricotto a 800°.*

Sforzo di trazione N in kgr.	Tensione unitaria $\sigma = \frac{N}{F}$ in kgr/mm²	Allungamento s sulla lunghezza utile $l = 200$ mm. in $\frac{1}{2000}$ mm.	Incremento Δs dell'allungam. per un incremento $\Delta N = 250$ kgr in $\frac{1}{2000}$ mm.	Modulo di elasticità	
				$\frac{\Delta N . l}{F . \Delta s}$ in kgr/mm²	$\frac{N . l}{F . s}$ (valor medio) in kgr/mm²
0	0	0			
			61	20 883	
250	3.18	61			
			61	20 883	
500	6.37	122			
			62	20 546	
750	9.55	184			
			62	20 546	
1000	12.73	246			20 714
			63		
1250	15.92	309			
			63		
1500	19.10	372			
			63		
1750	22.28	435			
			64		
2000	25.46	499			
			64		
2250	28.65	563			
			65		
2500	31.83	628			
			65		
2750	35.01	693			
			65		
3000	38.20	758			
			66		
3250	41.38	824			

Tabella II.

Acciaio al 5 % di nickel, *fucinato, ricotto a 800°, poi temprato a 900° in olio e rinvenuto a 525°.*

Sforzo di trazione N in kgr.	Tensione unitaria $\sigma = \frac{N}{F}$ in kgr/mm²	Allungamento s sulla lunghezza utile $l = 200$ mm. in $\frac{1}{2000}$ mm.	Incremento Δs dell'allungam. per un incremento $\Delta N = 250$ kgr in $\frac{1}{2000}$ mm.	Modulo di elasticità	
				$\frac{\Delta N \cdot l}{F \cdot \Delta s}$ in kgr/mm²	$\frac{N \cdot l}{F \cdot s}$ (valor medio) in kgr/mm²
0	0	0			
			62	20 546	
250	3.18	62			
			62	20 546	
500	6.37	124			
			62	20 546	
750	9.55	186			
			62	20 546	
1000	12.73	248			20 546
			62		
1250	15.92	310			
			63		
1500	19.10	373			
			62		
1750	22.28	435			
			63		
2000	25.46	498			
			63		
2250	28.65	561			
			63		
2500	31.83	624			
			63		
2750	35.01	687			
			63		
3000	38.20	750			
			63		
3250	41.38	813			
			63		
3500	44.56	876			
			63		
3750	47.75	939			
			64		
4000	50.93	1003			

Tabella III.

Acciaio al 12 % di nickel, *fucinato e ricotto a 800°.*

Sforzo di trazione N in kgr.	Tensione unitaria $\sigma = \frac{N}{F}$ in kgr/mm²	Allungamento s sulla lunghezza utile $l = 200$ mm. in $\frac{1}{2000}$ mm.	Incremento Δs dell'allungam. per un incremento $\Delta N = 250$ kgr in $\frac{1}{2000}$ mm.	Modulo di elasticità $\frac{\Delta N \cdot l}{F \cdot \Delta s}$ in kgr/mm²	Modulo di elasticità $\frac{N \cdot l}{F \cdot s}$ (valor medio) in kgr/mm²
0	0	0			
			59	21 580	
250	3.18	59			
			65	19 588	
500	6.37	124			
			67	19 003	
750	9.55	191			
			69	18 462	
1000	12.73	260			19 658
			71		
1250	15.92	331			
			72		
1500	19.10	403			
			75		
1750	22.28	478			
			79		
2000	25.46	557			
			81		
2250	28.65	638			
			85		
2500	31.83	723			
			93		
2750	35.01	816			
			96		
3000	38.20	912			
			100		
3250	41.38	1012			
			110		
3500	44.56	1122			

Tabella IV.

Acciaio al 12 % di nickel, *fucinato, ricotto a 800°, poi nuovamente ricotto in bagno di piombo a 525° per 10 ore.*

Sforzo di trazione N in kgr.	Tensione unitaria $\sigma = \frac{N}{F}$ in kgr/mm²	Allungamento s sulla lunghezza utile $l = 200$ mm. in $\frac{1}{2000}$ mm.	Incremento Δs dell'allungam. per un incremento $\Delta N = 250$ kgr in $\frac{1}{2000}$ mm.	Modulo di elasticità $\frac{\Delta N . l}{F . \Delta s}$ in kgr/mm²	Modulo di elasticità $\frac{N . l}{F . s}$ (valor medio) in kgr/mm²
0	0	0			
			59	21 580	
250	3.18	59			
			61	20 883	
500	6.37	120			
			64	19 904	
750	9.55	184			
			66	19 291	
1000	12.73	250			20 664
			67		
1250	15.92	317			
			67		
1500	19.10	384			
			68		
1750	22.28	452			
			68		
2000	25.46	520			
			68		
2250	28.65	588			
			70		
2500	31.83	658			
			70		
2750	35.01	728			
			70		
3000	38.20	798			
			71		
3250	41.38	869			
			71		
3500	44.56	940			
			74		
3750	47.75	1014			
			75		
4000	50.93	1089			

Tabella V.

Acciaio al 26 % di nickel, *fucinato e ricotto a 800°.*

Sforzo di trazione N in kgr.	Tensione unitaria $\sigma = \frac{N}{F}$ in kgr/mm²	Allungamento s sulla lunghezza utile $l = 200$ mm. in $\frac{1}{2000}$ mm.	Incremento Δs dell'allungam. per un incremento $\Delta N = +250$ kgr in $\frac{1}{2000}$ mm.	Modulo di elasticità $\frac{\Delta N \cdot l}{F \cdot \Delta s}$ in kgr/mm²	Modulo di elasticità $\frac{N \cdot l}{F \cdot s}$ (valor medio) in kgr/mm²
0	0	0			
			63	20 220	
250	3.18	63			
			68	18 733	
500	6.37	131			
			70	18 198	
750	9.55	201			
			82	15 535	
1000	12.73	283			18 171
			157		
1250	15.92	440			
			592		
1500	19.10	1032			
			— 68		
1250	15.92	964			
			— 69		
1000	12.73	895			
			— 69		
750	9.55	826			
			— 71		
500	6.37	755			
			— 72		
250	3.18	683			
			— 76		
0	0	607			
			64	19 904	
250	3.18	671			
			69	18 462	
500	6.37	740			
			70	18 198	
750	9.55	810			
			70	18 198	
1000	12.73	880			18 690
			72		
1250	15.92	952			
			80		
1500	19.10	1032			

Come si vede, già nella proporzione del 5 % il nickel basta a determinare una variabilità del modulo di elasticità sensibile nel materiale allo stato ricotto; però per effetto della tempera il modulo decresce leggermente per carichi molto bassi, mentre si alza notevolmente per carichi maggiori: si ottiene così un comportamento praticamente conforme alla classica legge di Hooke.

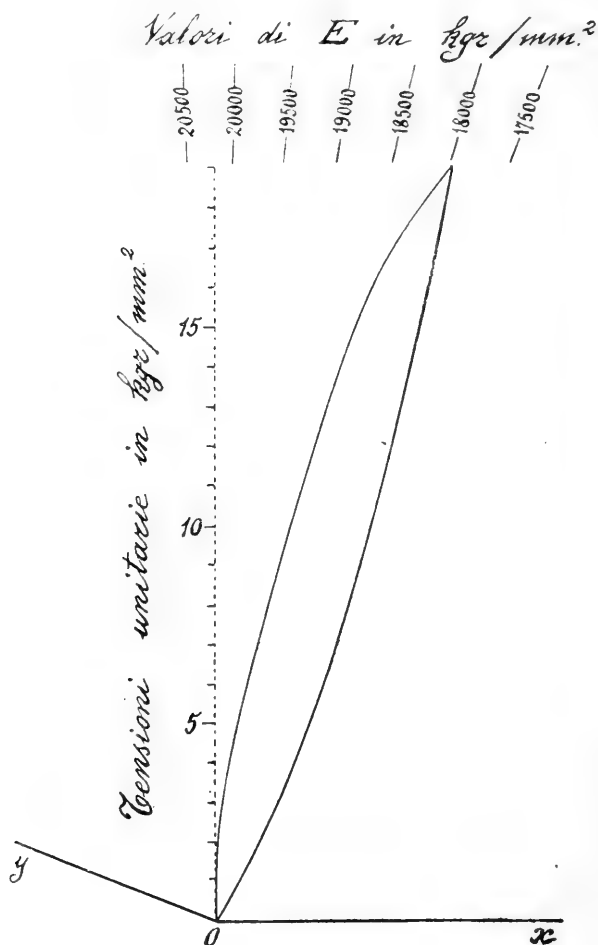
La variabilità del modulo diviene ben netta ed evidente nell'acciaio al 12 % di nickel: le deformazioni crescono sempre più rapidamente quando cresce il carico, in modo che non è più assolutamente possibile parlare qui di limite di proporzionalità.

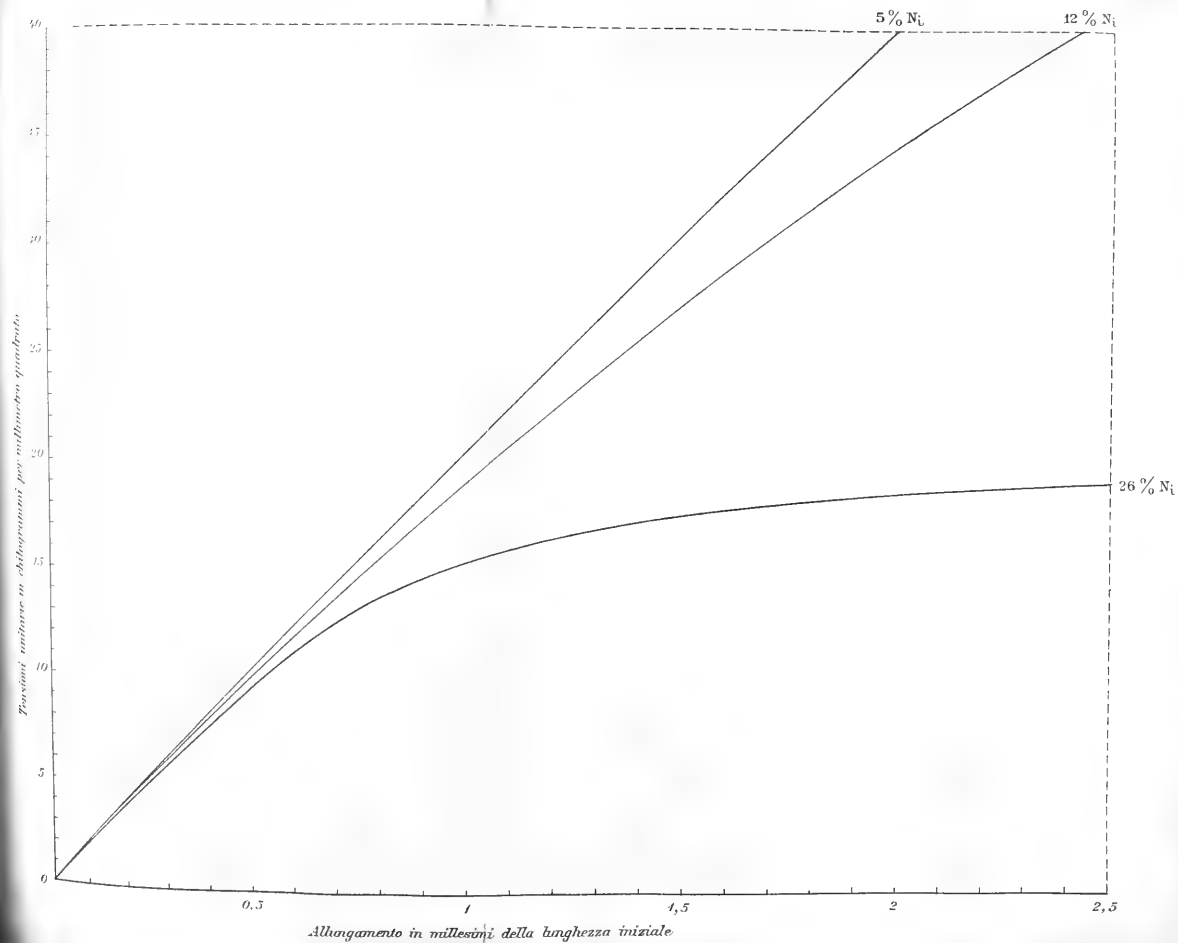
È notevole il fatto, da numerose riprove costantemente confermatomi, che una specie di incrudimento, cioè di innalzamento del valor medio del modulo, si ottiene proprio per mezzo di quella certa ricottura molto prolungata sui 525° che nella Nota I si è indicata come l'unica capace di ridurre la resistenza e la durezza proprie del materiale. Tale incrudimento non può poi distruggersi se non mediante una ricottura spinta al di sopra della temperatura di trasformazione al riscaldamento, ricottura la quale, s'intende, restituirà però al materiale la durezza e la resistenza primitive.

Finalmente nel comportamento dell'acciaio al 26 % di nickel hanno un'influenza, non trascurabile neppure per sollecitazioni molto limitate, le deformazioni permanenti che immancabilmente le accompagnano. Il processo di incrudimento appare assai nettamente delineato nell'esperienza a cui si riferisce la tabella V; è degno di nota il fatto che, anche ad incrudimento avvenuto, la variabilità del modulo continua a mantenersi notevole ed accompagnata da un'evidentissima irreversibilità dei processi di deformazione. A riprova di ciò ho rappresentato nella figura a pagina seguente, servendomi di un metodo di rappresentazione che ho già utilizzato altre volte [1], il ciclo di deformazione descritto dal saggio su cui io ho sperimentato, al variare del carico da 1500 kgr. a 0, e successivamente da 0 di nuovo fino a 1500 kgr.

---

(1) Cfr. le mie Note intitolate: *Esperienze sull'elasticità a trazione del rame* e *Nuove esperienze sull'elasticità del rame,* pubblicate nei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", serie 5ª, vol. XXIII e XXIV.

L'irreversibilità è qui molto più marcata di quella che si osserva studiando il comportamento elastico del rame: è pertanto da credersi che questo materiale si presterebbe egregiamente per lo studio delle leggi dell'isteresi elastica.

Del resto, anche prescindendo dall'interesse che queste leggi possono presentare pel fisico, e mettendosi dal punto di vista puramente tecnico dell'ingegnere, appare ben chiaro da quanto son venuto esponendo che l'influenza del diverso tenore di nickel

COLONNETTI G. - Elasticità e resistenza degli acciai ecc. - *Nota II.*
Atti R. Accad. delle Sc. di Torino - *Vol. LI*
5 % Ni
12 % Ni
26 % Ni
Tensioni unitarie in chilogrammi per millimetro quadrato
40
30
25
20
15
10
5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
Allungamento in millesimi della lunghezza iniziale
Lit Salussolia Torino

negli acciai speciali non si limita a quelle sole caratteristiche che si possono determinare mediante un'ordinaria prova a rottura per trazione, ma si manifesta anche nell'ambito delle deformazioni piccolissime che il materiale subisce quando è sollecitato da forze esterne, siano pure esse di intensità convenientemente limitata.

Di questa influenza si dovrà dunque tener conto nella scelta del materiale più adatto in ogni singola applicazione, non soltanto per ciò che si riferisce alla determinazione del carico di sicurezza, ma anche e sopratutto perchè da essa dipende il comportamento del materiale durante l'uso.

È pertanto da augurarsi che lo studio delle proprietà elastiche degli acciai speciali, sia nei riguardi della loro dipendenza dai singoli componenti, sia per ciò che concerne l'influenza dei trattamenti meccanici e termici, riceva in avvenire quello sviluppo che solo può dare una base veramente razionale all'uso che di questi materiali si va facendo sempre più diffusamente nella fabbricazione degli organi più delicati e vitali così delle costruzioni come delle macchine.

L'equilibramento delle masse rotanti a grande velocità.
Il "fasometro stroboscopico" a ciò destinato.

Nota IIª del Dr. Ing. CARLO LUIGI RICCI

(con 2 tavole).

Proseguendo lo studio iniziato nella 1ª nota dallo stesso titolo, nella quale si trattò del moto forzato di una massa rotante montata sopra un apparecchio equilibratore, passeremo ora ad esporre come dallo studio di tale moto forzato si possa ricavare l'analisi delle azioni perturbatrici, e le indicazioni dei mezzi per correggerle od eliminarle. Esporrò poi la descrizione e l'uso di un apparecchio stroboscopico che può servire bene a questo scopo.

Capitolo II.

Analisi e correzione delle masse perturbatrici.

§ 1. — Lo studio delle oscillazioni forzate, di cui si parla nella nota 1ª, può servire ad analizzare il *sistema delle forze momenti statici* degli elementi della massa rotante rispetto all'asse di rotazione: infatti questo sistema di forze (normali ed incidenti all'asse x) si può sempre scomporre in due componenti B_1 e B_2 (normali all'asse ed in generale sghembe) passanti per i punti nodali N_1 ed N_2 rispettivamente. Studiando il moto forzato, da ciascuna di queste eccitato, possiamo determinare queste componenti, e precisamente di ognuna possiamo trovare la direzione e l'intensità.

Occorre per questo un mezzo sperimentale che permetta di ricavare la fase del moto forzato in un punto generico dell'asse x, ossia l'orientazione, rispetto alla massa rotante del vettore-spostamento massimo; in altri termini l'angolo φ che

questo forma con un raggio normale all'asse x scelto come riferimento.

Descriveremo in appresso alcuni mezzi sperimentali atti all'uopo. Abbiamo visto più sopra che lo sfasamento α in ritardo del moto forzato rispetto al moto della forza eccitatrice è funzione della pulsazione (o velocità angolare); esso, a parità di altre condizioni, si mantiene lo stesso, se resta costante la velocità angolare.

Sia dunque β la fase della forza eccitatrice $\mathcal{B}$, ossia l'angolo ch'essa forma col raggio scelto come riferimento; faremo un esperimento con una velocità ω prossima a quella di risonanza, e determineremo col mezzo sperimentale suddetto la fase φ del moto oscillatorio; se il verso di rotazione coincide con quello nel quale si contano gli angoli, sarà:

$$\varphi = \beta - \alpha$$

essendo lo sfasamento in ritardo. Ora se facciamo un altro esperimento con velocità angolare uguale alla precedente, ma in verso opposto, si avrà evidentemente:

$$\varphi' = \alpha + \beta$$

e quindi si avrà:

$$\beta = \frac{\varphi + \varphi'}{2},$$

ossia la direzione di $\mathcal{B}$ biseca l'angolo compreso tra i due vettori spostamenti massimi corrispondenti a due rotazioni della massa in versi opposti, ma colla stessa velocità angolare ω, e dal verso positivo di uno di questi vettori si passa al verso positivo di $\mathcal{B}$ percorrendo l'angolo $\alpha\,(< \pi)$ nel senso della rotazione corrispondente.

Ciò conduce al così detto *metodo di Beyer*, citato pure dallo Stodola [1], destinato a determinare la posizione delle masse perturbatrici.

[1] V. loco citato.

Ricavato β si trova subito α, e se nel fare l'esperimento si è pure misurata l'ampiezza S del moto oscillatorio, dalle relazioni più sopra esposte si ottiene:

$$S(C - m\omega^2) = B\omega^2 \cos\alpha$$

da cui:

$$B = \frac{C - m\omega^2}{\omega^2 \cos\alpha} S, \qquad K = \frac{C - m\omega^2}{\omega} \operatorname{tang} \alpha.$$

Si ha modo così, collo stesso esperimento, di determinare oltre che la fase β, anche l'intensità B della forza momento statico eccitatrice, e il coefficiente K di smorzamento.

§ 2. — È ovvio che per raggiungere una buona approssimazione, conviene fare ripetute esperienze a velocità diverse e trovare i valori più probabili di β, B e di K; poichè le equazioni determinatrici sono già risolte rispetto a β, B e K, basterà fare semplicemente la media aritmetica dei rispettivi valori. Se però non si fosse fatta preventivamente la taratura delle molle e lo studio delle proprietà elastiche del sistema, l'accennata serie di esperienze a velocità diverse ci permetterebbe di ricavare anche il valore più probabile della costante elastica C; in tal caso ogni esperienza ci fornisce fra le tre incognite B, C e K le due equazioni:

$$\frac{\omega^2 \cos\alpha}{S} B - C + m\omega^2 = 0,$$

$$\omega K - \operatorname{tang}\alpha \,.\, C + m\omega^2 \operatorname{tang}\alpha = 0.$$

Poichè β è sempre dato direttamente dalla $\beta = \frac{\varphi + \varphi'}{2}$, il suo valore più probabile si ottiene dalla media aritmetica dei valori dati dalle varie esperienze; in conseguenza si possono calcolare i varî valori di $\alpha = \beta - \varphi$, e per n esperienze tra B, C e K si hanno $2n$ equazioni, delle quali i valori delle incognite si possono dedurre col metodo di minimi quadrati (osservazioni mediate).

Si ricavano così le seguenti equazioni normali:

$$B\Sigma\frac{\omega^4\cos^2\alpha}{S^2} - C.\Sigma\frac{\omega^2\cos\alpha}{S} + \Sigma\frac{m\omega^4\cos\alpha}{S} = 0,$$

$$K\Sigma\omega^2 - C\Sigma\omega\,\mathrm{tang}\,\alpha + \Sigma m\omega^3\,\mathrm{tang}\,\alpha = 0,$$

$$B\Sigma\frac{\omega^2\cos\alpha}{S} + K\Sigma\omega\,\mathrm{tang}\,\alpha - C\Sigma(1+\mathrm{tang}^2\alpha) + \\ + \Sigma m\omega^2(1+\mathrm{tang}^2\alpha) = 0.$$

Un analogo calcolo si può fare per ciascuno dei moti oscillatorii proprii intorno ai due punti nodali; si ottengono così, oltre alle intensità B_1 e B_2 ed alle fasi β_1 e β_2 delle due componenti del sistema delle forze-momenti statici rispetto all'asse di rotazione x, anche i coefficienti di smorzamento K_1 e K_2 e le due costanti elastiche C_1 e C_2; le quali si possono pure calcolare direttamente, come abbiamo visto sopra; e si ha così modo di ottenere una verifica di questi valori.

§ 3. — Può presentarsi il caso di cui non sia verificata con sufficiente approssimazione l'indipendenza delle due vibrazioni proprie forzate; ciò succede quando, essendo abbastanza prossime le due pulsazioni di risonanza ω_1 ed ω_2 (1), i due intervalli di risonanza corrispondenti risultino in parte sovrapposti, di modo che le ampiezze delle due vibrazioni forzate possano assumere contemporaneamente valori entrambi apprezzabili e dello stesso ordine di grandezza. In tal caso il moto oscillatorio forzato di un punto dell'asse, è risultante dei due moti proprii intorno ai due punti nodali N_1 ed N_2, e si può rappresentare con un vettore rotante somma geometrica dei due vettori rotanti rappresentativi dei moti semplici. Però ognuno dei due punti nodali N_1 ed N_2 si muove soltanto in virtù dell'oscillazione propria intorno all'altro; in questi punti perciò le due

(1) Si noti che abbiamo $\omega_1 = \omega_2$ quando sia $e_1 i_2 = e_2 i_1$, e ciò equivale ad essere $\rho_i = \rho_e$ com'è facile verificare. Se inoltre coincidono i due baricentri G_e e G_i le due involuzioni d'elasticità e d'inerzia coincidono, ed ogni coppia di questa involuzione gode delle proprietà dei punti nodali.

oscillazioni compaiono separate, e per studiarle separatamente occorre rilevare coll'esperienza le caratteristiche (fase ed ampiezza) dei moti di questi due punti; in corrispondenza di essi dovranno collocarsi quei dispositivi sperimentali che descriveremo più innanzi.

Qualora non fosse possibile realizzare sperimentalmente questa condizione, ma si dovesse investigare coll'esperienza il moto di punti dell'asse x diversi dai punti nodali, si dovrebbe ricorrere ad un'analisi che si presenta numericamente un po' complessa, e che indicheremo per sommi capi limitandoci ad accennare la possibilità di risolvere il problema per questa via.

L'esperienza ci consente dunque di determinare per un dato valore ω gli elementi del moto di un punto M distante di l_{m1} ed l_{m2} dai due punti nodali N_1 ed N_2, di cui indichiamo con l la distanza mutua.

Per il moto oscillatorio intorno ad N_2, i cui elementi sono contrassegnati coll'indice 1, il punto M assume moto caratterizzato dalla fase φ_1 (contata da un riferimento arbitrario) uguale alla fase del moto di N_1 e da un'ampiezza S_{m1} uguale all'ampiezza S_1 del moto di N_1 moltiplicato per il rapporto $\frac{l_{m2}}{l}$; e così per effetto del moto 2, intorno ad N_1, M assume un moto di fase φ_2 e di ampiezza $S_{m2} = S_2 \frac{l_{m1}}{l}$.

Il moto risultante di M avrà un'ampiezza S_m ed una fase ψ_m, le quali ci vengono rivelate direttamente dall'esperienza.

Se ora si fa un'altra esperienza facendo rotare la massa in senso contrario, ma colla stessa velocità angolare ω, si trova M animato da un moto di ampiezza S_m' e di fase ψ_{m1}' risultante dei due moti (S_{m1}, φ_1') ed (S_{m2}, φ_2') dovuti alle oscillazioni proprie intorno ad N_2 ed N_1; le ampiezze sono le stesse di quelle della prima esperienza, poichè la velocità ω è la stessa.

Indichiamo poi ancora con B_1, B_2, β_1, β_2, le componenti per N_1 ed N_2 delle forze momenti statici, e le rispettive fasi contate dall'origine scelta.

Delle quantità qui nominate l'esperienza ci rende note direttamente soltanto S_m, ψ_m, S_m', ψ_m'; le altre sono tutte incognite e ad esse bisogna aggiungere i coefficienti di smorzamento K_1 e K_2.

Riassumendo, le incognite sono:

$$B_1,\ B_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ S_{m1},\ S_{m2},\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_1',\ \varphi_2',\ K_1,\ K_2,$$

in numero di 12.

Tra queste la teoria suesposta stabilisce le seguenti relazioni:

$$S_{m1} = \frac{B_1\,\omega^2}{\sqrt{(C_1 - m_1\,\omega^2)^2 + K_1^2\,\omega^2}}\,\frac{l_2}{l}\,; \quad S_{m2} = \frac{B_2\,\omega^2}{\sqrt{(C_2 - m_2\,\omega^2)^2 + K_2^2\,\omega^2}}\,\frac{l_1}{l}\,;$$

$$\beta_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}\,; \qquad \beta_2 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2}\,.$$

$$\operatorname{tang}(\beta_1 - \varphi_1) = \frac{K_1\,\omega}{C_1 - m_1\,\omega^2}\,; \qquad \operatorname{tang}(\beta_2 - \varphi_2) = \frac{K_2\,\omega}{C_2 - m_2\,\omega^2}\,.$$

Inoltre tra i moti componenti ed i moti risultanti di M stanno le relazioni:

$$S_{m1}\cos\varphi_1 + S_{m2}\cos\varphi_2 = S_m\cos\psi_m\,; \quad S_{m1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_1 + S_{m2}\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 = S_m\,\mathrm{sen}\,\psi_m\,;$$

$$S_{m1}\cos\varphi_1' + S_{m2}\cos\varphi_2' = S_m'\cos\psi_m'\,; \quad S_{m1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_1' + S_{m2}\,\mathrm{sen}\,\varphi_2' = S_m'\,\mathrm{sen}\,\psi_m'\,.$$

Abbiamo quindi soltanto 10 equazioni, che non bastano a determinarci tutte le 12 incognite; si può però fare un'altra esperienza completa, coi due versi di rotazione con un altro valore di ω abbastanza diverso dal primo, per poter avere buona approssimazione, ottenendo nuovi elementi del moto S_m^*, ψ_m^*, S'^*_m, ψ'^*_m; s'introducono così altre 10 equazioni analoghe alle precedenti, ma sono nuove incognite soltanto le 6 seguenti: S_{m1}^*, S_{m2}^*, φ_1^*, φ_2^*, φ'^*_1, φ'^*_2, restando evidentemente gli stessi valori delle B, β e K.

Complessivamente dunque le due esperienze complete con due diversi valori di ω, ciascuna coi due versi di rotazione ci forniscono 20 equazioni tra 18 incognite; il problema è quindi risolubile: e due tra le 20 equazioni risulteranno conseguenza delle altre 18, e potranno fornire una verifica dell'esattezza dei calcoli numerici.

Più semplicemente durante la stessa prima esperienza, mentre si misurano S_m, S_m', ψ_m, ψ_m' si potranno pure misurare gli elementi del moto di un altro punto P dell'asse x distante

di l_{p1} ed l_{p2} dai punti nodali, i quali indicheremo con S_p, S_p', ψ_p, ψ_p': analizzando il moto di P si introducono altre due incognite S_{p1} ed S_{p2}, ampiezze di moti componenti, dovuti alle oscillazioni proprie intorno ad N_2 ed N_1.

Tra queste nuove incognite, le antiche, e le grandezze misurate si hanno le equazioni:

$$S_{p1} = \frac{B_1 \omega^2}{\sqrt{(C_1 - m_1 \omega^2)^2 + K_1 \omega^2}} \frac{l_{p2}}{l}; \quad S_{p2} = \frac{B_2 \omega^2}{\sqrt{(C_2 - m_2 \omega^2)^2 + K_2 \omega^2}} \frac{l_{p1}}{l};$$

$$S_{p1} \cos\varphi_1 + S_{p2} \cos\varphi_2 = S_p \cos\psi_p; \quad S_{p1} \operatorname{sen}\varphi_1 + S_{p2} \operatorname{sen}\varphi_2 = S_p \operatorname{sen}\psi_p;$$

$$S_{p1} \cos\varphi_1' + S_{p2} \cos\varphi_2' = S_p' \cos\psi_p'; \quad S_{p1} \operatorname{sen}\varphi_1' + S_{p2} \operatorname{sen}\varphi_2' = S_p' \operatorname{sen}\psi_p'.$$

Perciò in complesso lo studio del moto di M e di P ci fornisce 16 equazioni tra 14 incognite; il problema è risolubile; e 2 tra le equazioni saranno conseguenza delle altre 14, servendo di verifica numerica.

Si potrà anche qui fare una serie di esperienze e compensare i risultati secondo i dettami della teoria degli errori. Questo costituisce, per così dire, *la generalizzazione del metodo di Beyer*.

Non ostante la forma semplice di alcune tra le equazioni, che permette di eliminare facilmente talune incognite, questo metodo si presenta, come già dicemmo, piuttosto laborioso; nella pratica conviene perciò mettersi nelle condizioni esposte più sopra per poter studiare separatamente le due oscillazioni semplici; ciò si può ottenere scegliendo convenientemente le molle colle quali si vincolano i sopporti, e, se è possibile variarle, le posizioni dei sopporti stessi sull'asse x; oppure conviene disporre, in corrispondenza dei punti nodali, i mezzi d'investigazione sperimentale del moto oscillatorio.

§ 4. — Questi mezzi, che studieremo tra poco, consentono un'approssimazione molto maggiore per la fase che non per l'ampiezza; specialmente quando questa è molto piccola (ossia quando la massa è già quasi equilibrata). Perciò sarebbe conveniente un metodo di ricerca delle $\mathscr{B}$ che fosse basato sulla misura della sola fase. Nel caso ora citato in cui i due moti oscillatorii intorno ai due punti nodali si possano investigare

separatamente, per ciascuno di essi la lettura della fase φ del moto, coi due versi della rotazione, ci permette di ricavare la fase β della rispettiva componente $\mathcal{B}$ delle forze momenti statici. Si possono così avere con sole letture di fase i due angoli β_1 e β_2 che ci dànno le direzioni delle $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.

Volendo ora determinare l'intensità delle B mediante altre misure di fase, si potrà variare artificialmente il sistema delle forze momenti statici; aggiungendo, togliendo o spostando alcune tra le masse addizionali mobili, che sono unite alla massa rotante, e destinate al suo equilibramento, si potrà introdurre un nuovo e noto sistema di forze momenti statici $\mathcal{B}_0$, le cui componenti in N_1 ed N_2, $\mathcal{B}_{01}$ e $\mathcal{B}_{02}$ abbiano fasi β_{01} e β_{02} ben distinte da quelle β_1 e β_2 del sistema precedente; il sistema complessivo sarà il risultante di $\mathcal{B}$ e di $\mathcal{B}_0$, e lo indicheremo brevemente con $\mathcal{B}^*$. Ulteriori esperienze dinamiche sulle oscillazioni intorno ad N_1 ed N_2 con letture di fase ci possono determinare le fasi $\beta_1{}^*$ e $\beta_2{}^*$ delle componenti $\mathcal{B}_1{}^*$ e $\mathcal{B}_2{}^*$ del sistema $\mathcal{B}^*$. Allora della $\mathcal{B}_1{}^*$ e della $\mathcal{B}_1$ sono date le linee d'azione, della $\mathcal{B}_{01}$ la linea d'azione e l'intensità, risultano quindi determinate con un semplice triangolo di composizione le intensità delle $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_1{}^*$; dovendo la $\mathcal{B}_1{}^*$ essere la risultante delle $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_{01}$; lo stesso si dica per la determinazione delle intensità di $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_2{}^*$. Essendo il sistema $\mathcal{B}_0$ del tutto arbitrario, potrà tornar comodo sceglierlo ridotto ad un'unica forza, cioè ad una sola massa eccentrica; in questo caso sarà $\beta_{01} = \beta_{02}$.

Giova osservare che ad individuare il sistema delle forze momenti statici sono necessari 4 parametri (anzichè 6, poichè dette forze sono normali ed incidenti all'asse x); due di questi sono noti quando siano misurati β_1 e β_2. Possiamo ora immaginare di variare l'involuzione di elasticità, modificando il sistema dei vincoli elastici. Se per esempio nella prima serie di esperienze i due sopporti son vincolati da due coppie di molle di pesi elastici notevolmente diversi, basterà scambiare tra di loro le due coppie di molle per dar luogo ad una involuzione d'elasticità simmetrica della precedente rispetto al punto medio del segmento staccato sull'asse x degli assi delle due coppie di molle. Avremo così una nuova coppia di punti nodali N_1' ed N_2' distinta dalla precedente. Nuove esperienze con lettura di fase, eseguite relativamente alle oscillazioni proprie intorno ai nuovi

punti nodali, ci danno le β_1' e β_2' fasi delle nuove componenti $\mathcal{B}_1'$ e $\mathcal{B}_2'$ del sistema, passanti per i punti N_1' ed N_2'; però dei 4 parametri β_1, β_2, β_1', β_2' tre soli sono indipendenti, ed uno di essi (per esempio β_2') è determinato quando siano noti gli altri tre, come è facile verificare con semplici considerazioni di decomposizione e composizione di forze. Dunque colle letture di fase nelle esperienze relative ai due diversi sistemi di vincoli elastici, vengono determinati 3 dei 4 parametri necessari ad individuare il sistema; d'altra parte, è ovvio che le fasi del moto forzato non devono dipendere dalle intensità delle $\mathcal{B}$, ma solo dalle direzioni e dai mutui rapporti, e quindi con le dette letture di fase, della *diname* costituita dalle forze momenti statici B, verrà determinata la cosidetta *vite* ma non l'intensità: in altri termini, delle componenti $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ vengono determinate le fasi β_1 e β_2 e rapporto $\frac{B_2}{B_1}$, e così per le β_1' β_2' e $\frac{B_2'}{B_1'}$.

§ 5. Uso delle masse addizionali. — Determinata nel modo suesposto l'intensità delle forze momenti statici $\mathcal{B}^*$, con opportuni spostamenti delle masse addizionali si potrà equilibrare completamente la massa rotante, introducendo un nuovo sistema di forze momenti statici *uguale e contrario a* $\mathcal{B}^*$.

Le masse addizionali mobili per lo più sono situate in corrispondenza di due diversi piani normali all'asse x che incontrano questo in due punti che diremo U e V: allora il dato sistema di forze momenti statici da introdurre si scomporrà in due componenti per U e V, ed ognuna delle componenti si realizzerà mediante spostamenti delle masse contenute nel piano relativo. In ciascuno poi di questi piani le masse addizionali di correzione, costituite da blocchetti metallici, sono mobili in apposite scanalature di guida che possono essere radiali ed equidistanti in numero di 3 o più, oppure circonferenziali; nel modello che ci ha servito per questo studio sono realizzate entrambe le disposizioni, come dalla tavola I risulta; nella pratica però è più largamente applicata la seconda, come quella che permette di utilizzare dei piani normali all'asse per U e V, anche una striscia (corona circolare) di limitata larghezza radiale, mentre la prima richiede che siano consentiti alle masse spostamenti radiali di discreta lunghezza.

Vediamo come coll'una o coll'altra disposizione si possano calcolare gli spostamenti da attribuire ai blocchetti per ottenere la corrispondente componente $\mathcal{B}_u$ o $\mathcal{B}_v$ del sistema $\mathcal{B}$. Supponiamo, come quasi sempre si verifica, che i blocchetti abbiano ugual massa; diviso allora il momento (p. e. $\mathcal{B}_u$) per tale massa, si ottiene un segmento che deve essere lo spostamento risultante degli spostamenti da attribuire alle varie masse. Occorre e basta in generale spostare due soli blocchetti; operando con più di due, lo spostamento di uno o più di essi risulta arbitrario.

Nel caso di scanalature radiali basta scomporre lo spostamento risultante δ, considerato come una forza incidente all'asse x, secondo gli assi delle scanalature; il problema risulta determinato se si scelgono solo due tra queste; le componenti trovate sono gli spostamenti che si devono far subire ai varii blocchetti.

Se si ha una scanalatura circonferenziale, col centro sull'asse, lo spostamento δ_i da attribuire ad ogni blocchetto, costituente una corda del cerchio asse della scanalatura, si potrà considerare come somma geometrica degli spostamenti rappresentati da due raggi che vanno dall'origine di δ_i al centro (δ_i'), e dal centro al termine di δ_i (δ_i''). Scelti i blocchetti coi quali si vuole operare, risultano fissate le componenti δ_i', le quali sono i raggi che vanno al baricentro di ciascun blocchetto, e la loro somma *geometrica* $\Sigma\delta_i'$, e quindi la somma geometrica delle δ_i'' $(\Sigma\delta_i'')$ risulta determinata dalla relazione (differenza *geometrica*)

$$\Sigma\delta_i'' = \delta - \Sigma\delta_i'.$$

Le δ_i' devono quindi essere vettori uguali in lunghezza al raggio della circonferenza asse della scanalatura, e tali che la loro somma geometrica risulti quella indicata; naturalmente anche qui il problema è determinato solo se si opera con due soli blocchetti: per ogni blocchetto scelto in più viene introdotto un elemento di arbitrarietà.

Nell'esecuzione pratica della correzione di una massa rotante può convenire, mentre si studia sperimentalmente il moto intorno ad uno dei punti nodali, eliminare subito questo moto forzato, mediante gli spostamenti dei soli blocchetti del sistema U o V più lontano dal detto punto nodale; così il momento sta-

tico è ridotto ad una forza passante per questo stesso punto; facendo poi l'esperienza del moto intorno all'altro punto nodale, occorrerà annullare questo moto coll'introdurre una forza momento statico agente esattamente nel primo punto nodale; ossia bisognerà operare coi blocchetti di entrambi i sistemi attribuendo a questo simultaneamente degli spostamenti tali che le forze momenti statici che ne derivano ammettano risultante passante per il primo punto nodale.

Il metodo basato sulla lettura della fase e sull'introduzione delle forze momenti statici ausiliarie $\mathcal{B}_0$ ha su quello basato sulla deduzione delle $\mathcal{B}$ dall'ampiezza dell'oscillazione, oltre al vantaggio già accennato di una maggiore esattezza, anche quello di evitare dei calcoli numerici, e di poter essere eseguito con sole operazioni grafiche di composizione e decomposizione di segmenti.

§ 6. — La suesposta analisi delle componenti $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ del sistema dei momenti statici $\mathcal{B}$, basata sulle proprietà dei punti nodali, vale, come si è detto, nel caso in cui le reazioni elastiche dei vincoli non ammettano componente secondo l'asse x di rotazione. Si è pure più sopra accennato al caso opposto, meno frequente nelle applicazioni, nel quale il comportamento elastico è rappresentabile con un'ellisse di elasticità, ed il grado di libertà *elastica* del sistema è *tre*; vogliamo qui accennare, solo nelle linee generali, data la minor importanza pratica, al modo con cui si potrebbe condurre l'analisi delle forze momenti statici mediante lo studio del moto forzato, giungendo così alla generalizzazione del metodo suesposto.

Le due antipolarità rispetto al cerchio d'inerzia ed all'ellisse di elasticità ammettono un triangolo autopolare comune, di cui indicheremo con N_1, N_2, N_3 i tre vertici.

Ora è ovvio che le *oscillazioni proprie* del sistema (nel senso che fu attribuito più sopra a questa espressione, analogamente a quanto fece l'Helmholtz nel caso generalissimo) sono le oscillazioni rotatorie intorno ai tre punti ora nominati, i quali per analogia si possono pure qui chiamare *punti nodali*. Ed invero, oscillando il sistema intorno ad uno dei tre punti suddetti, la reazione elastica, e la forza tangenziale d'inerzia alternate avranno entrambe per linea d'azione la congiungente gli altri

due punti (lato opposto del triangolo autopolare), e potranno farsi equilibrio se saranno uguali le intensità dei vettori rotanti che servono a rappresentarle, la quale condizione stabilisce l'ampiezza del moto in conseguenza delle condizioni iniziali.

Anche qui stanno in tutto le condizioni di applicabilità del principio della sovrapposizione lineare dei piccoli movimenti già esposte più sopra, di modo che si può senz'altro affermare che il moto vibratorio libero non smorzato più generale del sistema è la sovrapposizione di tre oscillazioni proprie rotatorie intorno ai tre punti N_1, N_2, N_3, con ampiezze e fasi che dipendono solo dalle condizioni iniziali. Indichiamo con h_1 h_2 h_3 le tre altezze del triangolo (le quali si intersecano nel baricentro G_i, centro del cerchio d'inerzia), i_1 i_2 i_3 e_1 e_2 e_3 le rispettive distanze dei lati opposti ad N_1, N_2, N_3, dai centri G_i e G_e; sarà $i_1(h_1 - i_1) = \rho_i$ e due analoghe, e le pulsazioni delle tre oscillazioni proprie saranno:

$$\omega_1 = 1 : \sqrt{\mathfrak{W}\mathfrak{M}\, e_1 (h_1 - i_1)} \qquad \text{e due analoghe.}$$

Pure il moto forzato generale sarà risultante dalla sovrapposizione dei tre moti proprii forzati; ognuno dei moti componenti non viene influenzato dalle forze passanti per il suo centro: quindi data nel piano in cui è mobile il sistema una forza eccitatrice, si potrà scomporre questa in tre componenti agenti secondo i tre lati del triangolo autopolare; ciascuna componente ecciterà un moto oscillatorio intorno al vertice opposto.

Anche qui se si ha lo smorzamento che limiti il campo di risonanza di ogni singolo moto, e se le pulsazioni sono abbastanza diverse perchè i varii campi di risonanza risultino esterni, le tre oscillazioni forzate nell'esperienza compariranno separate e permetteranno di analizzare le varie componenti delle forze eccitatrici. Se il sistema delle $\mathcal{B}$ non ammette una risultante unica, si potrà scomporre in due componenti (sghembe) $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ passanti per due punti M_1 ed M_2 scelti a piacere sull'asse x; ciascuna di queste si scomporrà secondo i tre lati del triangolo, ed ecciterà tre moti forzati; in questo caso, analizzando le forze mediante lo studio sperimentale dei moti forzati, occorre osservare che le forze eccitatrici agenti secondo i tre lati del triangolo si presentano in generale con fasi diverse; ed il vettore

rappresentante ciascuna di esse, è risultante dei vettori rappresentanti le componenti secondo lo stesso lato delle $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.

Ci dispensiamo dall'entrare in particolari sui procedimenti di calcolo che qui si presenterebbero, anche perchè, come già dicemmo, questo caso raramente si riscontra nell'applicazione, e ad esso abbiamo voluto accennare solo perchè ci parve non privo d'interesse il far vedere il fenomeno meccanico sotto un punto di vista più generale.

Si noti che se sull'asse x giace uno degli assi dell'ellisse di elasticità, il triangolo autopolare comune ha un lato in x ed il vertice opposto all'infinito in direzione normale; d'altra parte le forze centrifughe, passando sempre per detto vertice, non possono eccitare moto intorno ad esso, ossia traslazione secondo l'asse x; e quindi agli effetti dei moti forzati prodotti da queste forze siamo ridotti al caso particolare prima trattato, con due soli gradi di libertà elastica.

Capitolo III.

L'apparecchio senza molle.

§ 1. — Mi pare opportuno dire ora brevemente dell'altro apparecchio equilibratore, studiato dall'Appel nella memoria già citata più sopra: esso è basato su un principio alquanto diverso, poichè la massa rotante ed oscillante sotto l'influenza delle azioni perturbatrici, non è soggetta a vincoli elastici, ma è lasciata libera di rotare intorno ad un asse verticale fisso.

Questo apparecchio è particolarmente usato per equilibrare gli assi delle carrozze ferroviarie.

In esso la massa rotante intorno al suo asse x orizzontale è sostenuta da due sopporti solidali ad un telaio girevole intorno ad un asse verticale z fisso, incidente all'asse di rotazione della massa. In corrispondenza di questo asse la massa rotante porta una puleggia (negli assi ferroviarii si utilizza come tale una delle ruote) per mezzo della quale si comunica alla massa il moto rotatorio mediante un tiro di cinghia verticale; se la massa è equilibrata, la sua marcia è tranquilla, e l'asse di rotazione resta immobile; se vi sono invece delle masse pertur-

batrici, la massa rotante, e con essa il telaio, prende ad oscillare intorno all'asse z di sospensione del telaio, con un moto armonico sincrono col moto rotatorio.

§ 2. — L'equazione di questo moto si può stabilire applicando il principio del momento delle quantità di moto, rispetto all'asse di oscillazione z. Trascurando gli attriti, e poichè le tensioni dei due rami della cinghia sono incidenti all'asse di oscillazione, sul sistema non agiscono forze esterne che abbiano momento rispetto all'asse z, perciò la somma dei momenti delle quantità di moto della massa rispetto a questo asse deve essere costante, ed anzi uguale a zero se prima che si mettesse in rotazione la massa, il telaio stava in riposo.

Indichiamo con J il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse z; inoltre, del sistema delle forze momenti statici della massa rotante rispetto all'asse x, consideriamo il vettore momento rispetto al punto O comune agli assi x e z, e chiamiamo $\mathfrak{M}$ la grandezza scalare di questo vettore; in altri termini $\mathfrak{M}$ sia il massimo tra i momenti centrifughi della massa rotante rispetto al piano per O normale all'asse x e ad uno dei piani passanti per l'asse x; sia poi ϑ lo spostamento angolare della massa intorno a z dalla posizione media e contiamo il tempo da un passaggio del vettore $\mathfrak{M}$ per la posizione orizzontale; il citato principio del momento della quantità di moto ci fornisce l'equazione differenziale del moto:

$$J \frac{d\vartheta}{dt} + \mathfrak{M} \omega \cos(\omega t) = 0$$

che integrata ci dà:

$$\vartheta = - \frac{\mathfrak{M}}{J} \operatorname{sen}(\omega t).$$

La costante d'integrazione è zero, poichè per $t = 0$ la velocità angolare assume il massimo valore, e quindi il mobile deve trovarsi nella posizione media dalla quale contiamo gli angoli ϑ, ossia dev'essere $\vartheta = 0$. L'ampiezza dell'oscillazione è $\Theta = - \frac{\mathfrak{M}}{J}$ (indipendente da ω); il moto oscillatorio si può rappresentare con un vettore di lunghezza proporzionale a Θ e rotante colla

massa, il quale ci darà colla sua proiezione sull'asse z il valore istantaneo del vettore rappresentativo della rotazione ϑ. L'equazione del moto ci dice che il vettore rotazione Θ ed il vettore momento centrifugo $\mathfrak{M}$ sono in opposizione di fase; in altri termini, in ogni istante si fanno equilibrio nel sistema le forze d'inerzia tangenziali sviluppate nell'oscillazione ϑ e le forze centrifughe eccitatrici dovute alla rotazione ω.

Se ora vogliamo tener conto delle resistenze al moto, potremo, come nel moto smorzato studiato più sopra, ritenerle proporzionali alla velocità, e così, adottando la rappresentazione vettoriale del moto già usata più sopra, siamo condotti a considerare l'equilibrio tra le forze (o i loro vettori momenti rispetto al punto O) centrifuga, d'inerzia tangenziale, e smorzante.

Fig. 3.

Si trova in tal modo, che il moto oscillatorio è sfasato in *ritardo* rispetto al moto dell'azione centrifuga eccitatrice di un angolo α sempre $> \frac{\pi}{2}$ dato dalla relazione:

$$\operatorname{tang} \alpha = - \frac{K}{J\omega},$$

si ha inoltre in valore assoluto:

$$\Theta = \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{J^2 + \frac{K^2}{\omega^2}}} = \frac{\mathfrak{M} \cos \alpha}{J}.$$

Si ottengono, come dev'essere, le formole già ricavate più sopra per il moto elastico forzato, nelle quali si sia annullata

la costante del vincolo elastico. Conforme a quanto già si vide per il moto elastico forzato, l'ampiezza Θ cresce sempre al crescere della velocità ω, e tende per $\omega = \infty$ al valore ch'essa ha per ogni ω quando manca lo smorzamento.

I procedimenti sperimentali da impiegarsi per dedurre dalle proprietà del moto oscillatorio le caratteristiche del sistema delle forze momenti statici, e per equilibrare la massa, sono perfettamente analoghi a quelli sopra esposti per l'altro apparecchio; e ad essi rimandiamo.

Metodi sperimentali di misura della fase e dell'ampiezza del moto armonico.

Capitolo IV.

Metodi grafici.

§ **1**. — Abbiamo visto nella teoria che la determinazione sperimentale più importante per lo studio delle masse perturbatrici è la fase β di quella componente $\mathcal{B}$ delle forze momenti statici, la quale eccita il moto forzato che si studia; e che per dedurre β col metodo di Beyer occorre misurare la fase φ del moto, ossia l'angolo che il vettore spostamento massimo forma con un piano radiale fisso alla massa. Inoltre occorre misurare l'ampiezza del moto oscillatorio.

Per la misura della fase φ del moto, lo Stodola [1] descrive questo procedimento: si abbia una corona cilindrica solidale colla massa rotante, ed avente per asse quello x di rotazione; si abbia poi una punta scrivente (matita, gesso) situata nel piano orizzontale per l'asse x, di fronte alla detta corona cilindrica (non a contatto). Mentre la massa vibra sincronamente alla rotazione intorno ad x, si avvicini gradatamente la punta alla fascia cilindrica, finchè questa oscillando la tocchi; la

---

[1] Loco citato.

traccia lasciata dalla punta sulla fascia rotante è situata su quel semipiano radiale che passa per la posizione orizzontale dalla parte della punta quando è massimo lo spostamento dalla posizione media, e dalla stessa parte di quel punto dell'asse x che è proiezione normale su questo di detta traccia; tale semipiano contiene il vettore spostamento massimo di cui lo spostamento istantaneo è la proiezione orizzontale; l'angolo che questo semipiano forma con l'origine degli angoli solidale alla massa, è la fase φ del moto della quale si disse più sopra. Però nel realizzare questa disposizione si riscontra qualche causa di errore che può compromettere notevolmente l'esattezza della misura. Anzi tutto le traccie lasciate dalla punta scrivente hanno sempre una lunghezza considerevole; infatti all'istante del contatto tra la punta e la fascia cilindrica, quando cioè si verifica la massima ampiezza dell'oscillazione, la velocità dell'oscillazione si annulla cambiando di segno, mentre la velocità periferica di rotazione della fascia conserva sempre un notevole valore; perciò la piccola deformazione elastica o plastica che necessariamente deve accompagnare il contatto della punta scrivente, perchè questa lasci una traccia visibile, dura per un intervallo di tempo relativamente lungo, essendo prossima a zero la velocità con cui detta deformazione si produce e si annulla; in questo tempo la fascia si sposta sotto la punta colla velocità periferica piuttosto elevata, e quindi la lunghezza della traccia risulta notevole.

Inoltre questa traccia non sarà simmetrica rispetto al piano radiale del massimo spostamento; poichè l'inevitabile consumo della punta scrivente farà sì che il contatto terminerà in un punto più vicino a detto piano che non il punto dove il contatto era cominciato. Mancandoci gli elementi per sottoporre a calcolo queste considerazioni qualitative, i fatti ora accennati producono una notevole incertezza sul valore di φ, incertezza che è tanto più grave quanto più piccola è la velocità (e quindi l'ampiezza) dell'oscillazione.

Per conoscere poi questa ampiezza converrà eseguirne la misura diretta su un punto situato su uno dei sopporti.

§ 2. — Un'altra disposizione per queste misure è la seguente: si ha un disco piano, normale all'asse di rotazione, e

rotante colla massa, contro questo disco durante le oscillazioni della massa si appoggia una punta fissa scrivente, in modo che questa lasci traccia sul disco almeno per un giro di questo: tale traccia è la traiettoria nel moto relativo della punta fissa rispetto al disco rotante ed oscillante.

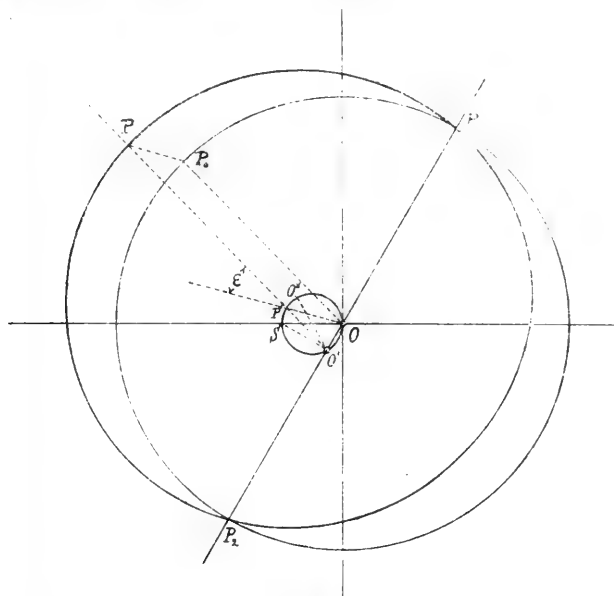



Fig. 4.

Questo moto relativo dell'estremo P della punta si può considerare come risultante del moto di rotazione intorno al centro O del disco (situato sull'asse x), e di un moto armonico sincrono colla rotazione, intorno alla posizione media P_0, su una retta per P_0 facente un angolo costante col raggio vettore OP_0, e perciò rotante insieme con questa intorno ad O (V. fig. 4). Il diagramma polare dello spostamento istantaneo P_0P è notoriamente un cerchio avente per diametro il vettore spostamento massimo S (ampiezza), che noi potremo disporre coll'origine in O. Supponiamo che la minima distanza della punta dalla posizione media dell'asse x sia r e sia inclinata all'orizzontale di un angolo ϵ. Il punto P corrispondente ad una rotazione ϑ intorno ad O, si otterrà dunque conducendo da O una retta inclinata di ϑ sul diametro OS, fino ad incontrare in P' il cerchio, e

infine portando da P' un segmento uguale ad r inclinato alla OP' dell'angolo ϵ; l'altro estremo di questo segmento sarà il punto P cercato. Ed invero, portato OP_0 equipollente a PP', risulterà:

$$P_0P = OP' = OS \cos \vartheta$$

uguale cioè allo spostamento istantaneo che per effetto del moto oscillatorio, in corrispondenza della rotazione ϑ, il punto P assume dalla posizione media P_0 ch'esso assumerebbe per la sola rotazione intorno ad O.

La traiettoria di P è dunque la concoide del cerchio di diametro OS, rispetto al punto O, con distanza costante r *e deviazione* ϵ; essa però si può considerare come concoide dello stesso cerchio, colla stessa distanza costante r, *e senza deviazione*, rispetto al punto O' ulteriore intersezione del cerchio stesso colla retta PP', poichè questa al variare di ϑ ruota appunto ad O'. Si noti che risulta l'angolo $OSO' = \epsilon$. La concoide incontra il cerchio luogo di P_0 in due punti P_1 e P_2 situati sulla congiungente i punti O ed O', che è inclinata di ϵ alla normale ad OS. È facile verificare che se lo spostamento massimo OS è assai piccolo rispetto alla distanza r, detta concoide risulta molto prossima al cerchio di raggio r avente il centro nel punto O'' diametralmente opposto ad O' nel cerchio di diametro OS. In particolare per $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ il punto O' cade in S e quindi O'' va in O; perciò la concoide non differisce sensibilmente dal cerchio luogo di P_0, che la punta descrive se la rotazione non è accompagnata dall'oscillazione. Perchè detta concoide si scosti il più possibile da questo cerchio, conviene fare $\epsilon = O$, ossia situare la punta scrivente sul piano orizzontale per l'asse x. In tal modo le intersezioni P_1 e P_2 della concoide col cerchio luogo di P_0 stanno sulla normale per O al diametro OS; il vettore spostamento massimo è diretto dalla parte del minore dei due raggi vettori della concoide situati sul diametro OS; l'ampiezza risulta uguale al segmento compreso su questo diametro tra la concoide ed il cerchio descritto da P_0.

Per tracciare sperimentalmente la concoide occorre che la punta sia spostabile nella direzione dell'asse x in modo da poter a piacere stabilire o sopprimere il contatto col disco. Si trac-

cierà preventivamente il cerchio P_0 facendo rotare il disco senza oscillazioni; poi per il tracciamento della concoide si accosterà la punta al disco solo quando la massa rotante abbia assunto, a regime, il moto oscillatorio.

Se si fanno due esperienze colla stessa velocità e con versi contrarii, le due concoidi relative si tagliano sulla bisettrice dell'angolo compreso tra i versi positivi dei vettori spostamenti massimi, ossia sulla divisione di B.

I punti P_1 e P_2 vengono però determinati con un'esattezza tanto minore quanto più piccola è l'ampiezza del moto, giacchè con questa diminuisce l'angolo che in ciascuno di detti punti la concoide forma col cerchio.

Capitolo V.

Metodi stroboscopici.

§ **1**. — Inoltre questo metodo e quello prima citato permettono di rilevare il risultato dell'esperienza solo dopo avere arrestato la massa; mentre, data l'importanza delle curve di risonanza e l'opportunità di fare esperienze a diverse velocità per avere una buona approssimazione nella determinazione delle varie grandezze, s'intuisce come possa riuscire molto comodo un sistema che permetta di leggere subito fase ed ampiezza colla macchina in movimento. Ciò anche perchè, essendo, come si vide più sopra, la fase funzione della velocità, e non essendo escluso che il motore che comanda l'apparecchio subisca dei sensibili scarti di velocità nel corso di una stessa esperienza, è bene poter seguire le variazioni istantanee di fase, simultanee alle variazioni di velocità verificate al tachimetro. Questa condizione di lettura istantanea colla macchina in moto può essere soddisfatta se si utilizzano all'uopo i noti fenomeni stroboscopici.

Consideriamo anzitutto sul disco di cui si è testè parlato un punto generico Q segnato in modo ben visibile a distanza r dal centro. Durante il moto rotatorio ed oscillatorio, la traiettoria assoluta di Q per effetto stroboscopico apparirà continua all'occhio di un osservatore che guardi il disco; essa è un'ellisse; e difatti il moto relativo di una punta fissa rispetto al

disco, abbiamo visto essere un moto concoidale; ora è noto nella cinematica che il moto inverso del moto concoidale (qui il moto assoluto del disco) è un moto ellittico.

D'altra parte, se prendiamo come origine degli angoli di fase il raggio OQ, ed indichiamo con φ la fase del moto armonico, ossia l'angolo compreso tra OQ ed il vettore spostamento

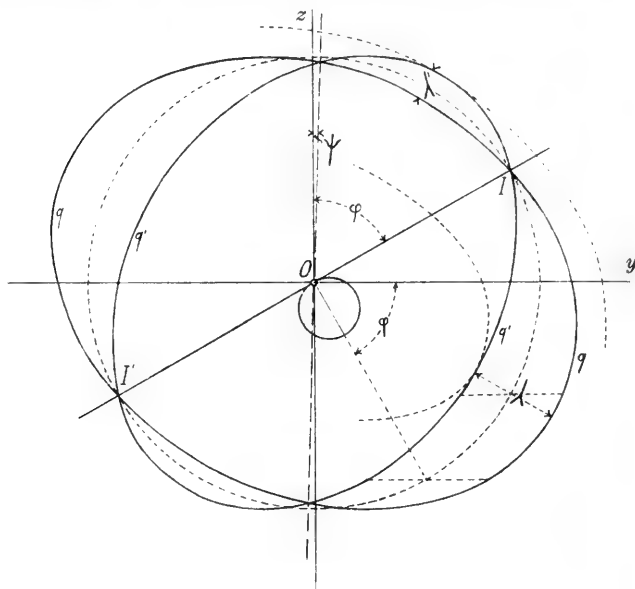



Fig. 5.

massimo (di lunghezza S), avremo che la traiettoria assoluta di Q riferita all'asse y orizzontale, e all'asse z verticale per la posizione media di O (V. fig. 5), e contando i tempi t dal passaggio del raggio OQ per la posizione verticale verso l'alto ossia per la parte positiva dell'asse, è definita dalle equazioni parametriche:

$$y = (r + S\cos\varphi)\operatorname{sen}(\omega t) - S\operatorname{sen}\varphi\cos(\omega t),$$
$$z = r\cos(\omega t),$$

da cui eliminando t si ricava:

$$\left(y + \frac{S\operatorname{sen}\varphi}{r} z\right)^2 + \left(1 + \frac{S\cos\varphi}{r}\right)^2 z^2 = (r + S\cos\varphi)^2,$$

che è appunto l'equazione d'un'ellisse.

Il punto Q' diametralmente opposto di Q, descrive pure un'ellisse di equazioni:

$$y = (r - S\cos\varphi)\,\text{sen}\,(\omega t) + S\,\text{sen}\,\varphi\,\cos(\omega t),$$
$$z = r\cos(\omega t).$$
$$\left(y - \frac{S\,\text{sen}\,\varphi}{r}\,z\right)^2 + \left(1 - \frac{S\cos\varphi}{r}\right)^2 z^2 = (r - S\cos\varphi)^2,$$

contando anche qui i tempi dal passaggio di OQ' per l'asse z positivo.

Queste due ellissi hanno dei punti comuni che corrispondono sull'una e sull'altra a valori del tempo t' e t'' soddisfacenti alle relazioni:

$$y = (r + S\cos\varphi)\,\text{sen}\,(\omega t') - S\,\text{sen}\,\varphi\cos(\omega t') =$$
$$= (r - S\cos\varphi)\,\text{sen}\,(\omega t'') + S\,\text{sen}\,\varphi\cos(\omega t''),$$
$$z = r\cos(\omega t') = r\cos(\omega t'').$$

La seconda è soddisfatta per due sole condizioni:

$$t' = t'' \qquad \text{da cui risulta} \qquad \text{sen}\,(\omega t') = \text{sen}\,(\omega t''),$$

oppure:

$$t' = -t'' \qquad \text{da cui} \qquad \text{sen}\,(\omega t') = -\,\text{sen}\,(\omega t'').$$

Nel primo caso la prima delle precedenti relazioni dà:

$$\text{tang}\,(\omega t') = \text{tang}\,\varphi \qquad \text{da cui} \qquad \omega t' = \varphi \text{ ed } \omega t' = \pi + \varphi$$

a cui corrispondono due punti di intersezione diametralmente opposti I e I' di coordinate:

$$y = r\,\text{sen}\,\varphi \qquad z = r\cos\varphi,$$
$$y = -\,r\,\text{sen}\,\varphi \qquad z = -\,r\cos\varphi.$$

Essi si trovano sul cerchio di raggio r, e corrispondono alle posizioni di spostamento nullo.

Nel secondo caso si ha:

$$y = (r + S\cos\varphi)\,\text{sen}\,(\omega t') - S\,\text{sen}\,\varphi\cos(\omega t') =$$
$$= -(r - S\cos\varphi)\,\text{sen}\,(\omega t') + S\,\text{sen}\,\varphi\cos(\omega t'),$$

da cui si trova:

$$\operatorname{cotang}(\omega t') = \frac{r}{S \operatorname{sen} \varphi}.$$

A questo valore di t' corrispondono altri due punti d'intersezione diametralmente opposti, situati sul diametro che è inclinato sull'asse z dell'angolo ψ che soddisfa alla relazione:

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{S^2}{r^2} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi.$$

Poichè r si può scegliere sempre molto maggiore di S, risulta tang ψ sempre minore di tang φ e perciò $\psi < \varphi$. Quindi quelle intersezioni delle due ellissi che corrispondono alla posizione di spostamento nullo stanno su un diametro inclinato di φ alla verticale z: le altre due intersezioni, che non interessano per la misura, stanno su un diametro che fa con l'asse z verticale un angolo molto minore: si ha così modo di distinguere detti punti e la fase φ si potrà leggere direttamente su apposito goniometro fisso disposto attorno al disco rotante.

§ 2. — Il vettore spostamento massimo si trova su quel diametro del disco rotante che sta verticale quando il diametro QOQ' sta nella posizione IOI': è inoltre facile verificare che detto vettore sta dalla stessa parte di quello dei punti Q e Q' che descrive delle due ellissi quella più estesa nel senso dell'asse y orizzontale.

Occorre quindi che le due ellissi traiettorie dei punti Q e Q' possano essere distinte l'una dall'altra durante il moto; ciò si può ottenere segnando con diversi colori i punti Q e Q', oppure segnando accanto ad uno di questi, per es. Q, sullo stesso raggio un altro punto, del quale durante il moto comparirà la traiettoria, permettendoci così di individuare quella di Q, che avrà un andamento ad essa prossimamente parallelo. L'ampiezza del moto è data evidentemente dalla metà del massimo segmento orizzontale compreso tra le due ellissi: questo segmento si può misurare con lettura diretta sul disco, se si sono segnati sul raggio che passa per Q da ambe le parti di Q, altri punti costituenti una graduazione in mm. coll'origine in Q.

Durante il moto di questi punti dànno luogo ad altrettante traiettorie ellittiche, le quali costituiscono come una scala, sulla quale l'ellisse traiettoria di Q' a guisa di indice individua una lettura, che indicheremo con λ; allora l'ampiezza S del moto è:

$$S = \frac{\lambda}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} .$$

Infatti le due ellissi traiettorie di Q e Q' hanno gli assi che fanno tra loro un angolo sempre molto piccolo, come si può constatare determinandoli p. es. colla costruzione di Chasles, quindi con grande approssimazione la lettura λ si può considerare come il massimo segmento di raggio vettore uscente dal centro e compreso tra le due ellissi; e queste in vicinanza degli estremi di questo segmento λ, i quali sono prossimi ai loro vertici, si possono sostituire molto prossimamente colle linee di equazioni:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 \\ \rho_2 \end{array} \right\} = r \pm S \operatorname{sen} [(\omega t) - \varphi] \operatorname{sen} (\omega t) \qquad [\text{variabile } (\omega t)].$$

I valori massimi di ρ_1 e ρ_2 si hanno per il valore di (ωt) che soddisfa alla relazione:

$$\frac{d\rho_1}{d(\omega t)} = - \frac{d\rho_2}{d(\omega t)} = S \operatorname{sen} [2 \omega t - \varphi] = 0 ,$$

ossia per:

$$\omega t = \frac{\varphi}{2} \qquad \text{e} \qquad \omega t = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} .$$

Il valore che più ci interessa è il secondo, perchè corrisponde ad una lettura λ maggiore e quindi più facile e sicura per esso:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{1m} \\ \rho_{2m} \end{array} \right\} = r \pm S \cos^2 \frac{\varphi}{2} ,$$

da cui si ricava:

$$\rho_{1m} - \rho_{2m} = \lambda \, 2 S \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

cioè la formola su esposta.

Per l'altro valore:

$$\omega t = \frac{\varphi}{2}$$

si ricava:

$$\lambda' = 2 S \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} .$$

Questa λ è la massima larghezza degli altri due tra i quattro segmenti ellittici compresi tra le due traiettorie.

La misura diretta di λ′ sulla scala potrà servire come verifica per la determinazione di S e φ.

Per la nitidezza della visione di questa traiettoria occorrerà che i punti che la descrivono vengano segnati con brevi tratti d'arco circolare estesi per un'ampiezza angolare di circa 15°. Lo sfondo del disco deve essere ben chiaro, e si dovrà illuminare intensamente.

§ 3. Il fasometro stroboscopico a spirale d'Archimede. — Descriverò ora un'altra disposizione sperimentale basata pure su fenomeni stroboscopici, per la quale ho ottenuto recentemente l'attestato di privativa industriale col titolo: *Fasometro stroboscopico a spirale d'Archimede da applicarsi all'apparecchio equilibratore per masse rotanti* (Reg. gen. N° 148978 — N° 130 vol. 449. — 30 giugno 1915).

Si ha un disco circolare d sottile ed opaco (di cartone o lamierino) (V. tav. II) calettato sull'albero della massa rotante, col suo piano normale all'asse x di rotazione, e col suo centro A sullo stesso asse; attraverso il disco è praticata una feritoia a spirale d'Archimede; e precisamente i due bordi della feritoia sono due spirali uguali, dello stesso passo, aventi il polo nel centro A del disco, e rotate l'una rispetto all'altra di un piccolo angolo μ.

Poichè attraverso a questo disco, quando ruota, si devono osservare dei punti oscillanti, che devono apparire fissi per l'effetto stroboscopico, affinchè l'immagine stroboscopica di questi punti risulti nitida, occorre che l'angolo μ sia assai piccolo; infatti l'immagine stroboscopica di un indice traguardato attraverso il disco, apparirà colle dimensioni nel senso del moto, aumentate dello spazio percorso dall'indice stesso mentre la feritoia rotante ne permette la visione; questo spazio raggiunge

il valore massimo μS (ove S è l'ampiezza dell'oscillazione dell'indice), se il punto traguardato passa per la posizione media, poichè allora ha la velocità massima ωS.

D'altra parte si noti che se μ è troppo piccola, l'immagine stroboscopica non è abbastanza chiara. Per conciliare queste esigenze occorre un'intensa illuminazione dell'oggetto osservato. Nelle esperienze fatte sul modello descritto si trovò conveniente illuminare da vicino l'indice con una lampada da 50 candele, e dare alla feritoia l'ampiezza: $\mu = 15^\circ \left(= \frac{\pi}{12}\right)$.

Il passo OH della spirale è diviso in 36 parti uguali; e poichè nella spirale d'Archimede gli spostamenti angolari del raggio vettore sono proporzionali alle sue corrispondenti variazioni di lunghezza, a ciascuna di quelle 36 divisioni corrisponde un angolo di 10°.

I tratti di divisione sono cerchi concentrici col disco, e distinti gli uni dagli altri con diversa grossezza, o con diverso colore; per esempio, si possono far neri marcati i cerchi dividenti i quadranti, neri sottili quelli di 30 in 30 gradi, e rossi gli altri di 10 in 10 gradi. In O si ha l'origine della graduazione.

È utile che la feritoia e la relativa graduazione si prolunghi di un breve tratto (corrispondente a 40°) oltre gli estremi del passo OH, perchè possano comodamente eseguirsi le letture alle estremità della scala $0^\circ \div 360$, che, per fissare le idee, supporremo numerata in senso crescente dai più piccoli cerchi ai più grandi.

Per evitare che il disco abbia a subire eccessive deformazioni fuori del suo piano medio, la feritoia non si farà continua, ma in diversi tratti, per es., quattro di uguale ampiezza angolare, separati da un breve tratto pieno di circa 3°; queste interruzioni della feritoia non hanno influenza sensibile sul fenomeno stroboscopico, per la loro limitata ampiezza.

Il disco si caletterà poi in modo che il raggio AOH che si assume come origine degli angoli stia in un determinato piano assiale della massa rotante.

Durante il moto rotatorio il disco apparirà come trasparente; e se un osservatore traguarda attraverso a questo un indice I collegato con uno dei sopporti, che diremo B, mentre

la massa oscilla con moto armonico sincrono con quello rotatorio, egli vedrà l'indice stesso fermo in quella posizione ch'esso occupa quando la feritoia a spirale lo scopre al suo occhio; tale posizione dipende quindi dal punto in cui la visuale che va all'indice traguardato I, incontra il disco.

Si consideri ora uno schermo s piano normale all'asse x, solidale ad uno dei sopporti, ed affacciato al disco stroboscopico attraverso al quale si traguarda (V. tav. III): per evitare possibili errori di parallasse, occorre anzi che lo schermo sia proprio a contatto col disco rotante; e la faccia dello schermo adiacente al disco non può quindi essere illuminata direttamente che attràverso il disco, e perciò con un'intensità luminosa *media* uguale $\frac{\mu}{2\pi}\left(=\frac{1}{24}\right)$ di quella che illumina la faccia anteriore del disco, mentre per la chiarezza della visione occorre che entrambe dette superficie appaiano ugualmente (o quasi) illuminate. Perciò occorre che lo schermo s sia traslucido (vetro smerigliato, porcellana, celluloide, cartone oliato) e che dalla faccia posteriore non adiacente al disco, esso venga intensamente illuminato da apposita lampada. Sulla faccia anteriore del disco sia segnata bene distinta in nero su fondo bianco una retta verticale i, incidente all'asse x (e coincidente quindi con un diametro del disco rotante).

Durante il moto rotatorio ed oscillatorio della massa, la retta i traguardata attraverso al diametro verticale del disco, appare sotto forma di sinusoide, ossia del diagramma spazî-tempi del moto armonico.

Infatti ogni punto si vede nella posizione ch'esso occupa quando viene scoperto dalla feritoia; ed un punto P dell'immagine ha un'ascissa che, misurata sulla posizione media di equilibrio della retta i (verticale), a partire da un'origine P_0, è proporzionale all'angolo compreso tra i due raggi vettori che dal centro del disco proiettano quei due punti della spirale asse della feritoia che durante la rotazione vengono a coincidere con P_0 e con P rispettivamente; e quindi tale ascissa è proporzionale al tempo che separa i due istanti in cui vengono visti P_0 e P; le ordinate orizzontali poi sono proprio uguali agli spostamenti subìti dai varî punti negli istanti in cui sono osservati. Se invece sullo schermo s si ha una retta verticale

non incidente all'asse x, ma distante da questo di δ, essa durante il moto si vedrà deformata in una curva che si può ottenere dalla precedente sinusoide facendo scorrere ogni suo punto lungo la spirale disposta in modo da contenere il punto stesso, ed attribuendo al punto uno spostamento orizzontale uguale a δ. Si abbia ora pure una seconda feritoia a spirale d'Archimede praticata attraverso al disco, uguale alla prima, e rotata rispetto a questa di 180° intorno al polo. L'osservatore, traguardando attraverso al disco in queste condizioni, vedrà una seconda immagine stroboscopica della retta i sotto forma di una sinusoide uguale alla prima e spostata rispetto a questa lungo l'asse verticale di una lunghezza uguale alla metà del passo OH delle spirali (mezza lunghezza d'onda corrispondente alla rotazione di π della seconda spirale rispetto alla prima).

Le due sinusoidi si tagliano quindi nei punti di spostamento nullo (nodi); l'ampiezza poi dei ventri tra esse compresi è doppia del massimo spostamento.

Questi fenomeni stroboscopici, caratterizzati dalla forma a spirale della feritoia, possono venire utilizzati per la misura della fase e dell'ampiezza del moto armonico.

§ 4. — Col disco ad una sola feritoia (V. tav. II) si traguarda l'indice I segnato su una piastrina riunita mediante viti al sopporto B nel suo piano medio: l'indice è adiacente ad una scala graduata in *mm* tracciata su di un regolo r fisso al basamento; nella posizione media l'indice I coincide col punto di mezzo della scala graduata. Il regolo e l'indice sono intensamente illuminati, come già si disse, da apposita lampada, che lascia in ombra il disco.

L'osservatore traguarderà attraverso al semidiametro verticale superiore del disco, e spostando verticalmente l'occhio, ricercherà un punto di vista dal quale l'immagine stroboscopica dell'indice I gli appaia fissa nella posizione media di equilibrio, coincidente cioè col tratto centrale della scala.

Allora l'immagine di I si proietta sul raggio verticale del disco in un punto P, che individua una lettura angolare sulla scala graduata di cerchi concentrici segnata sul disco.

Percorrendo colla visuale l'intero passo OH della spirale, l'osservatore trova due punti come P (di spostamento nullo),

distanti dalla metà del passo, in modo che le letture fatte in corrispondenza di essi differiscono di 180°. Mentre l'osservatore sposta l'occhio *verso l'alto*, l'immagine stroboscopica di I, in corrispondenza di uno di quei punti di spostamento nullo, si sposta *verso destra*, in corrispondenza dell'altro, *verso sinistra*.

Se la spirale d'Archimede asse della feritoia è *destra* rispetto all'osservatore, la fase φ del moto armonico contata a partire dal raggio AOH (ossia l'angolo compreso tra questo raggio ed il vettore spostamento massimo contato nel verso destrogiro) è uguale alla lettura fatta sul disco in corrispondenza di quel punto di spostamento nullo, per il quale l'osservatore spostando l'occhio *verso l'alto* vede l'immagine di I muoversi *verso sinistra*.

L'opposto si verifica se la spirale è *sinistra*.

Questa regola si giustifica osservando che il moto apparente dell'immagine di I ha lo stesso verso del moto effettivo (proiezione del moto rotatorio del vettore spostamento massimo), se lo spostamento del punto di vista avviene in verso tale che l'osservatore veda successivamente delle posizioni che si susseguano nel periodo nel senso crescente dei tempi, quando cioè il movimento dell'occhio si produce nel senso in cui si muove la retta che dall'indice I proietta un punto della spirale situato sul raggio verticale superiore del disco, mentre questo ruota.

Occorre considerare spirali destra e sinistra, poichè, quando si facciano osservazioni con due dischi disposti alle due estremità dell'albero, sarà bene che le due spirali sui due dischi siano uguali ed ugualmente disposte; e quindi rispetto all'osservatore che traguarda all'uno o all'altro disco dall'esterno l'una spirale apparirà destra, l'altra sinistra.

Uno stesso disco potrà servire nell'una o nell'altra posizione se porterà la graduazione a cerchi concentrici segnata su ambe le fascie.

Dopo aver letto la fase φ, se l'osservatore dispone l'occhio in modo che in corrispondenza della proiezione dell'indice sul semidiametro verticale superiore del disco si faccia una lettura che differisca di 90° dalla fase φ stessa, l'immagine dell'indice I avrà assunto il *massimo spostamento* della posizione media, la cui *ampiezza* si potrà direttamente leggere sulla graduazione del regolo r.

§ 5. — Vediamo ora come si possa utilizzare il disco con due spirali a 180°, più sopra descritto, che permette di ottenere i due diagrammi del moto armonico simmetrici rispetto all'asse dei tempi.

(V. tav. III). Le due feritoie a spirale devono avere differente estensione alle due estremità affinchè l'osservatore possa, per questo carattere, distinguere l'una dall'altra le due sinusoidi dovute alle feritoie stesse. La prima di esse a, alla quale viene riferita la graduazione del disco, sia estesa di circa 40° all'interno del cerchio 0° (origine della graduazione) e di $\sim$ 130° all'esterno del cerchio 360°; la seconda a' invece sia estesa di $\sim$ 130° all'interno del cerchio 0°, e di $\sim$ 40° all'esterno del cerchio 360°.

Così, durante il moto rotatorio accompagnato dall'oscillazione forzata, la sinusoide, immagine stroboscopica della retta i dello schermo s, dovuta alla spirale a, apparirà estesa tra i cerchi — 40° e + 490° (più estesa verso l'alto); mentre quella dovuta alla spirale a' apparirà compresa tra i cerchi — 130° e + 400° (più estesa verso il basso). Supponendo destre le spirali, la fase φ del moto armonico (contata al solito dall'origine degli angoli AOH) sarà la lettura fatta sulla graduazione del disco *in quel modo* dell'immagine stroboscopica completa della retta i, *in cui la sinusoide dovuta alla spirale* a (riferita alla graduazione) *discende da sinistra a destra*; l'opposto naturalmente se le spirali sono sinistre.

Questa regola corrisponde perfettamente a quella data più sopra per la scelta del punto P (di spostamento nullo) nel caso di un disco con una sola spirale.

Allo scopo di misurare l'ampiezza dell'oscillazione, sulla faccia anteriore dello schermo s, accanto alla retta i, e da una sola parte, per esempio a destra, sono tracciate altre rette parallele ad essa, ed equidistanti, di mm. in mm., costituenti una graduazione, per un'estensione un po' maggiore del doppio dell'ampiezza prevista, o consentita dai vincoli della massa; tali rette si possono distinguere tra loro e dalla i per diverse tinte, o diverse grossezze di tratto; p. es.: la i sia più marcata delle altre.

Le immagini stroboscopiche di queste altre rette hanno la forma prossimamente sinusoidale già più sopra descritta.

Durante il moto oscillatorio quei tratti i' dell'immagine di i i quali volgono la convessità a destra, si vedranno proiettarsi su quei tratti delle altre immagini sinusoidali, i quali volgono la convessità verso sinistra, e costituiscono come una scala, e nei punti di spostamento massimo si potrà fare una lettura, su questa scala in corrispondenza della detta immagine i', rappresentante l'indice.

A rigore, data la forma già vista che assumono le immagini delle rette della graduazione, parallele ad i, occorrerebbe considerare la scala costituita dalle tangenti verticali ai suddetti tratti, convessi a sinistra, delle immagini di dette rette: e riguardare come indice la tangente verticale al tratto, convesso a destra, dell'immagine di i. Però, data la piccola ampiezza degli spostamenti massimi, dette curve nei ventri si avvicinano molto alle loro tangenti; inoltre se è piccola l'inclinazione della spirale destra sui cerchi della graduazione, se piccola è pure l'eccentricità δ di una delle rette parallele ad i, situate alla destra di questa, l'immagine di una di tali rette si scosta pochissimo dalla forma sinusoidale dell'immagine di i spostata orizzontalmente di δ, e tale deformazione ha sulla esattezza della misura dell'ampiezza eseguita nel modo suddetto, un'influenza assolutamente trascurabile. Colla spirale sinistra conviene che le rette della graduazione siano segnate alla sinistra di i.

È ovvio che la lettura fatta sulla graduazione è il doppio dell'ampiezza del moto armonico della retta i [1].

§ **6**. — La seconda disposizione dell'apparecchio stroboscopico (colle due spirali nel disco, e collo schermo adiacente al disco), ha sulla prima il vantaggio di mettere sott'occhio all'osservatore il diagramma del moto, permettendo di constatare se questo è eventualmente perturbato da azioni estranee; inoltre di permettere una lettura molto più comoda e spedita; infine, essendo adiacenti schermo e disco, vengono eliminati tutti i possibili errori di parallasse, e la visione dell'indice i e della graduazione del disco richiede lo stesso adattamento visivo; e viene

[1] Nella tavola III è pure disegnata l'immagine stroboscopica delle rette i, per $S = $ mm. 3,0 e $\varphi = 120°$.

così eliminata ogni incertezza di lettura che si può avere quando per osservare l'indice I e la graduazione del disco occorrono due diversi adattamenti, essendo diverse le distanze che superano l'occhio dell'osservatore dall'indice e dal disco.

Già abbiamo enumerati i vantaggi che il metodo stroboscopico presenta sugli altri sistemi; il fasometro qui descritto, colla graduazione divisa di 10 in 10 gradi, consentendo di stimare comodamente la mezza divisione, ci permette facilmente un'approssimazione di circa 5°, la quale non si può certo raggiungere col metodo delle traccie lasciate da una punta su una fascia cilindrica, poichè queste traccie risultano molto estese, come già si disse.

Credo opportuno accennare qui alla possibilità di impiegare utilmente questi metodi stroboscopici in ricerche sulla flessione degli alberi rotanti ad alta velocità (Laval).

APPENDICE

Cenni sulle esperienze eseguite.

La buona approssimazione ottenuta col fasometro ho potuto direttamente constatarla nelle già citate esperienze fatte sul modello esistente nel R. Politecnico di Torino; nelle quali con non più di due tentativi eseguiti, come si disse sopra, coll'introduzione di note perturbazioni mi era dato di equilibrare la massa.

Nel modello suddetto, ognuno dei due sopporti, disposti come si disse più sopra, è sostenuto da un piedestallo, al quale sono riunite le molle, e che è scorrevole su apposite guide praticate nel basamento, in direzione dell'asse x, in modo da poter variare secondo il bisogno la distanza D tra i sopporti (V. tav. I).

La massa rotante da equilibrare, è in questo modello rappresentata da un albero sul quale sono infilati con accoppiamento prismatico e fissabili mediante apposite viti di pressione una puleggia che serve al comando mediante cinghia, e due

dischi laterali. Ciascuno di questi porta sulla faccia rivolta all'esterno (opposta alla puleggia) tre scanalature radiali (a 120°) in ognuna delle quali scorre un blocchetto di ferro infilato a coda di rondine, spostabile con vite di richiamo e fissabile mediante viti di pressione; altri blocchetti si possono far scorrere e fissare lungo una scanalatura circonferenziale nel modo più sopra descritto: anche la puleggia porta una tale scanalatura ad esse circolare coi relativi blocchetti.

Detta massa insieme coi due sopporti pesa Kg. 140,3; a questo peso corrisponde la massa $M = 0{,}143$ (essendo unità di forza il Kg. e di lunghezza il cm.; $g = 981\ ^{cm}/_{s^2}$).

Il momento d'inerzia di massa J rispetto all'asse baricentrico verticale varia colla posizione dei dischi e dei sopporti; nella posizione simmetrica colla quale si fecero le esperienze (coi dischi distanti di cm. 58,5 tra le faccie interne, ed i rapporti distanti di 89 cm. tra gli assi) il momento d'inerzia di massa J, ricavato sperimentalmente colle oscillazioni, è espresso da $J = 122{,}744$ Kg.cm. s^2.

Ad esso corrisponde un raggio d'inerzia $\rho_z = 29^{cm},2$.

I vincoli elastici sono costituiti da molle ad elica a sezione circolare o rettangolare: esse furono tarate direttamente caricandole con pesi. Inoltre anche fu verificata sperimentalmente l'azione secondaria delle molle, di cui si parlò più sopra, e che fu studiata nel mio lavoro citato: *Le deformazioni delle molle ad elica.* Ciò si fece liberando uno dei sopporti delle molle, vincolando solo l'altro, e misurando direttamente con un dinamometro una forza deviatrice normale all'asse x e la corrispondente deviazione prodotta. Si trovò così buon accordo tra i valori dati dalla teoria e quelli sperimentali.

Per le molle a sezione circolare si ha:

$$d = \text{cm. } 0{,}7 \qquad R = \text{cm. } 3{,}15 \qquad \text{passo} = \text{cm. } 1{,}4$$

$$\text{a molla scarica spire libere} \sim 3$$

si fa lavorare con 6^{mm} di freccia iniziale ossia col passo ridotto a cm. 1,2. Colle notazioni più sopra usate si ha:

$$\rho_x = \text{cm. } 2{,}3 \qquad \rho_z = \text{cm. } 3{,}33 \sim .$$

La taratura diretta diede una costante:

$$C = \frac{1}{\mathfrak{W}_1\,\rho_z^2} = 37{,}5\ ^{\mathrm{Kg}}/_{\mathrm{cm}}$$

da cui si ricava:

$$\mathfrak{W}_1 = 0{,}002415 \text{ (a cui corrisponde } E = 2250\ ^{\mathrm{t}}/_{\mathrm{cm}}).$$

Per le molle a sezione rettangolare si ha:

$a =$ cm. 0,8 (normale all'asse) $\quad b =$ cm. 0,85 $\quad R =$ cm. 31

passo a molla scarica cm 1,6, in carico cm 1,4; spire libere ~ 3.

$$\rho_x = \text{cm. } 2{,}38 \sim \qquad \rho_z = 3{,}45.$$

Costante tarata:

$$C = \frac{1}{\mathfrak{W}_1\,\rho_z^2} = 113{,}25\ ^{\mathrm{Kg}}/_{\mathrm{cm}}$$

da cui si ricava:

$$\mathfrak{W}_1 = 0{,}000742 \sim \qquad (E = 2230\ ^{\mathrm{t}}/_{\mathrm{cm}^2} \sim).$$

Vincolando i sopporti colle 4 molle a sezione circolare i baricentri elastici delle molle di un sopporto distano di 31 cm. $\sim$ il baricentro elastico coincide con quello di massa nel punto medio del segmento dell'asse x steccato tra gli assi dei sopporti; inoltre si ha:

$$\mathfrak{W} = 0{,}00000302 \qquad \rho_e = \text{cm. } 46{,}3.$$

Le velocità di risonanza sono in giri al minuto:

$n_1 = 310$ (traslazione) $\qquad n_2 = 495$ (rotaz.ᵉ baricent.ᵃ).

(Non valutando l'azione secondaria della molla sarebbe:

$\mathfrak{W} = 0{,}00000337 \qquad \rho_e =$ cm. 445; $\quad$ (n_1 come sopra; $\quad n_2 = 470$).

Colle 4 molle a sezione rettangolare i baricentri delle molle di uno stesso sopporto distano di cm. 32 $\sim$; si ha pure la coincidenza dei baricentri elastico e di massa, ed inoltre:

$$\mathfrak{W} = 0{,}000000993 \qquad \rho_e = 46{,}4 \qquad n_1 = 538 \qquad n_2 = 865.$$

(Non valutando l'azione secondaria della molla sarebbe:

$$\mathfrak{W} = 0,000001115 \sim \qquad \rho_e = 44,5 \qquad n_2 = 817 \sim).$$

Se uno dei sopporti B_1 è vincolato con due molle a sezione circolare e l'altro B_2 con due molle a sezione rettangolare (caso della fig. 1[a]), allora il baricentro elastico non coincide più con quello di massa, ma è situato dai punti B_1 e B_2 alle due distanze:

$$D_1 = \text{cm. } 66,90; \qquad D_2 = \text{cm. } 22,10 \qquad (D_1 + D_2 = 89 \text{ cm.}).$$

Si ottiene poi nel modo indicato nella teoria svolta:

$$\mathfrak{W} = 0,00000193 \sim \qquad \rho_e = \text{cm. } 41,5.$$

Si ricavano poi i punti nodali N_1 ed N_2 colla costruzione della figura 1[a], o colle formole a suo tempo esposte, e colle notazioni già usate si hanno le distanze dei punti nodali del baricentro d'inerzia G_i:

$$i_1 = \text{cm. } 11,8 \qquad i_2 = 73,5$$

distanze dei punti nodali del baricentro elastico G_e:

$$e_1 = 34 \qquad e_2 = 51,3 \ (^1).$$

Le masse e le costanti delle molle che collocate nei punti nodali possono sostituire il sistema, colla riduzione più sopra esposta, sono:

$$m_1 = 0,143 \frac{73,5}{85,3} = 0,1233,$$

$$m_2 = 0,143 \frac{11,8}{85.3} = 0,0197,$$

$$C_1 = \frac{1}{85,3 \times 34 \times 0,00000193} = 179 \sim,$$

$$C_2 = \frac{1}{85,3 \times 51 \times 0,00000193} = 119 \sim.$$

---

(1) Nella fig. 1 si segnarono pure le ellissi di elasticità delle 4 molle, dei due sopporti e del complesso, ed inoltre il cerchio d'inerzia della massa.

La velocità di risonanza per i moti di N_1 e di N_2 sono rispettivamente:

$$n_1 = 9,55 \sqrt{\frac{C_1}{m_1}} = 766 \text{ giri/min}$$

$$n_2 = 9,55 \sqrt{\frac{C_2}{m_2}} = 355 \text{ giri/min.}$$

Questi valori delle velocità di risonanza furono confermati dall'esperienza, rivelandosi in essa prossimamente colla massima ampiezza dell'oscillazione.

Anche la posizione dei punti nodali trovò la sua conferma sperimentale, poichè si fecero osservazioni simultanee con due stroboscopi situati alle due estremità dell'albero; rilevando fase ed ampiezza del moto e risalendo da questi elementi, nel modo ovvio, al centro di oscillazione, si ritrovarono con buona approssimazione i punti nodali previsti dal calcolo.

Quanto alla maggiore sensibilità della correzione del baricentro fatta per via dinamica anzichè per via statica, come già si ebbe occasione di accennare più sopra, fu fatta l'esperienza seguente.

Anzitutto si eseguì la correzione statica, nel modo indicato, fino cioè ad avere la massa poggiata coi perni su regoli orizzontali in equilibrio indifferente; si ebbe cura di determinare l'insensibilità di questa misura, trovando, coll'aggiunta di pesi agenti con un certo braccio, il momento necessario a mettere in rotazione la massa; si trovò un momento di circa 0,9 Kg.cm.

Montata la massa sui sopporti, colle 4 molle a sezione circolare, sperimentando a velocità prossime alla risonanza dell'oscillazione traslatoria (310), si trovò un'ampiezza di $\sim$ cm. 0,19 ancora sensibilissima. Si passò poi alla correzione completa della massa, anche alle vibrazioni rotatorie.

Eseguita questa, si introdusse una forza momento statico passante il baricentro, corrispondente all'insensibilità statica constatata nella sospensione $= \frac{0,900}{981} = 0,000917$, e sperimentando a 310 giri si trovò un'ampiezza di cm. 0,28.

Si scorge dunque di qui la maggior sensibilità della correzione dinamica. Detto valore fu confermato dal calcolo, giacchè

sperimentando sempre a 310 giri con ampiezze di oscillazione maggiori ($\sim$ cm. 0,5) con masse perturbatrici note, si calcolò il valore del coefficiente di smorzamento che a questo caso compete, e si trovò $\sim K = 0{,}102$; e per $B = 0{,}000917$ $K = 0{,}102$ e $\omega_1 = 32{,}5$ la formola a pag. 116, Nota I[a], che dà l'ampiezza alla velocità di risonanza, ci fa ottenere:

$$S_1 = \frac{0{,}000917}{0{,}102} \times 32{,}5 = 0{,}29$$

valore molto prossimo a quello misurato direttamente.

Nella fig. 6 si hanno le curve di risonanza per l'oscillazione rotatoria intorno al baricentro, colle molle a sezione circolare $n_1 = 495$; l'esperienza fu fatta con un momento centrifugo perturbatore $B = \sim 0{,}0141$ Kg.cm. s^2. Si trovò un'ampiezza lineare massima di mm. 3,5 all'estremità dell'albero, a 600 mm. dal baricentro, ossia un'ampiezza angolare massima di $\frac{3{,}5}{600} = 0{,}00584$ radianti; si trova quindi uno smorzamento $K = \sim 125$ Kg.cm. s.

Presi come ascisse i numeri di giri al minuto n, si portarono come ordinate le ampiezze S, ottenendo la curva segnata a tratto pieno; della quale a destra si accennò l'asintoto (Vedi pag. 117, Nota I[a]).

Si portarono pure delle ordinate proporzionali al seno dello sfasamento sen α, ottenendo la curva segnata a tratti; dalla quale si scorge, ciò che già si sa dalla teoria, che cioè il moto forzato per n molto minore di n_1, è in fase col moto eccitatore, e per n molto maggiore di n_1 è in opposizione, mentre per $n = n_1$ è in quadratura (V. pag. 115, Nota I[a]).

Da entrambe le curve si rileva come la variazione sì di S, che di α, è molto rapida in prossimità della velocità di risonanza n_1; ciò potrebbe consigliare di fare le letture su cui si basa il calcolo per velocità non troppo vicine a quella di risonanza, per avere una maggiore stabilità nel regime del moto oscillatorio ed una maggior sicurezza nella corrispondenza fra le tre grandezze misurate n, S, α.

I valori sperimentali riassunti nelle due curve si riscontrarono rispondenti con ottima approssimazione ai valori direttamente calcolati.

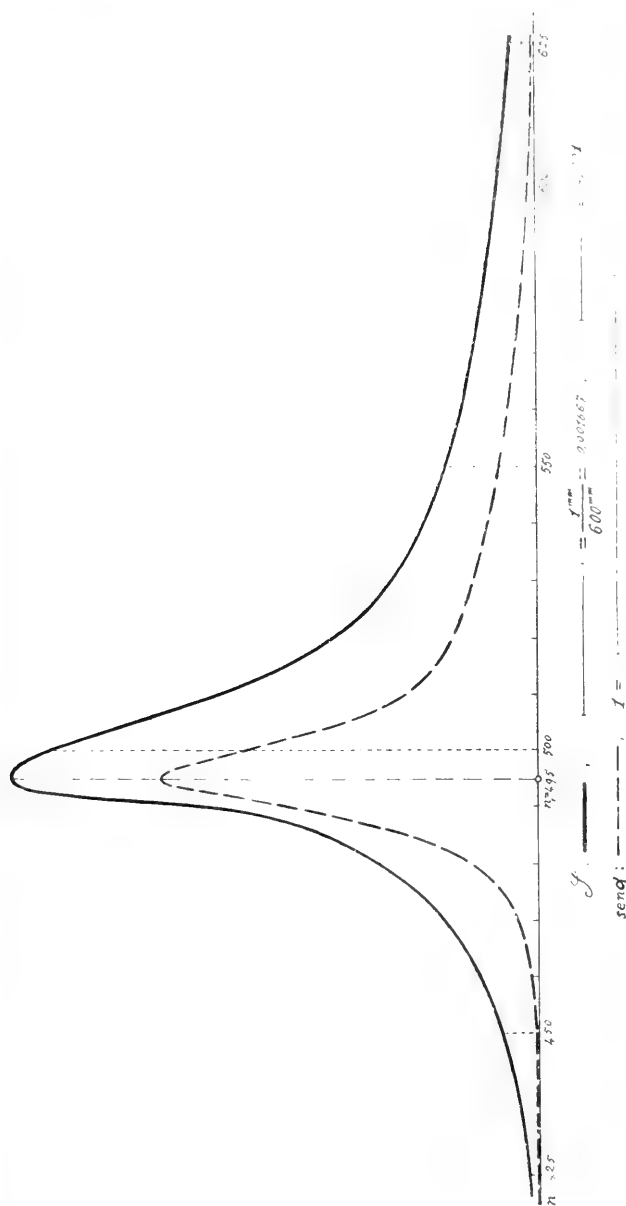



Fig. 6.

La fig. 7 riproduce una fotografia dell'immagine stroboscopica delle rette i segnate sullo schermo s; la nitidezza dell'immagine fotografica, eseguita con un tempo di posa ($\sim 3s$) circa

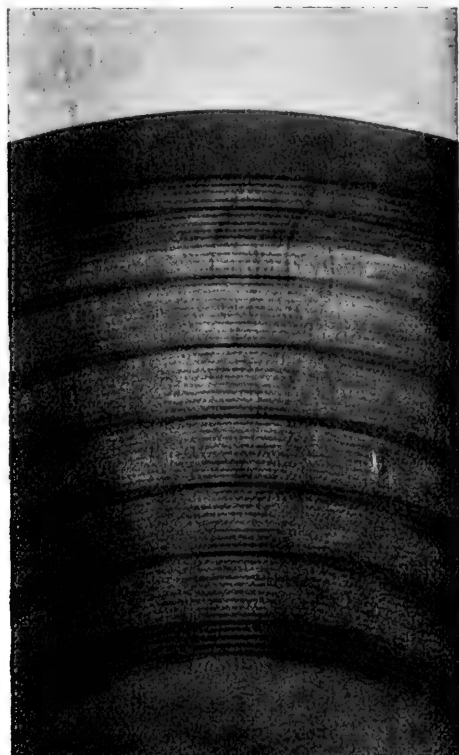
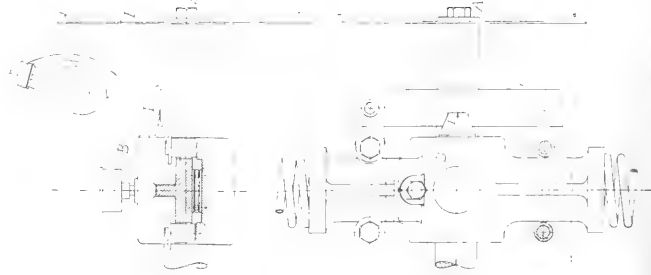
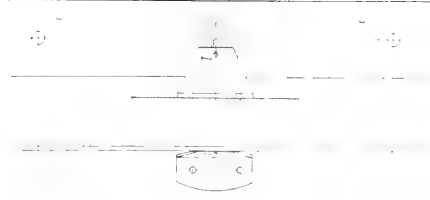
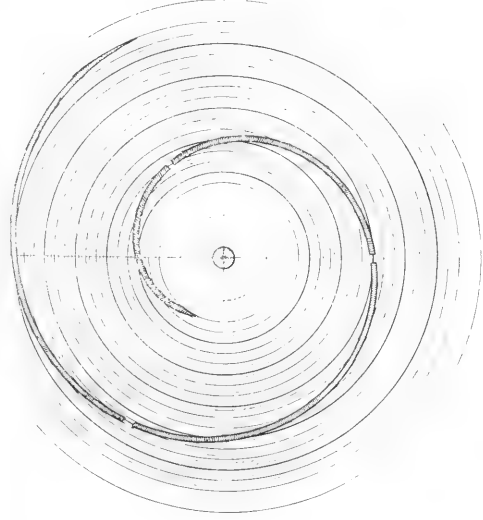
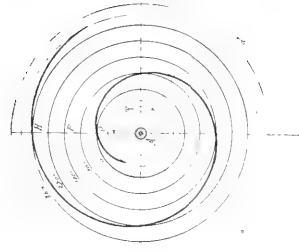
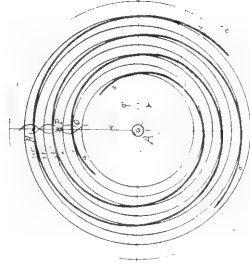
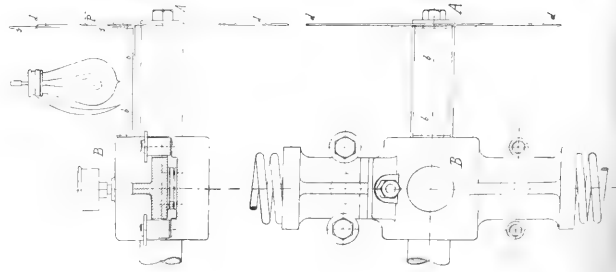
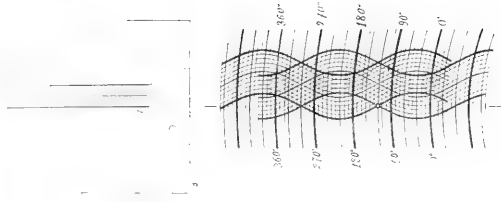
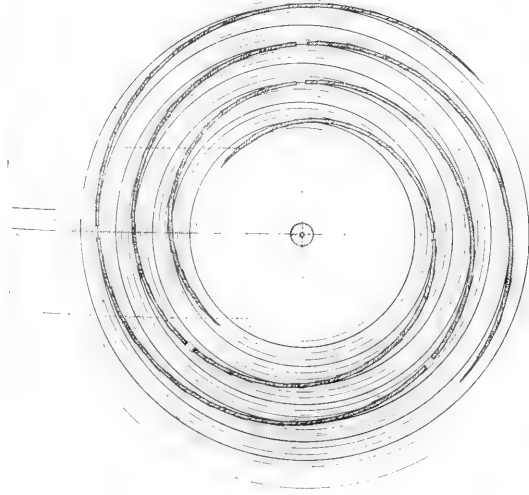
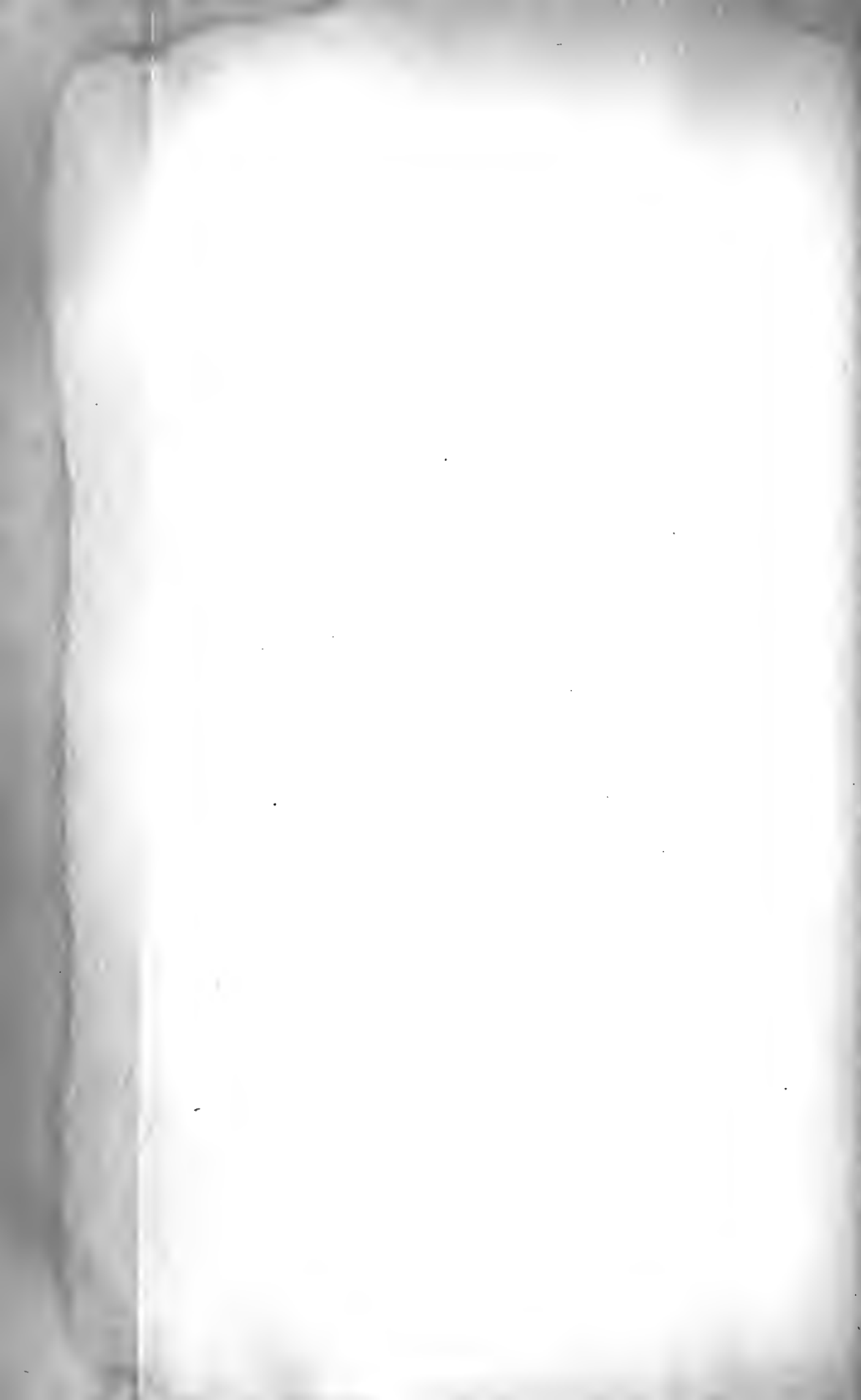



Fig. 7.

38 volte più grande del periodo del moto oscillatorio ($\sim s$ 0,0784), dimostra che questo aveva assunto un regime nel quale rimanevano costanti S e φ; e appunto su detta immagine si può leggere: $S =$ mm. 3,0 e $\varphi = 280°$.

Torino, luglio 1915.

H
P
B
I
A

360°
270°
180°
90°
0°
H
P
O
A
B
A
B

Sull'equazione integrale di Fredholm di seconda specie.

Nota di ATTILIO VERGERIO.

1. — In questa Nota ci serviremo dei risultati ottenuti in altre precedenti, relativi all'equazione integrale di prima specie, per risolvere quella di seconda a limiti costanti.

Considereremo dapprima un caso particolare piuttosto esteso, riservandoci di trattare più avanti un caso molto più generale.

2. — Abbiasi l'equazione integrale di seconda specie

$$u(s) = h(s) + \lambda \int_a^b K(st)\, h(t)\, dt\,, \tag{1}$$

nella quale supporremo che il nucleo $K(st)$ sia finito ed inoltre che esista per esso un numero finito n tale che, tra i suoi nuclei iterati d'ordine $\leq n$, passi la seguente relazione lineare a coefficienti costanti:

$$\begin{aligned} a_0 K_n(st) + a_1 K_{n-1}(st) + a_2 K_{n-2}(st) + \ldots \\ \ldots + a_{n-2} K_2(st) + a_{n-1} K(st) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Sappiamo (*) che, sotto quest'ipotesi, *la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione*

$$g(s) = \int_a^b K(st)\, h(t)\, dt$$

ammetta soluzione è che sia

$$g(s) = -\frac{1}{a_{n-1}} \left[a_0\, g_{n-1}(s) + a_1\, g_{n-2}(s) + \ldots + a_{n-2}\, g_1(s)\right]. \tag{3}$$

(*) VERGERIO, *Sulla risolubilità dell'equazione integrale di 1ª specie.* " Rend. della R. Acc. dei Lincei "; agosto 1915.

Supposto che la (1) ammetta soluzione, si ponga

$$(A) \qquad g(s) = \int_a^b K(st)\, h(t)\, dt\,;$$

con ciò la (1) potrà scriversi

$$u(s) = h(s) + \lambda g(s).$$

Nella (1), dopo aver mutato s in r, si moltiplichino successivamente ambo i membri per $K(sr)\, dr$ e si integri.

Indicando rispettivamente con $u_1(s), u_2(s), \ldots g_1(s), g_2(s), \ldots$ le funzioni iterate di $u(s)$ e $g(s)$ ottenute operando su di esse col nucleo $K(st)$, dopo $n-1$ integrazioni, otterremo le seguenti $n-1$ uguaglianze

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1(s) = g(s) + \lambda g_1(s) \\ u_2(s) = g_1(s) + \lambda g_2(s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1}(s) = g_{n-2}(s) + \lambda g_{n-1}(s)\,; \end{array} \right.$$

le quali, quando vi si aggiunga la (3) e si riguardino le $g_1(s)$, $g_2(s), \ldots g_{n-1}(s)$ come incognite, formano un sistema di n equazioni ad $n-1$ incognite.

Per la nota condizione di coesistenza, dovrà perciò aversi

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} g(s) - u_1(s) & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ - u_2(s) & 1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ - u_3(s) & 0 & 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ - u_4(s) & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ - u_{n-1}(s) & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \\ a_{n-1}\, g(s) & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Posto

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & a_{n-5} & \ldots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \Delta_n ,$$

indichiamo genericamente con Δ_{n-r} il determinante che si ottiene sopprimendo in Δ_n le prime r linee e le prime r colonne.

Sviluppando il determinante della (5) secondo gli elementi della prima colonna, avremo

$$[g(s) - u_1(s)]\,\Delta_{n-1} + \lambda\,\Delta_{n-2}\,u_2(s) - \lambda^2\Delta_{n-3}\,u_3(s) + \\ + \lambda^3\Delta_{n-4}\,u_4(s) - \ldots + (-1)^n\,\lambda^{n-3}\,\Delta_2\,u_{n-2}(s) + \\ + (-1)^{n+1}\,\lambda^{n-2}\,\Delta_1\,u_{n-1}(s) + (-1)^{n+1}\,\lambda^{n-1}\,a_{n-1}\,g(s) = 0;$$

da cui

$$g(s) = \frac{\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{r+1}\,\lambda^{r-1}\,\Delta_{n-r}\,u_r(s)}{\Delta_{n-1} + (-1)^{n-1}\,a_{n-1}\,\lambda^{n-1}} .$$

E poichè

$$\Delta_{n-1} + (-1)^{n-1}\,a_{n-1}\,\lambda^{n-1} = \Delta_n ,$$

avremo anche, *supposto* $\Delta_n \neq 0$,

$$g(s) = \frac{\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{r+1}\,\lambda^{r-1}\,\Delta_{n-r}\,u_r(s)}{\Delta_n} ;$$

dalla quale uguaglianza si deduce, per la (A),

$$(6) \qquad h(t) = \frac{1}{\Delta_n}\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{r+1}\,\lambda^{r-1}\,\Delta_{n-r}\,u_{r-1}(t) + \theta(t),$$

dove $\theta(t)$ rappresenta una soluzione dell'equazione

$$\int_a^b K(st)\,\theta(t)\,dt = 0.$$

Per determinarla, si sostituisca ad $h(t)$ nella (1) il suo valore dato dalla (6); si trova così

$$\theta(t) = u(t) - \frac{1}{\Delta_n}\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{r+1}\lambda^{r-1}\Delta_{n-r}\left[u_{r-1}(t) + \lambda u_r(t)\right];$$

e quindi

$$h(t) = u(t) + \frac{1}{\Delta_n}\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^r\lambda^r\Delta_{n-r}\,u_r(t),$$

che è la soluzione cercata.

3. — Si osservi che se $\Delta_n \neq 0$, l'equazione omogenea

$$\varphi(s) = -\lambda\int_a^b K(st)\,\varphi(t)\,dt \tag{7}$$

non ammette soluzioni diverse da zero.

Consideriamo infatti la successione

$$\varphi(s) = -\lambda\int_a^b K(st)\,\varphi(t)\,dt$$
$$\varphi(s) = \lambda^2\int_a^b K_2(st)\,\varphi(t)\,dt$$
$$\varphi(s) = -\lambda^3\int_a^b K_3(st)\,\varphi(t)\,dt$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(s) = (-1)^n\lambda^n\int_a^b K_n(st)\,\varphi(t)\,dt$$

ottenuta dalla (7) mediante successive moltiplicazioni per $-\lambda K(sr)\,dr$ ed integrazioni. Si moltiplichino i membri della prima eguaglianza per $-a_{n-1}\lambda^{n-1}$, quelli della seconda per $a_{n-2}\lambda^{n-2}$, quelli della terza per $-a_{n-3}\lambda^{n-3}$ e così via; quelli dell'ultima per $(-1)^n a_0$ e poi si sommino le nuove uguaglianze così ottenute membro a membro.

Ricordando la (2), avremo

$$\varphi(s)\left[-a_{n-1}\lambda^{n-1}+a_{n-2}\lambda^{n-2}-a_{n-3}\lambda^{n-3}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^{n-1}a_1\lambda+(-1)^n a_0\right]=0;$$

e poichè il fattore tra parentesi è eguale $(-1)^n\Delta_n$, avremo anche

$$\varphi(s)\,\Delta_n=0.$$

Da questa si deduce che, essendo per ipotesi $\Delta_n\neq 0$, dovrà essere identicamente

$$\varphi(s)=0.$$

La soluzione trovata è quindi, in questo caso, unica (*).

4. — Veniamo a considerare ora il caso che sia

$$\Delta_n(\lambda)=0 \quad (**). \tag{8}$$

Perchè il sistema (4) (cui si intende aggiunta la (3)) sia ancora possibile e la (1), per conseguenza, possa ammettere soluzione, sarà *necessario* che tra la $u_r(t)$ interceda la relazione.

$$\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^r\lambda^r\Delta_{n-r}(\lambda)\,u_r(t)=0. \tag{9}$$

Supposto che questa condizione sia verificata, si dia a λ un incremento arbitrario sufficientemente piccolo e tale che per esso sia $\Delta_n(\lambda+h)\neq 0$; la (1) ammetterà allora la soluzione

$$h(t)=u(t)+\frac{\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^r(\lambda+h)^r\Delta_{n-r}(\lambda+h)\,u_r(t)}{\Delta_n(\lambda+h)}. \tag{10}$$

(*) VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales, ecc.* Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 115.

(**) Colla scrittura Δ_n (λ) si vuol indicare che Δ_n viene considerato come funzione di λ.

Ora essendo

$$(-1)^r \lambda^r \Delta_{n-r}(\lambda) = (-1)^{n-1}[a_{n-r-1}\lambda^{n-1} - a_{n-r-2}\lambda^{n-2} + \\ + a_{n-r-3}\lambda^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-r-1} a_1 \lambda^{r+1} + (-1)^{n-r} a_0 \lambda^r],$$

sarà

$$(-1)^r(\lambda+h)^r \Delta_{n-r}(\lambda+h) = (-1)^{n-1}[a_{n-r-1}(\lambda+h)^{n-1} - \\ - a_{n-r-2}(\lambda+h)^{n-2} + a_{n-r-3}(\lambda+h)^{n-3} - \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-r-1} a_1 (\lambda+h)^{r+1} + (-1)^{n-r} a_0 (\lambda+h)^r] = \\ = (-1)^r \lambda^r \Delta_{n-r}(\lambda) + (-1)^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}\Big\{\binom{n-1}{s} a_{n-r-1}\lambda^{n-s-1} - \\ - \binom{n-2}{s} a_{n-r-2}\lambda^{n-s-2} + \binom{n-3}{s} a_{n-r-3}\lambda^{n-s-4} - \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-r-1} a_1 \binom{r+1}{s}\lambda^r + (-1)^{n-r}\binom{r}{s} a_0 \lambda^{r-1}\Big\} h^s.$$

Analogamente

$$\Delta_n(\lambda+h) = \Delta_n(\lambda) + (-1)^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}\Big\{\binom{n-1}{s} a_{n-1}\lambda^{n-s-1} - \\ - \binom{n-2}{s} a_{n-2}\lambda^{n-s-2} + \binom{n-3}{s} a_{n-3}\lambda^{n-s-3} - \ldots \\ \ldots + (-1)^n \binom{2}{s} a_2 \lambda + (-1)^{n+1}\binom{1}{s} a_1\Big\} h^s.$$

Con ciò la (10) diventa, tenendo conto delle (8) e (9),

$$h(t) = u(t) + \frac{\sum_{r=1}^{n-1} u_r(t) \sum_{s=1}^{n-1}\Big\{\binom{n-1}{s} a_{n-r-1}\lambda^{n-s-1} - \binom{n-2}{s} a_{n-r-2}\lambda^{n-s-2} + \binom{n-3}{s} a_{n-r-3}\lambda^{n-s-3} - \ldots + (-1)^{n-r-1}\binom{r+1}{s} a_1 \lambda^r + (-1)^{n-r-1}\binom{r}{s} a_0 \lambda^{r-1}\Big\} h^s}{\sum_{s=1}^{n-1}\Big\{\binom{n-1}{s} a_{n-1}\lambda^{n-s-1} - \binom{n-2}{s} a_{n-2}\lambda^{n-s-2} + \binom{n-3}{s} a_{n-3}\lambda^{n-s-3} - \ldots + (-1)^n\binom{2}{s} a_2 \lambda + (-1)^{n+1}\binom{1}{s} a_1\Big\} h^s} \tag{11}$$

Supposto ora che il coefficiente di h^p ($p \leq n-1$) nel denominatore sia il primo coefficiente delle h^s che sia diverso da zero, ed inoltre che i coefficienti di $h, h^2 \ldots h^{p-1}$ nel numeratore siano tutti nulli, si dividano ambo i termini del rapporto

precedente per h^p e si passi al limite per $h = 0$. Si avranno così le soluzioni

$$h(t) = u(t) + \frac{\sum_{r=1}^{n-1} u_r(t) \left\{ \binom{n-1}{p} a_{n-r-1} \lambda^{n-p-1} - \binom{n-2}{p} a_{n-r-2} \lambda^{n-p-2} + \binom{n-3}{p} a_{n-r-3} \lambda^{n-p-3} - \ldots + (-1)^{n-r-1} \binom{r+1}{p} a_2 \lambda^r + (-1)^{n-r} \binom{r}{p} a_0 \lambda^{r-1} \right\}}{\binom{n-1}{p} a_{n-1} \lambda^{n-p-1} - \binom{n-2}{p} a_{n-2} \lambda^{n-p-2} + \binom{n-3}{p} a_{n-3} \lambda^{n-p-3} - \ldots + (-1)^n \binom{2}{p} a_2 \lambda + (-1)^{n+1} \binom{1}{p} a_1} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\nu=q} c_\nu \varphi_\nu(t),$$

dove le c_ν sono delle costanti arbitrarie e le $\varphi_\nu(t)$ le q soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (7).

Possiamo pertanto affermare che *se* $\Delta_n \neq 0$, *la* (1) *ammette sempre soluzione e che questa è unica; se invece* $\Delta_n = 0$, *la* (1) *ammetterà soluzione soltanto nel caso che, essendo nulli i coefficienti di* h, h^2, ... h^{p-1} ($p \leq n-1$) *nel denominatore del rapporto della* (11), *lo siano anche quelli corrispondenti nel numeratore. La* (1), *in quest'ultimo caso, avrà un numero infinito di soluzioni.*

5. — Lasciamo cadere l'ipotesi (2), fatta precedentemente sul nucleo $K(st)$, e poniamo soltanto la condizione che $K(st)$ sia una funzione finita simmetrica ed in generale continua, senza però escludere che possa presentare delle discontinuità della natura ammessa dallo Schmidt (*).

Ci proporremo ora di trovare una nuova formula risolutiva (**) per l'equazione (1), servendoci di alcuni risultati esposti in una mia Nota precedente (***), alla quale rimandiamo il lettore per l'intelligenza di quanto andremo esponendo.

(*) " Math. Ann. ", Bd. LXIII.

(**) Un'altra formula risolutiva, sotto le stesse condizioni per $K(st)$, è stata da me data, per via affatto diversa, in una Nota inserita nei " Rend. dell'Ist. lomb. di sc. e lettere ", vol. XLVIII, fasc. 16-17.

(***) Vergerio, *Sulla condizione Picard–Lauricella per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie,* " Rend. della R. Accademia dei Lincei ", 2° sem., 1915, fasc. 11.

Ricorderemo soltanto qualche risultato, che servirà a far meglio comprendere il significato dei simboli che qui dovremo usare.

Posto

$$\int_a^b \int_a^b [K_n(st)]^2\, ds\, dt = U_{2n}\,; \qquad \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = \gamma_n\,,$$

è noto (*) che esiste finito e positivo il

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n = \Gamma_1\,;$$

come pure quello delle funzioni

$$\frac{K_{2n}(st)}{\Gamma_1^n}\,; \qquad \frac{K_{2n+1}(st)}{\Gamma_1^n}\,,$$

che indicheremo rispettivamente con $H^{(1)}(st)$ ed $H_1^{(1)}(st)$.

Similmente, indicando con $\Gamma_2^{(n)}$ le costanti del nucleo simmetrico

$$F^{(2)}(st) = K(st) - H_1^{(1)}(st),$$

sarà

$$\lim_{n=\infty} \Gamma_2^{(n)} = \Gamma_2\,;$$

ed anche

$$\lim_{n=\infty} \frac{F_{2n}^{(2)}(st)}{\Gamma_2^n} = H^{(2)}(st)\,; \qquad \lim_{n=\infty} \frac{F_{2n+1}^{(1)}(st)}{\Gamma_2^n} = H_1^{(2)}(st).$$

Lo stesso ripetasi per

$$F^{(3)}(st) = K(st) - H_1^{(1)}(st) - H_1^{(2)}(st).$$

In generale, se $\Gamma_\nu^{(n)}$ indicano le costanti del nucleo

$$F^{(\nu)}(st) = K(st) - H_1^{(1)}(st) - H_1^{(2)}(st) - \ldots - H_1^{(\nu-1)}(st),$$

avremo

$$\lim_{n=\infty} \Gamma_\nu^{(n)} = \Gamma_\nu\,;$$

(*) Schmidt, loc. cit.

ed anche

$$\lim_{n=\infty} \frac{F_{2n}^{(\nu)}(st)}{\Gamma_\nu^n} = H^{(\nu)}(st); \qquad \lim_{n=\infty} \frac{F_{2n+1}^{(\nu)}(st)}{\Gamma_\nu^n} = H_1^{(\nu)}(st).$$

Porremo poi genericamente, indicando con $g(s)$ una funzione qualunque,

$$G^{(\nu)}(s) = \int_a^b H^{(\nu)}(st)\, g(t)\, dt; \qquad G_1^{(\nu)}(s) = \int_a^b H_1^{(\nu)}(st)\, g(t);$$

la seconda delle quali può anche scriversi

$$(12)\quad G_1^{(\nu)}(s) = \int_a^b \int_a^b F^{(\nu)}(sr)\, H^{(\nu)}(rt)\, g(t)\, dt = \int_a^b K(sr)\, G^{(\nu)}(r)\, dr.$$

6. — Ciò premesso, si ponga

$$(13)\qquad h(s) = u(s) + g(s);$$

con ciò, la (1) diventa (dopo avervi cambiato λ in $-\lambda$)

$$(14)\qquad g(s) = \lambda \int_a^b K(st)\,[u(t) + g(t)]\, dt;$$

e poichè quest'equazione ammette soluzione, dovrà essere (**)

$$(15)\qquad g(s) = \sum_\nu G^{(\nu)}(s).$$

Si moltiplichino i membri della (14) per $H^{(\nu)}(sr)\, dr$, dopo avervi mutato s in r; avremo

$$G^{(\nu)}(s) = \lambda\, U_1^{(\nu)}(s) + \lambda\, G_1^{(\nu)}(s),$$

cioè

$$(16)\qquad G^{(\nu)}(s) - \lambda\, G_1^{(\nu)}(s) = \lambda\, U_1^{(\nu)}(s).$$

(*) Per l'intelligenza, si osservi che le autofunzioni linearmente indipendenti di uno qualunque dei nuclei $H^{(\nu)}(st)$ sono diverse da quelle di tutti gli altri: si ha quindi, per ogni $\mu \neq \nu$,

$$\int_a^b H^{(\nu)}(sr)\, H^{(\mu)}(rt)\, dr = 0;$$

ed anche

$$\int_a^b H_1^{(\mu)}(sr)\, H^{(\nu)}(rt)\, dr = 0.$$

(**) Vergerio, Nota cit.

Mutato in quest'ultima s in r, si moltiplichino ambo i membri per $K(sr)\,dr$ e si integri; otterremo

$$G_1^{(\nu)}(s) - \lambda \Gamma_\nu G^{(\nu)}(s) = \lambda \Gamma_\nu U^{(\nu)}(s) \quad (*). \tag{17}$$

Supposto che, per ogni ν, *sia*

$$1 - \lambda^2 \Gamma_\nu \neq 0 ,$$

dalle (16) e (17) si ricava

$$G^{(\nu)}(s) = \lambda \frac{U_1^{(\nu)}(s) + \lambda \Gamma_\nu U^{(\nu)}(s)}{1 - \lambda^2 \Gamma_\nu} ;$$

e quindi, per la (15),

$$g(s) = \lambda \sum_\nu \frac{U_1^{(\nu)}(s) + \lambda \Gamma_\nu U^{(\nu)}(s)}{1 - \lambda^2 \Gamma_\nu} ,$$

dove la serie del secondo membro sarà uniformemente convergente, tale essendo quella della (15).

Avremo così, per la (13),

$$h(t) = u(t) + \lambda \sum_\nu \frac{U_1^{(\nu)}(s) + \lambda \Gamma_\nu U^{(\nu)}(s)}{1 - \lambda^2 \Gamma_\nu} . \tag{18}$$

Si verifica subito che questa soddisfa la (1), osservando che l'equazione

$$u_1(s) = \int_a^b K(st)\, u(t)\, dt$$

ammette soluzione e che quindi dev'essere

$$u_1(s) = \sum_\nu U_1^{(\nu)}(s).$$

La soluzione, come sappiamo, è unica, λ non essendo un autovalore di $K(st)$.

(*) È infatti

$$\int_a^b K(st)\, G_1^{(\nu)}(t)\, dt = \int_a^b F^{(\nu)}(sr)\, dr \int_a^b H_1^{(\nu)}(rt)\, g(t)\, dt =$$

$$= \lim_{n=\infty} \Gamma_\nu \int_a^b \frac{F_{2\nu+2}^{(\nu)}(st)}{\Gamma_\nu^{n+1}}\, g(t)\, dt = \Gamma_\nu\, G^{(\nu)}(s).$$

7. — Suppongasi ora che, per un certo valore n di ν, si abbia

$$1 - \lambda^2 \Gamma_n = 0 \; ; \tag{19}$$

o, in altre parole, che λ sia uno degli autovalori di $K(st)$.

Dalle (16) e (17) si vede intanto che dovrà *necessariamente* aversi, affinchè tale sistema sia ancora possibile per $\nu = n$,

$$\lambda U_1^{(n)}(s) + U^{(n)}(s) = 0. \tag{20}$$

Supposta soddisfatta questa condizione, si dia a λ un incremento k sufficientemente piccolo e tale che per esso sia

$$1 - (\lambda + k)^2 \Gamma_n \neq 0.$$

Tenuto conto delle (19) e (20), il termine, che, nella (18) per $\nu = n$, si presentava sotto forma indeterminata, diviene

$$\frac{(\lambda + k) U_1^{(n)}(s) + (\lambda + k)^2 \Gamma_n U^{(n)}(s)}{1 - (\lambda + k)^2 \Gamma_n} = \frac{k[U_1^{(n)}(s) + 2\lambda \Gamma_n U^{(n)}(s)] + k^2 \Gamma_n U^{(n)}(s)}{-k[2\lambda \Gamma_n + k \Gamma_n]} \; ;$$

ed anche, dividendo i termini del rapporto per k e passando al limite per $k = 0$,

$$-\frac{U_1^{(n)}(s) + 2\lambda \Gamma_n U^{(n)}(s)}{2\lambda \Gamma_n} = -\frac{U^{(n)}(s)}{2} .$$

Avremo quindi le soluzioni

$$h(t) = u(t) - \frac{U^{(n)}(t)}{2} + \lambda \sum_{\nu} \frac{U_1^{(\nu)}(t) + \lambda \Gamma_\nu U^{(\nu)}(t)}{1 - \lambda^2 \Gamma_\nu} + \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu \varphi_\nu(t) \; ;$$

dove ν nella sommatoria può assumere tutti i valori da 1 in su, il solo valore n eccettuato; e le c_ν e $\varphi_\nu(t)$ hanno il solito significato.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 19 Dicembre 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO ANZIANO ITALO PIZZI

Sono presenti i Soci De Sanctis, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Vidari, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza di S. E. Boselli, Presidente dell'Accademia, e dei Soci Carle, Chironi, Ruffini, D'Ercole, Sforza, Brondi e Prato.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 5 corrente.

Il Presidente legge un telegramma del Presidente della Reale Accademia Napoletana di Archeologia, Lettere e Belle Arti che “ aderisce ed applaude con unanime consenso alle nobilissime parole di S. E. Paolo Boselli „.

Il Socio Stampini presenta per la stampa negli *Atti* una sua seconda *Nota* su *Il Codice Bresciano di Catullo. Osservazioni e confronti.*

Dopo di che il Presidente, augurato il buon anno ai Soci presenti e assenti, scioglie l'adunanza.

LETTURE

Il Codice Bresciano di Catullo.

Osservazioni e confronti.

Nota II di ETTORE STAMPINI, Socio nazionale residente.

Ma sia che fra *Br* e *h* si abbia il pieno accordo, sia che alcun divario fra essi interceda, i rapporti di concordanza e di differenza con gli altri codd. non possono essere ancora sufficientemente chiariti dal materiale finora qui da me fornito: bisognerà inoltre vedere, almeno in piccola parte, quale sia la relazione che corre fra *Br*,*h*, da un lato, e quei codd., dall'altro, ai quali non si riferisce il raffronto di sopra instituito, o che non furono espressamente menzionati nelle eventuali concordanze delle loro lezioni con quelle di *Br*,*h*, avendo io espressamente menzionato i codd. quasi soltanto in caso di accordo di *Br*,*h* con singoli o con pochissimi o pochi di essi. E poi, ancorchè avessi ognora fatta menzione espressa di tutti i codd. concordanti, sarebbe rimasta pur sempre intatta la parte del divario di *Br*,*h* dagli altri mss.; nè sarebbe stata messa sufficientemente in mostra la posizione di *Br*,*h* di fronte ai principalissimi codd., come *O*,*G*,*R* ed anche *M*, ed alla massa intera, o quasi, dei mss. finora studiati, espressa, come abbiamo indicato, con la sigla Ω. Gioverà pertanto, facendo, per brevità, una scelta di pochi carmi catulliani, dare il prospetto della loro *varia lectio*, comprendendo, quasi sempre, pressochè tutti i codd. dell'Ellis, sia nel dissenso sia nel consenso con *Br*,*h* (1).

(1) In questa raccolta di lezioni, come già nella precedente, non uso della sigla, che sarà appresso adottata, φ = esempl. di *Br*,*h* per designare l'accordo dei due codici, perchè, come già ho notato, non menziono mai *h*, se non quando la lezione di *h* è stata espressamente indicata dall'Ellis.

I, 1. ni *Br* (Qui *h,D,A,c,Phill.* Cui *O,G,R,B,C,Laur.XXXIII,13*) modo (*in marg.* dono) *Br* dono Ω

2. Arido *Br*, Ω

4. aliquid tu *Br*

5. tum (*in marg.* tamen) *Br* tum *h,H in marg., b,c* (tamen Ω) es *Br,h,b* (est Ω)

7. iupiter *Br*

8. tibi habe *Br*, Ω hoc *Br*, Ω (haec *O*) libelli *Br* (libelli al. mei *G,M*)

9. quod *Br, h*,Ω (quidem *D,R in marg., Laur.XXXIII,13 sec.m.*) o *om.* *Br*, Ω (*aggiunto in P*)

II, 2. Qui cum *Br, O,B,C,Laur.XXXIII,12,Harl.4094*

3. Quoi *Br, C,b* (Cui *h, marg. O,R corr., a* Qui *O,G,M,D,B,Laur. XXXIII,13 pr.m.*) ac petenti *Br,H,B pr.m.,C,Sant.* (at petenti *O* at petenti al. patenti *G* (*ove* patenti *è corr. in* parenti), *M* ac appetenti *D* appetenti *R,a*)

5. Carum *Br*, Ω (*ma* Karum *O, G* rarum *a, H*) libet *Br*, Ω (iubet *marg. O*)

7. solatiolum *Br,M* (solaciolum *G, etc.*)

8. Credo ut cum grauis acquiescet ardor *Br, h*,Ω (*ma* cum *om. a,B*)

9. ludere *Br,M, etc.* (ludere al. luderem *G* luderem *D*)

11. puelle ferunt *Br,h,B,Vat.1630,Laur.XXXIII,13* (ferunt puelle Ω, *ma* fuerunt *H,A*)

12. auleolum *corr. in* aureolum *Br*

13. ligatam *Br,h,D,a,H,B,A,C,b,c,Sant.,Laur.XXXIII,13* (ligatam *marg.* negatam *R,M* negatam al. ligatam *G* negatam *O*)

X. 1. Varius *Br,O,G,R,M, etc.* (Varrus *h,a,H* Varus *C,Vic.* Verannius *D*)

2. ociosum *Br,C,c* (occiosum *O*)

3. tum *Br,G* (tunc *O,R,M,Laur.XXXIII,12*)

7. In bithinia *Br,h* (Iam bithinia *G* Iam bithynia *M* Iarbithinia *O*) quo modo possem haberet *Br,h* (quomodo posse haberet Ω)

8. Et quoniam *Br,h,O,D,a,H,A,C,b,Burn.* (Et quoniam al. quonam *G, R,M*) habere *Br,h,H,B,Burn.* (here *O,G,M,D,A,c,Vat.1630,Laur. XXXIII,13* aere *a,b,Sant.*)

9. neque nunc ipsis *Br,h* (*tutti gli altri variano*)

10. Nec *davanti a* pretoribus *Br*, Ω (*om. a,A,C,c,Sant.; agg. in marg. R,M*)

11. referet *Br* (referret Ω)

13. non *Br* (non al. nec *G,R,M* nec *O,a,b,c,Laur.XXXIII,12*) faceret *Br*,Ω (facerent *D,a*)

17. *Manca il v. in Br,h*
18. tam mihi fuit *Br*
19. que, *ma sopra scritto* quod, *Br,h* (quod Ω)
20. cito *Br,h,D* (octo Ω)
21. neque hic neque illic *Br* (nec hic neque illic *O,G,R,M,H,B,Vat.1630*)
22. Fractumque *Br,h,*Ω (Fractum qui *D,b,Burn.*)
24. docuit *Br,*Ω (decuit *a,Burn.*) cynediorem *Br*
26. Istos commoda nam uolo ad serapim *Br.*Ω (*ma* comoda *h,a,Burn.* comodā *O* serapim *R,M* serapini *O* sarapim al. serapim *G* sarapim *D*)
27. Deferri *Br,D etc.* (Deserti al. deferri *G,R,M,B* Deserti *O*) mane me inquit *Br,*Ω
28. quod non *Br,h* (quod modo Ω)
30. Cuma est grauis *Br,*Ω
31. ad me *Br,h,R corr.,D,a,Burn.* (a me Ω)
33. tu insulsa *Br,h* (tu insula Ω) et *Br,*Ω (hac *D* ac *a,Burn.*)
34. negligentem *Br,*Ω

XI, 2. penetrauit *Br,*Ω
3. Littus *Br* ubi *Br, quasi tutti* (ut *O,G,Caesen.,Vic.*) eoa *Br, codd.* (*ma* coa *O,Harl.4094*)
5. arabesque *Br,R,M, etc.* (arabaes que *G* arabasue *O,Harl.4094*) Siue *Br,*Ω (Seu *b,c,Burn.*) sagas *Br,h,D,B,A,Burn.,Vat.1630,Laur. XXXIII,13,Sant.* (sagax *O,G,R,M,a,H,C,b*) sagittiferosque *Br,D* (sagittiferosue *G,M,H* sagitiferos ue *O*)
7. qui *Br,h,B,Phill.* (que *G, etc.* q̃ *M* qua *Vic.*)
8. nylus *Br*
9. latas *Br,h,B,Burn.,Vat.,1630* (altas Ω)
10. uisens *Br,O,G,M. etc.* (uidens *h pr.m.,D,H,B,A,C,Sant.*).
11. horribilesque *Br,O,G,D,Harl.4094,Sant.* (horribiles *R,M,H,B,A,C, Laur.XXXIII,12,13* horribiles et *a*) *Il verso termina con* ulti *in Br,G,M, etc.*
12. *Comincia il v. con* Moxque *Br* (Mosque *G,M etc.*); *con* Vitimosque *O*
13. ferre *Br,h,D,H* (fere Ω)
14. tentare *Br,G,R coi più* (temptare *O,M*)
15. nunciate *Br,G, etc.* (nuntiate *M, etc.*)
22. Cui *Br,h,O,G,R,M,A,C, Harl.4094,Vat. 1630, Sant.,Laur. XXXIII, 12* (Qui *D,a,B corr.,Laur.XXXIII,13*)
23. Ultimi (*scritto* mus *sopra* mi) *Br* Ultimus *h* (Ultimi Ω) postquam *Br,G, etc.* (posquam *R,M,D*)

XII, 1. Atrucine (*in marg.* m) *Br* (Matrucine Ω)
2. ioco *Br* (ioco al. loco *G,R,M,B* loco *O,Harl.4094*)
3. negligentiorum *Br,G,R,M, etc.* (neglegenciorum *O* negligentiarum *D*)
4. falsum *Br,h,D,a,B,A,C,Harl.4094,Laur.XXXIII,13* (falsum al. salsum *O,R,M* salsum al. falsum *G*)
5. sordida est et *Br*
6. credis *Br*, Ω (credas *h*) polioni *Br,a,Phill.,Harl.4094*)
7. quia (*sopra scritto* qui) *Br,h* quia *B* qui Ω) tu *in luogo di* tua *Br,h* uel (*sopra scritto* id) *Br* (id *h,H* uel Ω)
8. uelit *Br*, Ω (uoluit *O*)
9. Disertus *Br*, Ω (dissertus *O*)
10. eneca syllabos *Br* (endeca sillabos *O, G, R, M, Laur. XXXIII, 13, Vat.1630* endecasyllabos *a,A,C*)
12. extimatione (*marg.* expectatione) *Br,h* (extimatione Ω)
13. est nemo sinunt *Br,h,H,B,Phill.,Harl.4094,Vat.1630,Laur.XXXIII,13* (est nemo sinum *G,M,D,A,Sant.* nemo est sinum *O*) sodolis *Br*
14. sethaba (*ma* o *scritto sopra* e) *Br* (sethaba *G, M, H, A, C, Laur. XXXIII,13* settaba *O* sectaba *a* thessala *D, Vat.1630*) exhibere *Br,h*,Ω
15. muneri *Br* (numeri al. muneri *G,R,M,C* numeri *O,A,Vat.1630, Laur.XXXIII,13*) fabulus *Br,h,a,A,Vat.1630,Laur.XXXIII,13*
16. ueranius *Br,h*,Ω (uerranius *D*) hec *Br*,Ω (hec al. hoc *R* hoc *H,b*) almeni *Br,h,Pbill.,Vat.1630* (almoeni *H* almeni *R* ameni *O,G,M* amem *D*)
17. Et ueraniolum *Br,h*,Ω (*ma* Et uerannolum *O*) fabulum *Br,h,a, Vat.1630*

XXX, 1. [a]Lphene *Br* (Alphene *h*,Ω Alfene *A* false *Br* (salse *O,G,R, Vat.1630* s lse *M*)
2. nihil *Br,h*,Ω (nichil *G*) misere *Br* (miseret Ω)
3. perdere *Br,h* (prodere Ω) non me dubitas *Br,h*,Ω (me non dubitas *D,A*)
4. Nec *Br*,Ω (Hec *a* Haec *H*) fallacium *Br*
5. Que *Br*, Ω negligis *Br*,Ω
6. O heu *Br*, Ω dico *Br*, Ω curue *Br* (cui ne Ω)
7. tute *Br* (tu te *G,R,M*) iubeas *Br,h* (iubebas Ω solebas *a*) me *om. Br*, Ω
8. quasi tuta omnia *Br,h* (quasi omnia tuta Ω quasi omnia (*om.* tuta) *O*

9. Idem *Br,h,O,a,b,Vat. 1630,Laur.XXXIII,12* (Inde *G,D,H,A,C,Sant., Laur.XXXIII,13*) Inde al. idem *R,M,B* factaque omnia *Br* (omnia factaque Ω)
10. uento *Br,O,G,R,M,D,H,Vat.1630,Laur.XXXIII,12,13* (ventos *h,a,A, C,Burn.,Sant.*) aerias *Br* (aereas *a,H,A,C,Sant.pr.m.*)
11. ut dii *Br,h,Ω*
12. facti *Br*,Ω (facta *h,Laur.XXXIII,13*)

XXXIV, 1. infide *Br,O,M,P*
3. *Manca il v. in Br*,Ω.
5. latona *Br,h,H,B,Vat.1630,Sant.*
6. proles *Br,h* (progenies Ω)
8. Deposuit *Br*,Ω (Deposiuit *Caesen.*) oliriam *Br,h*
12. Omniumque sonantium *Br, h, O* (sonancium) *P, b, Sant.* (Omnium sonantium Ω)
15. et nocte es *Br* (et nothoes al. noto es *G,R,M* et nothoes *B,A, Laur.XXXIII,12,13* et noto est *D* et noto es *a*)
17. menstrua *Br*,Ω
18. metiens *Br*,Ω (mentiens *O*)
21. Sis quecunque tibi placent *Br,A,C,Laur.XXXIII,13* (Scis quecunque tibi placet *O,D* Scis quecunque tibi placent al. sis quocumque tibi placet *G,R,M,B*)
23. ancique *Br,h* (antique Ω)

XXXIX, 2. sed *Br,h,H* (sed *marg.* seu *Vic.* sei *O,Laur.XXXIII,12* seu al. sei *R,M* seu *G coi più*)
3. Subselium *Br,H* (Subsellum Ω Subscellum *O*) excitat orator *Br,h*,Ω (recitat orator *A,C,Sant.*)
4 *e* 5. *Mancano in Br,h,D*
8. ellegantem *Br* neque urbanum *Br*,Ω (nec urbanum *O*)
9. monendum est *Br*,Ω
11. porcus *Br,h* (parcus Ω parthus *Ashburn.* partus *H,Phill.*) obesus *Br*,Ω (obessus *h*) et thuscus *Br* et tuscus *h* (etruscus Ω,*ma* et truscus *O,B,Laur.XXXIII,13* estruscus *a*)
12. lamininus (*marg.* flaminus) *Br* (flaminus *h* flaminius *Phill. in marg.* lamiuinus *O,G,M,Bpr.m.,Phill., etc.* lanuinus *D,Sant.* lanuuinus *P,C* lanuunus *H*) acer *Br,h,H,Phill.* (ater Ω)
13. ut *Br,h,D,a,P,b,c,Phill.,Burn.* (aut Ω)
14. puriter *Br,G coi più* (pariter al. puriter *R,M* pariter *a,H,B,Vat.1630, Laur.XXXIII,12*)

17. celtiber celtiberia in terra *Br*,Ω (celtiber in celtiberia in terra *h*)
18. minxit *Br,G,M,B corr.* (mixit *O* minsit *D,Vat.1630,Ashb.*)
19. rufam *Br,h,A,Ashb.,Sant.* (rusam Ω russam *a*)
20. uester *Br*,Ω (noster *O,a*) expolitior *Br*, *forse G corr.* (expolitor al. expolitior *R, M, B* expolitor *O, G prima della corr., Laur. XXXIII,13*) deus *Br,h,O,a,B,Burn.,Vat.1630* (dens Ω)
21. lotum *Br,h,H,Ashb.* (lotus Ω)

XLII, 1. endecasyllabi *Br* (endecha sillabi *O,G,R,M* endecasillabi *a,B,A, Vat.1630*)
3. Iocum *Br* (Locum al. iocum *G,R,M,B* Locum *O,P,Laur.XXXIII,13*)
4. uestram *Br* (uestra Ω) reddituram *Br* (redituram *h,a,H,B*)
5. Pugilaria *Br,h* (Pugillaria Ω)
6. Persequamur *Br*,Ω (Prosequamur *h,D*)
7. illa *Br,h,O,a,B,P,b,c,Burn.,Vat.1630,Laur.XXXIII,12,13* (illam *G,R pr.m.,D,A,C* illam al. illa *M*)
8. incedere *Br*,Ω (incidere *h*) mirmice *Br, h*, Ω (mirinice *O, Sant.* mimicae *Phill.*)
9. catulli *Br*, Ω (catuli *D,b,c,Burn.*)
12. *Manca il v. in Br,h,D,H; aggiunto nella stessa linea al v. 11 in R*
13. olidum *Br,h* (o lutum *opp.* olutum Ω)
14. potest *Br,D,a,C,Laur.XXXIII,13, etc.* (potes *O,G,R,M,Ashb ,Laur. XXXIII,12*)
15. tamen hoc satis *Br corr.,h,O,G,D,P,Burn.* tamen satis hoc *R,M, H,B,Vat.1630,Laur.XXXIII,12,13* hoc tamen satis *Br. prima della corr.*
17. Ferre:a *Br* (Ferre o *O,a,H,B,A,C.Burn.,Sant.,Laur.XXXIII, 12, 13* Ferre|o| *G,R* Ferrei|o| al. ferre o *M*)
20. *Manca il v. in H*
21–24. *Mancano i vv. in a,c*
21. nihil proficimus nihil mouetur *Br,h*,Ω; *per altro* nichil proficimus. nil mouetur *G con spazio fra* nil *e* mouetur
22. nobis *Br,h*,Ω (uobis *P in marg., Burn.*)

LXIII, 1. athis *Br,h,D,H,A,Vat.1630,Sant.,Laur.XXXIII,12* (actis Ω) celere *Br*, Ω
2. ut *Br*, Ω (et *H,Laur.XXXIII,13*)
3. loca dee *Br*, Ω
4. ubi *Br*, Ω amnis *Br, h*, Ω (animi *Itali*)

5. Deuoluit *Br*, Ω letas *Br*, *h* (iletas Ω illetas *H* illectas *D*, *a*, *P*) acuto sibi pondere silices *Br*, Ω

7. Et iam *Br*, *O*, *H*, *B*, *A*, *Laur. XXXIII*, *13* recenti *Br*, *h* (recente Ω) terre *Br*, Ω (terra *H*, *P*) maculas *Br*, *h*, Ω (maculans *a*, *b*, *c*)

8,9. tympanum *Br* (tympanum *o* timpanum Ω)

9. tu mater *Br*, *h* (tubam Ω) cybelles *Br*, *A*, *B*, *C*, *Sant.* (cibeles *h*, *O*, *G*, *R*, *a*, *Laur. XXXIII*, *13* cybeles *M*, *D*, *Vat. 1630*) tu mater *Br*, Ω inetia *Br* (initia Ω)

10. Quatiensque *Br* (Quatiens quod *O*, *G*, *R*, *M*, *Laur. XXXIII*, *12*, *13*) tauri et *Br*, Ω

11. hec *Br* (hoc *B*, *P*, *b*, *Burn.*, *Vat. 1630*, *Laur. XXXIII*, *12*, *13*)

12. galli *Br*, *h* cybelles *Br*, *A*, *Sant.* cibelles *O*, *H* cibeles *G*, *M*, *B*, *a*, *Vat. 1630*

13. Simul te *Br* (Simul ite Ω) dindimee *Br* (dindimenee *G*, *M*, *D* dindimene *O*, *H*, *C*, *Burn.*, *Vat. 1630*, *Laur. XXXIII*, *13*) pectora *Br*, Ω (pecora *Itali*)

14. Alienaque *Br*, *h*, Ω exules loca celeri *Br*, Ω

15. execute *Br*, *O*, *G*, *P*, *C*, *Sant.* (exęcute *R* exeute *M*, *B*, *Vat. 1630*, *Laur. XXXIII*, *12*, *13*)

16. pelasgi *Br*, *h*, *P* (pelagi Ω)

17. euitastis *Br*, *M*, *parecchi* (euirastis *G*, *D*, *P*, *b*, *c* eiurastis *a*)

18. here citatis *in marg.* excitatis *Br* aere citatis *h* (erocitatis *O* erocitatis *G*, *D*, *A*, *C*, *Sant.* erocitatis al. ere citatis *R*, *M* excitatis *P*, *H* concitatis *a*) animum *Br*, *h*, *Bodl. Lat. Class. e. 15 = Phill. 3364* (an animum Ω in animum *a*, *H*, *P*, *c*)

19. cadat *Br*, *h* (cedat al. cedit *G* cedat *M*)

20. phrygia *prima di* cybelles *Br* (cybelles *H*, *A*, *Sant.* cibelles *O* cybeles *h*, *M*, *D*, *C*, *Vat. 1630* cibeles *G*, *R*, *a*, *B*, *Laur. XXXIII*, *13*)

21. timpana *Br*, *O*, *H*, *Vat. 1630*, *Laur. XXXIII*, *12* roboant *Br* (reboat *a*, *H*)

22. phrix *Br*, *O*, *B*, *H*, *A*

23. menade sui *Br*, Ω (menades ui *P*) ei derigere *Br*, *h*, Ω

25. uaga coros *Br* (uaga cohors Ω, *ma* cohors uaga *B*, *P*, *Vat. 1630*, *Laur. XXXIII*, *13*)

27. atris *in marg.* actis *Br*, *h* (atris Ω athis *D*, *marg. Sant.* actis *a*, *b*, *c*) nota *Br*, *h*, Ω (notha *O*)

28. Thiasis *Br*, *h*, *O* (Thyasiis *con* a *scritto sopra* y *G* Thiasiis *R*, *B*, *Sant.*, *Laur. XXXIII*, *13* Thyasus *a*, *P*, *Vat. 1630* Th asus *M*)

29. timpanum *Br*, *O*, *H*, *Vat. 1630*

30.31.32. *Questi vv. sono ridotti a due in Br così*: Viridem citus adit anhellans uaga uadit omina gens Comitata timpano athis per opaca nemora dux

31. omina gens *Br,h* (anima gens *G,D,B,A,P,Sant.,Laur.XXXIII,12,13* animagens *O,R,M,C* animo gens *a,c*)

32. athis *Br,h,A,Sant.* (actis Ω)

33. indomita uitans onus luci *Br* (luci Ω)

34. sequuntur *Br* (sequntur *G,M* secuntur *O,B,b* sequitur *D,H*) propere pedem *Br,*Ω

35. cybelles *Br,B,A,Phill.,Sant.* (cibelles *O,H* cibeles *h,G,C,Vat.1630* cybeles *M* cybales *D* cibellem *a*)

37. langore *Br,*Ω

38. Abiit *Br,*Ω (Abit *O,b,c*) inquieti *Br* (inquiete *O,G* in quiete *M*) mollis *Br,*Ω rabidus *Br,h,O,G,R,M,D,H,A,C,Sant.,Laur.XXXIII,12* rabidi *B,Phill.,Burn.,Vat.1630,Laur.XXXIII,13*

39. horis aureis *Br,*Ω oris aurei *P*

40. adurit *Br* (sol adura Ω sol a dura *G* sola dura *P,b,c*)

42. somnum *Br* (sōnus *G* sonus *O* somnus *M* athim *Br,h,D* (altin *O,G,R,M* athin *B,A,Sant.,Vat.1630,Laur.XXXIII,13*)

43. Trepidante *Br,*Ω (Trepidantem *R,P,b,Ric.2242*) recipit *Br,h,a* pasipheo *Br* (pasitheo Ω pasithea *a*)

45. ipse *Br,*Ω athis *Br,h,D,B,A,Sant.,Vat.1630,Laur.XXXIII,13* (attis *G* actis *R,M,a,H,C* atris *O*)

46. siue que is *Br* siueque is *h* (sineque is *O* sineque his Ω)

47. extuanter usum *Br,h,Laur.XXXIII,12* (extuanter uisum *D* estuanter usum Ω) retulit *Br,*Ω

49. est ista uoce *Br,h* (est ita uoce *O,G,R,M,B,Phill.,Burn.,Vat.1630,Laur.XXXIII,13* miseriter maiestates *Br,h* (miseriter magestates *O* miseritus al. miseriter maiestas *G* miseritus al. miseriter maiestas al. maiestates *M*)

51. heri fuge *Br,B,A,P* (heri fugit *H*)

52. yde *Br,G,M,B* (ide *O* a die *H*) retulit *Br* (retuli Ω tetuli *O,P*)

53. Ut apud *Br,h,a,b,c* (Ut caput Ω) stabilia *Br,h,O* (*anche G prima della correzione in* stabilla stabila *B* stabilla *C*)

56. pupilla *Br,h* (pupula *D,b* popula Ω) ad te *Br,h,b* (atte Ω áte *D* ate *H* acte *B,c,Vat.1630,Laur.XXXIII,13*)

57. annis est *Br* (animus est Ω)

60. gynnasiis *Br,a,B* (gūmasiis *O* gymnasiis *G corr. da* ginnasiis)

61. ah *Br,h,G,R,M,a,P,Sant.,Vat.1630,Laur.XXXIII,13* (ha *O,H,B*)

62. figura est *Br*, Ω non quid *Br*, Ω (nunquid *D,a,P,c*) abierim *Br*, Ω
64. gynnasii *Br*, *a* gymnasii *h,P,b,c* (gimnasti *o* gymnasti Ω) sui *Br*, *D* (fui Ω, *manca in a,P,c*) decus dei *Br* (decus oley *O,G,M,a*)
65. Mihi *Br*, *M* (Michi *O,G*)
66. Mihi *Br*, *M* (Michi *O,G*) circulis *Br*, *h*, Ω (circulus *D,a*)
67. Liquendum *Br*, *h*, *O*, *G*, *R*, *M*, *P*, *C*, *Laur. XXXIII, 12* (Loquendum *H*) solum *Br*, *h* (solo Ω)
68. Ego nec *Br*, Ω (Egone *P*, *b* Ego non *a* Ego nunc *Sant.*) cybelles *Br,H,A* (cibellos *O* cibeles *G,B,C, Vat. 1630* cybeles *M*) ferarum *Br*, *h*, Ω
70. yde *Br*, *G*, *M* neue *Br* (nene Ω) amica *Br* (amicta Ω)
71. colibus *Br* collibus *h* (columnibus Ω columnis *a* columinibus *P*)
72. siluicultrix *Br* (silui cultrix Ω) nemori uagus *Br*, Ω
74. hinc *Br*, Ω huic *P* sonitus adiit *Br*, *h*, Ω
75. ad aures *Br*, Ω (adauris *O* ad aures deorum *D*) nuncia *Br*, *O*
76. Ubi *Br*, Ω (Ibi *a*, *P*, *marg. Burn.*) iuncta *Br*, *h,O,G,M,a,H,b,c,Laur. XXXIII, 12* uincta *D,B,A,C,Laur. XXXIII, 13* cybelle *Br*, *a*, *A* (cibelle *O* cibele *h,G,H, Vat. 1630* cybele *M*)
77. Renumque *corr. in* Leuumque *Br* (Lenumque *O*) pectoris *Br*, Ω peccoris *a* pecoris *c*
78. fac ut hunc furor *Br*, Ω
79. Fac ut furoris ictum *Br*, Ω (ictum *corr. in* ictu *R* ictu *a,B*)
80. liber *Br* (libere Ω)
81. Age cede *Br* (A cede al. age cede *G*) terga *Br*, *h*, *O*, *b* (tergo Ω) uerum uera *Br*, Ω (uerbera *ed. Calp.* 1481)
82. Fac *Br*, Ω (Fac ut *a,P, Ric. 2242*)
84. cybelle *Br*, *a* (cybele *h,M,D,A,C,Sant.* cibelle *O* cibele *G*, *R*, *B*, *Vat. 1630*)
85. adorta lis *Br*, *h* (adortalis *O,M,A* adhorta lis *G* ad ortalis *R* adhortans *Ric. 2242*, *Ald.* 1515) animo *Br*, Ω
87. littoris *Br*
88. athim *Br*, *h*, *Sant.*, *Vat. 1630* (athin *D,A,Laur. XXXIII, 12* atim *H* actim *Laur. XXXIII, 13* actum *a* actin *R,M,B* attin *O,G,C*) marmorea pelago *Br*, Ω (marmora pelagi *P*, *ed. Calp.* 1481)
89. Fecit *Br*, Ω (Ficit *O* Ferit *H*)
90. spacium *Br*, *O*
91. cybelle *Br*, *a*, *B* (cybele *M,D,A,C,Sant.* cibelle *O,Laur. XXXIII, 13* cibele *h*, *G*, *R*, *H*, *Vat. 1630*) dindimei *Br*, *h*, *O*, *R*, *a*, *B*, *C*, *Laur. XXXIII, 12. 13* (dindimenei *G* dindimenei al. dindim? *M*)

92. tuo *Br,h*, Ω (tuus *a,A,b,c,Sant.*) hera *Br*, Ω (*ma* era *O* heri *h*)
93. rapidos *Br*, Ω (rabidos *P,Ric.2242*)

LXVII. 1. iocunda . . . iocunda *Br,h,O,G,M,a,H,A,C,Vat.1630*
2. iupiter *Br, O,G,M,C,Vat.1630*
5. maligne *Br,h,O,Dresd.* (maligno Ω)
6. est *Br*, Ω marite *Br, h*, Ω (marita *D, a*)
7. age de *Br, h*, Ω uobis *Br, h*, Ω
8. ueterem *Br,h, O, Sant.* (uenerem Ω)
9. placeam *Br, G, etc.* (plateam *R,M,B,Laur.XXXIII,12*)
11. a me *Br*, Ω (*om. h*)
12. isti *Br, h, H, B, A, P, C, Burn., Sant., Vat. 1630, Laur. XXXIII, 12, 13* (istius *R, M* istius *O,G* istis *D,a,c,Ric.606*) qui te *Br,h*, Ω
14. culpa tua est *Br*, Ω (tua culpa est *h*)
15. est *om. Br, h*
17. Quid *Br*, Ω (Qui *h,c,Burn.*) possum *Br*, Ω (possim *D, a, Ric.606* possit *P*)
18. uobis *Br*, Ω (nobis *Muretus*)
20. attigerat *Br,h,Burn.,Vic.* (attigerit Ω attigerit *corr. in* attigerat *P*)
21. *Il v. è in Br*, Ω; *om. in O*
22. hanc tunicam *Br*, Ω
23. gnati *Br* (gnate *D,a,Ric.606* nati *H.B,Vat.1630,Laur.XXXIII,13*) cubille *Br*
27. Et querendus unde *Br*, Ω (Et quaerendus ut unde *D,a,c,Vic.,Ric.606*)
28. Quo *Br,h* (Quod Ω)
30. nati *Br,h, D,H, Burn.* (gnati *G, M, etc.*) minxerit *Br, G, M, etc.* (minxerat *D,a,B,Phill.,Ric.606,Laur.XXXIII,13*)
31. hoc dicit se *Br,h,O* (se dicit *om.* hoc *G* hoc se dicit *D,a* se dicit hoc *M,A,C,Sant.,Laur.XXXIII,12,13* sed dicit hoc *H,B*)
32. Brixia chinea suppositum specula *Br*, Ω
33. Flauum *Br* melo *Br, O* (mello Ω)
34. mee *Br* uice *a*
35. postumio *Br* (posthumio *h,O,G,M,c,Laur.XXXIII,12*) cornelii *Br* narrat *Br*, Ω (*ma* amat *G*)
37. Dixerat *Br,h,H,B,P,Vat.1630* (Dixerit *G,M,etc.* Dixit *O*) quid tue iste *Br* (quid tu iste *O,G,H* quid tu istec *parecchi*)
38. lumine *Br,h,O,a,B, marg. Sant.,Vat.1630*
39. hoc *Br,h,H,Laur.XXXIII,12* (hic *D,a,P,c,Burn.* hec *altri*)
40. aperire *per* operire *Br,h* aut aperire *Br*, Ω (aut operire *H,Vat.1630*)

41. audiui *Br, O, G, D* (audiuit *R, M, H, B, A, C, Sant., Laur. XXXIII, 12, 13*)
42. Sola cum conciliis *Br, h, Ω* (*ma* Sola cum aliis al. conciliis *M* Sola cum concillis *O* Sola conciliis *D, a*)
44. Sperent *Br, h, O, Vic.* (Sperẹnt *G, R* Speret *M, D, C, etc.*)
45. addebit *Br, h* (addebat Ω, *ma* addebant *O, Sant. pr. m.*)
46. ne *Br* (te *O, G, R, M, A, Sant., Laur. XXXIII, 12*)
47. est *Br, Ω* (*om. a, D pr. m., Ric. 606*) que *Br, h* (qui Ω)
48. mendatii *Br, h, R, B* (mendacii Ω)

Raccolte così le concordanze di *Br, h* fra di loro e moltissime altre di essi con altri codici, non meno che le differenze che passano fra *Br* ed *h*, vediamo se ci sia dato di trarre qualche conseguenza da sì ricco materiale. Circa le differenze, nulla per vero ho da aggiungere a quanto ho già dichiarato, e soltanto potrei indugiarmi a spiegare più particolareggiatamente il dissenso non meramente ortografico di parecchie altre lezioni (1); ma si tratta di cosa che il lettore esperto di manoscritti e conoscitore del testo catulliano può fare da sè con l'elenco sot-

(1) Ad ogni modo, ecco qui un altro breve elenco: VI, 13. panda *Br*
s u
invece di pandas *h* (forse da panda) VIII, 7. nollebat *Br* nollebat *h* (*Br* trascurò la *u* sopra *n*, che doveva essere nell'esemplare, o è
mus
una ulteriore correzione di *h*) XI, 23. Ultimi *Br* Ultimus *h* (*h* adottò
id
una sola lezione; *Br* riprodusse per intero l'originale) XII, 7. uel *Br* id *h*, che scelse la seconda delle due lezioni dell'esemplare. XVII, 1. ledere *Br* ludere *h* (evidentemente da ledere al. ludere *h* scelse la
u
seconda lezione, o nell'esemplare era ledere) XXV, 2. innula *Br* (per imula) inula *h* (la differenza proviene da ĩnula dell'esemplare) XXVIII, 10. Tota *Br* Tosta *h* (o l'esemplare aveva Toṣta, e il copista di *h* non soppresse la *s*, o è uno sproposito tutto proprio di esso copista) XXX, 12. facti *Br* facta *h* (il copista di *h* scelse la lezione falsa da
a
facti, o da facti al. facta: anche il *Laur. XXXIII, 13* ha la lez. facta) LXVI, 41. adiurarit è la vera lezione, ed è propria di *h* (la lez. adiu-
e
raret di *Br* può derivare da un originale adiurarit, per effetto della lezione di Ω XCV, 2. hiemen *Br* hymen *h* (la presenza di hiemen
ie
anche in *C* legittima il sospetto che nell'esemplare si trovasse hymen). E questo potrà bastare!

t'occhio. All'incontro, per rispetto alle concordanze di *Br,h* or con l'uno or con l'altro codice, il materiale da me esibito mette in chiaro una parentela più o meno stretta con *O,D,a,H,B,A,P*, particolarmente con *a,H,B* che per questo riguardo sono i più importanti, ed eziandio una affinità, per quanto variabile, col *Burn.*, col *Vic.*, col *Phill.*, col *Ric. 606*, coi due *Laur.* (*XXXIII,12* e *XXXIII,13*), non che con *C,b,c*, fra i codd. che sarebbero di minor momento dal presente punto di vista. Ma basta scorrere per breve tempo la *varia lectio* dell'edizione maggiore dell'Ellis, per apprendere quanto sovente quei medesimi codici, che più si avvicinano ad *h*, e perciò a *Br*, discordino fra di loro, e quanto sovente ancora si oppongano ad *h*. Che se ne dovrà inferire? Io credo che si possa fare una prima illazione, affermando che vi fu — ed è da credere che esista ancora — un codice da cui *Br* ed *h* devonsi ritenere direttamente derivati, quasi due figli gemelli. La seconda illazione, che parmi di poter trarre con sicurezza, è che questo codice, che indicherò d'ora in avanti con φ (1), del quale *Br* ed *h* sono apografi diretti, appartiene ad un gruppo o famiglia che si connette con *O* ma non per via di derivazione diretta, bensì in via, dirò, laterale. Il numero certamente non cospicuo, ma neppure disprezzabile, di lezioni buone, sicure, che possono essere accettate nel testo catulliano, e in parte vi furono accolte, e sono proprie solo di *Br,h*, e non di *O*, e che non sono già un'invenzione di eruditi e un'interpolazione umanistica, ma appartengono, almeno in parte, al vero e proprio patrimonio catulliano e, in ogni modo, rientrano in una sincera tradizione manoscritta del *liber* catulliano, e la non infrequente opposizione alle lezioni di *O* senza passare nel campo di *G*, assicurano a φ una individualità che si contrappone, come ad ogni altro codice catulliano, così pure allo stesso *O*, che è di essi il più insigne e col quale ha concordanze molte e di singolare importanza. Ed è questo un punto che mi preme di svolgere, prima di dar termine al mio lavoro, mettendo dapprima in rilievo, per ragion di brevità, almeno un certo numero di lezioni vere o probabili in cui *Br* (e qui lascerò *h*, per attenermi solo a *Br* che conosco a fondo

(1) Con Φ, invece, indicherò l'esemplare da cui φ fu trascritto.

per intero) concorda con *O*, comprendendo fra tali lezioni anche quelle che ci conservano un certo *veri vestigium*, per dirla con K. P. Schulze. Anzi, per siffatta bisogna, mi varrò dello stesso materiale di lezioni da lui raccolto nei suoi *Prolegomena* (1), così per il confronto di *Br* con *O*, ne' limiti testè indicati, come poi per i rapporti con *G,M* ed altri codd., sempre entro i medesimi limiti di una scelta.

Se non che una osservazione mi pare qui essere opportuna. Dal materiale di lezioni di alcuni carmi catulliani testè esposto si ha la conferma che *Br,h*, e perciò φ, rappresentano una tradizione manoscritta in parte più corrotta di quella che è rappresentata da altri codd.: aggiungerò anzi che le prove di una maggiore corruzione aumenterebbero qui, se per la ricostruzione di φ avessi avuto modo sicuro di raccogliere tutte le lezioni di *h*, o rispondenti o non rispondenti a *Br*. Ora ciò non iscema punto il valore, per piccolo che sia, di φ, e perciò di *Br,h*, chi consideri come la corruzione di φ non implichi per nulla, in tutti i casi, la stessa corruzione in Φ, da cui φ fu trascritto. Si avverta che molte lezioni guaste, che abbiamo citato, e molte, che si potrebbero ancora produrre, agevolmente si riconducono a lezioni sane, oppure, almeno, alle lezioni presentate dai codd. in cui è meno inquinata — poichè tutta è più o meno inquinata — la tradizione del testo. Pochi esempi saran sufficienti a provarlo.

III, 3. *est mortuus* per *mortuus est* (φ o sbagliò o trascurò il segno di trasposizione in Φ) VII, 6. *uerteris* per *ueteris* (φ scrisse forse per isbaglio *ủteris* che fu naturalmente interpretato per *uerteris*, cfr. *ủtor* = *uertor*) VIII, 4. *uetitabas* (anche lezione di *H*) per *uentitabas* (φ copiò male il *uẽtitabas* di Φ) X, 28. *non* (*nõ* in *Br*) per *modo* (scambio in φ: *nõ* fu sostituito al *m̃o* di Φ) XIII, 3. *bona* per *bonam* (φ scrisse *bona* invece del *bonã* di Φ; cfr., p. e., XCVII, 11. *illa* per *illam* in *Br,h*, perciò *illa* φ invece di *illã* Φ) XVII, 10. *latus* per *lacus* (causa lo scambio frequentissimo di *c*

(1) *Catulli Veronensis liber. Recensuit* Aemilius Baehrens. *Nova editio a* K. P. Schulze *curata*. Lipsiae, MCCCLXXXXIII, p. XXXII segg. Faccio il nome dello Schulze, e non del Baehrens, perchè i *Prolegomena* della nuova ed. furono rifusi e accresciuti di molto materiale dallo Schulze.

e *t*: *latus* φ *lacus* Φ; cfr. il *pudiceque*, che viene dopo in *Br*, *h*, Ω, in luogo di *putideque* o *putidaeque*, che è lez. di *b* e *Burn*.) 24. *potes olidum* (da un *potesolidum* di φ, sostituito al *potestolidum* di Φ = *pote stolidum* : *potest olidum* Ω) XXVIII, 13. *Fati* per *Farti* (*fati* φ, forse per falsa interpretazione di abbreviazione scambiata per *Fati*: le lez. *Facti* di *D*,*H*, *Fracti* di *b*, mostrano la varietà della scrittura nei mss.: per questo supposi una lezione che potesse dar facilmente luogo ad errore) XXIX, 15. *aut* per *alit* degli altri codd. (frequente scambio di *ut* per *lit*; perciò *aut* φ invece di *alit* Φ, deformazione di *alid* comune agli altri codd.: la lez. *ait* di *D*,*a* è prova di tali scambii) XXX, 3. *perdere* (*ꝑdere* in *Br*) per *prodere* (*ꝓdere*), causa il solito scambio dei due segni (perciò *ꝑdere* φ, ma *ꝓdere* Φ) 7. *iubeas* (forse da *iub'bas* o *iuƀbas* di Φ, ove poteva anche trovarsi *iubeḅas*) XXXI, 5. *thimina* (φ scambiò *thimiā* di Φ = *thimiam* o *thymiam*, lezioni di Ω, con *thimīa*; perciò la lez. *thimina* = *thimīa*) XXXIV, 6. *proles*, sostituito a *progenies* sopra cui, come glossa, doveva essere stato scritto in Φ (invece φ copiò la glossa, perchè vocabolo più comune) 8. *oliriam* (è una *u* presa per un *ri*, come spesso: perciò φ sostituì quel vocabolo ad *oliuam* di Φ) 23. *ancique* (anche qui alla *t* fu sostituita la *c* in φ: *antique* Φ e Ω) XLII, 13. *olidum* per *o lutum* (φ lesse *id* invece di *ut* in *olutum* di Φ) XLVII, 4. Se la parola *codices*, messa dall'Ellis accanto a *proposuit*, vuol dire, come pare, che questa fosse pure la lezione di *h*, la lez. *p̂posuit* di *Br*, conservata anche da *R* (e non è questa la sola coincidenza di *Br* con *R*), mostrerebbe lo scambio, fatto da *h*, di *p̂* = *prae* col ꝓ = *pro* di cui si è discorso: φ doveva avere *p̂* LXIV, 174. *incertam* (che è anche lez. di *H*) per *in cretam* opp. *in creta* degli altri codd. (in Φ doveva leggersi *incer*^{re}*tam*, come si legge in *C*, o meglio *incer*^{re}*tā* (cfr. *incertā* di *Br*); ma φ scelse la lezione sbagliata, trascurando la correzione) 249. *tum prospectans* (per *tamen aspectans*), lezione interessante sotto due aspetti. *Br* ha l'abbreviatura *tū ꝓspectās* che dimostra lo scambio, frequente nei codd., di *tn̄* = *tamen* con *tū* = *tum* (cfr. XV, 17. ove *Br* ha *t*^{u}*n̄*. cioè ^{tum}*tamen*). Per *ꝓspectās*, si può supporre che fosse in Φ, come in *R*,*M*, la duplice lezione *ꝓspectās al. aspectās* (*G* ha *praspectans* con *p* ed *r* tagliati per traverso da lineetta), e che φ abbia scelto la prima senz'altro. LXVI, 48. *scelerum* (anche lez. di *Vic.*, proviene evidentemente da una *s* aggiunta da φ alla lez. *celerum*, che, propria di *O*, verosimilmente si trovava perciò pure in Φ, parente di *O*) LXVII, 20.37. *attigerat Dixerat* (per *attigerit Dixerit*). Evidentemente φ preferì queste lezioni davanti a *attig*^{a}*erit Dix*^{a}*erit* di Φ. Cfr. la lez. *minxerat* del v. 30 dello stesso carme, che è la lez. di *D*,*a*,*B*,*Phill.*,*Ric.606*,

Laur.XXXIII,13, di fronte a *minxerit* di *Br,G,M, etc.*, per cui è da presupporsi una doppia lezione preesistente *minxerit al. minxerat*, ovvero *minxerit* (a) XCVI, 6. *Quintille* è spiegato benissimo dallo scambio di *li* con *ll*: φ aveva *Quintille*; ma Φ *Quintilie* = *Quintiliae* XCIX, 7. *simul hoc factum est*, (hoc) proveniente da *simul id factum est*, o viceversa, che spiega pure *ad* invece di *id* in *G*, e *simul est id factum est* di *H* con erronea ripetizione del verbo.

Ma è tempo di confrontare *Br* con le lezioni " quibus O solus uel paene solus uerum ipsum aut ueri certe uestigium seruauit „, giusta l'espressione dello Schulze (1). Eccone una scelta.

XXVI, 1. *ura* (*ura* in *Br*) XXX, 9. *Idem* XXXIV, 12. *Omniumque* (per *Amniumque*) XLII, 7. *illa* LII, 3. *Vatinius* LIII, 2. *vatiniana* LV, 11. *Quedam* (anche *R*) LXI, 187. *uelut* LXIII, 46. *sineque is* in *O* *siue que is* in *Br* 81. *terga* LXIV, 10. *texta* 139. *blanda* (credo anch'io che questa, e non *nobis*, sia la vera lezione) 165. *Externata* 183. *lentos* 231. *Tum* 319. *custodibant* (2) 353. *messor* (forse da preferirsi a *cultor*) LXVI, 5. *sublamina* (così *O* per *sub Latmia*; *sub lamia* in *Br*) 45. *cumque* 71. *ranūsia* in *O*, ma *rānusia* in *Br* (come in *a,b,Sant.*) LXVII, 5. *maligne* 8. *ueterem* 31. *hoc dicit se* 33. *melo* (3) LXVIII, 2. *mittis* 67. *clausum* 77. *rāmusia* in *O* (*rānusia* in *Br*) 119. *nec tam* LXXIII, 6. *amicum habuit* LXXVI, 5. *manēt in*, lezione vera di *Br* (*manentum* in *O*) 11. *instinctequé* LXXVII, 1. *amice* LXXIX, 4. *notorum* (*Br* ha *notorum* (a); ma quale delle due lez. è la vera?) LXXX, 6. *tenta* (4) LXXXIII, 4. *Sana* è la vera lez. che dà *Br* (*Sanna* è in *O* contro *Samia* di *G,B,A,C*: *Samia al. sana R,M*) LXXXVIII, 2. *Prurit* lez. di *Br,D* (le si avvicina *Ꝑrurit* di *O* contro *proruit* di *G*) CI, 7. *interea hec*.

(1) Non devo tralasciare che talora a me non par vero nè vicino al vero quel che tale è giudicato dallo Schulze. Così, p. e., la lez. Lentaqȝ di *G,Br* etc. (LXI,102.) a me par più prossima alla vera (Lenta qui) che non lenta sed di *O*.

(2) Parrebbe che la lez. di *h* sia *custodiebant*, perchè l'Ellis dà *custodibant* come lez. di *O,D,a,P,b,Burn.,Ric.2242*, e non nomina *h*.

(3) Dal silenzio dell'Ellis si argomenterebbe che *mello* è lez. di *h*.

(4) Io interpreto *tñta* di *O* come = *tenta*; cfr. *tñr* = *tenetur*, *tñb's* = *tenebris*. In ciò vado d'accordo con lo Schulze; ma egli, seguendo il Baehrens cita come prova *m̄a* = *mea*. Poteva trovare prova migliore!

Vediamo ora parecchi confronti di *Br* con *G*, dove questo " meliores praebet scripturas „ contro *O*:

VIII, 16. *adibit* 18. *cui* X, 33. *tu insulsa* (vera lez. di *Br,h* contro *tu insula* di Ω, *tulsa* di *O*) XII, 2. *in ioco* 8. *uelit* 15. *muneri* (1) XIII, 9. *meros* XXV, 5. *oscitantes* XXIX, 19. *Hybera* (contro *Libera* di *O*: non è vero che in *G* sia *hibera*, come scrisse lo Schulze) XXXVI, 18. *interea* XXXVII, 1. *uosque* XXXIX, 20. *uester* LIV, 1. *oppido* (lez. di *Br*, *opido* di *G* contro *apido* di *O*) LXI, 161. *Rasilemque* LXII, 13. *habent* (*h'nt* in *Br*) 43, 44. Questi vv. sono in *Br, G*; mancano in *O,T* LXIV, 15. *Equoree* 270. *procliuas* 301. *Pelea* (*Palea* in *Br*, *Palea* in *O*) 332. *Leuia* 344. *teucro manabunt* (ma *tergo* (2) *manabunt* in *Br*, *teucto manebunt* in *O*) LXV, 3. *dulcissimus harum* (per *dulcis musarum*; *dulcissimus hauum* in *O*) LXVIII, 37. *nolim* 61. *uiatori* XC, 6. *Omentum* (vera lez. in *Br,D*; *omne tum* in Ω; *quintum* in *O*) CIII, 2. *est o* (= *esto*; solo *est* in *O*; *es o* in *D*).

E passiamo alle lezioni vere o migliori in cui *Br* consuona con l'accordo di *O,G* (anche *G* corr.):

I, 9. *quod* IV, 1. *phasellus* (3) IX, 8. *tuus* XI, 10. *uisens* 11. *horribilesque* XII, 17. *Et* (l'Ellis nell'ed. min. preferisce *Ut* di *Harl.4094*) XXVIII, 11, 12. *pari* (4) *casu* XXXVII, 9. *Atqui* XXXIX, 12. *lamiuinus* (ma *Br* ha *lamininus*: vera lez. *lanuinus*) XLII, 15. *tamen hoc satis* (per correzione in *Br* da *hoc tamen satis*) 22. *nobis* (lezione che si può sostenere contro *uobis* di *marg. P* e di *Burn.*, preferita dall'Ellis) L, 20. *reposcat* (*resposcat* in *O*) LII, 2. *nouius* (per *Nonius*) LXI, 159. *omine* LXIII, 73. *iam iamque* 76. *iuncta* LXIV, 240. Nessun intervallo dopo questo v. 334-337. Questi vv. sono in *Br* come in *O,G*; mancano in molti codd., come in *D,a,B,P,b,c, Burn., Vat.1630, Ric.606, Laur.XXXIII,13*) LXVI, 24. *tunc* (5) 83. *colitis* (Ellis preferisce *petitis* di *D, a, P, c, Burn.*)

(1) Veramente la lez. di *G* è *numeri*, come quella di *O*, ma con sopra l'aggiunta *al. muneri*.

(2) Anche in *G* la prima lezione era diversa: pare che sia stata raschiata la lettera su cui fu scritta la *c*, e siasi ridotta ad *r* la penultima lettera.

(3) In *G* fu raschiata una *l*. anche nei vv. 10 e 15.

(4) La lez. di *G* è *parum* soprascr. *al. pari*.

(5) La lez. di *G*, con *R,M*, è *nunc al. tunc*.

LXXIII, 4. *obestque* LXXXI, 3. *ab sede* XCI, 3. *constantemue* CVI, 1. *esse* (Ellis *isse* dall'*ipse* di *R*,*M*, etc.).

Invece *Br* è ora contro *O* ora contro *G*, ora contro entrambi in non poche lezioni buone, come

VI, 17. *uersu* (*uersum* in *O* ed *R* non corr.) XIV, 15. *optimo* (*oppinio* in *O*; *opimo al. optimo* in *G*,*R*,*M*, etc.) XXXII, 1. *mea* (*meas* in *O*) XXXI, 5. *bithinos* (*bithinios* Ω) XXXV, 4. *menia* (*ueniam* in *O*; *meniam* con *m* raschiato in *G*) XXXIX, 20. *expolitior* (*expolitor* in *O*) XL, 3. *deus* (*dens* in *O*) XLI, 4. *formiani* (*forniani* in *O*) XLIII, 8. *seclum* (*sedum* in *O*) XLVIII, 6. *Sit* (*Sint* in *O*) LXIV, 7. *uerrentes* (*uerentes* in *O* e *G pr.m.* 33. *Thessalia* (*Thesalia* in *O* *Tessalia* in *G*) 61. *Saxea* (anche in *G* corr.; *Saxa* in *O*) 121. *uecta* (*necta* in *O*,*G*) 126. *Ac tum* (*Actum* in *O*,*G*,*R*) 145, *apisci* (*adipisci* in *O*) 164. *Sed quid* (*Si quid* in *O*) *auris* (anche *G* corr. da *aures*, lez. di *O*) 180. *An patris* (*impatris* in *O*; *In patris* corr. in *An patris*, o vicev., in *G*) 234. *antenne* (*antēne* in *Br*; *antenene ne* in *O*) 290. *nutanti* (in *Br* con *R*,*M*; *mutanti* in *O* e *G* non corr.) 295. *penę* (caso forse unico di segno del ditt. *ae* in *Br*; *pena* in *O*) 309. *uitte* (*uicte* in *G*, *D*,*P*, etc) 324. *tu tamen* per *tutamen* (lez. di *Br* (*tu tñ*); *tutum* di *O*; *tutum* marg. *tu tamen* di *G*,*R*,*M*) 328. *optata* (*aptata* in *O*) LXVI, 35. *Si* (*Sed* in *O*; *Sed al. si* in *G*,*R*,*M*).

Altri esempi invece abbiamo di accordo in buone lezioni di *Br* con *O* ed altri codd. contro *G* oppure *G* ed altri codd. Così

XVI, 4. *Quod* (*G* corr. *Quot*) XVII, 22. *qui* (*quid G* corr., *D*) XXIII, 9. *minas* (*ruinas* in *G D*) XXIV, 9. *Hoc tu quam lubet* (*Nec tu quamlubet* in *D*; ma *Hec tu qua lubet* in *G*) LXIV, 134. *discedens* (*discendens* in *G*) 291. *Flammati* (anche in *D*; *Flamati* in *O*; ma *Flamanti* in *G*, *Flammanti* in *M*) 381. *currite fusi* (*ducite fusi* in *G*) LXVI, 24. *Ut tibi* (*Ut ibi* in *G*) 32. *abesse* (*adesse* in *G*) 85. *irrita* (*inita* in *G*) LXVII, 35. *narrat* (*amat* in *G*) LXVIII. 12. *Neu* (*Seu* in *G*) 101. *tum* (*tuum* in *G*) LXXVI, 26. *pro pietate* (*proprietate* in *G*) LXXVII, 9. *Verum id non impune* anche *P* e *Burn.* (ma *Verum non id impune* in *G*; *Id uerum non impune* negli altri) LXXXIV, 11. *isset* (*esset* in *G*) LXXXVII, 1. *potest* (*pone* in *G*).

Del resto molte buone lezioni di *Br* emergono anche dal confronto con *M* (1), col quale spesso si accorda contro *O* e *G*; e chi conosce gli stretti rapporti che sono tra *M* ed *R*, di cui pur troppo solo assai poco è reso di pubblica ragione, insieme con *M* potrà quasi sempre mettere *R*. Ne do un breve saggio:

II, 13. *ligatam* (*ligatam* marg. *al. negatam* in *M,R*; *negatam* in *O*; *negatam* marg. *al. ligatam* in *G*) XVII, 23. *Nunc eum uolo* (la lez. di *M* è *Nunc cum uolo* (lez. di *G,R*) sopra scritto *al. hunc cum*; di *O* è *Nunc uolo uolo*) XXVIII, 11. *fuistis* (*fuisti* in *O,G,D*) XXXI, 1. *Sirmio* (*Syrmio* in *Br*; *Sirinio* in *O,G*); XXXV, 12. *amore* (*amorem* con *m* canc. da / in *R*; *amorem* in *O,G*) LXI, 24. *Ludicrum* (con *R,a,B*; *Ludricum* in *O,G*) 169. *ac* (*hac* in *O,G*) LXII (2), 58. *cara* (*cura* in *O,G,D,Thuan.*) LXIV, 22. *seclorum* (*seculorum* in *R*; *seculorum* in *O,G,B*) 80. *menia* (con *R*; *incenia* in *O*; *ingenia* in *G*) 127. *protenderet* (anche *R*; *pretenderet* in *O,G,D*) 213. *egeus* (*egens* in *O,G*) LXVI, 71. *Pace* (*Parce* in *O,G*) LXXII, 2. *pre me* (*prime* in *O*; *per me* in *G*) LXXVI, 15. *hec est hoc* (*hec est hec* in *O,G*) 18. *Extrema* (è la lezione di *Br*, e quella di *M* corr., e la credo preferibile a *Extremum* che è lezione di *D,P*; *Extremo* in *O,G* LXXXIX, 4.

---

(1) In questo confronto, avendo alla mano la già citata riproduzione eliotipica di *M*, ho trovato non pochi errori commessi dallo Schulze (op. cit., p. LI segg.) coll'attribuire ad *M* lezioni che di *M* non sono. Così, p. e., *M* ha: XII, 16. *ameni*, non *amem*; XXI, 13. *Nec*, non *Ne*; XLI, 5. *puelle*, non *puella*; XLIV, 20. *sectio al. sestio*, non *sestio*; L, 14. *ad*, non *at*; LXI, 223. *penolopeo*, non *penelopeo*, ecc. Aggiungerò ancora che lo stesso rilievo ho fatto a proposito delle lezioni di *G*, anche tenendo conto che la vecchia riproduzione fotolitografica, eseguita con mezzi non ancora perfezionati come sono i moderni, ha fatto scomparire alcune particolarità di ritocchi e correzioni. Ma è certo che parecchie volte lo Schulze ha sbagliato. Qui mi basti citare un esempio che riguarda anche *M*: LXXIX, 4. *sauia Br,G,M*: lo Schulze invece nota (p. LIII): *sauia* M: *sania* OG; di vero non c'è che la lez. di *O*, propria anche di *Vat.1630*. Devo tuttavia notare che di questi sbagli non pochi sono del Baehrens, di cui lo Schulze doveva meglio vagliare il materiale delle lezioni, riesaminandole ad una ad una; ciò che non pare abbia fatto.

(2) A proposito di questo carme, si abbia presente che *Br* non ha nessuna divisione di parti e nessuna iscrizione relativa, neppure in margine, come è in *G,R,M*. È notevole la lezione del v. 37 *Quid tum* di *Br* di fronte al *Quittum* del *Thuaneus* (*M* ha *Quod tamen* sopra scritt. *al. quid tamen*; *G* ha *Quod* (sopra scritt. *al. quid*) *tamen*; *B* ha *Quod tamen al. quid tum*).

macer (in *R* non corr. è *mater* lez. di *O,G,D*) XCVII, 8. *Meientis* (anche *R*: *megentis* in *O,G*) CII, 1. *ab amico* (*ab antiquo* in *O,G*) CV, 1. *pipleum* (così *Br,M* per *pipleium*, lez. di *R,C*; *pipileium* in *O,G*) 2. *furcillis* (ma *furcilis* in *O,G*) CXV, 8. *mentula* (*mencula* in *O*; *mentulla* in *G*).

Ma essendo tempo oramai di por termine al lungo cammino, io senz'altro verrei a raccogliere le conchiusioni a cui può condurre questo faticoso studio, se non dovessi, prima di finire, prevenire e combattere una obiezione, quasi direi un'accusa, di carattere generale, che più d'uno mi potrebbe muovere, e certamente, anzi, mi muoverà. Non mi dissimulo che l'aver fatto oggetto di così minuto esame, di così varii confronti un codice della seconda metà del sec. XV, di cui un filologo tanto insigne, tanto benemerito degli studi catulliani, Robinson Ellis, dopo averlo avuto sotto gli occhi, si limitò a citare solo tre o quattro lezioni, non incontrerà l'approvazione di coloro i quali per la storia del testo catulliano, per la sua costituzione e sistemazione, credono che basti far capo a quelli che si chiamano i codici principali, perchè più antichi, come *O,G,R* in prima linea, e pochissimi altri, come *M,D,a*, in seconda, riguardando i rimanenti come *deteriores* e di quasi nessun momento. Anche parecchi anni dopo della *editio minor* dell'Ellis, nella quale, con un sensibile progresso per la determinazione del testo, furono utilizzate parecchie lezioni di nuovi codici fra i così detti *deteriores*, il Morgenthaler conchiudeva la sua già citata dissertazione *De Catulli codicibus* con una sentenza che non esito a chiamare falsa, in quanto affermava " Omnes . . . illos recentiores codices, qui quidem hucusque innotuerunt, ad redintegrandum V archetypon nihil fere contulisse persuasum habemus. „ Io invece deploro che l'Ellis non abbia fatto di più, e sono sicurissimo che la disamina, non fuggevole e superficiale, ma attenta, calma, esauriente, di molti codici più recenti, come sono *Br.h*, porterà a risultati di cui la critica avrà a compiacersi. Ed ho la profonda persuasione che, quando saranno escussi per intero que' manoscritti, non solamente sarà cresciuto il buon contributo ad una più precisa ricostruzione del testo catulliano, ma sarà confermato ciò che l'esame di *Br.h* mi fa fortemente sospettare, che esista una tradizione del testo indipendente così da *G* ed *R*, come da *O*, pur accostandosi per certi caratteri specifici più ad *O* che agli

altri due, quantunque quel che presentemente si sa di *R* non può ancora legittimare in molti casi alcuna affermazione assoluta, chè solo si può avanzare al riguardo qualche congettura, come è noto, per mezzo di *M* che ha così stretta parentela con *R*. Ora appunto per questa fede in una tradizione manoscritta specificamente diversa da *O, G, R*, parmi che una conchiusione d'ordine generale si possa fare, ed è che, fino a quando non sia conosciuto per intero il materiale di *R* e di tutti i codici che sono tuttora inesplorati, o quasi inesplorati, sarà prudente, anzi doveroso, non avventurarsi a classificazioni di codici, e tanto meno a classificazioni in cui, isolando *O*, si riconducano all'archetipo (*V*), per mezzo di un cod. *z*, fratello di *RM* e con essi figlio di un *y*, il quale *y* col fratello *G* sarebbe nato da *x*, figlio di *V*, tutti i codici così detti *deteriores*, fra cui *h*, come osò fare il Morgenthaler (1). Cerchiamo dunque di conoscer bene tutta la tradizione manoscritta di Catullo; e allora solamente potremo classificare.

Intanto, per quel che riguarda la presente ricerca, un qualche avviamento a tale conoscenza credo sia stato fornito agli studiosi del poeta veronese, dimostrando:

1°. Che *Br*. così per l'esiguo numero di varianti come per buona messe di lezioni, si accosta di preferenza ad *O*, quantunque se ne differenzi in modo da non potersi considerare come derivato da esso:

2°. L'accordo mirabile di *Br,h* dimostra la loro derivazione da un unico codice più antico, φ, di cui essi sono due apografi:

3°. Il disaccordo non infrequente tra *Br* ed *h*, quando non sia dovuto a quelle che sono le cause generali e comuni di scorrezioni ed errori nei mss., prova una diversa interpretazione grafica delle lezioni di φ da parte dei copisti di *Br,h*, e talora una scelta diversa di lezioni dalla *varia lectio* di φ, sia marginale sia interlineare:

4°. Come le differenze che si notano fra *Br* ed *h* mettono capo, non di rado, ad errori commessi nella trascrizione da φ, oppure, talvolta, alla scelta di una piuttosto che di un'altra

(1) Op. cit., p. 52.

delle lezioni contenute in φ; così non poche discrepanze di φ (= accordo di *Br,h*) da altri codici si possono ricondurre ad una erronea trascrizione da Φ, esemplare di φ, per parte del copista di quest'ultimo, o ad una scelta differente di varianti marginali o interlineari esistenti in Φ;

5°. Ciò non ostante, Φ, e perciò φ e i suoi due apografi *Br,h*, rappresentano molto verosimilmente una tradizione manoscritta indipendente, la quale ci ha conservato un numero non disprezzabile di lezioni genuine, vere o probabili, che indarno si cercano in *O,G,R*.

6° L'esistenza in *Br,h* di molte lezioni che non s'incontrano in *G, R, M*, bensì in *O*, e sono comuni ora ad uno ora a più altri manoscritti, fra cui *a, H, B, A, P, Burn., Vic.*, ecc., non escluso lo stesso *D*, ma sempre in quantità variabile, cioè senza che all'accordo costante di *Br,h* fra di loro corrisponda, volta per volta, sulle medesime lezioni l'accordo di quei manoscritti, i quali, all'incontro, in poche di quelle lezioni mostransi tutti all'unisono, e nelle rimanenti si trovano più o meno in contrasto gli uni con gli altri, attesta, in ogni caso, che Φ, l'esemplare di φ, deve essere più antico dei codd. da cui discendono tali manoscritti più o meno affini, e certamente dimostra che Φ rappresenta, rispetto a questi, una tradizione meno contaminata e perciò più sincera, spiccatamente divergente verso *O* (1).

(1) La prova lampante di questa sesta conchiusione si ha nello elenco, più sopra riferito, delle lezioni che *Br,h* hanno comuni con singoli codici oppure con pochissimi o con pochi. Ivi si trovano, ciascuna a suo luogo, lezioni che *Br,h* han comuni col solo *O*, cioè: XXII, 4. *uel neque nec idem* XXVII, 5. *Ad uos* XLIV, 11. *Oratione . . . petitorem* L, 5. *illos* LV, 4. *id circo* LXI, 129. *uilice* LXIII, 28. *Thiasis* 53. *stabilia* LXIV, 56 *tunc* 165. *Externata* LXVII, 31. *non solum hoc dicit se* LXVIII, 93. *iocundumque* LXXVI, 11. *instincteque* LXXVII, 1. *amice* LXXXV, 2. *si* XCIX, 9. *manaret* CXIV, 3. *An cupiam*. Vi abbiamo esempi di concordanze di *Br,h* con *O* ed un solo altro cod., come: XXV, 5. *ostendet* (*D*) 8. *Inepteque* (*H*) LX, 5. *Contentam* (*D*) LXIII, 81. *terga* (*b*) LXIV, 77. *androgeane* (*Vat.1630*) 121. *ut* om. (*P*) 341. *peruertet* (*a*) LXVII, 5. *maligne* (*Dresd.*) 8. *ueterem* (*Sant.*) 44. *sperent* (*Vic.*) LXVIII, 55. *nummula* (*marg. Ric.606*) 104. *paccato* (*H*) LXXVI, 14. *officias* (*H*) LXXVII, 6. *heu* una sola volta (*Vic.*) CI, 7. *interea hec* (*P*) CVII, 7. *hac est* (*Vic.*). E l'avvicendarsi dei codd. continua, quando si tratta di lezioni comuni a

Br,h,O e due altri codd. soli, p. e.: LI, 12. *Lumina* (*D,a*) LX, 1. *libissinis* (*a,Burn.*) LXI, 187. *uelut* (*C,Paris.7989*) LXIV. 133. *littore* (*a,P*) 183. *lentos* (*marg.Sant.,Carp.*) 260. *prophani* (*B,A*) 353. *messor* (*Ric.2242, marg.Sant.*) LXV, 7. *littore* (*a,C*) LXVI, 45. *cumque* (*D,a*) LXXVII, 9. *Verum id non* (*P,Burn.*) LXXXVI, 6. *subripuit* (*D,Vat.1630*). E mi pare che basti, richiamando qui, per le lezioni comuni a tre e più codd., unicamente il fatto che i vv. 3,4 di c. XCII esistono, oltrechè in *Br,h,O*, fra i codd. catulliani dell'Ellis, in *Ambr.I,67,Carpent.,Sant.sec.m.*, e in nessun altro: il resto può vedere il lettore da sè col materiale da me fornito.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 26 Dicembre 1915.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Naccari, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Panetti, e Segre, Segretario. — Scusano l'assenza il Vice-Presidente Camerano e il Socio Fusari.

È letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Socio corrispondente Enriques ha inviato in omaggio il 1° volume delle sue *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche,* pubblicate per cura del Dr. O. Chisini. Il Socio Segre rileva i notevoli pregi di quest'opera, destinata a dare un grande aiuto ai giovani geometri, per la quantità di concetti, che espone con chiarezza e con originalità, su svariati importanti argomenti.

Il Socio Guareschi offre in omaggio un suo lavoro: *J. J. Berzelius e la sua opera scientifica, con brevi cenni sulla Chimica nella prima metà del secolo XIX*; e ne discorre brevemente, facendo rilevare l'importanza delle scoperte di Berzelius in tutti i rami della Chimica teorica, e l'immensa influenza che egli ha avuto sul progredire della Chimica nel secolo XIX. In ultimo fa un

raffronto tra Lavoisier e Berzelius. Rileva che del famoso *Trattato di Chimica* del Berzelius furon fatte due edizioni italiane, l'una a Venezia dal Dupré nel 1830, l'altra a Napoli da Guarini e Valerini negli anni 1838-43, entrambe in 8 grossi volumi.

Il Socio Guidi presenta anch'egli in omaggio un suo volume di *Esercizi* per le *Lezioni sulla Scienza delle costruzioni.*

Infine vengon presentate, per la stampa negli *Atti,* le seguenti Note:

I. Guareschi, *Delle singolari proprietà della calce sodata,* Nota III.

G. Peano, *L'esecuzione tipografica delle formule matematiche.*

LETTURE

Delle singolari proprietà della calce sodata.

Nota III del Socio I. GUARESCHI.

In proseguimento delle mie ricerche sulla calce sodata come reagente energico, esposte nelle mie due prime Note (1), ho raccolto in questa Nota III le ricerche che ho fatto con altri gas. In una Nota IV esporrò le esperienze fatte con vapori e sostanze liquide o solide.

10) Anidride carbonica.

È a tutti noto che la calce sodata si adopera nei laboratorî per assorbire l'anidride carbonica e l'umidità dell'aria; l'aria si fa passare lentamente attraverso lunghi e larghi tubi ad **U** ripieni di calce sodata in piccoli grani. Ma ciò che forse non da tutti si sa, è la grande avidità e rapidità con la quale la calce sodata assorbe CO^2. Ecco una delle esperienze:

Gr. 32 di calce sodata recentemente preparata assorbirono rapidamente e con sviluppo di calore 215 cm^3 di anidride carbonica che passava insieme ad aria con una grande rapidità, come nella inspirazione. Successivamente ne assorbì altre boccette; in totale circa 1250 cm^3.

Naturalmente che operando in questo modo si assorbe meno acido carbonico che non operando sul mercurio. Ed invero: Gr. 0.20 di calce sodata (in 2 granelli) preparata spegnendo l'ossido di calcio con la soluzione di soda, assorbirono rapidamente 18 cm^3 di CO^2 secco, cioè 100 gr. ne assorbono circa 9.000 cm^3.

(1) *Delle singolari proprietà della calce sodata* in " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1915-1916, vol. LI, pagg. 4.

In un'altra esperienza gr. 0.38 di calce sodata, in 4 granelli, assorbirono in circa 10 minuti 32 cm^3 di CO^2, cioè per 100 gr. 8.500 cm^3.

In un'altra esperienza gr. 0.13 di calce sodata che era stata preparata secondo le indicazioni di Jungfleisch e ben conservata assorbirono nei primi 10 minuti 6.5 cm^3 di CO^2, che riferiti a 100 gr. sono 5000 cm^3; dopo 2 ore erano assorbiti per 100 gr. circa 8000 cm^3, e dopo 8 giorni si arrivò a 165 cm^3, e riferendosi a 100 gr. per fare il confronto, sarebbero assorbiti 12700 cm^3.

In altre esperienze:

Gr. 0.636 di calce sodata in granelli di circa 1 mm. di diametro o poco più, e che era già stata in una scatola di latta chiusa con tappo di sughero, assorbirono dopo 1 minuto 8 cm^3 di CO^2, cioè per 100 gr. 1260 cm^3: dopo 10 minuti si assorbirono per 100 gr. 2040 cm^3; dopo 18 ore 6100 cm^3; dopo 72 ore si arriva a 8020 cm^3 e dopo 4 giorni 8650 cm^3.

Con una calce sodata più recente e meglio conservata si ebbe che per gr. 0.498 si assorbirono dopo 1 minuto 27 cm^3 di gas pari a 5.400 cm^3, dopo 2 minuti 5.820, dopo 10 minuti 6.320, dopo 1 ora 7.800 e dopo 18 ore 10.000 cm^3 per 100 gr. E dopo 4 giorni s'arrivò a 14.600 cm^3.

Come si scorge, vi ha una notevole differenza fra le due calci sodate.

Si capisce che l'assorbimento rapido si fa in principio, poi sempre più lentamente sino ad arrivare ad un *maximum*.

Più avanti darò i risultati di altre esperienze fatte con calci sodate diverse.

L'acido carbonico serve bene per giudicare della bontà della calce sodata. L'assorbimento deve essere molto rapido nei primi minuti.

Per assorbire l'anidride carbonica la calce sodata è preferibile alla potassa caustica solida, la quale, come è noto, assorbe assai lentamente l'acido carbonico. Ha inoltre il vantaggio che rimane asciutta anche in presenza dell'umidità del gas ed assorbe bene tanto il gas carbonico quanto il vapor d'acqua senza attaccarsi al vetro come invece fa la potassa. Se il gas è secco o quasi, la potassa assorbe lentissimamente l'anidride carbonica; ad esempio gr. 0.4 di KOH (non perfettamente secca) posti in

un tubo contenente 53 cm^3 di anidride carbonica in principio ne assorbirono pochissimo, solo dopo 15 ore ne assorbirono 23 cm^3 ed il resto sino al giorno dopo. Così avviene quando si fa passare una corrente *rapidissima* di CO^2 in un tubo ad U contenente calce sodata, l' CO^2 viene avidamente assorbita, mentre se il tubo contiene KOH in pezzetti il CO^2 sfugge.

La quantità di acido carbonico assorbita dalla calce sodata fu meglio determinata coll'apparecchietto descritto pel fosgeno nella mia prima Nota.

Attraverso gr. 13.80 di calce sodata recente fu fatto passare una regolare corrente di anidride carbonica secca. Dopo circa mezz'ora l'anidride carbonica passa in eccesso, prima è tutta assorbita con sviluppo di molto calore ed eliminazione d'acqua che viene fissata dal cotone o meglio da cloruro di calcio. L'CO^2 assorbita fu di gr. 3.230 pari a 2.125 litri, ossia a 23.4 %, ossia circa 15360 cm^3 per 100 gr. In altri termini, 100 gr. di calce sodata in queste condizioni assorbono più di 15 litri di gas carbonico. Colla corrente più lenta se ne assorbe di più.

Si scorge una notevole differenza nei risultati esperimentando in questo modo oppure ponendo la calce sodata sul mercurio in presenza del gas. In mezz'ora si assorbe più anidride carbonica facendo passare una corrente di CO^2 sulla calce sodata perchè vi ha sviluppo di calore e questo favorisce la reazione. Mentre nel caso della calce sodata sul mercurio l'assorbimento è rapidissimo in principio, poi lento e lentissimo; ma la quantità totale assorbita è maggiore.

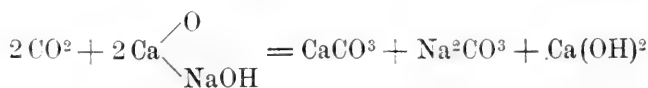
Ho fatto un'altra esperienza con buona calce sodata recentemente preparata e posta sul mercurio in presenza di un eccesso di anidride carbonica secca:

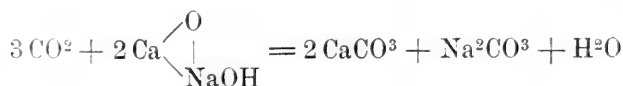
Gr. 0.471 di calce sodata furono messi in contatto con 194.5 cm^3 di CO^2 secca:

	cm³ di CO² assorbiti	cm³ assorbiti in 1 minuto	cm³ per 100 gr. di calce sodata
Dopo 1 minuto . . .	23.5	23.5	4967
„ 2 minuti . . .	25.5	2.0	5308
„ 10 „ . . .	27.5	0.25	5840
„ 1 ora	34.5	0.15	7320
„ 1 „	37.5	0.05	—
„ 1 „	39.0	0.025	—
„ 2.30 ore . . .	41.5	0.015	8810
„ 3.45 „ . . .	43.0	0.0066	9130
„ 14 „ . . .	47.5	0.005	10020
„ 24 „ . . .	51.5	0.0027	11400
„ 9 „ . . .	53.5	0.0037	—
„ 13 „ . . .	65.5	0.0154	13900
„ 1.45 „ . . .	67.5	—	—
„ 2 „ . . .	69.5	—	—
„ 2 „ . . .	73.0	0.03	15500
„ 4 „ . . .	79.5	0.025	—
„ 13 „ . . .	99.5	—	21200
„ 4.30 „ . . .	106.5	—	22600
„ 21 „ . . .	117.5	0.027	—
„ 13 „ . . .	132.5	0.02	28130
„ 24 „ . . .	146.5	0.009	31100

Per l'assorbimento totale sono occorsi 5 a 6 giorni. Dunque in principio si ha un assorbimento rapidissimo, che poi rallenta sino ad un *minimum* (0.0027), poi cresce ancora, si mantiene un poco costante e infine decresce nuovamente.

Probabilmente la reazione ha luogo secondo l'equazione:

$$2\,CO^2 + 2\,Ca\begin{matrix} \diagup O \\ \diagdown NaOH \end{matrix} = CaCO^3 + Na^2CO^3 + Ca(OH)^2$$

per la quale si calcola 30104 cm³; oppure secondo l'altra:

$$3\,CO^2 + 2\,Ca\begin{matrix} \diagup O \\ | \\ \diagdown NaOH \end{matrix} = 2\,CaCO^3 + Na^2CO^3 + H^2O$$

per la quale si calcola 44000 cm³ di CO² assorbito.

La *rapidità* colla quale la buona calce sodata assorbe l'anidride carbonica anche secca è veramente straordinaria. Io penso che la calce sodata sia il mezzo migliore per assorbire l'anidride carbonica dell'aria a preferenza della soluzione di potassa caustica, dei cristalli di idrato di bario, ecc., proposti pel dosamento di piccole quantità di anidride carbonica nell'aria. Come pure pel dosamento dell'acido carbonico nei carbonati naturali, nelle acque, ecc.

La calce sodata è già stata proposta, come mi fece giustamente osservare il Dr. Charrier, per assorbire l'anidride carbonica nell'apparecchio che serve a dosare il carbonio nel ferro e negli acciai secondo il metodo di Ledebur e di altri, e pel dosamento dell'CO^2 nella biacca [1].

11) Ossido di carbonio.

L'ossido di carbonio a temperatura ordinaria non viene assorbito e fissato dalla calce sodata, o solamente in piccola quantità. Entro campanella contenente 55 cm^3 di CO puro io ho messo gr. 0.35 di calce sodata buona in 4 granelli. Anche dopo più giorni non osservai diminuzione di volume. L'esperimento durò dal 20 agosto al 13 settembre 1915. Sarà ripetuto.

Depurazione dell'ossido di carbonio. — Specialmente quando si prepara l'CO per decomposizione dell'acido ossalico con acido solforico è necessario separarlo dall'CO^2. Un solo tubo a bolle contenente KOH anche concentratissima non serve, dell'CO^2 passa insieme a CO; allora facendo passare il gas attraverso calce sodata si ha CO privo affatto di CO^2.

12) Ossisolfuro di carbonio.

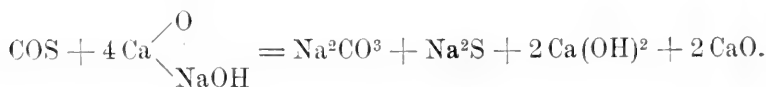
L'ossisolfuro di carbonio fu scoperto nel 1867 da Than in una sorgente minerale. È un gas incoloro, di odore sgradevole quando è impuro, ma inodoro o quasi quando è puro; io ho

[1] Veggasi Treadwell, *Trattato di Chimica analitica,* vol. II, pagg. 293 e 308.

avuto occasione di preparare ed esaminare questo gas quando preparavo la *ftalimide* e la *canforimide* riscaldando gli acidi ftalico o canforico coi solfocianati (1). Io allora ho osservato che si produce regolarmente scaldando a 160°-180° una miscela di 8 p. di acido ftalico e 5 p. di solfocianato potassico. Questo gas in presenza dell'acqua lentamente si trasforma in H^2S e CO^2. Fatto respirare agli animali, alla dose letale di 1 cm^3 a 9 cm^3 per i conigli, questi muoiono in preda a dispnea e paralisi; così pure le cavie e gli uccelli.

Questo gas viene rapidamente assorbito dalla calce sodata, specialmente nei primi momenti. A 23.4 cm^3 di questo gas asciutto sul mercurio aggiunsi gr. 0.2 circa di calce sodata in un solo granello. Dopo 2 minuti furono assorbiti 9.3 cm^3, cioè per 100 gr. di calce sodata 4650 cm^3. Dopo 20 minuti per 100 gr. furono assorbiti 5150 cm^3; dopo 1 ora erano 5700 cm^3 e dopo 24-30 ore tutto il gas fu assorbito, cioè per 100 gr. =11700 cm^3. La calce rimane quasi incolora. Ho ripetuta l'esperienza con maggiore quantità di gas, perchè certamente la calce sodata precedente ne avrebbe assorbito dell'altro.

La soluzione della calce sodata che ha assorbito l'ossisolfuro dà le reazioni dei solfuri alcalini; si capisce che fu assorbito dando solfuro e carbonato, come ad esempio:

$$COS + 4\,Ca\begin{matrix}\diagup O \\ \diagdown NaOH\end{matrix} = Na^2CO^3 + Na^2S + 2\,Ca(OH)^2 + 2\,CaO.$$

Ho voluto anche vedere come si comporta con rapida corrente d'aria. Raccolto il gas entro una boccia di circa $^1/_2$ litro fu fatto passare con corrente d'aria attraverso un tubo contenente 35 gr. di calce sodata. Viene subito assorbito e la calce sodata imbrunisce.

Questo gas è assorbito lentamente dalla soluzione acquosa di potassa, più rapidamente dalla soluzione alcoolica.

Alcuni Trattati di gazometria affermano che COS cogli alcali e fatto passare su uno strato *rovente* di calce sodata si

(1) I. Guareschi, " Jahresb. f. Ch. ,, 1887 e *Sulla canforimide,* " Ann. di Chim. e Farmacol. ,, 1887, vol. VI, p. 118.

assorbe completamente. Come si scorge dalle esperienze precedenti, non vi è bisogno che la calce sodata sia *rovente* per assorbire questo gas.

13) Idruri del gruppo dell'azoto.

Ammoniaca, idrogeno fosforato, idrogeno arsenicale e idrogeno antimoniale.

Dei quattro composti H^3N, H^3P, H^3As e H^3Sb, due: l'idrogeno arsenicale e l'idrogeno antimoniale, vengono fissati dalla calce sodata.

Ammoniaca. — La calce sodata, come tutti i corpi porosi, assorbe un poco di gas ammoniaca ma lo lascia poi sfuggire; non forma nessun composto. Però in presenza della calce sodata il gas ammonico produce già a temperatura ordinaria delle reazioni, che altrimenti avrebbero luogo solamente a temperature elevate. Esporrò in un'altra Nota le numerose esperienze che ho fatto a questo riguardo; intanto ricordo a titolo di esempio che l'ammoniaca e le amine in presenza di calce sodata reagiscono con il cloroformio, col bromoformio, col tetracloruro di carbonio, col bromdiclormetano, ecc., per dare dei cianuri e degli isocianuri o carbilamine.

Se, ad esempio, si mette sul mercurio una campanella graduata contenente del gas ammoniaco secco, poi vi si introducono alcuni granelli di calce sodata e pochissimo cloroformio, dopo breve tempo si nota la formazione di cianuro alcalino, e, probabilmente, anche di isocianonitrile $HN \equiv C$.

Idrogeno fosforato PH^3. — Questo gas non è assorbito dagli acidi nè dagli alcali in soluzione diluita acquosa. 1 litro di acqua scioglie circa 20 cm^3 di gas idrogeno fosforato. Assai lentamente è assorbito dalla potassa caustica, producendo dell'ipofosfito potassico.

Io ho trovato che quando nell'apparecchio di Marsh si esamina dello zinco contenente del fosforo, si ha la fiamma dell'idrogeno colorata in verde, specialmente quando la si schiaccia con un corpo freddo, anche dopo che l'idrogeno più o meno

impuro è passato attraverso alla calce sodata. Ciò rendeva probabile che l'idrogeno fosforato gasoso non sia assorbito; forse lo sarebbe quello liquido P^2H^4 spontaneamente infiammabile.

Ho preparato dell'idrogeno fosforato, facendo passare dell'idrogeno in un matraccio contenente della potassa al 45-50 $^0/_0$ e alcuni pezzetti di fosforo. L'idrogeno passava attraverso a un piccolo tubo contenente del cotone e cloruro di calcio; si osservarono fumi bianchi e infiammazione spontanea dovuta, come è noto, a idrogeno fosforato liquido. Se allora si fa comtemporaneamente passare l'idrogeno e l'idrogeno fosforato attraverso un tubo contenente 55 gr. di calce sodata, il gas non è più spontaneamente infiammabile e brucia con fiamma verde nell'interno, per PH^3.

Vapore di fosforo. — Quando si fa passare dell'idrogeno attraverso a dell'acqua fredda che tiene in sospensione un poco di fosforo ordinario, il vapore di questo viene fissato dalla calce sodata. La fiamma del gas idrogeno dà nettamente la colorazione verde, quando è passata attraverso a un tubo con cotone e con cloruro di calcio, ma non dà più la colorazione verde quando passa successivamente attraverso un tubo contenente 55 gr. di calce sodata buona in minuti granelli. La corrente dell'idrogeno deve essere moderata e la fiamma lunga non più di circa 1 cm. — Si può dunque concludere che quando in una corrente di gas idrogeno si ha un poco di idrogeno fosforato PH^3 insieme a fosforo libero, oppure a idrogeno fosforato liquido, questi due ultimi vengono fissati dalla calce sodata, mentre passa oltre l'idrogeno fosforato gasoso.

Idrogeno arsenicale. — L'idrogeno arsenicale è uno dei più potenti veleni. Bastano alcune bolle di gas per far sentire la sua azione tossica (1). In una mia precedente pubblicazione, io avevo detto, a proposito dell'idrogeno arsenicale, che *pare non venga assorbito* dalla calce sodata e che avrei ripetuto l'esperienza. Ed invero allora operai con molto idrogeno arsenicale, e sviluppato con grande rapidità per cui all'estremo op-

(1) Lewin, *Traité de Toxicologie*, p. 203.

posto dell'apparecchio si aveva una grossa e lunga fiamma di idrogeno, che produceva le note macchie e riduceva il nitrato d'argento. Ma se si opera con quantità limitate e con corrente moderata, allora si riconosce benissimo che anche l'idrogeno arsenicale AsH^3 viene fissato dalla calce sodata.

Preparai una soluzione acquosa di *anidride* arseniosa che conteneva 0.0260 in 100 cm³ cioè 4 cm³ = 0,001 di As^2O^3. In un apparecchio di Marsh, la cui boccia era di 300 cm³, introdussi 30 gr. di zinco privo di arsenico e quando la reazione coll'acido solforico diluito era energica (con traccia di cloruro platinico) e l'idrogeno passando attraverso a cloruro di calcio bruciava con fiamma incolora e non dava segno di macchie arsenicali e non riduceva il nitrato d'argento, introdussi nell'apparecchio 0,001 di As^2O^3; si ebbe subito la fiamma livida e macchie arsenicali, ma non appena interponevo dopo il cloruro di calcio un tubo con 40 gr. di calce sodata in piccoli grani, la fiamma, sempre della stessa lunghezza, ridiventava incolora perfettamente e non dava macchie nè riduceva il nitrato d'argento. Anche con successiva introduzione di arsenico non ottenni le macchie.

In un'altra esperienza introdussi in una sol volta gr. 0,0025 di As^2O^3 e la fiamma dell'idrogeno dava moltissime macchie, ma non più dopo il passaggio attraverso la calce sodata. Per avere le macchie dopo il passaggio attraverso la calce sodata bisogna introdurre molto arsenico, per esempio gr. 0,010 As^2O^3 in una sol volta ed in modo da avere una fiamma grossissima. Ma se la reazione è moderata, come deve essere quando si usa l'apparecchio di Marsh, l'AsH^3 non passa. La lunghezza della fiamma dell'idrogeno non deve superare 1 a 2 cm., altrimenti la corrente è troppo rapida ed abbondante. L'apparecchio di Marsh era terminato da punta di platino.

Ho fatto per maggior sicurezza un'altra esperienza. Ho preparato una soluzione titolata di As^2O^3 contenente per 5 cm³ gr. 0,001 di As^2O^3. Gr. 67 di calce sodata buona era contenuta in un tubo ad U di 1,8 mm. e lunghezza totale 35-40 cm. Il gas idrogeno che usciva dall'apparecchio di Marsh si essiccava traverso un tubetto con cotone e cloruro di calcio.

L'acido solforico era diluito 1 : 7. Lo zinco puro. La prova fatta in bianco dava la fiamma dell'idrogeno perfettamente in-

colora e non forniva traccia di macchie. Allora introdussi 5 cm^3 della soluzione arsenicale, cioè gr. 0,001 e subito la fiamma dell'idrogeno dopo il cloruro di calcio dava segni di arsenico e numerose macchie, ma attraversata la calce sodata, più nulla; aggiunsi ancora gr. 0,001 ed ebbi lo stesso risultato; aggiunsi subito ancora 0,0025 ed il risultato fu identico. L'arsenico era completamente fissato. La fiamma dell'idrogeno era mantenuta della lunghezza di 1 a 2 cm.

Invece adoperando la calce sodata di Kahlbaum, bianca e preparata già da lungo tempo ma abbastanza bene conservata, i risultati furono diversi. Gr. 90 di questa calce sodata in un tubo eguale al precedente (la calce sodata Kahlbaum a volume eguale è molto più pesante di quella nostra preparata di recente) assorbirono pochissimo idrogeno arsenicale al punto che con 1 mgr. di As^2O^3 introdotto nell'apparecchio di Marsh con 30 gr. di zinco, si ottenevano facilmente le macchie arsenicali e peggio poi con 2 mgr. Invece nelle stesse condizioni la calce sodata buona non lo lascia passare affatto.

Ho fatto anche delle esperienze di confronto tra la potassa solida in piccoli pezzetti e polverulenta, con la calce sodata e l'idrogeno arsenicale. La potassa caustica non fissa bene l'idrogeno arsenicale, o in piccolissima quantità, anche quando la corrente è lenta; mentre la calce sodata lo fissa benissimo, eccetto, come dissi, quando passa in grande quantità e troppo rapida corrente. Ma usando l'apparecchio di Marsh con le norme raccomandate da tutti i chimici tossicologi, l'idrogeno arsenicale non passa.

Edm. Soubeiran aveva notato che l' idrogeno arsenicale mentre non è decomposto dalle soluzioni alcaline, lo è dalla potassa e la soda allo stato solido di idrato. Anzi egli ammise che l'arsenico messo in libertà si trasformerebbe subito in arseniato e idrogeno [1]. Le affermazioni di Soubeiran mi sembrano alquanto esagerate.

Ad ogni modo per fissare il vapor d'acqua nell'apparecchio di Marsh si deve usare solamente il cotone idrofilo e il cloruro di calcio; escludere la potassa caustica e peggio la calce sodata.

[1] E. Soubeiran, *Mém. sur les arséniures d'hydrogène* in " A. Ch. „ 1830 (2), t. 43, p. 407.

Idrogeno antimoniale. — L'idrogeno antimoniale è fissato dalla calce sodata con molto maggiore avidità che non l'idrogeno arsenicale; di ciò mi ero già assicurato esaminando uno zinco ricco di antimonio.

In un apparecchio di Marsh, come quello già adoperato per l'idrogeno arsenicale, introdussi a riprese una soluzione contenente gr. 0,019, gr. 0,038 e gr. 0,057 di tartaro emetico. Dopo il passaggio attraverso il cloruro di calcio la fiamma dell'idrogeno era lunga, bianca e dava enormi macchie di antimonio della porcellana; allora dopo il cloruro di calcio interponevo un tubo di 1,5 mm. × 35 cm., con 40 gr. di calce sodata, e subito la fiamma diventava incolora, e non produceva più le macchie. L'assorbimento è istantaneo, con sviluppo di calore e separazione di antimonio. Può essere una bella esperienza di scuola.

Ho fatto esperienze di confronto con la potassa caustica solida in piccoli pezzetti e in polvere. Fissa bene anch'essa (come già si sapeva) l'idrogeno antimoniale con separazione di antimonio, ma se la corrente è rapida e l'SbH^3 abbondante una parte sfugge; mentre anche in queste condizioni la calce sodata fissa e riduce benissimo l'idrogeno antimoniale, anzi con sviluppo di calore.

Ho fatto inoltre una esperienza di confronto con calce sodata di Kahlbaum, bianca, preparata da tempo e conservata in vaso di vetro chiuso con tappo di sughero. Nell'apparecchio di Marsh sopraccennato aggiunsi 1 $cm.^3$ di soluzione contenente gr. 0,004 di tartaro emetico; anche in questo caso l'antimonio viene fissato e la calce sodata annerisce. Però se si mette nell'apparecchio una maggiore quantità di emetico e la corrente dell'idrogeno è rapida, una parte dell'idrogeno antimoniale sfugge.

La calce sodata dunque deve essere esclusa in modo assoluto dall'apparecchio di Marsh e non può supplire il cotone o il cloruro di calcio per disseccare l'idrogeno, perchè fissa le piccole quantità di idrogeno arsenicale ed ancor più l'idrogeno antimoniale.

Separazione dell'arsenico dall'antimonio. — Secondo le esperienze che avevo fatto in principio di questo lavoro io credevo di poter separare AsH^3 da SbH^3, ma ora che ho dimostrato come anche l'idrogeno arsenicale, quando non sia in

grande quantità e non passi in corrente troppo rapida, è pure fissato dalla calce sodata, il metodo non può servire per questa separazione.

Depurazione dell'idrogeno.

Molte applicazioni potrà avere la calce sodata. Tenendo in considerazione il modo di comportarsi dei varî gas con questa sostanza, io credo che in moltissimi casi potrà essere adoperata per depurare l'idrogeno; ad esempio nei laboratori. Lo zinco impuro può contenere solfo, arsenico, fosforo, antimonio, carbonio, insieme a metalli estranei. Con un tubo carico di calce sodata si potranno quindi fissare e togliere dal gas idrogeno i tre gas: solfidrico, idrogeno arsenicale e idrogeno antimoniale. Mediante la calce sodata possiamo facilmente riconoscere se lo zinco o il ferro contengono del fosforo, perchè l'idrogeno fosforato non viene assorbito e la fiamma dell'idrogeno dopo il passaggio attraverso la calce sodata, presenta colorazione verde nell'interno e tanto più se la si schiaccia con un pezzo di porcellana.

Ghisa ed acciajo. — Un campione di ghisa ordinaria da me esaminata, coll'acido cloridrico dava dell'idrogeno puzzolentissimo che conteneva poco acido solfidrico, traccie di arsenico, ma molto idrogeno fosforato; passando attraverso a cloruro di calcio e poi a calce sodata, questo idrogeno bruciava con fiamma pallida ed aveva ancora odore agliaceo e la fiamma schiacciata dava intensa e netta la colorazione verde, che prima si vedeva appena nell'interno della fiamma.

La *limatura del ferro dolce ordinario* trattata con acido cloridrico diluito, fornisce dell'idrogeno puzzolento che lavato attraverso ad acqua, poi con acido solforico concentrato e fatto passare attraverso cloruro di calcio, è sempre puzzolentissimo, ha odore di H^2S ed agliaceo, brucia con fiamma biancastra ed azzurra e fatto passare attraverso soluzione di acetato di piombo precipita in nero, annerisce la soluzione di nitrato d'argento e precipita in bianco, poi in giallo e bruno la soluzione di sublimato. Non dava però le macchie arsenicali e la fiamma schiacciata era azzurra e un poco verdognola. Invece questo idrogeno

fatto passare per un tubo di 1,8 mm. diametro, contenente circa 110 gr. di calce sodata, non aveva più odore cattivo, era *inodoro*, bruciava con fiamma *incolora*, non imbruniva nè precipitava le soluzioni sovraindicate. Mentre prima di passare attraverso la calce sodata riduceva la soluzione diluita di *permanganato potassico*, non lo riduceva più quando era passata attraverso la calce sodata. Non ho potuto vedere se il gas idrogeno così depurato conteneva qualche traccia di idrocarburi, quali il metano.

Dunque in questo caso *la calce sodata è un eccellente depuratore dell'idrogeno.*

Acciajo, fornitomi dall'egregio Dr. Nicola Foglino mio allievo ed ora nelle *Fonderie Piemontesi*. Conteneva:

C = 0.10
P = 0.030
Mn = 0.57
S = 0.032

e forse minime traccie di arsenico.

Gr. 30 di questo acciaio furono trattati in apparecchio di Marsh con acido solforico al 40 %; l'attacco è regolare. Il gas passava prima attraverso cotone e poco cloruro di calcio e la fiamma era lunga circa 1 cm., biancastra e azzurra nell'interno; il gas precipitava in nero la soluzione alcalina di piombo e quella di nitrato d'argento, ed aveva odore agliaceo. La fiamma schiacciata non dava colorazione verde. Fatto passare per un piccolo tubo ad U contenente circa 20 gr. di calce sodata in granuli piccoli, il gas mantiene il suo odore agliaceo, ma non precipita più la soluzione alcalina di piombo, bensì quella di nitrato d'argento: la fiamma è biancastra, nell'interno di color verde schietto, e schiacciata dà intensa e netta colorazione verde. Non macchie arsenicali; però qualche lievissima e minima macchia giallognola, come prima del passaggio attraverso la calce sodata.

Se nel ferro vi fosse del *silicio* e si producesse cogli acidi dell'idrogeno siliciato SiH^4, probabilissimamente questo verrebbe assorbito dalla calce sodata. Non ho però ancora fatto delle prove dirette.

Della *tornitura di un acciaio resistentissimo* che veniva intaccato assai difficilmente con gli acidi solforico e cloridrico diluiti, fu trattato con acido solforico al 40 %; l'idrogeno bruciava con fiamma biancastra alla punta e schiacciata dava colorazione azzurra come fa la fiamma dell'H con solfidrico (e solfidrico infatti si sviluppava); ma poi fatto passare il gas attraverso calce sodata, non dava più la reazione dello solfo e la fiamma schiacciata non dava macchie di arsenico nè di antimonio, ma bensì la colorazione verde caratteristica del fosforo (poco).

Idrogeno preparato collo zinco. — Adoperai un pezzo di zinco che era in laboratorio da oltre 40 anni, dello spessore di 4 a 5 cm., ben cristallizzato. Questo zinco conteneva traccie di arsenico, dello zolfo e molto antimonio, e conteneva poco fosforo. Gr. 18 di questo zinco, con acido solforico diluito dava idrogeno di odore agliaceo, che bruciava con fiamma livida, dando fumi bianchi e forniva facilmente grosse macchie antimoniali; precipitava coi reattivi sovra indicati e scoloriva la soluzione di permanganato; conteneva poco acido solfidrico. Questo idrogeno impuro fatto passare per un tubo con calce sodata diventò perfettamente *inodoro*, bruciava con fiamma *incolora*, non dava traccie di macchie antimoniali nè arsenicali, non riduceva più il permanganato anche diluitissimo, ma la fiamma schiacciata lasciava vedere la colorazione verde caratteristica del fosforo. E ciò anche quando passava direttamente dalla boccia di sviluppo alla calce sodata, senza essere previamente lavata con acqua e acido solforico. Però è bene farlo passare prima per un tubo a cloruro di calcio. Non dava più reazioni colle soluzioni metalliche, nè riduceva il permanganato.

Ho esaminato uno *zinco vecchio* in *rotelle o dischi* che conteneva solfo, traccie di arsenico e fosforo. Allo stato impuro l'idrogeno bruciava con fiamma biancastra azzurrognola con traccia di verde. Non forniva macchie arsenicali. Dopo passato su calce sodata l'idrogeno bruciava ancora con fiamma azzurra e schiacciata, non dava macchie ma bensì colorazione interna schiettamente e nettamente *verde*, come appunto fa la fiamma dell'idrogeno con fosforo. Se uno zinco è fosforato, questo è un metodo buono per riconoscerlo. Diventa anche una elegante esperienza di lezione. Un altro campione di zinco in lastra dello spessore di

2-3 mm., che non conteneva arsenico, o traccie minime, ma bensì solfo e fosforo, forniva gas idrogeno impuro, che però fatto passare per la calce sodata bruciava con fiamma incolora, pallidissima, la quale schiacciata lasciava vedere il verde schietto della fiamma fosforata.

In un apparecchio Marsh con zinco puro, ho introdotto un poco di fosforo e relativamente molto composto antimoniale ed esaminando la fiamma dopo passato il gas attraverso il cloruro di calcio dava appena indizio di fosforo e grandi macchie di antimonio; ma passando poi il gas attraverso anche alla calce sodata allora non si avevano più le macchie di antimonio ed appariva schietto il verde della fiamma a fosforo. Dunque quando lo zinco contiene solfo, arsenico, antimonio e fosforo, fornisce dell'idrogeno impuro per H^2S, AsH^3, SbH^3 e PH^3, dei quali gas i primi tre sono fissati dalla calce sodata e l'idrogeno fosforato passa oltre e si riconosce al color verde della fiamma schiacciata.

L'acido solfidrico e l'idrogeno antimoniale imbruniscono od anneriscono la calce sodata.

Gas illuminante.

È noto che il gas illuminante impuro contiene oltre ai gas necessari H.CH^4.CO C^2H^4 ecc. delle piccole quantità di H^2S, CO^2, C^2H^2, NH^3, HCN, $C^{10}H^8$, CS^2 AsH^3 (traccie), ecc. Colla calce sodata questa imbrunisce e si scalda; si fissano facilmente la maggior parte di queste sostanze e possiamo avere un gas molto bene depurato, il quale non ha più l'odore puzzolentissimo di prima.

Acetilene.

Il gas acetilene preparato dal carburo di calcio o quale si trova in piccole quantità nel gas illuminante, non viene fissato dalla calce sodata e si ha la reazione col cloruro rameoso ammoniacale tanto prima che dopo il passaggio attraverso la calce sodata.

Però l'acetilene, che, quale si sviluppa dal carburo di calcio coll'acqua, è puzzolentissimo, fatto passare attraverso la calce sodata non è più puzzolento. La calce sodata nella parte ove entra il gas acetilene si scalda e imbrunisce. Subisce indubbiamente una buona depurazione, perchè rimangono fissati CO^2, H^2S, P^2H^4, AsH^3 che possono essere contenuti nell'acetilene impuro; non rimane fissato PH^3 gasoso.

Su questo gas dovranno essere fatte altre esperienze colla calce sodata, specialmente a temperature superiori alla temperatura ordinaria ed anche in mescolanza con altri gas.

Non ho eseguito delle esperienze coi gas *fluoruro di silicio*, *fluoruro di boro* ed analoghi; ma è probabilissimo che vengano anch'essi assorbiti dalla calce sodata con grande avidità.

Ho già fatto e si faranno molte altre esperienze con miscele di gas o di vapori attraverso la calce sodata a temperatura ordinaria ed a temperatura più o meno elevata. Ad esempio, con gas ammonico e vapori di cloroformio o di clorbrommetano $CHCl^2Br$ si formano facilmente i *cianuri* e nel tempo stesso pare che si formi anche l'isomero dell'acido cianidrico HN = C. Ma di queste ricerche dirò in un'altra Nota.

Torino, R. Università. Dicembre 1915.

L'esecuzione tipografica delle formule matematiche.

Nota del Socio G. PEANO.

Gli autori di libri e di memorie di matematica, in generale reputano che, due notazioni equivalenti, ed egualmente facili a scriversi sulla carta, siano anche egualmente facili a riprodursi in tipografia. Invece chi conosce l'arte tipografica, sa che alcune notazioni esigono molto più lavoro di altre.

L'operaio tipografo cerca di riprodurre le formule del manoscritto, il più fedelmente possibile, servendosi del materiale tipografico a sua disposizione, ma non può riprodurre il manoscritto. In conseguenza le formule complicate diventano di difficile lettura, e il prezzo della composizione sale inutilmente a cifre altissime. E tutto ciò a danno dell'autore, sia che egli debba pagare il prezzo della stampa, sia che il prezzo sia pagato da un editore o da una società scientifica, che meno volontieri pubblicherà un lavoro inutilmente costoso.

Perciò mi propongo di esporre alcune norme, seguendo le quali, le formule matematiche possono diventare più chiare e meno costose.

*
* *

Una pagina tipografica è composta di moltissimi *caratteri*, che sono dei parallelepipedi rettangoli di metallo, su una cui faccia è inciso un segno.

Le dimensioni di ogni carattere sono misurate in *punti tipografici*, legati al metro dalla relazione 8 punti = 3 millimetri. I caratteri di una tipografia debbono avere rigorosamente la stessa *altezza*, o dimensione normale al foglio. Quelli d'una stessa linea hanno la stessa lunghezza, che misurata in *punti*, chiamasi *corpo*. Questo articolo è stampato in corpo 10. La larghezza

del carattere varia col segno inciso; è minima per la lettera " i „ massima per la " m „.

Il compositore tipografo, fissata la lunghezza della linea, dispone i caratteri d'uno stesso corpo, l'uno vicino all'altro, inclusi i *bianchi* fra le parole, finchè ve ne stanno, secondo le regole ortografiche; poi completa o *aggiusta* la linea con degli spazii fini, intercalati vicini ai grossi. E aggiunge linea a linea. Legata la pagina con uno spago, se tutte le operazioni furono fatte con cura, essa si comporta come un corpo rigido, che si può sollevare colla mano. In caso contrario, se le linee non sono ben aggiustate, nel maneggiare la pagina, questa si sfascia, e tutto il lavoro fatto è distrutto.

* * *

Le formule matematiche del tipo

$$a+b,\quad a-b,\quad a\times b,\quad a=b,\quad a>b,\quad n!,\quad \log x,\quad \cos x,\quad \mathrm{tang}\,(x+\pi),$$

che si possono eseguire con caratteri dello stesso corpo, disposti in fila, sono di composizione tanto facile quanto un testo qualunque; salvochè il compositore, oltre a prendere i caratteri nella cassa del carattere tondo, bisognerà che adoperi pure quella del corsivo, dei segni matematici, e del greco. La complicazione si presenta quando, invece della composizione unilineare, si debbano usare caratteri di corpo diverso, a disporsi in diverse linee, come avviene nelle frazioni, negli esponenti, negli indici, ecc.

* * *

Il rapporto di due numeri a e b è indicato nei varii libri, colle notazioni unilineari a/b, o $a:b$, o $a\div b$; e più comunemente colla notazione trilineare $\frac{a}{b}$. Per eseguire quest'ultima notazione, il compositore deve comporre tre linee, l'una pel numeratore, l'altra per la linea di frazione, e la terza pel denominatore. Il comporre quelle linee bianche che fissano il numeratore e denominatore in modo che la pagina non si sfasci, esige tanto lavoro, che nei lavori a cottimo, in cui l'operaio è pagato a tanto per linea, la frazione trilineare viene computata per

tre linee. Se sulla stessa linea sonvi altre frazioni, esse aggiungono una linea per frazione (*). Sicchè la formula

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

è computata per 5 linee, cioè il suo prezzo è 5 volte quello della formula egualmente chiara

$$1/2-1/3=1/6.$$

Quindi, se la composizione delle formule di un trattatello di aritmetica, in cui le frazioni hanno la forma unilineare a/b costa ad es. 100 lire, la composizione delle stesse frazioni sotto forma trilineare verrà a costare 400 lire di più, senza che nulla sia aggiunto alla chiarezza del libro.

Quando poi la frazione è alla sua volta il numeratore o denominatore di altra frazione, o figura come esponente, o come indice, il numero delle linee, ed il prezzo di composizione, cresce vertiginosamente.

Perciò i trattati di matematica inglesi, libri notevoli per l'eleganza tipografica, onde semplificare le formule, usano spesso la notazione a/b. Questa notazione si trova, per esempio, in:

BASSET, *A treatise on hydrodynamics*, Cambridge 1888,
GRAY and MATHEWS, *A treatise on Bessel functions*, London, 1895,
PIERPONT, *Lectures on the theory of functions of real variables*, New York 1905,

e in tutti i libri che ho consultato.

La notazione $a:b$, invece di a/b, è meno diffusa; trovasi in Eulero, concorrente colla trilineare, onde semplificare le formule. Essa deriva da una confusione di notazioni. Euclide nel libro V prop. 5 definisce l'eguaglianza di due ragioni $a/b=c/d$; e nella prop. 6 definisce la proporzionalità fra quattro grandezze $a:b::c:d$. I due linguaggi si sono conservati fino agli ultimi tempi, e le differenti notazioni, esprimenti idee differenti, si trovano ancora in Legendre. Ma molti autori identificarono il segno di proporzionalità :: col segno di eguaglianza, ed al-

(*) Federazione italiana fra i lavoratori del libro, Sezione di Torino, Tariffe dicembre 1912.

lora $a:b$, che rappresentava la coppia dei due enti a e b, risultò identico ad a/b.

La notazione $a \div b$ si trova in Cayley, e pochi altri.

*
* *

Per eseguire in tipografia la potenza a^m, presa la lettera a nella solita cassa di corpo 10, l'operaio prende poi la lettera m nella cassa di corpo 6 ovvero 5, e la fissa in alto della linea, mediante spazii al di sotto e laterali. Questa operazione dicesi *riporto*, o *parangonnage*, ed il suo lavoro è in tariffa stimato equivalente alla composizione di una linea. La stessa cosa avviene per gli indici a_m. Gli accenti, o minuti di a' a'' sono fusi sul corpo 10, e si compongono correntemente. In molte tipografie, gli esponenti più frequenti $^{1\,2\,3\,\ldots\,m,\,n}$ sono fusi sul corpo 10, e si compongono correntemente senza riporto. Col riporto si può comporre a_x^m; coi caratteri in corpo 10, essa assumerà la forma $a_x{}^m$. Il compianto professore Guccia, fondatore del Circolo matematico di Palermo, impiantò una tipografia matematica onde pubblicarne i Rendiconti. Egli fece fondere le lettere e segni che più spesso si presentano come esponenti ed indici, sul quadrato di corpo 5. Allora l'esponente di a^{m-n} ha la forma della `scrittura a macchina`, in cui tutte le lettere sono equidistanti. In tal modo, l'operazione del riporto è più facile.

*
* *

Ma se l'esponente o indice ha alla sua volta esponenti, o indici, od è una frazione, o una espressione qualunque plurilineare, l'esecuzione tipografica diventa difficile. Non sono in uso corpi tipografici inferiori al 5, perchè i caratteri resulterebbero microscopici. Quindi nell'espressione a^{m_r}, le lettere m ed r sono necessariamente dello stesso corpo 5. E per attaccare la r alla m, col coltello o con altri strumenti, si taglia una parte del carattere della lettera r. Le lettere tagliate non servono più per una nuova composizione. Il taglio non si può eseguire colla precisione con cui le lettere sono fuse; perciò queste lettere oscillano nella pagina composta: la formula $a+b$ verificata nelle prove di stampa potrà risultare stampata $+\,a\,b$. Inoltre alcune volte quasi tutta la formula risulta composta nel

minutissimo corpo 5, di lettura faticosa. In una formula le varie lettere hanno eguale importanza, e non c'è ragione di renderne una parte meno visibile dell'altra.

* * *

De Morgan nel 1845 adottò per la potenza un segno, che nel Formulario mathematico da me edito, ha la forma $a \uparrow m = a^m$.

Il segno ↑ (leggi *elevato*) è la √ capovolta. Questo segno è usato nel Formulario suddetto solo in qualche formula, per poter esprimere la proprietà distributiva dell'↑ rispetto al ×, analoga alla distributività di × rispetto +. È ivi anche usato quando l'esponente è una formula lunga. Fu pure adottato in alcuni libri di matematica elementare.

Volendo semplificare le formule, senza introdurre il segno *elevato*, basta indicare con una lettera la parte complicata di una formula, specialmente se essa si presenta più volte.

* * *

Per indicare le radici si può scrivere $\surd 2$ o $\sqrt{2}$. Il tratto orizzontale sul radicando è del tutto inutile, ed esige una linea di composizione. Esso non esiste nei trattati inglesi già citati, e nemmeno nelle tavole logaritmiche del Köhler.

Il tratto orizzontale che prolunga il segno √ è un residuo del *vinculum* usato da Leibniz, Newton, ecc. per indicare le parti d'una formula, la quale indicazione da Eulero in poi è fatta colle parentesi, sicchè l'antica scrittura $a \times \overline{b + c}$ è diventata $a \times (b + c)$.

Alcune volte quel tratto orizzontale conserva la funzione di vincolo; sopprimendolo, bisognerà introdurre delle parentesi:

$$\sqrt{a + b} \qquad \text{diventa} \qquad \surd (a + b).$$

Anche la linea di frazione ha qualche volta la funzione di vincolo; quindi

$$\frac{a}{b + c} \qquad \text{si scriverà} \qquad a / (b + c).$$

Alcuni autori pongono dei tratti sopra certe lettere; è egualmente facile lo scrivere $\bar{l}$ o l'; ma la prima notazione importa una linea di più, che fissi a suo posto il tratto; se la

linea consta di 50 lettere, l'esecuzione tipografica di $\bar{l}$ costa 50 volte quella di l'. Parimenti il far stare un punto sopra una lettera, come $\dot{x}$ invece di Dx, importa una linea di composizione.

La composizione di parentesi tonde, quadre, graffe per corpo superiore al 10 costa 50 lire per 1000, mentre in corpo 10 la tariffa è di 59 centesimi per mille.

* * *

Alcuni autori vogliono i simboli Σ (somma), Π (prodotto), ∫ (integrale), in corpo maggiore del 10, il che importa la composizione di tre linee, oltre a quelle che contengono i limiti. La formula

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\, x\, dx = 1,$$

su 7 linee, dice quanto la formula

$$S\,(\mathrm{sen},\ 0^{-}\pi/2) = 1,$$

più conforme al linguaggio di Cavalieri e di Keplero. Il segno S in Leibniz, Eulero, ecc. è una s minuscola, come la lettera sua compagna d, che indica il differenziale. L'ingrandimento di queste lettere data dai tempi di Cauchy. Questi usò anche dei Σ nel cui interno è scritta la variabile rispetto alla quale cui si fa la somma; ma questa notazione difficile a eseguirsi in tipografia fu abbandonata.

La notazione di Raabe $\binom{m}{n}$ per indicare il numero delle combinazioni di m oggetti ad n ad n, può essere sostituita dalla unilineare C (m, n).

* * *

Un'altra difficoltà tipografica proviene dalla frequenza delle lettere. In ogni lingua le lettere dell'alfabeto si presentano con una frequenza accuratamente studiata dai fonditori di caratteri tipografici. Le lettere più frequenti in italiano sono le vocali, le meno frequenti sono k, w, x, y, z. In una cassa, in cui i caratteri sono in quantità proporzionale alla frequenza, quando un cassetto si vuota, anche gli altri sono sensibilmente vuoti.

La frequenza delle lettere usate in matematica è tutta diversa da quella della composizione comune, e purtroppo varia moltissimo da autore ad autore. Quindi se un autore indica colla lettera k una quantità che si presenta spesso nelle sue formule, vuoterà subito il cassettino dei k in molte casse tipografiche; e queste casse rimangono inservibili, cogli altri cassetti pieni, finchè la composizione non venga scomposta dopo la stampa. Egli così immobilizza un materiale tipografico molto maggiore di quello usato nella composizione del suo scritto.

Se poi l'autore adotta come lettere di uso frequente le maiuscole, le lettere greche, le lettere in grassetto, delle gotiche, e le usa come esponenti ed indici nei varii corpi tipografici, il materiale di qualunque grande tipografia non è sufficiente; si debbono far fondere le lettere necessarie, il cui prezzo sarà in qualche modo pagato dall'editore del libro, e indirettamente dall'autore.

*
* *

Tutte le formule di matematica sono ridotte alla forma unilineare, e tutte le variabili sono rappresentate da lettere latine minuscole, nel mio Formulario mathematico, edizioni 2ª-5ª. Pur volendo conservare alle formule il loro aspetto abituale, l'autore può renderle meno irte di difficoltà, scegliendo fra le varie notazioni in uso, quella di esecuzione tipografica più facile, servendosi a questo scopo delle presenti indicazioni, o del consiglio di un tipografo; e così il suo lavoro, oltre a diventare di prezzo più accessibile, sarà anche più chiaro.

La spaziatura delle formule non presenta difficoltà tipografica; essa può aiutare la lettura. Le formule $a+b \;\times\; c$ e $a \;+\; b\times c$ suggeriscono le letture $(a+b)\times c$ e $a+(b\times c)$, la prima contraria, e la seconda conforme alle convenzioni algebriche. D'uso tipografico invalso è la spaziatura $a + b \times c$. Usando il segno $\times$ più piccolo del $+$, la lettura sarà più facile.

*
* *

Il prof. Segre gentilmente mi comunica uno stampato di " The London Mathematical Society ", intitolato: *Suggestions for notation and printing*, ove si fanno raccomandazioni simili alle precedenti; cioè la soppressione della sbarra prolungamento

della radice, perchè inutile; delle lettere con dei tratti o punti sopra, perchè si possono sostituire con accenti, o colla notazione differenziale; si consiglia l'uso di $n!$ invece di $\lfloor n$.

Per le frazioni si consiglia l'uso della forma a/b negli esponenti, nella composizione corrente, conservando la forma trilineare nelle formule disgiunte. Le lettere che si debbono tagliare, per porle come indici di indici, diventano fragili, e scompaiono nella stampa.

Ivi è pure stampata una pagina di formule, in cui tutti gli spazii sono stampati; così è reso visibile l'enorme lavoro che deve fare il compositore per mettere questi spazi a posto; deve fare delle operazioni aritmetiche, addizioni, moltiplicazioni, divisioni, risolvere dei problemi di analisi indeterminata. Ma è meglio che gli scrittori di matematica passino in tipografia a vedere la composizione tipografica, e provino a comporre qualche formula matematica.

Vi si dice pure che le formule unilineari risparmiano spazio, e rispondono meglio all'eleganza tipografica. I tipografi fanno consistere l'eleganza nella regolarità, sicchè una faccia d'una pagina copra la posteriore vista per trasparenza. Ciò non è possibile colle formule plurilineari. Così, per stampare $\sqrt{2}$, bisognerà porre una interlinea di più fra questa linea e la precedente, il che produce un maggior spazio bianco; e se la pagina è completa, si dovrà togliere l'interlinea fra altre due linee consecutive, che si vedranno più vicine; il che è antiestetico (*). Questa deformità non c'è più, se la formula è disgiunta; essa viene composta sopra un numero intero di linee tipografiche. Perciò la Società di Londra raccomanda quelle notazioni per le ragioni del minor costo tipografico, maggior chiarezza delle formule, ed eleganza tipografica.

(*) Qui manca appositamente l'interlinea.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 2 Gennaio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Direttore della Classe, Carle, Pizzi, De Sanctis, Ruffini, D'Ercole, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Vidari, Prato e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci Manno e Patetta.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 19 dicembre u. s.

Il Socio Chironi, Direttore della Classe, si alza a parlare per rivolgere, in nome de' colleghi tutti, le congratulazioni più vive all'illustre Presidente dell'Accademia per l'insigne onorificenza che S. M. il Re ha voluto tributargli col plauso di tutti gl'Italiani. Se ne compiace tanto più, in quanto che l'onore fatto a S. E. Boselli è onore fatto all'Accademia, la quale vede in lui, anche in questa circostanza, il degnissimo successore di quel Federigo Sclopis che fu per tanti anni suo Presidente e ornamento e splendore del Piemonte e dell'Italia. Ma particolarmente il Piemonte, anzi gli antichi Stati Sardi, di cui era nobile parte la Liguria, che è orgogliosa di aver dato i natali a Paolo Boselli, si rallegrano del fausto avvenimento, perchè

fu egli, il decano della rappresentanza nazionale, a far novellamente echeggiare nel più grande Parlamento italiano, ascoltato, entusiasticamente applaudito, quell'appello alla unione degli animi nel proposito di santa guerra liberatrice, che già risuonò nel Parlamento del piccolo ma glorioso Regno di Sardegna e di questo fece l'iniziatore della redenzione italiana.

Alle parole del Socio Chironi, applaudite dalla Classe, risponde commosso S. E. Boselli, esprimendo il suo animo grato a lui e all'Accademia. Egli, anzi, si sente in dovere di dichiarare che, nel ricevere da S. M. il Re la più alta onorificenza, ha tosto rivolto il pensiero appunto a Federigo Sclopis, e volle scegliere il Collare, che già dallo Sclopis fu portato, per rendere omaggio e significare la sua gratitudine all'Accademia che lo nominò e lo riconfermò suo Presidente. S. E. Boselli è vivamente applaudito.

Il Presidente comunica, con parole di grande rimpianto, la morte del Socio corrispondente Francesco Novati, e la Classe deferisce al Socio Patetta l'incarico di farne la commemorazione.

Il Socio Einaudi presenta una sua monografia, stampata in lingua inglese, col titolo *The growth and present situation of the public finances of Italy*, estratta da " The Economic Journal ", dicembre 1915.

Il Socio Segretario Stampini presenta la relazione a stampa del Presidente on. Paolo Boselli " agli onorevoli membri del Comitato Nazionale per la Storia del risorgimento " concernente la " Raccolta di testimonianze e di documenti sulla guerra italo-austriaca ", letta nell'adunanza dell'11 dicembre 1915. Poscia presenta le seguenti pubblicazioni del Prof. Enrico Cocchia: 1° *Il libro del dolore e delle ricordanze* (Napoli, Stab. Tip. Luigi Pierro, 1915); 2° *Saggi filologici*, volume V (Napoli, Luigi Pierro, 1915); 3° *Introduzione storica allo studio della letteratura latina* (Bari, Gius. Laterza, 1915); 4° *Romanzo e realtà nella vita e nell'attività letteraria di Lucio Apuleio* (Catania, 1915). Del contenuto di ciascuna di queste opere il Socio Stampini dà conto

brevemente, rilevando quanto abbiano di notevole; ma particolarmente si sofferma a discorrere della *Introduzione storica* e del libro riguardante *Lucio Apuleio*, esaminando alcuni punti in cui il Cocchia espone idee e congetture sue proprie, idee e congetture che, pur essendo avvalorate sempre da finezza di ragionamento, larga dottrina e ottima informazione degli studî più recenti, possono tuttavia sollevare, specie quelle su Apuleio, non poche obiezioni; il che non toglie che siano da accogliersi con molto compiacimento queste pubblicazioni, le quali sono conferma dell'ingegno acuto e originale e della larga e varia erudizione del Professore napoletano. E la Classe ringrazia il Professore Cocchia per il dono fatto all'Accademia.

È accolta per la pubblicazione negli *Atti* una Nota del Prof. Dr. Massimo Lenchantin de Gubernatis intitolata *Il nuovo storico di Sicione e la dinastia degli Ortagoridi*, presentata dal Socio De Sanctis che ne espone brevemente il contenuto.

Il Socio Prato presenta, pure per la pubblicazione negli *Atti*, una sua Nota dal titolo *Sulle premesse economiche del contratto collettivo di lavoro*.

LETTURE

Il nuovo storico di Sicione e la dinastia degli Ortagoridi.

Nota di MASSIMO LENCHANTIN DE GUBERNATIS.

Sulla tirannide di Sicione, un po' più di luce, minore però di quella che desidereremmo, riverbera un nuovo frammento testè pubblicato (1). Si tratta di un papiro in bella e chiara onciale di cm. 29,4 × 10,8, risalente alla prima metà del terzo secolo, in due colonne di 35 linee. Le lacerazioni della seconda colonna hanno prodotto la perdita costante delle lettere finali d'ogni singolo rigo, senza che questa circostanza abbia contesa la quasi sicura integrazione del testo ai dottissimi editori principi, ai quali appartengono, salvo indicazione diversa, i supplementi:

Col. I.

[ὅ]ν[τ]α δημότην κ[αὶ
φα[ῦ]λον τὸν ἄνθρω-
πον, παρημέλησε
τοῦ μαντείου καὶ τὰς
5 μὲν ἄλλας θυσίας τὰς
[ἐ]πιταχθείσας ἐκ τῶν
[Δ]ελφῶν ἀπέδωκε
τοῖς θεοῖς, τῆς δὲ τυ-
ραννίδος τῆς μελ-
10 λούσης ἔσεσθαι κατε-
[φρό]νησεν. ὁ δὲ Ἀν-
δρ[έ]ας τὸ γενόμενον
αὐτῷ παιδίον ἔτρε-

Col. II.

καὶ συμβα[λόντων ἐξ αἰ-
φνιδίου, βο[ηθήσας
ἀπέκτειν[εν τῶν πο-
λεμίων τιν[ὰς καὶ
40 πολὺ πάντ[ων ηὐδο-
κίμησε μά[λα πρότερος
τῶν περιπ[όλων.
ἀνθ' ὧν οἱ Σ[ικυώνι-
οι περιπόλ[αρχον αὐ-
45 τὸν ἀπέδει[ξαν. εὐθὺς
δὲ τυχὼν τ[αύτης
τῆς τιμῆς, ἐ[βιάσατο
τοὺς πολεμί[ους ἔτι

(1) Grenfell e Hunt *Oxyrhynchus-Papyri* XI p. 104 n. 1365 (Londra 1915).

	φεν, ὄνομα θέμενος		λαμπρότερ[ον, ὥστε
15	Ὀρθαγόραν, ὃς μέχρι	50	τῶν πολιτῶ[ν τινας
	μὲν ἡλικίας δι[ετέ-		ᾠκειοῦτο κ[αὶ προσ-
	[λ]εσε διαιτώμενος		ήγετο καὶ χ[ρόνου
	καὶ παιδευόμενος		προελθόντο[ς εἵλον-
	οὕτως ὥσπερ ἦν εἰ-		το πολέμαρχ[ον αὐ-
20	κὸς υἱὸν ὄντα μαγεί-	55	τόν. μάλιστα [μὲν δι-
	[ρου] καὶ τοῦ τυχόν[τος]		ὰ τὴν ἀνδρ^έ[αν καὶ
	[τῶ]ν πολιτῶν. ἐπει-		τὴν εὐτυχία[ν τὴν
	δὴ δὲ τὴν τῶν παί-		κατὰ πόλεμο[ν, ἔπει-
	[δω]ν παρήλλαξεν ἡ-		τα καὶ τὸ πλῆ[θος τῶν
25	λικίαν, γενόμενος	60	πολιτῶν εὖ [πρὸς αὐ-
	τῶν περιπόλων τῶν		τὸν εἶχεν. π[ολε-
	[φ]ρ[ο]υρούντων τὴν		μήσαντος δ[ὲ κατὰ
	[χώ]ραν, πολέμου συν-		τὴν ἀρχὴν ἀ[νδρείως
	[ε]στῶτος τοῖς Σικυω-		τήν τε χώραν [τὴν
30	νίοις πρὸς Πελλη-	65	οἰκείαν δια[φυλά-
	νέας, ἦν μὲν ἐν ἅ-		ξαντος καὶ π[ολλὰ κα-
	πασι τοῖς καιροῖς ἐ-		κὰ τοὺς πολε[μίους
	ν[ερ]γὸς καὶ χαρίεις·		ποιήσαντο[ς, ὁ μὲν
	[κ]αταδραμόντων		δῆμος ὁ τῶν [Σικυω-
35	[δ]ὲ τῶν Πελληνέ[ω]ν	70	νίων αὖθι[ς

Gli editori hanno giustamente supposto che davanti a [ὄ]ν[τ]α della prima linea precedessero parole come *γνοὺς* (o *αἰσθόμενος*) *δὲ ὁ δῆμος ὁ τῶν Σικυωνίων*.

L. 41 *μά[λα πρότερος]*. I primi editori hanno *μα[λιστα]*. Il mio supplemento non supera lo spazio disponibile, contando ogni linea da 13 a 18 lettere.

L. 47 *ἐ[βιάσατο]*: non si tratta forse di vittorie, ma di scontri fortunati contro gli invasori. Grenfell e Hunt hanno *ε[νικησε]*.

L. 50 *τῶν πολιτῶ[ν τινας]*. Grenfell e Hunt leggono *πολλους*, congettura contro cui si oppone la considerazione che solo più tardi il *πλῆθος* ha concesso i suoi favori a Ortagora (cfr. l. 59). Noi ci attenderemmo un *τοὺς ἀρίστους* o un *τοὺς ἐπικρατεῖς*, supplementi che superano lo spazio disponibile.

Col fatto, narrato dal nuovo frammento, si connette il racconto incompleto di Diodoro *Exc. Vat.* VIII 24: *Ὅτι Σικυωνίοις ἔχρησεν ἡ Πυθία ἑκατὸν ἔτη μαστιγονομηθήσεσθαι αὐτούς. ἐπερωτησάντων δὲ αὐτῶν τίς ὁ ταῦτα ποιήσων, πάλιν ἀπεκρίθη, ᾧ ἂν καταπλεύσαντες πρώτῳ γεγενημένον υἱὸν ἀκούσωσιν. ἐτύγχανε δὲ τοῖς θεωροῖς ἠκολουθηκὼς τῆς θυσίας ἕνεκα μάγειρος, ὃς ἐκαλεῖτο Ἀνδρέας. μισθοῦ τοῖς ἄρχουσι μαστιγοφορῶν ὑπηρέτει.*

Quale fosse la causa della punizione dice Plutarco (*De sera num. vind.* 7 p. 553), accennando egli pure all'oracolo: *Σικυωνίοις δὲ καὶ διαρρήδην ὁ θεὸς προεῖπε μαστιγονόμων δεῖσθαι τὴν πόλιν, ὅτι Τελητίαν παῖδα στεφανούμενον ἐν Πυθίοις ..... διέσπασαν. ἀλλὰ Σικυωνίοις μὲν Ὀρθαγόρας γενόμενος τύραννος, καὶ μετ' ἐκεῖνον οἱ περὶ Μύρωνα καὶ Κλεισθένη, τὴν ἀκολασίαν ἔπαυσαν.*

Ho detto che il nuovo frammento si connette con il racconto di Diodoro, solo però nel senso che in entrambi sembra che l'oracolo annunziasse l'avvento sul trono di Sicione di un *μαστιγονόμος*. Ma vi è una sostanziale differenza tra le due fonti: giacchè, mentre in Diodoro risulta che il tiranno sarebbe stato colui al quale per primo, dopo il ritorno, fosse nato un figlio, cioè Andrea, dal nuovo frammento, come si intuisce con sicurezza, il signore di Sicione non fu costui (Andrea), ma suo figlio Ortagora. Nè mi si accampino le solite ragioni tanto comode, quando non si può mettersi d'accordo con una fonte. Qui non si tratta di un abbaglio, di una confusione facile di nomi, ma di una redazione sostanzialmente diversa dell'oracolo; e l'aver constatato ciò riescirà utile tra poco, quando si tenterà di identificare l'autore del frammento.

Ai teori, inviati dai Sicioni, la Pizia aveva adunque predetto che avrebbero dovuto, in ammenda del delitto compiuto su un giovane coronato nelle Pitiche, essere soggetti per cento anni a un flagellatore e che costui sarebbe stato il primo che na-

scesse a chiunque dei partecipanti alla ambasciata, dopo il ritorno in patria. Accompagnava i teori un cuoco, di nome Andrea, al quale appunto nacque un figlio, appena approdato a Sicione. Ciò si arguisce dal nuovo papiro, in cui leggiamo che il popolo di Sicione, osservando che Andrea era uomo plebeo e di vile condizione, non tenne in tutto il conto dovuto il responso dell'oracolo e, mentre rese agli dèi gli altri sacrifici, imposti da Delfo, non si preoccupò della ventura tirannide. Andrea intanto si tirava su il bambino, che aveva chiamato Ortagora, in quel tenor di vita e con quella educazione che conveniva al figlio d'un cuoco e di persona di condizione umilissima. Ma escito dalla fanciullezza, Ortagora, arruolato tra i peripoli preposti alla difesa della regione, quando scoppiò una guerra tra Sicioni e Pellenei, ebbe a rivelarsi valoroso in tutte le occasioni e si cattivò favore. Indi, durante una incursione ed assalto improvviso dei Pellenei, egli corse alla difesa, uccise parecchi nemici e molto si segnalò su tutti, di gran lunga primeggiando tra i peripoli. In premio della sua condotta, i Sicioni lo nominarono peripolarco e, appena ottenne questo grado, egli respinse i nemici ancor più brillantemente, in modo da conciliare a sè e trarre dalla sua alcuni de' cittadini; e, dopo qualche tempo, fu eletto polemarco. In seguito, principalmente per il valore e i prosperi successi in guerra, anche il popolo prese a favorirlo. Ed avendo egli, durante il suo comando, combattuto con coraggio, difesa la patria e inflitti grandi danni al nemico, di nuovo il popolo di Sicione ..... Qui si interrompe il frammento, ove, come chiaramente appare, l'autore batte con insistenza su un punto su cui vuol richiamare l'attenzione: Ortagora divenne tiranno, perchè molto e bene oprò col senno e con la mano.

Il responso della Pizia, al quale alludono Diodoro e Plutarco, è un oracolo *ex eventu*; e la qualità di *μαστιγονόμος*, riferita a ogni principe della dinastia, e quella di *μάγειρος*, attribuita ad Andrea e da una fonte (1) anche ad Ortagora, sono autoschediasmi dedotti dalle parole *μαστιγονομέομαι* e *μαστιγονόμος*, che costituivano le espressioni più caratteristiche dell'oracolo.

---

(1) Liban. *oratio contra Severum* IV p. 173, 2 Foerster ... *'Ορθαγόρας ... ὁ μάγειρος.*

Nè devono essere presi come cifra precisissima i cento anni, coi quali si voleva indicare la lunga durata della tirannia degli Ortagoridi.

Fondandosi sulla stretta connessione, che credevano di scorgere tra Diodoro (VIII 24) e il nostro frammento, gli editori principi sono stati indotti a pensare alla paternità della fonte di Diodoro, cioè ad Eforo (1). Ma l'ipotesi non mi sembra sostenibile; giacchè, mentre nel nostro papiro Ortagora è rappresentato con dovizia di particolari come colui il quale, imponendosi con le sue opere, divenne tiranno di Sicione, in Diodoro invece è indicato apertamente, quale fondatore della dinastia, Andrea. E non si tratta di sbadataggine dell'autore o di possibile abbaglio : le parole dell'oracolo non mettono in dubbio che Andrea dovesse diventare tiranno.

Questa constatazione infirma naturalmente l'altra congettura del Grenfell e dell'Hunt che, tratti da certe congruenze sporadiche (2) e da peculiarità sintattiche (ripetizione dell'articolo), volevano sorprendere ancora una intima relazione tra il nuovo papiro e le *Elleniche* di Ossirinco; in modo che, se il nostro fr. fosse di Eforo, assumerebbe maggior fondamento l'opinione del Walker che in Eforo appunto s'immagina d'identificare chi scrisse le *Elleniche*, restando quindi escluso Teopompo, giacchè questi, dato il periodo di storia di cui trattò, non pare abbia potuto narrare le vicende di Sicione. Ma la questione in ogni modo è per noi di secondaria importanza.

Escluso Eforo, si potrebbe pensare ad Aristotele, che aveva scritto una *Σικυωνίων πολιτεία* (cfr. Poll. IX 77) e nei *Politici* (V 1315 b) ricercando, non senza simpatia, le ragioni per cui la tirannide di Sicione avesse resistito più a lungo delle altre, enumerava le seguenti: moderazione verso i sudditi, osservanza della legge, natura bellicosa di alcuni principi, tra i quali Cli-

(1) *Op. cit.* p. 107.

(2) Nel nostro papiro l. 24 abbiamo *παρήλλαξεν ἡλικίαν* corrispondente a *Hell. Oxyrh.* 16, 1 *εἶτα] δὲ παραλλάξας τό τε Θήβης πεδίον*; a l. 33 leggiamo *ἦν... ἐνεργὸς καὶ χαρίεις* corrispondente a *Hell. Oxyrh.* 1, 2 [*ὅσοι γνώ*]*ριμ*[*οι κ*]*αὶ χαρίεντες ἦσαν*. Come si vede, si tratta di luoghi simili poco significativi.

stene, sollecitudine e cure grandi nell'amministrazione dello Stato, che conciliavano la benevolenza del popolo.

Tuttavia contro la paternità di Aristotele si elevano obiezioni che fanno inclinare al dubbio. È stato notato come un po' vaghe appaiano le notizie intorno alla politica interna, sulla quale doveva fermarsi l'occhio del filosofo (1); e l'osservazione non manca di peso, ancorchè si tratti di avvenimenti che si perdevano nella nebbia delle leggende. Parve pure singolare che l'A. potesse dedicare alla narrazione della ascesa di Ortagora al supremo potere più parole che ai Pisistratidi nell' *'Αθ. πολ.* (2). Nè sembra ammissibile che Aristotele, che pur non rifuggiva dall'accogliere l'elemento fantastico e leggendario, si fermasse a lungo ad esporre cose atte a stuzzicare la curiosità, sebbene di nessuna importanza, invece di correre ai fatti, sui quali basare quella storia scientifica che sorrideva al suo spirito. Anche in un'opera quale la *Costituzione dei Sicioni*, stuonerebbe il ricordarli sempre per nome come nel nostro papiro (ll. 29, 46, 69); mentre ciò conviene a uno scritto in cui la storia di Sicione costituiva una digressione. Nell' *'Αθ. πολ.* invece gli Ateniesi sono sempre designati con *ὁ δῆμος* semplicemente; oppure ricorre non specificato il plurale (3). I benemeriti primi editori (4) hanno raccolto i vari contatti tra l' *'Αθ. πολ.* e il papiro; numerosi sì, ma non caratteristici (5). Nella seconda metà del IV secolo, che

(1) Grenfell e Hunt *op. cit.* p. 107.

(2) *Ibd.* p. 108.

(3) *Ibd.* p. 108.

(4) *Op. cit.* p. 111.

(5) Cfr. l. 21 *τοῦ τυχόν[τος] [τῶ]ν πολιτῶν* ~ *'Αθ. πολ.* 27, 4 *μᾶλλον τῶν τυχόντων ἢ τῶν ἐπιεικῶν ἀνθρώπων*; l. 24 *παρήλλαξεν ἡλικίαν* ~ *'Αθ. πολ.* 11, 2 *μ[ικ]ρ[ὸ]ν παραλλάξειν*; 3, 3 *μικρὸν ἂν παραλλάττοι* (cfr. *Polit.* I 1254 b) col significato però di 'differire'; l. 26 *περιπόλων τῶν [φ]ρ[ο]υρούντων τὴν χώραν* ~ *'Αθ. πολ.* 42, 4 *περιπολοῦσι τὴν χώραν*; l. 28 *πολέμου συν[ε]στῶτος* ~ *'Αθ. πολ.* 24, 3 *συνεστήσαντο τὸν πόλεμον*; l. 40 *[ηὐδο]κίμησε* ~ *'Αθ. πολ.* 14, 1 *ὁ Πεισίστρατος καὶ σφόδρ' εὐδοκιμηκὼς ἐν τῷ πρὸς Μεγαρέας πολέμῳ*; l. 46 sg. *τυχὼν τ[αύτης] τῆς τιμῆς* ~ *'Αθ. πολ.* 12, 5 *εἰ γάρ τις ἄλλος, φησί, ταύτης τῆς τιμῆς ἔτυχεν*: l. 51 *προσ]ήγετο* ~ *'Αθ. πολ.* 20, 1 *προσηγάγετο τὸν δῆμον*. Questi riscontri numerosissimi, se si tien conto della limitata estensione del frammento, non sono certo da mettere in non cale, benchè non abbiano a considerarsi quali vere e proprie peculiarità di un solo ed unico autore.

è l'epoca a cui può riferirsi con molta verisimiglianza il nuovo frammento, le singolarità e peculiarità della lingua e del lessico, astrazione fatta dagli atteggiamenti originali di concetto e di forma, vanno a grado a grado sparendo, e gli scrittori attingono al frasario comune; onde riesce facile trovare, anche fra autori indipendenti, espressioni analoghe. Queste adunque le considerazioni che rendono titubanti ad accettare l'ipotesi in sè attraente, per cui ai tesori del grande di Stagira avrebbero da aggiungersi i pochi brandelli sulla tirannide di Sicione, nei quali però non rifulge scintilla di quel genio immortale.

Nè ci possiamo fermare sul nome di Teopompo, le cui *Elleniche* comprendevano, in continuazione a Tucidide, il periodo che si estende tra il 410 e il 394, a meno di supporre che in una di quelle digressioni, che faceva per rendere più attraente la lettura dei suoi libri, abbia trovato maniera di incastonare la storia della tirannide di Sicione. Non bisogna altresì tacere che nel nuovo frammento non ci riesce di scorgere uno storico imbevuto di dottrina retorica, fosse esso un Eforo o un Teopompo, entrambi discepoli di Isocrate.

Sulle cose di Sicione una delle nostre fonti più particolareggiate è Pausania, il quale espone le saghe sulle origini e dà anche una lista di 23 re antichissimi (1); lista, non occorre dire, destituita d'ogni fondamento storico, la quale, senza dubbio alcuno, fu da lui attinta ad autore diverso da quello su cui sono compilate le altre serie dei re sicioni (2). D'altra parte le notizie ieratiche e etiologiche, che il periegeta ci fornisce (3), ripugnano al carattere di una storia come quella d'Eforo o, in maggior grado, d'una *πολιτεία* aristotelica; ma costituiscono invece il fondo comune delle cronache locali che vennero sfruttate nelle scritture storico-antiquarie, le quali furono in onore e fiorirono, quando la gigantesca opera delle *πολιτεῖαι* aristoteliche ridestò l'interesse sopito intorno alle leggende, agli avvenimenti, alle curiosità d'ogni singola città o regione (4).

(1) II 5, 5 sgg.

(2) Su ciò cfr. Busolt *GG* I² p. 665 n. 4. Pare che la lista di Pausania sia la più antica. (3) II 7, 2; 5; 8; 10, 1; 9, 7.

(4) Sugli storici locali greci cfr. Wilamowitz *Arist. u. Ath.* II p. 21 sgg.; Wachsmuth *Einleitung* ..... p. 554; Vogt *Die griech. Lokalhistoriker* ' Fleckeisens Suppl. ' XXVII p. 699 sgg.

L'unico storico particolare di Sicione è Menechmo (1), vissuto al tempo di Alessandro Magno, prima che Aristotele componesse i suoi Ὀλυμπιονῖκαι (2), ed autore tra l'altro d'un'opera dal titolo Σικυωνιακά (3). A una cronaca locale convengono bene le notizie particolareggiate e minute intorno all'oracolo, al padre di Ortagora e a Ortagora stesso, che leggiamo nel nuovo papiro. Certo non si deve nascondere che l'identificare senza più nel 'sicionografo' Menechmo l'autore del nostro frammento, sarebbe, tenuto conto degli argomenti di cui ci possiamo valere, ipotesi attraente sì, ma non abbastanza sicura (4).

(1) ATHEN. II 271 d; cfr. *Script. rer. Alex.* p. 146.

(2) Ciò è acutamente determinato da C. MÜLLER *FHG* II p. 182. SUIDA s. v. invece dice che Μάναιχμος (sic)... γέγονε... ἐπὶ τῶν διαδόχων, che è errore cronologico non grave, imputabile forse alle difficoltà che si incontravano per determinare l'ἀκμή degli autori poco noti od oscuri. Potrebbe essere che MENECHMO fosse sopravvissuto ad Alessandro Magno e ad Aristotele, toccando perciò l'età dei diadochi: donde la notizia di SUIDA.

(3) ATHEN. 271 d.

(4) Non si deve tacere che MENECHMO è autore oscuro, mentre è notorio che le sabbie d'Ossirinco ci hanno restituito in prevalenza brani di scrittori notissimi o celebri. La regola subisce tuttavia non poche eccezioni, e una eccezione potrebbe essere il nostro frammento.

Si potrebbe pensare anche ai **Τυράννων βίοι**; ma su quelli, appartenenti al tempo più antico, cioè all'epoca alessandrina, le notizie sono oltremodo scarne e indeterminate; e il materiale biografico, che il tempo non ci ha invidiato, costituito da opere come le *Vite* di CORNELIO NEPOTE, le *Vite parallele* di PLUTARCO, i ***De viris illustribus*** e i *Caesares* di SVETONIO, le *Vite degli illustri filosofi* di DIOGENE LAERZIO, rappresenta un grado più avanzato degli scritti Περὶ ἐνδόξων ἀνδρῶν, quantunque in esso non manchino tracce delle fonti primarie dei periodi anteriori. È noto come la biografia, che nella istoriografia greca rimase un genere distinto dalla storia propriamente detta, nacque quando nel mondo ellenico l'attenzione degli scrittori e l'interesse dei lettori si volse, con l'imporsi dell'individualismo, sulle personalità eminenti o per opere d'ingegno o per gesta compiute o per condizione politica. Già nell'Ἀθηναίων πολιτεία il KAIBEL (*Stil und Text der II. A.* p. 7) ha scorto le prime manifestazioni della biografia peripatetica; e un discepolo di Aristotele, ARISTOSSENO, lodatissimo da S. GEROLAMO (*Praef. de vir. ill.*), concepì il βίος quale rappresentazione, in un determinato ambiente, di un individuo nella vita pratica in rapporto alle esigenze morali teoriche. Degli ἔνδοξοι ἄνδρες furono fatte varie categorie e fra queste quella dei tiranni. Primo, in ordine di tempo, tra i biografi di tiranni viene ancora uno scolaro di Aristotele, FANIA di Ereso (*FHG* II p. 293), con un'opera sui tiranni di Sicilia e sulle **Τυράννων**

***

Che Ortagora fosse il capostipite dei tiranni di Sicione riconoscevano concordi Aristotele (1), Nicola Damasceno (2), Plutarco (3); non ne parlano invece Erodoto (4) e Pausania (5).

Gioverà esaminare una per una le testimonianze per tentare di stabilire, con la maggior precisione possibile, in che cosa concordino e in che cosa si presentino discordi o contradditorie.

Cominciamo da Erodoto. Egli (6), narrando il fidanzamento di Agariste, figlia di Clistene, tiranno di Sicione, dice che questi era figlio di Aristonimo, figlio di Mirone, figlio di Andrea, offrendoci questo albero genealogico:

Con Erodoto concorda Pausania (7) che però omette Andrea.

ἀναιρέσεις ἐκ τιμωρίας, scritti questi ai quali, per la materia su cui versano, non può appartenere il frammento degli Ortagoridi. Dei rimanenti autori di simili biografie, dei quali talora possediamo miseri frammenti, tal altra poco più del nome, gli uni sono di incertissima cronologia: tali Carone di Naucrati, che scrisse una storia dei re d'ogni popolo dall'età più antica; Carone di Cartagine, che compose la storia di tutti i tiranni d'Europa e d'Asia (per l'uno e l'altro Carone, che potrebbero e forse sono la medesima persona, cfr. *FHG* IV p. 360; PW*RE* III col. 2180; Kahrstedt *Gesch. der Karthager* III p. 25 n. 1, che, con buoni argomenti, vuole di Carone fare un cittadino di Cartagine imperiale); Sozione (non ricordato nei *FHG*: cfr. Diels, *Doxographi graeci* p. 147 sg.; Leo *Die griech. röm. Biographie* p. 128 sg.); e non meno che in questi sarebbe arbitrario individuare l'autore del nostro fr. in uno degli altri biografi, come Dionisio di Eraclea, discepolo di Zenone lo stoico (*FHG* II p. 494); Batone di Sinope, fiorito verso la seconda metà del secolo II (*FHG* IV p. 347); Ermippo, designato come peripatetico da S. Gerolamo (*op. cit.*) e quale ὁ Καλλιμάχειος da Ateneo (*FHG* IV p. 35: cfr. Leo *op. cit.* p. 124); Menandro di Efeso, forse del II secolo (*FHG* II p. 445); Satiro, peripatetico, pure del secondo secolo (*FHG* III p. 159).....

(1) *Polit.* V 1315 b. (2) Fr. 61. (3) *De sera num. vind.* 7 p. 553. (4) VI 126. (5) II 8, 1. (6) *L. c.* (7) *L. c.*

Aristotele in *Polit.* V 1315 b, dopo aver osservato che, fra tutte le forme di governo, le meno durature sono l'oligarchia e la tirannide, ricorda che tra le tirannidi resistette più a lungo quella di Sicione, in mano ai figli (cioè ai discendenti) di Ortagora e a Ortagora stesso, e più innanzi (*ibid.* V 1316 a) scrive: *ἀλλὰ μεταβάλλει καὶ εἰς τυραννίδα τυραννίς, ὥσπερ ἡ Σικυῶνος ἐκ τῆς Μύρωνος εἰς τὴν Κλεισθένους.*

Ma abbiamo visto che, secondo Erodoto, l'immediato predecessore di Clistene sarebbe stato Aristonimo e Mirone invece il nonno. La contraddizione però è solo apparente. Erodoto, che concentra tutta la sua attenzione sul fidanzamento di Agariste, che gli sembra tanto interessante, non dà una genealogia completa degli Ortagoridi, ma una notizia sommaria sugli antenati di Clistene, non accennando a fatti importanti, sui quali ci informa Nicola Damasceno (fr. 61). Clistene era pervenuto al regno in seguito ad avvenimenti sanguinosi in seno alla sua famiglia. Dopo aver indotto all'assassinio di suo fratello Mirone, che occupò il trono per 7 anni, un altro fratello di nome Isodamo, di cui aveva saputo astutamente eccitare i sentimenti di odio e di vendetta per l'atroce offesa che gli era stata fatta, egli era riescito ancora a scacciarlo, regnando in seguito con grande energia per un periodo di 31 anni. Come si rileva, sono notizie sulle quali, astraendo da particolari che potrebbero essere veri o no, uno scetticismo troppo spinto apparirebbe infondato.

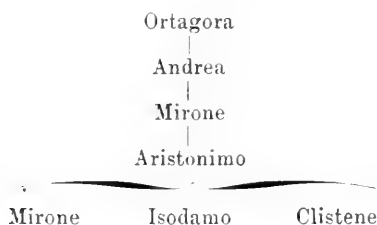
Aristotele adunque non ricorda Mirone, nonno di Clistene, ma Mirone fratello di Isodamo, da cui fu ucciso, e di Clistene che fu il suo successore. Rimangono quindi spiegate le parole *ἀλλὰ μεταβάλλει καὶ εἰς τυραννίδα τυραννίς, ὥσπερ ἡ Σικυῶνος ἐκ τῆς Μύρωνος εἰς τὴν Κλεισθένους.*

In quanto a Plutarco, le cose corrono ancor più semplici: egli scrivendo (*De sera num. vind.* 7 p. 553) *Σικυωνίοις μὲν Ὀρθαγόρας γενόμενος τύραννος, καὶ μετ' ἐκεῖνον οἱ περὶ Μύρωνα καὶ Κλεισθένη, τὴν ἀκολασίαν ἔπαυσαν,* non voleva ricordare tutti i tiranni di Sicione, ma quelli che avevano dimostrato maggior severità nel moderare la sfrenatezza dei sudditi, quelli ai quali meglio conveniva il nome di *μαστιγονόμος.*

Ciò posto, l'albero genealogico di Erodoto non deve essere impugnato, giacchè nessuna altra testimonianza lo contraddice.

Il frammento di Ossirinco ci informa che Andrea era il

nome del padre di Ortagora (1), e la stessa cosa risulta da Diodoro (2); e noi possiamo con molta verisimiglianza supporre che Ortagora abbia avuto un figlio, chiamato Andrea in memoria del padre, sul quale si fermò Erodoto. Notiamo ancora, senza dare alla cosa troppo peso, che Mirone, verisimilmente primogenito di Aristonimo e fratello di Isodamo e di Clistene, portava il nome del nonno.

In conseguenza mi pare che l'albero genealogico dei tiranni di Sicione possa venir stabilito nel modo che segue:

A supporre che un altro tiranno vi sia stato tra Ortagora e Andrea, che abbiamo considerato di lui figlio, si oppone, come si vedrà tra poco, la durata che si assegna dalle fonti alla dinastia, mentre nel resto i dati cronologici conferiscono verisimiglianza alla genealogia sopra indicata.

Clistene, nei primi decenni del VI secolo era, fuori di dubbio, signore di Sicione, e ciò viene concordemente riconosciuto da tutti gli storici moderni (3). Egli prese parte alla guerra sacra contro Crisa (4) e riportò una vittoria nella corsa dei carri nelle Pitiche dell'a. 582 (5). Se si stesse ad Erodoto (6), la figlia sua

(1) L. 11.

(2) VIII 24.

(3) Busolt *GG* I^2 667, ove è citata la bibliografia meno recente; Meyer *GdA* II p. 628; De Sanctis *'Ατθίς*^{2} p. 285 sg.; Beloch *GG* I^2 2 p. 285.

(4) *Schol. Pind. Nem.* IX 2; Diod. IX 16; Paus. II 9, 6; X 37, 5; Polyaen. III 5.

(5) Pavs. X 7, 7.

(6) In realtà Erodoto dice (VI 126) che, in seguito a una vittoria sul carro nei giuochi O l i m p i c i, Clistene aprì la gara fra gli aspiranti alla mano di sua figlia. Ma non credo troppo azzardato supporre una confusione tra l'une e le altre feste.

Agariste avrebbe celebrato le nozze con Megacle un anno dopo. E la notizia non sembra indegna di fede, giacchè una figlia di Agariste, nata da questo matrimonio, andò sposa a Pisistrato, quando questi era ancora in perfetto accordo con Megacle, cioè prima di assumere la signoria, il che avveniva sotto l'arcontato di Comea nell'a. 560 (1). D'altra parte, a non farci risalire, per le nozze di Agariste, in epoca anteriore al 581 circa, vale la circostanza che un suo figlio Clistene, che portava il medesimo nome del tiranno di Sicione, partecipò in Atene attivamente alla cacciata dei tiranni e nelle lotte tra Isagora e Cleomene; ed evidentemente nel 511-508, in cui succedevano cotesti avvenimenti, egli non poteva essere un vecchio (2). Queste considerazioni, è chiaro, crescono valore alla testimonianza d'Erodoto.

Con grande sicurezza è pure databile il regno di Mirone, il nonno di Clistene, per mezzo dell'iscrizione del *θάλαμος* di bronzo che egli, a nome suo e del popolo di Sicione, dedicò in Olimpia (Paus. VI 19, 4), dopo riportata una vittoria nella corsa dei carri nell'ol. 33 (a. 648), 66 anni, e quindi due generazioni, prima dell'analoga vittoria di Clistene, ottenuta nelle Pitiche del 582. Anche questo dato concorda con la genealogia di Erodoto che fa Clistene nipote di Mirone.

Abbiamo già detto che a Aristonimo successe Mirone, il quale regnò per sette anni, indi Isodamo che, dopo un anno, si assunse per compagno al trono il fratello Clistene che lo scacciò subito, mantenendo la signoria per 31 anni.

Ma quando morì Clistene?

Erodoto narra che egli diede alle tribù della sua città i nomi di *Ἀρχέλαοι, Ὑᾶται, Ὀνεᾶται, Χοιρεᾶται*, perchè non conservassero i nomi delle tribù doriche, ed aggiunge *ἔνθα καὶ πλεῖστον κατεγέλασε τῶν Σικυωνίων* (3). Ora, osserva il De Sanctis (4), questo ha tutto il carattere di una invenzione maligna. Ma Erodoto ricorda che tali nomi rimasero in vigore sessant'anni dopo la morte del tiranno; e qui è contenuta una data di cui

(1) De Sanctis *Ἀτθίς*[2] p. 271.
(2) *Ibd.* p. 285.
(3) V 68.
(4) *Ἀτθίς*[2] p. 285.

è d'uopo tener conto. Erodoto evidentemente ha notizia di un rivolgimento accaduto a Sicione sessant'anni dopo la morte di Clistene. Plutarco dà una lista di tiranni scacciati dagli Spartani, tra i quali è Eschine di Sicione. La lista, ordinata cronologicamente, pone Eschine tra Ippia (511) ed altri tiranni che, secondo ogni verisimiglianza, furono espulsi subito dopo la battaglia di Micale (479). Siccome Sicione era già alleata con Sparta al tempo della guerra di Serse, è probabile che si sia unita alla lega spartana dall'epoca che seguì immediatamente la cacciata d'Ippia. In questo caso i sessant'anni, che, in cifra tonda, dà Erodoto, ci riporterebbero al 570-565 circa.

Conferma in parte queste acutissime induzioni, basate però su dati non troppo certi, un papiro edito recentemente (*Catalogue of the Greeck Papyri of the John Ryland's Library* n. 18 p. 31), ove a l. 16 sgg. leggiamo:

Χίλων δὲ ὁ Λάκων
ϱ
ἐφορεύσας καὶ σταṭ[ηγή-
σα̣ς Ἀναξανδρίδη̣[ς τε
τὰς ἐν τοῖς Ἕλλ[ησ]ι̣ν̣
20 *ṭ[υρα]ν̣ν̣ίδας κατέλυ-*
σα̣[ν]. ἐν Σικυῶν[ι] μὲν
Α̣ἰ̣[σχ]ί̣ν̣η̣ν̣ Ἱππίαν̣ δὲ
[Ἀθήνησιν] Πεισιστ[ρά-
[του τὸν υἱὸν ἐξέβαλον] (1).

Dunque del movimento tirannofobo vengono esplicitamente considerati capi l'eforo Chilone e il re Anassandrida. L'eforato di Chilone cade molto probabilmente verso il 556/5 (2), e Anassandrida regnò in un periodo che si estende all'incirca dall'a. 560

(1) Il mio supplemento è naturalmente incerto. L'Hunt propone *Πεισιστρα[τον διαδεξαμενον* oppure *Πεισιστρα[του υιον ο διαδοχον.*

(2) Meyer *GdA* II p. 565.

al 520 (1). D'altra parte Eschine è ricordato nel nostro fr. immediatamente prima di Ippia, il che potrebbe indurre a credere che egli, prima pure del tiranno ateniese, fosse stato privato del regno. Perciò con quel movimento che condusse alla spedizione infelice dello spartiata Anchimolo e indi all'invasione di grande numero di Lacedemoni, sotto la guida di Cleomene, figlio di Anassandrida, in seguito alla quale Ippia consegnava la rocca di Atene e perdeva il trono (2), noi dobbiamo connettere la cacciata di Eschine da Sicione, che si può porre nella medesima epoca, cioè verso il 511/0.

Eschine non fu, a mio credere, nè figlio nè nepote del tiranno Clistene. La novella di Erodoto sui proci d'Agariste può solo intendersi, come acutamente osserva il De Sanctis (3), quando si supponga che Agariste fosse figlia unica ed ereditiera, e che al figlio di lei dovesse, nelle intenzioni del nonno, passare la tirannide di Sicione. E così si spiega pure come Megacle abbia chiamato dal nome di Clistene il suo primogenito. Ma questi non fu successore nella tirannide dell'avo. Perchè? Egli era, alla morte di quello, tuttora bambino e inetto a regnare, e questa circostanza favorì i maneggi degli Spartani i quali osteggiarono la tirannide di Sicione e forse ne causarono una interruzione. Il nostro Eschine, scacciato verso il 511/0, fu un imitatore degli Ortagoridi, senza esserne discendente diretto. Ciò ci viene indirettamente confermato da Aristotele (4) e da Diodoro (5), che alla tirannide di Sicione assegnano un periodo di 100 anni, nel quale, anche preso con la maggior larghezza, Eschine non può in verun modo essere compreso.

Colui che attese, favorito dalle aderenze e dalle ricchezze, a muovere, con più salda costanza, la guerra ai Pisistratidi fu, è inutile ripeterlo, Clistene, il capo degli Alcmeonidi, figlio di Megacle e di Agariste, nipote e, un tempo, presunto erede dell'omonimo tiranno di Sicione (6). È naturale quindi che intorno

(1) Meyer *ibd.* p. 766; Beloch *GG* I[2] 2 p. 191.
(2) De Sanctis 'Ατϑίς[2] p. 325 sgg.
(3) *Ibd.* p. 286.
(4) *Polit.* V 1315 b.
(5) VIII 24.
(6) De Sanctis 'Ατϑίς[2] p. 324.

ai Pisistratidi si serrassero i tiranni minacciati dalla politica spartana, intesa a sostituire loro governi oligarchici. Eschine adunque — è questa semplice ipotesi, ma non lontana dal vero — fu forse alleato di Ippia; e contro il tiranno d'Atene non meno che contro colui, che teneva il trono che poteva essere suo, si concentrava l'odio del legislatore che riescì a trionfare sui propri nemici.

Ma ritorniamo alla data della morte del tiranno Clistene. Ad Erodoto — già l'abbiamo notato — constava che un rivolgimento era avvenuto in Sicione, sessant'anni dopo la morte di lui. Il rivolgimento non può essere che la cacciata di Eschine e, siccome questa ebbe luogo verso il 511/0, al 571/0 possiamo porre la morte del tiranno Clistene di Sicione.

L'albero genealogico degli Ortagoridi sopra indicato presenta, in confronto con gli altri, il vantaggio di accordarsi a puntino con le fonti, che non risultano tra loro contradditorie, e, ciò che più conta, con i dati cronologici. Ma l'unica difficoltà, che contro di esso si può elevare, è costituita dal numero grande di generazioni che dovrebbero essere costrette nel limite di cento anni che vengono assegnati alla dinastia degli Ortagoridi da Aristotele e da Diodoro. Anche per Aristotele — Diodoro non fa che riprodurre l'oracolo — la fonte della notizia era il responso della Pizia che, sebbene *ex eventu* e appunto per questo, doveva essere enunciato con una certa oscurità e indeterminatezza; quindi non è arbitrario ritenere i cento anni come una cifra tonda e non come una indicazione precisissima.

Clistene adunque, morto nel 570 dopo un regno di 31 anni, deve essere salito al trono verso il 601. Il fratello suo Isodamo regnò un anno solo, quindi nel 602, e l'altro fratello Mirone, che tenne lo scettro per 7 anni, sarà successo al padre nel 609. Per stabilire la durata della tirannide di Aristonimo, non abbiamo alcun dato; ma invece sappiamo che Mirone, nonno di Clistene, riportò una vittoria ad Olimpia nel 648 (66 anni, cioè due generazioni, prima dell'analoga vittoria del nipote Clistene), quando era già principe. Sin qui tutto fila come un olio.

Rimangono ancora una ventina d'anni — dalla morte di Clistene infatti alla morte di Mirone ne abbiamo contati 78 — da spartire tra Andrea e il capostipite Ortagora: pochi in verità per due generazioni. Tuttavia il nuovo papiro ci informa

che Ortagora si andò a grado a grado conquistando la fiducia e il favore dei concittadini. Efebo, cioè a diciotto anni, egli fu peripolo (cfr. l. 21 sgg.), indi peripolarco (cfr. l. 43 sgg.) e finalmente, *χρόνου προελθόντος*, fu creato polemarco, riuscendo a ottenere, con la sua valorosa condotta, anche il favore del *πλῆθος* (cfr. l. 59 sgg.). La carica di polemarco, importantissima, gli fruttava il comando degli eserciti, facilitandogli l'ascesa al supremo potere; ma è difficile potesse averla prima dei 30 anni, e pare inoltre che abbia coperto questo comando per qualche tempo (cfr. l. 61 sgg.). Tenendo conto di coteste circostanze, abbiamo ragione di ridurre alquanto per lui la durata che si suole nei computi attribuire alla tirannia d'ogni singolo principe, senza dover supporre che una morte immatura l'abbia colto. D'altra parte non è arbitrario, come è stato detto, aggiungere una decina d'anni e più ai cento indicati come cifra tonda dall'oracolo, sicchè potremo porre l'avvenimento di Ortagora al trono (essendo Clistene morto nel 570) tra il 680 e il 690, assegnando così al suo regno e a quello del figlio Andrea complessivamente dai 32 ai 42 anni e alla dinastia degli Ortagoridi una durata variante tra 110 e 120 anni.

Sulle premesse economiche del contratto collettivo di lavoro.

Appunti critici.

Nota I del Socio GIUSEPPE PRATO.

Le difficoltà inattese contro cui s'è urtato fin dal principio il nuovo ministero delle munizioni ha riaccesa in Inghilterra una disputa che da tempo pareva sopita: quella dei pericoli e dei danni inerenti all'unionismo operaio ed ai suoi caratteristici indirizzi. L'ironia della sorte volle che proprio all'uomo che per le sue origini politiche meglio l'aveva incarnato, a Lloyd George, toccasse di denunciare gli ostacoli frapposti dal superstizioso feticismo dei regolamenti sindacali al febbrile fervore della difesa nazionale. E da quel momento odonsi da più parti riprese con rinnovato ardore e virulenza le critiche suggerite agli economisti classici dal primo affermarsi del fenomeno, negli inizi della rivoluzione industriale moderna.

Il fatto è tanto più notevole in quanto succede ad un periodo di ottimismo idilliaco, nel quale il favore ufficiale per le leghe operaie giunse, col *Trade disputes act* del 1906, al riconoscimento d'una vera e propria casta privilegiata, libera dalle pastoie ingombranti del diritto comune; logico, sebbene indubbiamente eccessivo epilogo al largo e diuturno movimento di idee, che, anche nel campo strettamente teorico, era venuto temperando dapprima, indi revocando e mutando in encomio la severità delle condanne, a cui l'antica legislazione restrittiva erasi ispirata.

Oggi, nella luce rivelatrice subitamente sprigionata dall'incombente pericolo pubblico, non meno che per le preoccupazioni suscitate dalla vastità, dalla violenza e dai danni dei grandiosi conflitti industriali dell'ultimo periodo, un giudizio di

revisione viene clamorosamente reclamato. Il quale naturalmente è d'uopo involga intero, ed in ogni suo aspetto, il problema; che è morale e sociale oltrechè strettamente giuridico ed economico; e che, pure sotto quest'ultimo riguardo soltanto, offre lati numerosi di controversia, molteplici essendone le interdipendenze e le ripercussioni con cui legasi ai delicati congegni produttivi e distributivi della moderna società.

Affrontare complessivamente il vastissimo tema non è mio proposito; ad un sol punto volendo anzi limitare questa breve nota, il quale, per più versi, mi sembra essenziale veder sempre meglio chiarito; e ciò per le notevoli e continue illazioni pratiche a cui esso dà luogo, non meno che per l'importanza teorica centrale che convien riconoscergli rispetto all'intiero problema. La sostituzione del contratto di lavoro collettivo all'individuale, mèta costante dell'azione unionistica, viene considerata universalmente come una conquista destinata ad assicurare incontestabili e crescenti vantaggi materiali all'insieme delle classi lavoratrici; onde gli assidui sforzi dei tecnici per attuarlo e lo studio dei legislatori d'ogni paese per regolarne efficacemente la pratica.

Risponde la premessa ottimistica al rigore obbiettivo dei fondamentali e più sicuri principî dell'economia scientifica?

***

È noto il ragionamento in base al quale lo Stuart-Mill della seconda maniera si indusse a mutare lo sfavorevole atteggiamento da lui stesso primitivamente assunto verso il presupposto teorico del movimento sindacale.

Il prezzo d'equilibrio d'un qualsiasi scambio non cade, egli osserva, necessariamente in un sol punto. Fra la disposizione del venditore di cedere a 20 mentre chiede 22 e quella del compratore di giungere fino a 22 piuttosto che rinunciare alla merce, ove non gli sia possibile averla per 20, esiste una zona neutra, nella quale il punto d'accordo è stabilito dalla forza e dall'astuzia di ciascuno dei contrattanti. Un vantaggio notevole, in un dibattito di tal fatta, possiede evidentemente colui al quale spetta l'iniziativa di proporre il prezzo; privilegio che, nella compravendita della merce lavoro, trovasi dalla parte del-

l'acquisitore, anzichè — come nelle altre transazioni — del cedente. Onde lo spostamento a vantaggio del primo d'un considerevole e costante elemento di prevalenza e l'utilità quindi di contrapporvi un fattore capace di bilanciarne l'azione. Raggiunge appunto lo scopo l'organizzazione operaia, sostituendo alla forza individuale la collettiva. Ed è in tal senso che la legge del fondo-salari perde la sua rigidità sconfortante, riducendosi all'ovvia proposizione che nessuna coalizione può costringere gli imprenditori a pagare più di quanto guadagnino; mentre rimane aperto all'unionismo un ampio campo di proficua attività (1).

Della tesi milliana non sono che sviluppi più o meno eleganti ed acuti le difese e le apologie del movimento sindacale, di cui la scienza ortodossa ci offre da allora frequenti esempi. Vi recò un contributo notevole il Marshall, accennando alle cause dell'inferiorità dell'operaio, dovuta alla sua frequente incapacità di differire l'accordo (2). Osservazione il cui spunto trovasi del resto in Adamo Smith (3); ma che da scrittori recenti fu ripreso e largamente illustrato, con l'analisi minuta delle ragioni obbiettive e soggettive che privano il lavoratore isolato della vera libertà di contrattare, sopprimendo così il presupposto essenziale d'un corretto regime di concorrenza, ed assicurando agli imprenditori il possesso normale di laute " rendite del consumatore ". In Clark la tesi è abbozzata un po' confusamente (4); in Nicholson (5) ed in Walker (6) è enunciata con più perspicua chiarezza. Taussig la ripete con perentorietà assiomatica (7). Ma la più ampia dimostrazione e minuta esemplificazione del postulato è, s'io non m'inganno, quella data da Attilio Cabiati

(1) Cfr. lo studio critico sull'opera di Thornton, *Labour and its claims*, in " Fortnightly review ", 1869 maggio e giugno; ripubblicato nelle *Dissertations and discussions*, Londra, 1875, vol. IV, p. 43 e sgg.

(2) Cfr. *Elements of economics of industry*, 4ª edizione, Londra, 1909, p. 369 e sgg.

(3) Lo rileva J. Shield Nicholson, *Principii di economia politica* (tr. it.), in " Biblioteca dell'economista ", ser. 5ª, vol. II, p. 312.

(4) Cfr. *Essentials of economic theory*, New-York, 1909, p. 451 e sgg.

(5) Cfr. *Principii di economia politica*, p. 312.

(6) Cfr. *Political economy*, 3ª ed., Londra, 1887, pp. 258 e sgg., 375 e sgg.

(7) Cfr. *Principles of economics*, New York, 1911, vol. II, p. 263 e sgg.

in due originali saggi (1); in cui troviamo integrate dal sussidio di una ricca esperienza pratica le deduzioni dell'Edgeworth circa l'influsso esercitato da un regime di coalizione sui risultati del mercanteggiamento (2).

Logico corollario della preferibilità di massima così pacificamente riconosciuta alla contrattazione collettiva in confronto alla individuale, in vista degli attriti che ritardano la perfetta mobilità del lavoro, è il raro consenso di economisti e di giuristi circa simile tipo d'accordi, fondandosi le riserve di alcuni unicamente su obbiezioni di carattere pratico, e particolarmente sulla difficoltà di sanzioni concrete che il metodo comporta (3). Io stesso ammisi per l'addietro implicitamente come dimostrato questo modo di vedere, pur muovendo altri dubbi circa l'utilità finale degli ultimi orientamenti unionistici (4). Trattasi però forse di errore aprioristico o almeno di parziale illusione semplicistica, che un miglior esame del punto di partenza potrà ricondurre a termini più rigorosamente corretti, circondandolo almeno di qualche prudente temperamento. Vi sono degli autori che riducono la figura dell'organizzazione operaia a quella di un istituto commerciale per la vendita in grosso della merce lavoro, avente per funzione primaria il perfezionare economicamente e tecnicamente lo strumento del contratto collettivo (5).

---

(1) *Le basi teoriche dell'organizzazione operaia*, Milano (bibl. della " Critica sociale "), 1904; e *La politica industriale delle organizzazioni operaie*, in " Riforma sociale ", 1907, pp. 587 e sgg., 744 e sgg.

(2) Cfr. *Mathematical psychics*, Londra, 1881, p. 43 e sgg.

(3) Ciò può dirsi tanto per gli autori che cordialmente partecipano alle simpatie per gli indirizzi e le modalità dell'azione operaia (p. e. A. Loria, *Il movimento operaio*, Palermo, 1903, p. 41 e sgg.); come per gli apologisti più convinti dell'unionismo (in prima linea S. e B. Webb, *La democrazia industriale* (tr. it.), in " Bibl. dell'economista ", ser. 5ª, vol. VII, p. 192 e sgg.); come anche per quelli che guardano al fenomeno, nel suo complesso, con entusiasmo minore (p. e. C. Colson, *Cours d'économie politique*, vol. II, Parigi, 1901, p. 117 e sgg. e lo stesso V. Pareto, *Manuel d'économie politique*, Parigi, 1909, cap. XIX, § 16).

(4) Cfr. *Di alcune incognite del movimento operaio*, in " Riforma sociale ", gennaio 1911; *Variazioni sul tema dell'unità sindacale*, Ibid., luglio, agosto, settembre 1911; e *Le protectionisme ouvrier* (tr. fr., 2ª ed.), Parigi, 1912, p. 249 e sgg.

(5) Cfr. R. T. Ely, *Outlines of economics*, 2ª ed., New York, 1914, p. 390.

I fattori positivi del valore pratico di quest'ultimo acquistan dunque un'importanza essenziale all'apprezzamento adeguato dell'intiero sistema.

*
* *

Molto intanto potrebbe dirsi in merito ad alcune delle premesse milliane, docilmente accolte, sebbene non mai dimostrate, dai più.

Non è punto vero, ad esempio, che, nel dibattito del prezzo, spetti alla parte proponente, come tale, un costante vantaggio. In una suggestiva e troppo dimenticata comunicazione alla *Philosophical society* di Glascow, T. S. Cree sollevò al riguardo i più fondati dubbi (1). E chiunque abbia qualche pratica d'affari, specie con quegli insuperabili, astutissimi mercanteggiatori che sono i contadini, sa per esperienza che essi insistono sempre, con la più tenace ostinazione, per non enunciare pei primi il prezzo d'offerta, volendo regolarlo sulle disposizioni dell'altro contraente (2).

Se è esatto quanto afferma il Jevons che " the art of bar-" gaining consists in the buyer ascertaining the lowest price at " which the seller is willing to part with his object, without " disclosing, if possible, the highest price which he, the buyer,

---

(1) *A criticism of the theory of trades' unions*, Glascow, 1891, p. 11. Contro il Natoli, che testè fece propria la tesi del Thornton circa la preferibilità dell' " asta olandese „ sull' " asta inglese „ (cfr. *I valori di monopolio*, in " Riforma sociale „, 1901, pp. 329 e sgg., 420 e sgg.), sostenne la sostanziale vanità della distinzione A. Graziani, *Istituzioni di economia politica*, 2ª ed., Torino, 1908, p. 248.

(2) Se volessi applicare a questo punto speciale il concetto di analogia che altri illustrò fra i conflitti industriali e le guerre fra nazioni (cfr. F. Y. Edgeworth, *On the relations of political economy to war*, Oxford, 1915, p. 15 e sgg.), potrei ricordare le lunghe schermaglie diplomatiche a cui dà luogo molto spesso lo sforzo dei negoziatori per costringer gli avversari ad esporre per primi le condizioni a cui sarebber disposti a trattare la pace. Anche ultimamente il *Vorwärts* (11 novembre) prevedeva e lamentava che proprio questa difficoltà dovesse prolungare oltre ogni ragionevole limite la guerra europea.

“ is willing to give „ (1), deve ritenersi verità incontestabile che, sul mercato del lavoro, il compratore si trova per l'appunto nella posizione men favorevole, mentre la larga notorietà dei salari ottenibili presso imprese diverse assicura al venditore operaio la possibilità di confronti istruttivi circa il valore attribuito alla ricchezza di cui egli dispone (2). Nè il fatto dell'iniziativa d'offerta spettante all'imprenditore esclude la facoltà nel salariato che si presenta di ottenere condizioni migliori delle preventivamente pubblicate, ove l'incremento di produttività da lui recato all'azienda lo comporti, ed egli possa, con un'attesa opportuna, spostare a proprio favore il punto dell'accordo.

Ma ciò appunto, si obbietta, gli è impossibile, per le caratteristiche peculiarità della merce-lavoro, alla quale è vietato dilazionare il contratto senza una perdita, che raggiunge, al limite, la totale distruzione; operando contro essa inesorabilmente tutte le forze che ne diminuiscono o sopprimono la conservabilità e la trasferibilità, nello spazio e nel tempo.

È questo però un argomento sul quale molto si è esagerato, continuandosi a presumere perdurante ed invariato uno stato di cose che, vero, fino a un certo segno, negli *hard times* in cui la teorica sorse, va perdendo viemmeglio una effettiva e generale rispondenza con la realtà.

In uno dei suoi saggi pieni di pratico buon senso, G. De Molinari ha limpidamente tratteggiate le linee direttive del grande mutamento (3). Ma non si era allora che agli inizi della

(1) Cfr. *Theory of political economy*, 2ª ed., Londra, 1879, p. 134. Anche nella pratica delle minute transazioni quotidiane non sono infrequenti i casi in cui i negozianti, non ancora informati delle condizioni del mercato giornaliero, declinino di enunciare il prezzo e trattino intanto *sub conditione*. Cfr. P. H. Wicksteed, *The common sense of political economy*, Londra, 1910, p. 222.

(2) Quanto alle altre condizioni che, non meno del salario, forman oggetto del contratto, è pure a notarsi che l'antico carattere di unilateralità tende sempre più a scomparire, per far luogo a pratiche di accordo consensuale, non di rado integrate da norme legislative. Ciò vedesi benissimo nell'evoluzione subita dai regolamenti d'officina, che risultan sempre meno atti arbitrari d'una sola delle parti. Cfr. P. Louis, *L'ouvrier devant l'État*, Parigi, 1904, p. 327 e sgg.

(3) Cfr. “ La production et le commerce du travail „, in *Questions économiques à l'ordre du jour*, Parigi, 1906, p. 37 e sgg.

maestosa evoluzione sociale ed industriale, che, con magnifica concomitanza di sforzi, tende ad attenuare le cause organiche ed ambientali che conferiscono alla merce lavoro una peculiare " viscosità ", creando speciali attriti nei suoi spostamenti.

Il passaggio da un mercato all'altro, che costituiva, ai tempi di Thornton e di Mill, una rara eccezione, tanto era circondato di ostacoli e di difficoltà d'ogni specie, è divenuto, da allora in poi, fenomeno universale, costante e normalissimo. L'enorme aumento del numero dei viaggianti e la forte diminuzione dei prezzi di trasporto sono indice e fattore caratteristico della graduale scomparsa della sedentarietà di vita, propria d'una struttura sociale tramontata (1). Ed importa ai nostri fini di notare che la mutazione riguarda in misura assolutamente preponderante le classi lavoratrici, le quali, in taluni paesi, forniscono quasi sole la massima parte del colossale incremento (2), ed in cui

(1) Il numero delle persone trasportate sulle ferrovie del globo fu, nel 1860, di 413 milioni, nel 1906 salì a 6 miliardi. Il prezzo del trasporto che era, in Francia, di 0,07 per Km. nel 1841, è sceso nel 1906 a 0,036 in Francia, 0,033 in Germania, 0,032 in Austria, 0,022 in Russia, 0,043 in Italia, 0,063 agli Stati Uniti. Cfr. B. Nogaro et W. Oualid, *L'évolution du commerce, du crédit et des transports depuis cent cinquante ans*, Parigi, 1914, p. 378 e sg. Il prezzo dei biglietti di passaggio marittimi si ridusse contemporaneamente del 50 % almeno, e, in parecchi casi, del 100 %. Cfr. C. Colson, *Transports et tarifs*, 3ª ed., Parigi, 1908, p. 333.

(2) Per l'Inghilterra ciò si scorge perfettamente nel seguente specchietto, che riassume i dati comparativi dell'ultimo quarantennio:

	Provento lordo dei biglietti ferroviari		Nº dei viaggiatori	
	1871	**1912**	**1871**	**1912**
	Lst.	Lst.		
Biglietti di 1ª classe	3.504.124	3.106.023	30.092.528	24.361.466
" " 2ª "	4.596.317	993.759	73.011.105	12.236.526
" " 3ª "	6.692.971	29.726.651	225.449.303	1.125.394.777
Abbonamenti . . .	687.861	4.519.131	—	—

Notevole, fra l'altro, è la diminuzione dei viaggiatori e dei proventi nelle due prime classi, indice delle migliorate condizioni del trasporto nella terza. Cfr. A. W. Kirkaldy and A. D. Evans, *The history and economics of transport*, Londra, 1915, p. 103.

favore fu, in altri, congegnato tutto un armonico sistema di reti e di tariffe, inteso a farle prevalentemente, se non esclusivamente, usufruire dei vantaggi d'ogni specie procurati dal progresso tecnico (1).

Da ciò il profondo mutamento di aspetto che, nell'ultimo cinquantennio, offre su tutto il globo il fenomeno migratorio; sommergendosi da un lato sempre più nelle sopravvenute masse lavoratrici i gruppi di commercianti e di coloni, di piccoli imprenditori e professionisti, che furono i pionieri del movimento e ne formarono i primi nuclei, ed accentuandosi dall'altra l'importanza dell'esodo temporaneo in confronto al permanente, il quale obbediva, ed obbedisce tuttora in molti casi ed in parte, a cause di imperiosa necessità, indipendenti dal cosciente apprezzamento dei vantaggi comparativi di due mercati diversi. Quest'ultimo guida invece esclusivamente chi solo per breve ora abbandona la patria in cerca di occupazione. Onde lo spettacolo della crescente sua prevalenza (2) conduce alla constatazione

---

(1) Cfr. per lo sviluppo dei " workmens' trains „ in Inghilterra: R. Bachi: *I treni e le tramvie per gli operai*, in " Riforma sociale „, 1901, p. 921 e sgg. In modo tipico ciò è visibile nel Belgio, dove il sistema degli abbonamenti operai, integrato da una opportuna coordinazione di linee e di orari ferroviari, ha reso, virtualmente e praticamente, l'intiero paese un mercato solo nei riguardi della mano d'opera. Grazie all'enorme comodità e buon prezzo delle comunicazioni così procurate ci si avvia rapidamente al livellamento completo dei salari corrispondenti ad un uguale rendimento, dovuto ad un perfetto stato di concorrenza, nonchè alla eliminazione della disoccupazione, fuorchè nei casi di vera esuberanza di mano d'opera in tutto il regno. Sempre più frequente diviene il caso di operai qualificati che, sebbene abitanti in centri ove fiorisce la loro industria, scelgon di lavorare a notevoli distanze, per una lieve differenza di mercede. Cfr. E. Mahaim, *Les abonnements d'ouvriers sur les lignes de chemins de fer belges et leurs effets sociaux*, Bruxelles, 1910, pp. 80 e sgg., 155 e sgg. e passim. Anche le mercedi agricole, sempre abbastanza restìe a modificarsi, subirono visibilmente l'influenza delle nuovi condizioni. Cfr. B. Seebohm Rowntree, *Land and labour. Lessons from Belgium*, Londra, 1910, p. 205. Interessanti notizie fornisce pure in tal senso C. L'Evesque, *La mobilisation du travail et le transport des ouvriers par chemins de fer* (tesi), Parigi, 1907.

(2) L'esame analitico dei dati statistici dell'emigrazione italiana, suffraga questa tesi di prove irrefragabili. Se le cifre dei due esodi salgono entrambe vertiginosamente, dal 1876 in poi, osserviamo anzitutto che, nelle regioni economicamente e socialmente più evolute, quelle del temporaneo

d'un circolare sempre più armonico e proficuo delle correnti del lavoro sul mercato mondiale (1).

Entro i confini dei singoli paesi il fenomeno non è men visibile, nell'estendersi e nell'intrecciarsi sempre più spiccato delle migrazioni interne, espressioni di tendenze e di bisogni peculiari di gruppi diversi, i quali si spostano sotto la spinta di una consapevolezza assoluta delle condizioni del mercato a cui si dirigono (2). E le proporzioni impressionanti raggiunte

---

guadagnano terreno a scapito delle altre. Notasi poi specialmente che l'emigrazione propria, per il fatto della diminuzione delle donne, dei fanciulli, dei partiti in compagnia di famigliari, va attenuando i caratteri primitivi, che sotto questo aspetto la distinguevano dalla temporanea, e tende ad accostarsi a questa, trasformandosi in istabile, periodica e stagionale; e che la maggiore e più sicura partecipazione della donna all'emigrazione temporanea sta ad indicarci che l'emigrazione stessa è divenuta più facile e consuetudinaria di quanto non sia stata nei primi tempi. Questo secondo carattere fa riscontro ed è analogo a quello rilevato per la propria e transoceanica. La facilità dell'emigrazione si accresce per la prima come per la seconda; indizio incontestabile della maturità dell'intiero movimento. Cfr. F. Coletti, *Dell'emigrazione italiana*, in *Cinquant'anni di storia italiana (1860-1910)* (pubbl. della R. Accademia dei Lincei), Milano, 1912, p. 31 e sgg. dell'estr.

(1) Un indizio caratteristico ne porge la correlazione sempre più intima che è facile avvertire fra il volume delle correnti immigratorie e le oscillazioni, anche assai tenui, delle condizioni economiche interne dei paesi di destinazione. Cfr. H. Pratt Fairchild, *Immigration. A world movement and its american significance*, New York, 1913, p. 145 e sgg. Per gli Stati Uniti il rapporto è tracciato in un limpido prospetto comparativo in J. R. Commons, *Races and immigrants in America*, New York, 1908, p. 64.

(2) Ciò è tanto vero per gli operai qualificati, come, in Italia, i mattonai toscani, veneti ed abruzzesi, o i muratori varesotti e biellesi (cfr. A. Caroncini e L. Marchetti, *Le condizioni del lavoro nell'industria dei laterizi*, in " Giornale degli economisti ", settembre 1905; e L. Marchetti, *Le correnti periodiche dell'emigrazione interna*, in " Rivista italiana di sociologia ", sett.-dicembre 1905, p. 5 dell'estr.), quanto pei contadini; rispetto ai quali scrive egregiamente il Coletti: " Tali migrazioni si presentano come un " adattamento spontaneo e strettissimo del mezzo al bisogno che con esso " si vuole soddisfare. Le esigenze di braccia da parte delle colture ecc. che " provocano l'immigrazione sono ben conosciute, fra gli interessati, per " quantità, qualità, periodo di tempo. Non meno bene il migrante conosce " le condizioni che gli offre, in ogni momento dell'annata, la sede abituale. " Ognuno perciò ha l'agio di scegliere le località, le occupazioni, i mesi e

dovunque dalla corrente urbanistica reca di giorno in giorno più chiara conferma a quanto, parecchi anni addietro, osservava Rodolfo Benini: “ che tutta la popolazione del paese tende a “ passare attraverso le città e a dimorarvi tanto da assimilarsi, “ grazie allo spirito di imitazione, le abitudini delle classi che “ vi risiedono „, deponendo, attraverso il filtro dei medi e grandi centri, un po' della sua primitiva ingenuità, ma anche molto della sua ignoranza ed imprevidenza, così da accostarsi viemmeglio al tipo di *homo oeconomicus*, che ivi più frequentemente si incontra (1).

Ai coefficienti di fluidità nello spazio che così si vengono accumulando a prò della merce-lavoro, altri e notevolissimi ne aggiunge la ormai copiosa legislazione intesa a favorire, tutelare, regolamentare, dirigere ed illuminare gli spostamenti, per l'addietro invece severamente vietati (2). Non è che nell'ultimo

---

“ le settimane che più si confannò alle sue forze, alla sua età, al suo sesso, “ agli impegni ed alle risorse che ha in paese. Quegli che ha la responsa- “ bilità della famiglia e sente per conto di essa il massimo edonistico col- “ lettivo può, con piena conoscenza di causa, stabilire chi debba assen- “ tarsi emigrando o chi debba restare per l'una o l'altra delle faccende “ che gli emigranti sanno doversi compiere. Si può attuare, come di fatto “ avviene in più famiglie, una specie di turno migratorio, utilizzando al “ maggior grado le attitudini personali di lavoro dei singoli componenti. “ Gli effetti del libero muoversi del tornaconto si vedrebbero concreta- “ tamente e con molta precisione se si scendesse ad un'analisi particola- “ reggiata, sopratutto ristretta ad una zona limitata, in cui fosse più facile “ l'identificare la figura e i bisogni dei varî gruppi „ (cfr. *Dell'emigrazione italiana*, p. 193).

(1) *Principii di demografia*, Firenze, 1901, p. 284 e sgg. La funzione importantissima che spetta alle città come fattori di assimilazione dei gruppi esterni e come organi dell'evoluzione del costume è propria del tipo di agglomerazione eminentemente differenziato dei tempi nostri. Le forze limitatrici dell'accentramento ipertrofico create da talune manifestazioni del progresso industriale (con la emigrazione di certe industrie dalle città verso sedi più propizie) non arrestano la continuità e l'estensione della funzione plasmatrice, distribuendola solo in un maggior numero di centri, anche piccoli, ma dotati a tal riguardo degli attributi delle città. Cfr. R. Maunier, *L'origine et la fonction économique des villes*. Parigi, 1910, pp. 141 e sgg., 231 e sgg.

(2) Fino alla fine del settecento, p. e., anche gli spostamenti interni erano circondati da difficoltà molteplici, per evitare che i nullatenenti di

ventennio che gli stati nei quali il problema migratorio presenta qualche importanza han preso a disciplinarlo, ispirandosi sostanzialmente al vecchio *Passengers act* inglese, opportunamente adattato alle condizioni locali. Protetto dagli sfruttamenti nella stipulazione del contratto, circondato di tutele igieniche e morali durante il passaggio, provvisto all'arrivo di organi ufficiali o privati di assistenza e di sussidio legale, consigliato e sorretto nella accumulazione, nella trasmissione, nell'impiego dei risparmi, l'emigrante europeo ha raggiunte tali libertà di decisioni e sicurezza di movenze quali, vent'anni addietro, ancora sarebber parse un mito. E vi sono dei paesi in cui il servizio delle informazioni è pervenuto a così grande perfezione tecnica da consentire a qualsiasi lavoratore una previsione esatta ed un confronto quasi matematico fra le opportunità di guadagno e le facilità di vita nei vari mercati dei quali gli è dischiusa la scelta. Non sorse che nel 1886 l'*Emigrants information office* di Londra, le cui pubblicazioni ed i cui sistemi di pratica propaganda rimangono un insuperato modello del genere. Ed è parimenti in Inghilterra che, nelle notizie della *Labour gazette*, largamente divulgate, nella pubblicità corrente di numerosi fogli tecnici e dei più diffusi giornali quotidiani, il la-

un luogo cadessero a carico della pubblica carità in un altro. " It was often " more difficult — scriveva Adamo Smith — for a poor man to pass the " artificial boundary of a parish than an arm of the sea or a ridge of high " mountains "; e la commissione inglese per la legge dei poveri del 1832-34 trovò gli abitanti del regno virtualmente imprigionati nelle rispettive parrocchie. Cfr. T. Mackay, *The dangers of democracy*, Londra, 1913, p. 118. Il divieto poi di emigrare dal paese, in omaggio al principio popolazionistico, o in applicazione dei pregiudizi mercantilistici, era generale e rigoroso. Contro l'espresso avviso di Burke e di Bacone molti provvedimenti di tal fatta si incontrano, dal 1600 in poi, in Inghilterra; e di assai più severi in Spagna ed in Germania. Cfr. P. Leroy-Beaulieu, *De la colonisation chez les peuples modernes*, 5ª ediz., Parigi, 1902, t. II, p. 474 e sgg. La tendenza restrittiva perdurava assai diffusa quando, nel 1865, la combatteva H. Baudrillart, *La liberté du travail. L'association et la démocratie*, Parigi, 1878, p. 321 e sgg. Oggi coloro stessi che grandemente disconoscono gli altri fattori di accresciuta fluidità del lavoro, devono convenire che ogni impedimento legale è cessato. Così nel suo libro, per tanti aspetti pregevole, W. H. Beveridge, *Unemployment. A problem of industry*, 3ª ed., Londra, 1912, p. 216.

voratore è posto al corrente di tutte le variazioni della domanda; mentre uffici di collocamento a vastissima base facilitano ed accelerano le trattative d'accordo (1), e organi speciali creati dal *Labour exchange act* provvedono, quando manchi il *viaticum* delle leghe, alle anticipazioni necessarie per chi muova non a cercare ma a raggiungere un determinato impiego (2). Così l'incremento di fluidità raggiunto, significa, secondo l'espressione del Beveridge, non un semplice fatto meccanico, bensì un fenomeno organico ed intelligente (3); come la diminuzione del costo di trasporto deve intendersi non meno in funzione dell'importo monetario del viaggio (risultante dalla combinazione delle tariffe e della durata) che dell'attenuarsi di tutti gli ostacoli morali ed intellettuali ieri ancora preponderanti. Onde formasi fra le classi lavoratrici nei distretti industriali d'ogni paese (in Italia è tipica in tal senso la regione biellese) una psicologia peculiarissima, ben nota a quanti han dimestichezza con tali ambienti; caratterizzata dal debolissimo grado di aderenza locale, dalla tendenza ad emanciparsi da ogni vincolo giuridico ed economico di solidarietà permanente con gli interessi

(1) L'Inghilterra ha fondati, negli ultimi cinque anni, non meno di 430 uffici e 1066 agenzie locali, la cui attività si è, nello stesso periodo, più che raddoppiata. In Germania funzionano 323 uffici pubblici di collocamento, che, al rompere della guerra, si progettò di raggruppare sotto l'egida di un grande istituto centrale nazionale. Il problema è allo studio agli Stati Uniti. Cfr. J. B. Andrews, *A national system of labor exchanges in its relation to industrial efficiency*, in "Annals of American academy of political and social science", LXI, settembre 1915, p. 138 e sgg.

(2) Cfr. A. C. Pigou, *Unemployment*, Londra, 1913, p. 152 e sgg. È particolarmente notevole che l'autorizzazione ad anticipar le spese di trasferimento sia limitata ai casi di impiego già fissato. Parimenti in Germania le borse del lavoro provvedono biglietti di viaggio ridotto soltanto agli operai pei quali abbian preventivamente trovate delle soddisfacenti situazioni. Le informazioni fornite inoltre non si limitano alla indicazione di impieghi vacanti nel momento dell'informazione, ma si studiano di accertare se, partendo a quella volta, l'operaio li troverà ancora liberi. Siamo ben lontani, come vedesi, dalle primitive ed empiriche forme di assistenza ai viaggianti, che le antiche unioni ereditarono dal vecchio *compagnonnage*. Cfr. E. Martin de St. Léon, *Histoire des corporations des métiers depuis leurs origines jusqu'à leur suppression en 1791*, 2ª ed., Parigi, 1909, p. 557 e sgg.

(3) Cfr. *Unemployment. A problem of industry*, p. 209, 255 e sgg.

di una data sede, dal rifiuto o dalla trascuranza della proprietà immobiliare, per l'addietro vagheggiata come scopo ultimo del lavoro e del risparmio (1): dalla instabilità di vita e dalla ecletticità di sentimenti, di aspirazioni, di pensieri.

La crisi tremenda a cui la guerra mondiale sottopone la mentalità politico-economica delle masse segnerà certo, forse per più anni, una pausa in questo processo di internazionalizzazione automatica. Ma, coi nuovi bisogni che farà sorgere, con le formidabili richieste di mano d'opera che provocherà, con la stessa maggior intimità di relazioni di cui sarà causa fra gli alleati d'oggi, susciterà d'altro lato potentissime forze favorevoli alla feconda circolazione del lavoro sulla faccia del globo, anche se l'universale impoverimento ridurrà necessariamente, per un certo tempo, l'intensità di taluni centri di domanda (2).

---

(1) L'integrazione del guadagno industriale coi proventi del piccolo possesso agricolo rappresentava l'ideale per gli operai del secolo XVIII, ed aveva fatto parte del programma di Colbert. Cfr. Des Cilleuls, *Histoire et régime de la grande industrie en France aux XVII et XVIII siècles*, Parigi, 1898, pp. 25, 96. Oggi la tendenza è denunciata come pericolosa e francamente avversata negli ambienti sindacali. Cfr. L. Rivière, *La terre et l'atelier. Jardins ouvriers*, Parigi, 1904, p. 58 e sgg.

(2) Il problema dell'avvenire del fenomeno migratorio, a pace ritornata, è fin d'ora uno dei più dibattuti, specie in Italia. Non manca chi, argomentando esclusivamente dai giganteschi bisogni di mano d'opera che si manifesteranno nei luoghi più disastrosamente e direttamente investiti dal cataclisma devastatore, prevedono un forte aumento delle correnti migratorie verso i vari paesi d'Europa. Così, nella " Rivista coloniale ", E. Corvino, cfr. V. W. *La guerra e l'emigrazione*, in " Critica sociale ", 1916, n° 2. Ma l'esaurimento di capitale dovrà pure risolversi in una diminuita capacità di acquisto di lavoro per parte dei belligeranti; anche se è vero che l'alto saggio dell'interesse avrà tendenza a produrre una distribuzione del capitale superstite più favorevole al lavoro. Cfr. A. Graziani, *Le future conseguenze economiche della guerra*, in " Scientia ", XIX (1916), n. 45-1, p. 9 e sgg. dell'estr. Giova poi tener conto di una circostanza sulla quale il " Preussische Jahrbücher " richiamava testè l'attenzione: della concorrenza che faranno ai lavoratori reduci dalle armi le donne che, nel frattempo li han sostituiti, acquistando molte volte notevoli capacità professionali. È un fattore che, neutralizzando in parte la tendenza all'elevazione dei salari determinata dall'ingente distruzione di valida offerta, potrà concorrere a mantenere poco attraente la richiesta di quei mercati per lavoratori stranieri. Cfr. Levy-Bruhl, *Ce que sera l'industrie allemande après la guerre*, in " Nouvelles de France et bulletin des Français résidant

Non meno impressionante risulta il recente mutamento se consideriamo il passaggio da impresa a impresa, o quello da mestiere a mestiere, che quotidianamente si verificano entro la cerchia di ciascun mercato. La scarsa stabilità di coesione dei gruppi costituiti dalle aziende produttive e l'accentuarsi della medesima nelle categorie industriali rispetto alle agricole, e fra gli operai specializzati e cottimisti in confronto ai loro colleghi (1), sono per sè stessi indici sufficienti della relativa facilità offerta dalla odierna struttura dell'industria agli spostamenti del lavoratore (2). La media durata non troppo lunga della disoccupazione non dovuta a malattia (3) ne porge un'altra prova.

à l'Étranger „, 27 genn. 1916. Ma diversamente certo avverrà pei mercati lontani, particolarmente americani, verso i quali si pronostica da più d'uno un'emigrazione di proporzioni ingenti, quando la crisi economica, il fiscalismo, lo statismo ipertrofico conseguenti alla guerra avran finito di render inabitabile il vecchio mondo. Cfr. W. Eggenschwyler, *La guerra e l'economia nazionale*, in “ Riforma sociale „, giugno-luglio 1915. Agli Stati Uniti particolarmente si prevede da tutti che il flusso immigratorio, sospeso dalla guerra, riprenderà negli anni prossimi con intensità prima sconosciuta ; al quale spontaneo fenomeno potran recare soltanto un certo freno le misure restrittive da più parte, nuovamente e con maggior insistenza invocate, a protezione del lavoro indigeno. Cfr. F. J. Warne, *The war and immigration*, in “ Annals of American academy of political and social science „, settembre 1915, p. 30 e sgg.

(1) Cfr. Benini, *Principii di demografia*, p. 188 e sgg. La crescente facilità con cui il lavoratore cambia impiego è rilevata dalle statistiche delle borse del lavoro tedesche, nelle quali la durata media dell'occupazione individuale risulta sempre più breve. Cfr. S. G. Keat, *German labour exchanges*, in “ Economic journal „, 1910, p. 337 e sgg.

(2) Il 17 aprile 1899 l'on. Asquith diceva alla Camera dei comuni: “ Il lavoro mobile è divenuto la regola, l'immobile l'eccezione fra la popo- “ lazione industriale „. E John Burns soggiungeva: “ Dalle statistiche che “ mi furono comunicate dalla *Heart of Oak society* risulta che, su 220 mila “ membri che ne fan parte, non meno di 120 mila han cambiata sede od “ impiego l'anno scorso, cioè una media di circa 500 al giorno „. Cfr. Y. Guyot, *Les conflits du travail et leur solution*, Parigi, 1903, p. 255 e sgg. L'accentuarsi di tali attributi di mobilità dell'impiego industriale in confronto all'agricolo è noverato fra le cause che elevano comparativamente il salario del primo. Cfr. C. Cornélissen, *Théorie du salaire et du travail salarié*. Parigi, 1907, p. 372.

(3) Cfr. A. Agnelli, *Il problema economico della disoccupazione operaia*, Milano, 1909, p. 73 e sgg.

Nè meglio potrebbesi misurare sinteticamente l'entità dei progressi compiuti in questo campo che ponendo a riscontro, nel suo insieme, l'antico empirismo di metodi curativi, consistenti in una beneficenza esclusivamente elemosiniera o nella politica dei lavori pubblici semi-improduttivi, con la complessità dei multiformi, delicati congegni coi quali la legislazione di quasi tutti i paesi tende a prevenire, circoscrivere, sanare la piaga. Anche chi esita a riconoscere carattere di benefizio economico-sociale assoluto a tutti gli sforzi che in tal senso si compiono non può contestarne il valore e l'efficacia complessiva a prò della indipendenza e scioltezza di movimenti del lavoratore.

Ai tempi di Stuart-Mill era fresco il ricordo del periodo caotico della rivoluzione industriale, quando l'irruzione subitanea del macchinismo aveva votati all'indigenza ed alla servitù per fame centinaia di migliaia di lavoratori. Ma fu proprio la trasformazione dello strumento tecnico quella che determinò in seguito una metamorfosi in senso diametralmente inverso. Oggi, scrive il Loria, " la macchina abolisce la divisione rigida e categorica " del lavoro, che è imprescindibile dalla tecnica manuale; la " maestranza non è più distinta, casellata in occupazioni diverse, " lunghe ad apprendersi, impossibili a cambiarsi senza un considerevole tirocinio; il lavoro si riduce ad un'operazione semplice di custodia e di vigilanza, che in poco tempo si può " imparare. Da ciò risulta il vantaggio incalcolabile che, nei " tempi dolorosi della crisi, la mano d'opera abile ad una data " forma di produzione meccanica non è gettata sul lastrico, ma " può essere riassorbita da un'altra industria che non soffra la " crisi, anche se sia diversissima, perchè le attribuzioni dell'operaio in sostanza non mutano, e in questa come in quella industria consistono sempre nella custodia dell'apparato meccanico in moto „ (1). A tale prontezza di tirocinio deve riferirsi la possibilità di compensazione fra mestiere e mestiere mediante la pratica alternata di entrambi, che noverasi fra i rimedi auto-

(1) Cfr. *Corso completo di economia politica*, Torino, 1910, p. 152 e sg. Gli effetti di questa facilità furon già da tempo ben rilevati, per l'operaio inglese, dal De Rousiers, *La question ouvrière en Angleterre*, Parigi, 1895, p. 334.

matici della disoccupazione (1): nonchè quella dell'abolizione delle pause stagionali proprie di talune industrie, mercè l'esercizio temporaneo o simultaneo di rami di produzione affini, intrapresi dall'industriale stesso, per utilizzare senza interruzione impianti e maestranze (2).

Il complesso dei costi materiali e morali che contrastan l'adattamento della mano d'opera a trasformate condizioni di equilibrio si riducon così, senza scosse, ad un grado che le forze della iniziativa individuale e dello spirito di previdenza posson agevolmente superare.

Per molteplici vie queste forze acquistan intanto, di giorno in giorno, novello vigore. Nei primi tempi della grande industria la mancanza quasi costante di riserve personali e il difetto di organizzazione lasciavano l'operaio in balìa dell'avversa congiuntura. Nè si può leggere tuttora senza una stretta al cuore qualcuna delle descrizioni del suo misero stato fatte dai filantropi dell'epoca, insistenti sulla necessità di diffondere le casse di risparmio allora istituite e le società di mutuo soccorso, compromesse e screditate dagli iniziali insuccessi (3). Ma lo sviluppo del risparmio popolare, in tutte le sue forme, fu uno dei fatti più confortanti e caratteristici del progresso economico-sociale che da allora si è prodotto. Anche in paesi non ricchi, come l'Italia, la moltiplicazione rapidissima delle casse ordinarie, ben presto integrate dalle postali, procedette di conserva con l'ingente aumento nell'entità dei depositi e, ciò che per noi più conta, nel numero dei depositanti (4). Il fenomeno si svolge però

---

(1) Cfr. Marchetti, *Sistemi di difesa contro la disoccupazione*. Milano, 1901, p. 96 e sg.

(2) Sull'importanza del sistema richiama l'attenzione un recente rapporto del *Board of trade*. Cfr. Pigou, *Unemployment*, p. 166 e sg. Nel Biellese molti operai tessitori si recano abitualmente all'estero parecchi mesi dell'anno, impiegandosi in mestieri affatto diversi. Cfr. *Verbali delle adunanze fra industriali e rappresentanza operaia durante lo sciopero tessile torinese*, settembre-ottobre 1915.

(3) Cfr. fra gli altri H. A. Frégier, *Des classes dangereuses de la population dans les grandes villes et des moyens de les rendre meilleures*, Bruxelles, 1840, pp. 242 e sgg., 258 e sgg.

(4) Le casse di risparmio ordinarie erano 9 nel 1830, 25 nel 1840, 60 nel 1850, 91 nel 1860, 136 nel 1870, 183 nel 1880, rimanendo dopo pres-

con peculiarità più notevoli dove la vita industriale ebbe maggior incremento. In Francia il numero dei libretti della *Caisse nationale d'épargne* sale da 5 per 1000 abitanti nel 1882 a 151 nel 1911 (1). Nel Belgio non meno del 35 % della popolazione totale possiede libretti di minuto risparmio (in Inghilterra soltanto il 25 %), e lo spoglio degli elenchi dei depositanti ne assegna alla classe operaia l'enorme maggioranza (2). In Germania i 12 miliardi di marchi affidati alle 2800 casse di risparmio sono divisi in 17.000.000 di libretti, cioè uno ogni 3 o 4 abitanti (3); proporzione ancora superata in altri paesi (Danimarca). Ben noto è poi che questi tipi di istituti, creati appositamente per educare il popolo allo spirito di economia, non ne assor-

sochè stazionarie (184 nel 1906), per l'avvenuta istituzione delle casse postali. Cfr. *Le casse ordinarie di risparmio in Italia dal 1822 al 1906*, pubbl. dal Ministero di agricoltura, industria e commercio, Roma, 1906, p. 14. Crebbe contemporaneamente, con progressione ben più rapida, l'entità dei depositi, passati da 6,3 milioni nel 1830, a 21,4 nel 1840, 42,5 nel 1850, 157,7 nel 1860, 347,7 nel 1870, 686 nel 1880, 1.186,7 nel 1890, 1.504,9 nel 1900 e 2.479,8 nel 1910, 2.491,8 nel 1912, 2.726,7 nel 1913. Cfr. *Annali del credito e della previdenza*, ser. II, vol. 2°, parte 1ª, p. 7 e sgg. Ma l'indice socialmente più caratteristico del fenomeno è dato dal numero dei depositanti, che già tocca i 2.191.470 nel 1909, per salire a 2.363.832 nel 1912. Nelle casse di risparmio postali il fenomeno è ancor più visibile. Il totale dei depositi, che di poco supera i 100 milioni nel 1883, si accosta ai 2000 nel 1912, e tocca i 2091,5 nel 1913, mentre il numero dei libretti da 5.150.617 nel 1909 sale a 6.060.617 nel 1913. Cfr. *Annuario statistico italiano*, ser. 2ª, vol. III, Roma, 1914, pp. 285 e sgg., 305. L'eccedenza dei depositi sui rimborsi va, in tempi normali, continuamente aumentando. Cfr. " Ministero di agricoltura, industria e commercio ", *Indici economici*, Roma, 1915, p. 39. Bene dunque si apponeva Quintino Sella, quando, rispondendo a. L. Luzzatti, ravvisava nei primordi dello sviluppo delle casse i caratteri di straordinaria divulgazione e popolarizzazione del risparmio, fin d'allora, per più sintomi, assai apparenti. Cfr. *Sulle casse postali di risparmio*, in " Nuova antologia ", 1° agosto 1880.

(1) Cfr. J. Lescure, *L'épargne en France*, Parigi, 1914, p. 106. La media della somma depositata in ciascun libretto passa contemporaneamente da 224,97 a 285,58 fr.

(2) Cfr. B. Seebohm Rowntree, *Comment diminuer la misère* (tr. fr.), Parigi, 1910, p. 471 e sgg.

(3) Nel 1880 la somma totale non era che di 2 miliardi e mezzo, di 5 ½ nel 1892. Da un non troppo antico specchietto statistico dei depo-

bono che in parte i peculi, mentre un'altra notevolissima si accumula, specie in taluni luoghi (Scozia), presso le banche ordinarie (1). Forme più squisite di previdenza individuale viene intanto apprestando e divulgando il progresso economico; fra le quali basterà ricordare il mirabile complesso di geniali iniziative e di fecondi risultati di cui porge esempio l'assicurazione operaia libera in Inghilterra e agli Stati Uniti (2); nonchè l'ingigantita potenzialità finanziaria delle organizzazioni, che, nella sola Inghilterra, accrescono le loro disponibilità annue da 55 mila a oltre 1 milione di lire sterline, ed i loro fondi da 21 a 805 mila,

siti e del loro frazionamento nei principali stati risulta a colpo d'occhio il carattere popolare del fenomeno, il quale si accentua nei paesi di forte accentramento industriale, là dove vivono grosse masse operaie:

Paesi	Anno	Depositi nelle casse di risparmio ordinarie e postali				
		N° dei libretti		Somme depositate	Somma depositata	
		Totale	% abitanti	In milioni di marchi	per abitante	per libretto
Prussia . . .	1904	10.211.976	27,71	7.761,93	210,50	760,08
Belgio. . . .	1903	2.105.118	30,14	1.242,21	171,69	590,08
Danimarca .	1903-04	1.191.569	51,15	863,58	342,01	668,63
Inghilterra .	1903-04	11.318.483	26,59	4.092,65	95,64	359,68
Francia . . .	1903	11.469.961	29,44	3.444,59	88,41	300,31
Italia	1903	6.740.138	20,29	1.999,02	60,18	296,58
Olanda . . .	1903	1.412.881	26,02	328,95	60,57	232,82
Norvegia . .	1903-04	766.375	33,32	410,78	178,61	536,00
Austria . . .	1903	5.159.417	19,29	3.866,39	144,59	749,39
Russia. . . .	1903-04	4.838.000	3,38	2.206,66	15,43	456,11
Svezia	1903-04	1.884.796	36,10	659,23	126,26	349,76
Ungheria . .	1903	1.391.970	7,00	1.340,66	67,42	963,14

Cfr. Seidel, *The german saving banks* (tr. ingl.), pubbl. dalla " National monetary commission ", Washington, 1910, p. 341 e sgg.

(1) Cfr. N. G. Pierson, *Trattato di economia politica* (tr. it.), Torino, 1905, vol. II, p. 82 e sgg.

(2) Cfr. A. Geisser, *Come arrivare la Cassa nazionale di previdenza per la vecchiaia ed invalidità degli operai*, in " Riforma sociale ", 1911, p. 34 e sgg.

dal 1891 al 1904 (1); formidabile elemento integratore delle forze dei singoli nelle critiche congiunture. Quando a tutto ciò si aggiunga il senso di sicurezza che infonde nell'operaio il progredire incessante della pubblica e privata assistenza filantropica, in mille ingegnose e perfezionate forme; e quando si pensi alla spaventosa prodigalità in consumi voluttuari che le aumentate mercedi reali, già rilevate nel 1883 dal Giffen (2), consentono sempre più alle classi operaie (3), vien meno veramente il coraggio di asserire che al lavoratore, condannato da una fatalità crudele ad un salario di pura sussistenza, manchi il margine indispensabile a costituirsi, nell'uno modo o nell'altro, quella riserva, il cui difetto gli è causa di inferiorità specialissima nel mercanteggiamento con l'imprenditore.

In realtà il tipo eminentemente mobile ed in sommo grado indipendente dell'operaio nord-americano descritto da Walker come un caso isolato (4), si è oggi generalizzato nei paesi industriali dei due mondi, smentendosi la profezia dello stesso autore, secondo la quale la concorrenza avrebbe continuato a sviluppare forze tendenti ad aumentare la soggezione e la immobilità del lavoratore (5). Con l'industrializzarsi del globo,

(1) Cfr. S. J. Chapmann, *Work and wages*, vol. II, Londra, 1908, p. 126 e sgg.

(2) Cfr. *Economic inquiries and studies*, Londra, 1904, vol. I, p. 382 e sgg.

(3) Cfr. H. Withers, *Poverty and waste*, Londra, 1914, p. 174 e sgg.

(4) " The New-Englander, inquisitive, alert, aggressive, almost desti-" tute of attachment to locality, quick to change his avocation, if a profit " shall appear, and so gifted with mechanical insight and aptitude as to " acquire the rudiments of any art in an astonishingly short time; occu-" pying a country where the transmission of intelligence is incessant, and " where the transportation of passengers and freight reaches the maximum " of ease, security and cheapness: enjoying the advantage of a wide margin " of living, and with non inconsiderable savings laid by from the liberal " earnings of former years, is not likely to remain long ignorant of op-" portunities for improving his industrial conditions, whether through change " of place or avocation, or likely long to allow such opportunities to re-" main unimproved. We get a measure of this freedom of individual mo-" vement in the census statistics, by which it appears that in 1880 nine " and half a million of the native population were living in States other " than those of their birth „. Cfr. *Political economy*, p. 259 e sg.

(5) Cfr. *Political economy*, p. 264.

ciò che anche per Walter Bagehot era eccezione tende a divenir regola universale, verificandosi sempre più le condizioni a ciò da lui ritenute indispensabili (1); onde, come constata il Sidgwick (2), il progressivo accostarsi del fenomeno effettivo alle ipotesi teoriche del livello economico, rispetto al mercato della mano d'opera.

Mentre per tal modo, con sostanziale conferma delle previsioni della scienza ortodossa, il progresso tecnico ed intellettuale viene rapidamente attenuando gli elementi di inferiorità riconosciuti alla parte contrattante che si presunse più debole (3), un complesso di opposte forze opera in senso inverso sull'altra, spingendo, per azione combinata, verso un sempre maggiore, effettivo pareggiamento di condizioni.

La possibilità di scelta e di attesa, che vedemmo di tanto accresciuta nell'operaio, tende a ridursi nei rispetti dell'imprenditore, nello stato attuale dell'industria. Siamo immensamente lontani dai tempi nei quali le prime fabbriche, seguendo con le variazioni della loro attività l'oscillare continuo del mercato dei prodotti, sospendevano spesso per lunghi periodi il lavoro, creando " quella classe di operai frammentarii, ai quali era imposto il " paradosso di alimentarsi per l'anno intero, mentre il loro la-

---

(1) Cfr. *Economic studies*, 2ª ed., Londra, 1911, p. 28 e sgg.

(2) Cfr. *The principles of political economy*, 3ª ed., Londra, 1901, p. 376 e sg.

(3) Tutta la legislazione sociale fiorita nell'ultimo trentennio converge allo stesso scopo. Partita dal presupposto della inferiorità iniziale del lavoratore, essa tende a pareggiare, quando non ad invertire, la posizione delle parti, in ogni possibile divergenza o contestazione. Visibilissimo nei provvedimenti che han per oggetto la tutela inviolabile del salario, e nella soppressione dei disposti di legge favorevoli al padrone (come il famoso articolo 1781 francese, ecc.) (cfr. Louis, *L'ouvrier devant l'État*, p. 64 e sgg.), tale indirizzo si rende in modo tipico manifesto nella universale evoluzione concettuale subìta dalla legislazione sugli infortuni. La progressiva maturanza del concetto del rischio professionale, attraverso il grado intermedio della inversione della prova, riflette con singolare efficacia la convinzione della necessità di integrare la debolezza dell'operaio di fronte all'imprenditore in un ordine di rapporti particolarmente difficile e pericolosamente litigioso. E la logica del principio tende ad investire sempre più estesi campi, procedendo alla creazione d'un intiero diritto d'eccezione pel lavoro. Cfr. T. Carnelutti, *Infortuni sul lavoro*, Roma, 1913, vol. I, p. 38 e sgg.

" voro, deplorevolmente retribuito, non era richiesto che durante " poche settimane „ (1).

La gigantesca costosità di installazioni, che ha sostituita la modestia, spesso grettissima, dei primitivi fabbricati ed impianti (2) e la stretta connessione fra lo specializzato adattamento di questi ultimi ed i risultati dell'impresa (3) gravano il bilancio delle odierne aziende di una così formidabile quota di spese fisse da rendere indispensabile, se non conveniente, il non rallentare la produzione, anche in momenti critici, quando è d'uopo vendere a sotto-costo. Nell'industria marittima, è ben noto come lo sviluppo colossale delle costruzioni abbia per presupposto e per conseguenza al tempo stesso l'intensità e continuità del traffico (4); ma i " trasporti in zavorra „ non sono una specialità esclusiva alla navigazione, benchè in essa il fenomeno si verifichi in modo più costante e più tipico. È noto che, come perspicuamente dimostrò l'Hadley, il prezzo di trasporto sulle ferrovie, in regime di perfetta concorrenza, tende al limite della pura spesa d'esercizio, a causa della intrasferibilità del capitale fisso (5). Nè di natura diversa è il fatto che si osserva in molti rami di industrie, costretti ad una attività incessante per non rinunziare all'intiero frutto dell'ingente capitale immobilizzato, o condannarlo al rapido deperimento fisico od economico, o doverlo liquidare disastrosamente (6). Alla fine del secolo XVIII le ferriere e le vetrerie, utilizzanti il legno come combustibile, potevano trasportare di luogo in luogo i loro impianti, quando

(1) Cfr. Loria, *Analisi della proprietà capitalistica*, Torino, 1889, vol. II, p. 271 e sgg.

(2) Cfr. O. Beard, *The industrial revolution*, Londra, 1901, p. 58 e sgg.

(3) Cfr. J. C. Duncan, *The principles of industrial management*, New York and London, 1914, p. 83 e sgg.

(4) Cfr. C. Supino, *La navigazione dal punto di vista economico*, 3ª ed., Milano, 1913, p. 86 e sgg. e passim.

(5) Cfr. L. Einaudi, *Corso di scienza delle finanze*, Torino, 1914, p. 93 e sgg.

(6) L'estendersi smisurato degli impianti tende a fortificare, anche per un altro verso, la posizione relativa dell'operaio, in quanto diminuendo la porzione di costo da imputarsi alla mano d'opera, rende possibile cedere alle richieste di miglioramenti di quest'ultima senza accrescere proporzionalmente il prezzo del prodotto. Cfr. P. Leroy-Beaulieu, *Essai sur la répartition des richesses*, 4ª ed., Parigi, 1896, p. 448 e sgg.

le foreste di un dato distretto si esaurivano (1). E, nei primi tempi del nuovo industrialismo, furono frequenti i casi di officine trasmigranti alla ricerca di una mano d'opera meno esigente. Oggi l'importanza, l'immobilità e l'intrasformabilità del capitale tecnico son divenute tali che la sospensione del lavoro significa in molti casi pronta rovina (2). Tra le cause che determinano il movimento sindacale capitalistico questa tiene certo un importantissimo posto, se pure non il principalissimo, come taluno vorrebbe (3). La base finanziaria, spesso assai precaria, delle moderne imprese ne aumenta inoltre la vulnerabilità (4), in una misura che diventa massima là dove, come avviene tipicamente in Germania, la vita di un'industria ricca di monumentali impianti fissi riposa in preponderante proporzione sul credito bancario ed è perciò condannata ad un'attività senza tregua, pena la bancarotta e la catastrofe (5). La merce fabbricata, infine, anche quando fisicamente resistentissima, perde in molti casi, per ragioni analoghe, buona parte degli attributi di conserva-

---

(1) Cfr. Prato, *Il problema del combustibile nel periodo pre-rivoluzionario come fattore della distribuzione topografica delle industrie* „, in “ Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino „, ser. 2ª, t. LXIII.

(2) Il segretario dell'Associazione fra industriali cotonieri del Lancashire settentrionale così riferiva alla Commissione per la depressione industriale: “ Nella nostra industria, le spese fisse ed inalterabili sono così “ grandi che, nelle stagioni cattive, è quasi sempre meglio lavorare a tempo “ intero e quindi accrescere la produzione, piuttosto che diminuirla. Qualche “ anno fa ebbi occasione di esaminare quale effetto avrebbe avuto il fare “ andare una fabbrica tre giorni soli alla settimana, invece che una setti-“ mana intera e trovai che, ritenendo che la produzione si compiesse nei “ due casi sotto lo stesso prezzo, la differenza era almeno del 15 % sul “ capitale investito nell'impresa „. Cfr. C. Cassola, *I sindacati industriali*, Bari, 1905, p. 47 e sg. *n.*

(3) Cfr. Cassola, *I sindacati industriali*, p. 21 e sgg.

(4) Questa invero è grande, nella odierna struttura economica, anche quando il capitale immobilizzato non sia ingente. Nel vorticoso giro di affari di una ditta moderna, il pericolo di perdere o scontentare la clientela, le relazioni commerciali, ecc. basta il più delle volte a far paventare sopra ogni cosa la temporanea sospensione del lavoro, inducendo l'imprenditore ad ogni sacrificio per assicurarsi la maestranza. Ne reca esempi caratteristici Leroy-Beaulieu, *Essai sur la répartition des richesses*, p. 406 e sgg.

(5) Cfr. Prato, *Le screpolature del granito tedesco*, in “ Riforma sociale „, novembre-dicembre 1914.

bilità che furono addotti come suo carattere differenziatore, agli effetti dello scambio, in confronto alla merce lavoro. Quanto si osserva nei grandi magazzini riguardo alla necessità di rinnovare incessantemente ed in periodi brevissimi gli approvvigionamenti, liquidandone a qualunque prezzo le rimanenze, per realizzare il capitale e disporne (1), è divenuto una necessità pressochè universale nella grande industria, da quando la tenuità derisoria del guadagno unitario, la mutevolezza irrequieta dei gusti, l'emulazione febbrile di una ingegnosa pubblicità han fatta della estensione e della rapidità degli affari la condizione indispensabile del più discreto profitto (2). A riscontro dunque di un proletariato industriale vieppiù emancipato da vincoli di stabilità necessaria, sempre meglio in grado di sottrarsi con l'allontanamento o il cambiamento di mestiere a qualsiasi velleità di vero sfruttamento, vediamo disegnarsi una classe imprenditrice di giorno in giorno meno libera di rimediare, con la pronta trasferibilità o con una subitanea riduzione di lavoro, agli errori di calcolo d'una previsione troppo ottimistica od alla mala sorte di inopinati incidenti. Ad una offerta sempre più duttile e variabile con le alternanze della congiuntura corrisponde così una domanda dotata di contraibilità progressivamente minore. Il godimento delle quasi-rendite ne risulta ridotto alla minima durata dalla necessità per gli imprenditori più fortunati di procacciarsi a qualsiasi condizione la disputata maestranza (3). Onde la facilità e rapidità di adattamento al nuovo equilibrio, scemata per gli imprenditori, aumenta di continuo per la classe

---

(1) Cfr. G. d'Avenel, *Le mécanisme de la vie moderne*, vol. I, 4ª ed., Parigi, 1906, p. 41 e sgg.

(2) Perfino nell'agricoltura l'industrializzarsi delle imprese, l'estendersi degli allevamenti, l'intensificarsi delle colture ha talmente aumentata l'entità del capitale esposto a deperimento o perdita totale in caso di sospensione del lavoro da togliere il più delle volte al proprietario od all'imprenditore ogni indipendenza di fronte alla mano d'opera.

(3) Ne fornì un memorando saggio, a Torino, l'industria automobilistica, nel primo periodo del suo estemporaneo rigoglio. I salari toccati in pochi mesi ebbero del fantastico, specie se riferiti alla capacità tecnica della maggior parte della maestranza, reclutata a gara, anche in categorie estranee e qualche volta eteroclite, nelle città e nei villaggi di tutta Italia.

lavoratrice. Quali vantaggi ad essa derivino da una così notevole inversione degli antichi rapporti non è chi non veda (1).

Se un freno è posto al processo automatico delle forze combinate mercè le quali la “ viscosità „ della merce-lavoro tende a gradatamente eliminarsi e scompaiono i vecchi ostacoli fra i gruppi virtualmente concorrenti, convien riconoscere che è proprio e per l'appunto la organizzazione operaia quella che lo fa sorgere e lo mantiene. Questo fatto, a cui già accennava il Marshall (2), si rende, col rinforzarsi dell'unionismo, sempre più evidente. Non ripeterò quanto ebbi altrove a minutamente esporre circa gli ostacoli creati agli spostamenti nello spazio dalla accanita resistenza operaia (3) ed alla inversione che ne

---

(1) L'evidenza di queste verità e l'efficacia di tali fattori si vengon ogni giorno avvalorando di nuove prove statistiche. In un recentissimo studio sulla ricchezza nord-americana troviamo compendiato nella seguente tabella il movimento comparativo dei salari nominali e reali e dei profitti agli Stati Uniti, dal 1850 in poi. L'autore nota giustamente che, non soltanto l'ascesa dei primi è stata proporzionalmente assai più forte di quella dei secondi; ma che questi ultimi han sopportato in misura assai maggiore, anzi quasi esclusivamente, il peso delle fluttuazioni dovute alla variabile congiuntura:

Anni	Indice dei prezzi	Totale dei salari pagati (milioni di doll.)	Numero dei salariati (in migliaia)	Salario medio individ. annuo (dollari)	Salario medio individuale in potere d'acquisto	Totale dei profitti (milioni di doll.)	Numero degli imprenditori (migliaia)	Profitto medio per imprenditore (dollari)	Profitto medio in potere d'acquisto
1850	139,2	792,8	3.880	204	147	973,9	2.200	443	318
1860	141,3	1.351,1	5.090	265	188	1.430,7	3.150	454	321
1870	221,6	3.269,5	8.240	397	179	2.122,9	4.270	497	224
1880	132,4	3.803,6	11.790	323	244	1.571,6	5.600	281	212
1890	113,6	6.461,8	16.220	398	350	2.967,1	7.100	418	368
1900	101,7	8.490,7	20.350	417	410	5.382,1	8.720	617	607
1910	126,5	14.303,6	28.200	507	401	8.408,1	9.350	899	711

Cfr. W. J. King, *The wealth and income of the people of the United States*, New York, 1915, p. 167 e sgg.

(2) Cfr. *Elements of economics of industry*, p. 373.

(3) Cfr. *Le protectionisme ouvrier*, pp. 74 e sgg., 112 e sgg., 146 e sgg., 233 e sgg. e passim.

risulta delle finalità essenziali che il Pantaleoni assegna alle leghe, e che si compendiano in una funzione riduttrice di costi (1).

Ma non meno serî sono gli impedimenti che i sindacati professionali vanno moltiplicando riguardo ai passaggi da occupazione ad occupazione e da mestiere a mestiere, mercè tutto un ingegnoso conserto di norme e di pretese monopolistiche, costituenti la più autentica rivivenza corporativistica (2). Nè può dimenticarsi l'azione assidua che esse svolgono contro tutte quelle forme di salario accessorio, personale e famigliare, dalle quali deriva al lavoratore, in momenti di disoccupazione o di sciopero, una singolare potenza di attesa (3). Indirettamente poi non v'ha dubbio che l'azione operaia, quale si svolge nella politica delle unioni, abbia per risultato di attenuare le forze che agiscono nel senso della stabilità e scarsa contraibilità della domanda, tendendo a creare un rischio supplementare gravissimo e quindi una fonte di preoccupazioni deprimenti nell'animo del capitalista, incerto sulla scelta dei suoi investimenti. Vedemmo come l'immobilizzazione sempre maggiore dei capitali e la loro intrasferibilità abbia rese assai più vulnerabili le imprese, imponendo loro il bisogno, spesso ineluttabile, d'una continuità di esercizio, che migliora, comparativamente, d'assai la sorte del lavoro. Tutto quanto scoraggia dagli impieghi definitivi ed induce a ridurre al minimo le installazioni costose agisce però necessariamente in direzione inversa. Ed il periodo 1908-12 del mercato finanziario europeo è appunto caratterizzato dalla predilezione crescente dei capitalisti per gli impieghi a corta scadenza; indice di uno stato di tensione, di nervosità, di inquietudine, che il giustificato pessimismo dei pronostici politici non spiega che in parte. Non ostante la forte accumulazione dei risparmi, l'offerta per investimenti industriali è rimasta sensibilmente inferiore

(1) Cfr. *Scritti varî di economia*, ser. 2ª, Palermo, 1909, p. 257 e sgg. In qual modo le unioni contrastino alla riduzione dei costi di produzione, opponendosi all'incremento di mobilità procurata dalle Borse del lavoro, dimostra matematicamente A. L. Bowley, *Wages and the mobility of labour*, in "Economic journal", 1912, XXII, p. 46 e sgg.

(2) Lo ammette senza riserve il Pigou, *Unemployment*, p. 161 e sg.

(3) Cfr. P. Gemähling, *Travailleurs au rabais. La lutte syndacale contre les sous-concurrences ouvrières*, Parigi, 1910, p. 320 e sgg.

alla universale richiesta, tanto che lord Milner ha potuto parlare di un vero “ sciopero dei capitali „, pretendenti una rimunerazione più alta pei rischi che affrontano (1). Ben è noto d'altronde che talune leggi sociali, imposte dagli operai, hanno avuto per effetto immediato di arrestare quasi completamente lo sviluppo di certi rami di attività produttiva, con risultati particolarmente dannosi, anche dal punto di vista speciale che noi consideriamo, quando — come avvenne per la *Legge sull'equo trattamento* italiana — l'industria colpita è quella dei trasporti, soggetta meglio di altre alle conseguenze dell'immobilità di investimenti (2).

Per due opposte vie adunque parmi che l'organizzazione operaia concorra a rinvigorire anzichè a sopprimere quella maggior viscosità d'offerta e quella maggior fluidità di domanda, in cui fu ravvisata una causa organica di squilibrio nel particolare tipo di scambio che ha per oggetto il lavoro; senza tuttavia riuscir a neutralizzare che in parte l'azione gagliarda delle innumere forze concomitanti, che fatalmente spingono a mèta contraria la complessa evoluzione della vita economica moderna.

---

(1) Cfr. A. Raffalovich, *Le marché financier*, vol. XXII (1913–14), Parigi, 1915, p. 24 e sgg. Il fatto fu visibile particolarmente in Francia, dopo il terrorismo instaurato dalla Confédération générale du travail. Cfr. A. Chéradame, *La crise française*, 3ª ed., Parigi, 1912, p. 198 e sgg.

(2) L'applicazione integrale dei principî di questa legge funesta, ad ottenere la quale violentemente si agitano in tutto il regno gli interessati, od anche la semplice minaccia potenziale che nella medesima si racchiude, stanno determinando il brusco e generale arresto di sviluppo della rete delle comunicazioni secondarie, e, in parte, dei trasporti urbani, con rovina economica di più d'un centro, troppo povero per alimentare imprese divenute così costose, ma suscettibile di magnifico progresso se fornito di mezzi conformi alle sue particolari condizioni di salari e di vita. Ben lo sanno i paesi che dovettero, a legge votata, sospendere le già avviate pratiche, intese ad ottenere facili raccordi con linee vicine, o che non poterono ottenere risposta alle loro richieste od offerte in tal senso dalle perseguitate e vessate società esercenti.

***

Le cose fin qui dette, pur avvicinandoci all'impostazione del problema su dati men lontani dalla realtà, non ne affrontano e risolvono il punto essenziale: che consiste nello stabilire se il contrattare collettivamente debba recare speciali vantaggi alla classe operaia, considerata nel suo complesso e con riguardo a periodi continuati di tempo. È chiaro che, se così fosse, ogni discussione sulla validità delle premesse di fatto ritenute assiomatiche dai suoi fautori, mentre è facile dimostrarne la fallacia, si ridurrebbe a semplice ed oziosa esercitazione verbale, da aggiungersi alle troppe altre che sempre più van screditando la nostra scienza nella opinione comune. Altrettanto inutile sarebbe però tentar di sciogliere l'incerto quesito mercè la sola osservazione storico-statistica: la quale, in questo come nella maggior parte dei campi controversi dell'economia, saprebbe ben dirci se l'uno dei due metodi procurò momentaneamente a determinati gruppi guadagni od inconvenienti particolari, ma non riuscirebbe mai a seguire, nelle sue infinite ripercussioni, prossime e lontane, immediate e successive, il lento irradiarsi delle conseguenze del fenomeno attraverso l'ambiente economico in cui si produce, nè ad evitare gli errori di apprezzamento circa i rapporti di causalità che intercedono tra fatti in apparenza nettamente distinti (1).

Una relativa sicurezza di conclusioni si otterrà dunque soltanto richiamandoci ai principî generali che governano questa, come ogni altra forma di scambio; circa i quali non può sorgere sostanziale dissenso fra obbiettivi ricercatori del vero scientifico.

Un fatto assai noto è d'uopo anzitutto ricordare: l'influenza decisiva che esercita sulla sensibilità di un mercato il numero

---

(1) Non voglio dunque dar soverchio peso agli argomenti che altri trasse dalle recenti statistiche dei salari nominali e reali per affermare che, nei luoghi ove più largamente fu praticato, il contratto collettivo di lavoro fallì agli scopi vagheggiati dai suoi fautori ed ottenne anzi risultati opposti. Cfr. *Labour and wages*, in “ The Candid ”, n° 2 (maggio 1914).

maggiore o minore delle contrattazioni che vi avvengono rispetto ad un bene qualsiasi.

L'essere una merce minutamente spezzettata e in possesso di molti, che a gara la offrono allo scambio fin che non è raggiunta per ciascuno la posizione più favorevole, è condizione essenziale perchè un prezzo d'equilibrio non troppo instabile sia prontamente raggiunto. Questo tende tanto meglio a coincidere in pratica col punto di equilibrio di uno stato puro di libera concorrenza teorica, quanto più lo scambio perde carattere di personalità; ciò che appunto, come nota l'Edgeworth (1) sulle orme del Courcelle-Seneuil (2), è in ragione del numero dei concorrenti che vi partecipano. " Dans un marché étendu — " spiega il De Molinari — où une multitude de vendeurs se " trouvent en présence d'une multitude d'acheteurs, l'inégalité " d'intensité des deux besoins s'efface et cesse d'agir comme un " facteur du prix. Sur ce marché il y a, en effet, une masse de pro- " duits offerts par des vendeurs inégalement pressés de vendre, et " une ample demande d'acheteurs inégalement pressés d'acheter; " mais nul ne peut connaître le degré d'intensité du besoin de " chacun des vendeurs ou des acheteurs et mesurer son offre ou " sa demande en conséquence. Le prix se fixe d'une manière im- " personnelle, d'après le rapport des quantités offertes d'un côté, " demandées de l'autre „ (3). Onde la molteplicità dei contratti è elemento necessario di quella condizione del mercato in cui l'avvicinarsi del prezzo effettivamente praticato a quello tipico, emanante dal confronto di tutta la domanda con tutta l'offerta, elimina teoricamente, e, in pratica, riduce al minimo, le possibilità di sfruttamento dell'altrui ignoranza, offrendo al debole — non meno se venditore che se compratore — una garanzia di notorietà ignota ai mercati artificialmente ristretti o resi torpidi da poche ed infrequenti transazioni.

Un'esemplificazione probantissima di tali verità può scorgersi nello spettacolo della borsa; di tutti i mercati quello che meno imperfettamente realizza i postulati della pura concor-

(1) Cfr. *Mathematical psychics*, p. 30.

(2) Cfr. *Traité théorique et pratique d'économie politique*, 3ª ed., Parigi, 1891, vol. I, p. 233.

(3) Cfr. *Questions économiques à l'ordre du jour*, p. 47.

renza (1), raggiungendovisi in ogni istante il prezzo che meglio si accosta a quello di equilibrio. Ivi, come è noto, la sensibilità dei corsi alle mutevoli influenze dell'ambiente è in ragione dell'attività di negoziazioni rispetto ai singoli valori (2); e l'intensità di speculazione, mentre moltiplica e rende incessanti le oscillazioni di prezzo, ne attenua però notevolmente, graduandola nel tempo, la repentinità degli scarti, la quale invece ricompare dannosamente, appena un intervento perturbatore venga ad alterare la libertà dei contratti (3). Non altra è la causa della relativa stabilità complessiva, attraverso le continue minute variazioni, dei valori delle merci e dei prodotti aventi una larghissima zona di vendita, e della mutevolezza improvvisa, degli squilibrii, delle perturbazioni d'ogni specie che affliggono i mercati isolati e ristretti.

I fenomeni che seguirono la chiusura delle borse germaniche dei cereali nel 1898 resero evidente anche ai ciechi l'utilità che ricava il possessore isolato di una esigua quantità d'una merce dall'esistenza notoria di un prezzo liberamente dibattuto e formato senza coercizioni sopra una piazza libera (4). Ma tale verità si rende di continuo anche altrove assai limpidamente visibile. Son note le caratteristiche del mercato di borsa francese, nella storia del quale la lotta secolare fra il principio della libertà, rappresentato dalla *coulisse* parigina, e

(1) Cfr. Pareto, *Manuel d'économie politique*, cap. II, § 3, 7, 8; VI, 44, 45.

(2) Cfr. H. C. Emery, *Speculation on the stock and produce exchanges of the United States*, " Columbia University studies „, VII, 2. New York, 1896, p. 121 e sgg.

(3) Cfr. Prato, *Gli insegnamenti d'una regolamentazione arbitraria di prezzi nelle borse del cotone americane*, in " Riforma sociale „, luglio-agosto 1910.

(4) Cfr. Emery, *Ten years regulation of the stock exchange in Germany*, in " Yale review „, maggio 1908. E verità ben nota ai commercianti di derrate agricole d'ogni paese, fra i quali si nota la tendenza a disertare i mercati locali (che infatti dovunque decadono) per recarsi a contrattar la merce al domicilio dei singoli produttori, ai quali viene così a mancare un prezioso mezzo di controllo, e che inconsapevolmente pagan assai cara la procurata comodità. Cfr. A. Dulac, *La formation des prix des denrées alimentaires de première nécessité*, Parigi, 1911, p. 26.

quello del monopolio, incarnato nel *parquet* ufficiale (1), fa capo al consolidamento della prevalenza di quest'ultimo con la " riorganizzazione del mercato finanziario „ del 1898 (2). Gli effetti però del dominio così riconosciuto ad un sindacato legale sull'intiera vita degli affari risultano subito supremamente significativi. Ecco come li riassume un efficace narratore di queste vicende: " L'effet a été rapide. Les coulissiers ont quitté Paris " et sont allés s'établir soit à Londres, soit à Bruxelles, où la " loi de 1893 sur les sociétés avait déjà parqué les lanceurs " d'affaires. Sous prétexte de moraliser, le gouvernement s'est " enlevé tout controle. Cependant les agents de change n'ont " pas amélioré les conditions du monopole. Ils ne remettent " les titres achetés, que dans des delais capricieux et ne payent " les titres vendus que cinq jours après l'avis dans lequel ils " disent avoir exécuté l'ordre. Les changeurs de leur côté n'osent " plus acheter de titres; une personne qui a dans son porte" feuille des valeurs courantes, comme des obligations de la " ville de Paris, et qui a besoin d'argent dans les vingt-quatre " heures, n'a d'autre ressource que d'envoyer ses titres à Bruxelles " et de se faire adresser un mandat télégraphique. Voilà où l'on " en est à Paris, dans un temps où l'instantané est à la mode " et où la rapidité des transactions est une nécessité „ (3).

Chi può dire fino a qual punto una così organica perturbazione del mercato — complicata dalle incessanti ingerenze governative nelle ammissioni dei valori alla quota — abbia influito a lungo andare sulla psicologia diffidente, e più ancora sulla profonda ignoranza finanziaria del risparmiatore francese, che, mentre da un lato accorda una preferenza ingiustificata ad ogni specie di titoli di stato esteri ufficialmente quotati (4), offre

---

(1) Cfr. A. Courtois, *Traité des opérations de bourse et de change*, 14ª ed., Parigi, 1910, p. 249 e sgg.

(2) Cfr. E. Vidal, *The history and methods of the Paris Bourse*, pubblicata dalla " National monetary commission „, Washington, 1910, p. 215 e sgg.

(3) Cfr. S. Robert-Milles, *La bourse de Paris et la compagnie des agents de change*, Parigi, 1912, p. 291 e sgg.

(4) Cfr. A. Neymarck, *Finances contemporaines*, vol. II. *L'épargne française et les valeurs mobilières 1872-1910*, Parigi, 1911, pp. 3 sgg., 158 e sgg., 219 e sgg., 497 e sgg. e passim.

d'altra parte il miglior campo di sfruttamento alle speculazioni fantastiche, che, in soli titoli minerarî del Sud Africa, gli rubarono in pochi mesi oltre un miliardo? (1). Il fatto sta che non si saprebbe immaginare un fallimento più radicale dei postulati e degli scopi onde scaturì il complicato vincolismo. Poichè, mentre il privilegio ufficiale fu, dalle origini, giustificato essenzialmente per la difesa dei corsi della rendita francese contro la speculazione ribassistica, avvenne spesso che questi si mantenessero più alti sul tollerato mercato libero che nel sacro recinto (2); e che proprio alla esecrata *coulisse* dovesse riconoscersi il merito d'aver animosamente sostenuto il credito pubblico nella emissione dei prestiti per la liberazione del territorio (3).

(1) Cfr. A. Neymarck, *Finances contemporaines*, vol. VI, pp. 358 e sgg., 381 e sgg.; VII, 486 e sgg. " Nous ne croyons pas, diceva P. Leroy-Beaulieu, " qu'il y ait sur la terre un capitaliste plus audacieux que le petit et le " moyen capitaliste français. Vous leur offririez des actions de chemin de " fer ou de canaux, je ne dis pas dans la lune, qui est trop connue, mais " dans Mars ou dans Saturne, qu'il se trouverait parmi eux des souscrip- " teurs „. Cfr. A. Aupetit, *Le marché financier de Paris*, in " Les grands marchés financiers „, Parigi, 1912, p. 37 e sgg. Ma il fatto troppo bene si spiega con l'educazione di minorenne interdetto a cui il pubblico è sottoposto. Non è certo per difetto di leggi, osserva ancora il Neymarck, che il risparmiatore francese fu tante volte ingannato! Cfr. *Finances contemporaines*, vol. VII, p. 194. " Les capitalistes français, scrive un altro critico, " acheteurs de titres, n'ont ni spontanéité, ni libre arbitre. Ils ne choisis- " sent pas leurs valeurs eux-mêmes. Qu'elles soit françaises, chinoises ou " turques, peu leur importe. Les capitalistes français achètent les valeurs " que leurs banques leur disent d'acheter. Et ces banques ne sont pas nom- " breuses. Il y en a quelques-unes en tout. Dans ces conditions, le problème " est très simplifié. On peut se désintéresser complètement des moutons, " il suffit d'étudier les bergers „. Cfr. Lysis, *Contre l'oligarchie financière en France*, nouv. édit., Parigi, p. 80. In regime di mercato chiuso e di monopolio legale l'arbitrio di un sindacato fra l'apatia universale è inevitabile.

(2) Cfr. Vidal, *The hystory and methods of the Paris Bourse*, p. 243 e sg. *n.*

(3) Cfr. Courtois, *Traité des opérations de bourse et de change*, p. 289. Fin dai tempi di Calonne, d'altronde, il governo, mentre proibiva l'esercizio agli agenti non autorizzati, ricorreva segretamente a loro per speculare sulle azioni delle acque. Cfr. L. Say, *Les interventions du trésor à la Bourse*, in " Annales de l'École libre des sciences politiques „, 1896, p. 8.

Quanto avvenne, negli ultimi mesi, allo *Stock exchange* di Londra riesce ad una identica dimostrazione. Applicando al consolidato un prezzo minimo, si ritenne, allo scoppio della guerra, di averlo efficacemente tutelato. Si riuscì invece semplicemente a spogliarlo della sua qualità essenziale: la negoziabilità; facendolo cadere in tale discredito da vedersi ben presto costretti a compensarlo con una opzione di conversione, allorchè il governo stesso, prendendo a prestito al 4 1/2, smentì ufficialmente la quotazione obbligatoria di 65 applicata alla rendita, implicitamente confessando che la medesima non valeva più di 55 1/2. L'impossibilità in cui si trovavano i portatori di realizzare i titoli, se non per via di intermediazioni subdole, contribuiva intanto a deprimere i corsi, recando all'intiera vita degli affari un crescente pregiudizio (1). Onde il restauro dello *statu quo ante* per il maggior titolo finì per imporsi clamorosamente, con effetti quasi immediati di sensibile ripresa della fiducia e dei prezzi: giustificanti la richiesta, che si fa sempre più generale, di completo ripristino della libera trattazione rispetto a qualsiasi specie di valori (2).

Qualcosa di molto simile si verifica del resto, e non da ieri soltanto, anche in Italia. Sono ormai parecchi anni dacchè le voci più autorevoli della scienza e della pratica additano nel regime di inquisitorietà diffidente e di artificiale limitazione cui è sottoposto il mercato la causa principale del marasma dell'ambiente finanziario; senza però riuscire ad ottenere altro fuorchè un progressivo inasprimento di così provvidi sistemi. L'affannoso erigere di dighe contro il ribasso, che si iniziò nell'ottobre del 1907, fu certo uno dei motivi essenziali per i quali le borse nostre si differenziarono in peggio rispetto alle estere, nella faticosa liquidazione della crisi (3). Ma il male non fece che aggravarsi quando gli espedienti temporanei di quell'ora di

---

(1) Per gli effetti di tale stato di cose sulle banche che avevan fatte anticipazioni in titoli, cfr. J. H. Jones, *The economics of war and conquest*, Londra, 1915, p. 65 e sgg.

(2) Cfr. *The Economist*, 3 luglio 1915, p. 16; 10 luglio, p. 58; 21 agosto, p. 283 e sgg.; 28 agosto, p. 331; 29 genn. 1916, p. 174.

(3) Cfr. Einaudi, *Il momento di borsa*, in "Nuova Antologia", 16 aprile 1909.

panico tendettero a consolidarsi e perpetuarsi. Già la giurisprudenza, negando validità giuridica ai contratti a termine, aveva abbandonate le borse alla balìa degli affaristi più disonesti (1); mentre l'ostracismo fiscale dato ai titoli esteri aveva privati i risparmiatori indigeni dell'unico termine di confronto veramente educativo ed efficace nei loro investimenti. Venne poi finalmente in discussione alla camera e vi fu votato il disegno di legge " moralizzatore delle borse „; dal quale parecchi fra i precedenti vincoli occasionali uscivan consacrati in forma definitiva (2).

E fu in tale stato di militarizzazione che il mercato finanziario italiano si affacciò, sotto l'egida della sospettosa tutela, alla improvvisa mondiale catastrofe della guerra europea. La chiusura delle borse, tosto decretata, provvedimento indispensabile nelle prime ore di panico, ebbe per naturale effetto di rendere la proprietà mobiliare del paese, per un certo periodo, quasi un'espressione teorica, togliendo al portatore di qualunque valore la possibilità di poterlo onestamente realizzare. Ma il mantenimento della eccezionale misura quando la assoluta necessità ne sarebbe cessata, crea, a concorde giudizio dei tecnici, il pericolo di sbalzi straordinari di prezzi, dovuti alla difficoltà dell'incontro del venditore col compratore ed alla difficoltà per l'operatore di calcolare un prezzo esatto (3). I danneggiati intanto sono i portatori effettivi di titoli, in ogni contratto a cui siano costretti; poichè la soppressione del mercato normale e palese assicura il dominio ai peggiori speculatori, che naturalmente si prevalgono dello stato di necessità di clienti a cui manca ogni mezzo di controllo (4). Non per nulla gli agenti di cambio si mostrarono, più d'una volta, contrari al regolare funzionamento della borsa, come avvenne a Genova, nel 1856, al-

(1) Cfr. V. Artom, *Le cause reali del marasma dei mercati finanziari italiani*, in " Riforma sociale „, 1911, p. 141 e sgg.

(2) Cfr. Argentario, *Il nuovo disegno di legge sulle borse*; e C. Toesca di Castellazzo, *I contratti di borsa e il disegno di legge sulle borse*, in " Riforma sociale „, 1913, p. 32 e sgg.

(3) Cfr. A. Donati, *La riapertura delle borse*, in " Riforma sociale „, 1914, p. 1008 e sgg.

(4) Cfr. J. Aguet, *In proposito dell'apertura delle borse*, in " Nuova Antologia „, 16 gennaio 1916.

lorchè Cavour pregava il suo amico banchiere Émile de la Rüe ad usare della sua influenza per far cessare l'interessato ostruzionismo denunciato da quella camera di commercio (1). Verità tutte che sarebbero troppo ovvie per essere ricordate se, nel pubblico degli incompetenti non fosse invece diffusa opinione che i mali derivanti dalla disorganizzazione coercitiva delle spontanee transazioni — fra cui è d'uopo noverare oggi fra noi la preoccupante perturbazione di quel particolare, delicatissimo e sensibilissimo prezzo che sono i cambi — dipendono invece da abuso di libertà. Onde alla diagnosi arbitraria segue il rimedio fantastico caro ai medicastri, che curano arti infiammati con fasciature ermetiche, dalle quali i pazienti non escono che in definitiva cancrena (2).

Lo studio comparativo del corso dei principali titoli sopra uno stesso mercato consentirebbe d'altronde, e per un altro verso, rilievi anche più istruttivi circa i rapporti che intercedono fra attiva e facile negoziabilità d' un bene ed elevato apprezzamento e regolare quotazione del medesimo. La prevalenza che, *caeteris paribus*, mantiene su valori di stato perfettamente equivalenti (consolidati 4,50 % netto, 4 % netto, 3 % lordo, ultimi prestiti nazionali di guerra, buoni del tesoro fruttiferi, ecc.) il consolidato italiano 3,50 % (3), riesce inesplicabile a chi non tenga conto, oltrechè dei vari elementi annoverati dal Graziani (4), delle continue, numerosissime comprevendite minute, per grossi e per piccoli tagli, che lo rendono il titolo più noto, più trattato e più agevolmente esitabile del nostro mercato. Qualunque possessore d'una di tali cartelle sa di poterla realizzare, da un momento all'altro, a un prezzo che non differisce se non di una frazione spesso infinitesima da quello ufficialmente annunciato, nè consente all'intermediario astute speculazioni. A perdite, o almeno ad attese, maggiori, è

(1) Cfr. A. Bert, *C. Cavour*. Nouvelles lettres inédites, Torino, 1889, p. 506 e sg.

(2) Così Argentario, in più articoli comparsi sulla “ Nuova Antologia „ del settembre e ottobre 1915.

(3) Cfr. A. Necco, *Il corso dei titoli di borsa in Italia dal 1861 al 1912*, vol. I, *Titoli di Stato*, supplemento alla “ Riforma sociale „, aprile 1915.

(4) Cfr. *Principii di economia commerciale*, Napoli, 1913, p. 113.

d'uopo invece si adatti l'offerente di un titolo meno universalmente richiesto, anche se meglio garantito, più redditizio, o includente un buon premio al rimborso. Onde spiegasi la relativa resistenza dei corsi di valori solidissimi alla azione degli arbitraggi, che tendono ad elevarli al livello del consolidato, come avviene per ottime obbligazioni ferroviarie, per prestiti municipali di primo ordine, per cartelle fondiarie di assoluta sicurezza. Così elementari nozioni costituiscono l'abbicì del mestiere, anche pel più inesperto speculatore (1).

Altri elementi di giudizio ci fornisce l'osservazione delle divergenze, spesso fortissime, che si verificano sopra uno stesso mercato fra prezzi di grosso e prezzi minuti (2). Molte cause ne furono scoperte ed acutamente illustrate da inchieste e studi interessantissimi (3); fra le quali specialmente quella, già sottolineata dal Cairnes (4), dell'eccessivo numero degli spacci, a cui quasi tutti attribuiscono il manifestarsi di un fenomeno, sulla gravità del quale, da Mill in poi, è unanime il consenso (5). Ma da nessuno, ch'io sappia, ne fu sufficientemente rilevato un

---

(1) Cfr. A. Courtois, *Traité des opérations de bourse et de change*, p. 152 e sgg. Un'applicazione attualissima trovano queste norme nella convenienza riconosciuta dai nostri capitalisti di convertire i titoli del prestito nazionale 4 $^{1}/_{2}$ % del gennaio 1915 in quelli del nuovo prestito 5 % del gennaio 1916, sebbene il computo semplicemente aritmetico sconsiglierebbe l'operazione. Trattasi invero di scambiare un titolo che sarà d'ora innanzi poco negoziato, quindi avrà un prezzo *effettivo* sensibilmente inferiore al *nominale*, in altro godente di largo e attivo mercato.

(2) Cfr. per una amplissima raccolta di dati su questa divergenza, le pubblicazioni dell' " U. S. Bureau of labor statistics ", *Wholesale prices 1890 to 1912*, e *Retail prices 1890 to february 1913*, Washington, 1912, 1913.

(3) Cfr. specialmente le ricerche della " Verein für Sozialpolitik ", riassunte in R. van der Borgh, *Handel und Handelspolitik*, Lipsia, 1900, p. 202 e sgg. e, per l'Italia: T. Guarneri, *Il recente rincaro delle carni e il problema della minuta vendita*, in " Bollettino della Camera di commercio di Genova ", 1910, luglio-agosto; A. Loria, *Relazione della Commissione incaricata di studiare i provvedimenti adatti a risolvere il problema del caro dei viveri*, Torino, 1910; A. Graziani, *Appunti sul prezzo di alcuni prodotti sul mercato al dettaglio di Napoli*, Napoli, 1907.

(4) Cfr. *Principii di economia politica* (tr. it.), in " Biblioteca dell'economista ", ser. 3ª, vol. IV, p. 76 e sgg.

(5) Cfr. W. Roscher, *System der Volkswirtschaft*, vol. III; *Nationalökonomik des Handels und Gewerbfleiszes*, Stuttgart, 1882, p. 89 e sg.

altro fattore: l'azione cioè esercitata dalla molteplicità delle transazioni sulle elevate tariffe.

In realtà i compratori più screditati, i più restii al saldo immediato in contanti, i cattivi pagatori di notoria fama, esercitano sull'intiera serie dei prezzi un'influenza inasprente, che il sistema dei prezzi multipli, in questi scambi largamente praticato (1), non vale a neutralizzare che in parte. Quando una merce dà luogo a pochi, grossi contratti, l'offerente di solvibilità incerta o destituito di garanzie materiali o morali viene ben di rado accettato; nè mai, ad ogni modo, senza fargli pagare un compenso proporzionato al rischio speciale che presenta. Quest'ultima circostanza poi non altera quasi mai le condizioni degli altri contemporanei contratti, formando operazione a sè stante, determinata da un particolare calcolo di convenienza. Non così però avviene nel commercio di dettaglio, dove la insignificanza delle singole transazioni, la scarsa conoscenza, la mutabilità di sede e di condizioni dei clienti, la necessità di non scoraggiarne completamente nessuno, per sostener la bottega contro i molti concorrenti, induce a ripartire su tutti almeno una quota del rischio, che parecchi fra essi presentano in proporzione maggiore, ma non agevolmente valutabile.

Per avvertire il fenomeno non è sempre d'uopo guardare ai consumi schiettamente popolari. Di famigerati morosi abbonda ogni ceto sociale. Ed è, p. e., ben noto che i prezzi fantastici imposti dalle più eleganti case di confezione, sartoria ecc. alla loro eletta clientela son dovuti alle difficoltà grandissime che spesso incontra il saldo dei crediti di una parte di essa. Ma, quanto più scendiamo nella zona del minuto commercio vero e proprio, tanto meglio si accentua lo scarto fra tariffe di grosso e di dettaglio, cioè tanto più cresce il prezzo effettivamente praticato per la merce, con tendenza a toccare i massimi pei generi indefinitamente frazionabili, come i commestibili, pei quali la molteplicità degli scambi è più continua e più intensa. Numero e frequenza dei contratti dunque, e conseguente influenza dei compratori marginali sui prezzi, sono elementi che una corretta interpretazione del fenomeno non può trascurare.

(1) Cfr. C. Cassola, *La formazione dei prezzi nel commercio*, Palermo, 1911, p. 41 e sgg.

Applicando simili concetti al mercato del lavoro (1), è agevole vedere che la rarificazione ed il concentramento delle transazioni, imposte dai sindacati, non posson che elevare il margine di disparità esistente fra i singoli contratti, il quale si riduce a una frazione minima nelle merci molto trattate e sale spesso a grandi altezze negli articoli di scambio men frequente e minuto. Così il lavoro passa dalla categoria dei beni nella nozione del valore corrente, dei quali vi è un minimo di inesattezza, a quella delle merci, nelle quali lo scarso numero delle transazioni crea un massimo di incertezza. E la via rimane aperta a tutte le speculazioni che, a danno dei possessori d'una merce qualsivoglia, germogliano e prosperano in regime di mercato mal informato, o artificialmente compresso (2).

(1) Circa le somiglianze del commercio di dettaglio con quello del lavoro libero, già il De Molinari rilevò che, nell'uno e nell'altro, il mercanteggiamento gioca una parte notevole, e ciò tanto più col graduale eliminarsi, sul mercato del lavoro, della possibilità antica di un salario unilateralmente fissato ed imposto. Cfr. *Questions économiques à l'ordre du jour*, p. 68.

(2) Certo le condizioni del mercato si manterrebbero tollerabili se, di fronte ad un'offerta coalizzata, stesse una domanda minutamente spezzettata, verificandosi così i requisiti e la possibilità di molteplici, continue transazioni. Ma ciò essendo escluso dalla struttura tecnica della moderna industria, che tende a dilatare le dimensioni delle imprese, la tattica operaia conduce irremissibilmente alla soppressione del mercato libero. Cfr. Cree, *A criticism of the theory of trades' unions*, p. 19 e sg.

La cronologia dei primi Tolemei (*).

Nota di ALDO FERRABINO.

I.

La cronologia dei primi Tolemei, in quanto è fondata sul Canone astronomico, è salda solo in apparenza. Anche per chi del Canone non voglia mettere in dubbio l'esattezza, rimane sempre molto arduo il problema di darne una interpretazione a dovere. Esso, com'è noto, fissa il principio e la fine de' singoli regni col 1° Thoth, primo giorno del calendario egizio. Il che offre non piccolo vantaggio, perchè ci è possibile far corrispondere le date di quel calendario egizio alle nostre. Se non che si frappongono due notevoli difficoltà.

Anzi tutto, quando le durate dei regni non sono comprese fra il giorno preciso dell'accessione al trono e il giorno preciso della morte, ma vengono ridotte ad anni interi sulla base di un certo calendario, due metodi sono possibili nel compier la riduzione, e due ci sono testimoniati. Si può considerare come principio del regno il principio dell'anno in cui la accessione al trono è avvenuta; ed è il metodo della *predatazione*. O si può considerare come principio del regno il principio dell'anno immediatamente successivo all'accessione al trono; ed è il metodo della *posdatazione*. Quale dei due metodi tenne l'autore del Canone? Non si sa. Tutti i critici (non conosco eccezioni) hanno finora ritenuto che il Canone predatasse e che quindi ciascun re morisse *dopo* il 1° Thoth che segna il principio al regno del suo successore. Fondamento a tal congettura è che nell'età romana cotesto metodo di computo ci è testimoniato per i Tolemei; sicchè parve lecito supporlo in vigore già in epoca precedente. Ma ognun vede quanto sia fragile l'illazione da un periodo storico ad un altro alquanto diverso.

(*) Questa Nota fu approvata nell'adunanza del 16 maggio 1915.

Rende più incerto l'incedere un'altra considerazione, gravissima. I Tolemei, specie nei primi cent'anni circa del loro dominio su l'Egitto, usarono costantemente, non il calendario egizio, ma il macedonico, che ha per primo giorno il 1° Dios. L'uso appare indubbio da tutti i documenti ufficiali, dove la data è sempre macedonica ed è solo talvolta uguagliata al mese e al giorno egiziani. Di qui la domanda: con che metodo datarono i Tolemei sulla base del calendario macedonico? E, posto che cotesto metodo sia accertabile, con qual norma il Canone riduce il computo macedonico in computo egiziano? Alla doppia interrogazione non fu risposto che per ipotesi, e non si poteva altrimenti. Il Beloch (1) vide e chiarì la difficoltà, e a risolverla addusse due congetture. Pensò anzi tutto che i Tolemei predatassero sulla base del loro calendario macedonico, come ritenne che predatasse il Canone sulla base del calendario egizio. A ciò lo conduceva il fatto che nell'età romana, quando — come dicemmo or ora — la predatazione è certa in Egitto, al 1° Thoth corrispondeva costantemente, in seguito a riforma, il 1° Dios; indi ovvia l'induzione che, come si predatava rispetto al 1° Thoth, così si fosse predatato rispetto al 1° Dios. Suppose il Beloch inoltre che ciascun anno macedonico fosse dal Canone equiparato all'anno egiziano in cui cominciava. A ciò non lo conduceva nessun dato positivo, ma il veder che così gli riusciva di ricostruire felicemente nel tutt'insieme la cronologia tolemaica. Congetture dunque rispondevano alla doppia grave interrogazione posta dianzi: e congetture verso cui rimase diffidente il loro stesso autore.

Tuttavia dopo il Beloch i moderni non fecero alcun serio tentativo per rivedere la questione *ab imis fundamentis*, ma si limitarono a discutere singoli punti. Eppure nuovi documenti apparsi negli ultimi dieci anni, non solo rendono possibile, sibbene impongono di riprendere in esame questa materia. E ne vale la pena: chè con la durata de' singoli regni tolemaici si connette la cronologia di avvenimenti importantissimi, fra i quali alcuni sono cardini indispensabili di qualsivoglia ricostruzione.

---

(1) *Griech. Gesch.* III 2, 122.

II.

Nei documenti tolemaici appare naturalmente, dov'era necessario, il nome del Tolemeo regnante, seguìto dal numero progressivo dell'anno di regno. Se non che in otto casi, invece di esserci fornito un solo numero progressivo, ce ne vengono dati ben due: il che fa subito supporre che, invece di un solo computo per gli anni di regno, ne fossero allora in vigore due distinti. In particolare poi accade che in quattro (1) di quei casi la seconda cifra è preceduta dall'espressione *ὡς δὲ αἱ πρόσοδοι*, e supera (tranne un caso dubbio) di 1 unità la cifra precedente. In due casi invece le cifre sono identiche, e la seconda o è introdotta con l'espressione *τῶν δὲ Αἰγυπτίων* o si riconnette al calendario egizio (2). Infine negli altri due casi il divario è fra il testo demotico e il testo greco (3). Che vuol dir ciò?

Di sciogliere il nodo han tentato studiosi espertissimi. Una prima revisione e confutazione di cotali tentativi, nessuno felice, è stata compiuta egregiamente da Grenfell e Hunt nei *P. Hibeh* p. 358 sgg. Più tardi apparvero due scritti del Lesquier (" Wilcken Archiv „ IV 284 e *P. Lille* II introduzione) e uno dello Smyly (" Hermathena „ XIV, 1907, pag. 106 sgg.): notevoli sotto varii rispetti. Ma non indugiamo nella critica dei particolari, che dovrà risultare dal ragionamento ulteriore; e preferiamo porre in rilievo una obiezione fondamentale. Tutti quanti i critici, compresi quelli che sulla questione espressero un giudizio anche solo provvisorio, ritengono che l'anno contrassegnato con la frase *ὡς αἱ πρόσοδοι*

---

(1) *PP.* III p. 8; p. 168-9; *P. Lille* II 35; *P. Tebt.* ined. = *P. Hibeh* p. 359. Avvertiamo che i papiri son citati sempre con le sigle usate dal Wilcken in *Grundzüge und Chrestomathie*: sigle che ogni competente intende senz'altro. Per i *Flinders Petrie Papyri* (*PP.*) III cito le sole pagine, per i motivi addotti dal Wilcken in " Archiv „ III 511-2.

(2) *P. Lille* I 1, cfr. Wilcken " Archiv „ V 219-20; — *P. Leyden* I 379, cfr. *P. Hibeh* p. 341.

(3) *P. Hibeh* 80; — Griffith " Proc. Soc. Bibl. Arch. „ 1901, p. 294-302.

sia anno finanziario, e che per conseguenza l'altro, innominato, sia anno regio: ammettono, insomma, concordi (e le divergenze sorgono numerose sol dopo) l'esistenza, sotto i primi Tolemei, di due differenti computi ufficiali degli anni.

Ciò è radicalmente inaccettabile.

Intanto desta *a priori* meraviglia che, esistendo ufficialmente un anno finanziario, in soli 4 casi se ne abbia menzione, mentre possediamo centinaia di papiri tolemaici e fra questi buon numero hanno carattere finanziario (elenchi d'imposte, atti di banche, ricevute, malleverie, ecc. ecc.). Il così detto *Revenue Papyrus* di Tolemeo Filadelfo, il quale si occupa proprio di fissare le tasse, non accenna nè pur da lontano a un anno finanziario. I numerosi rendiconti de' pubblici ufficiali al governo, pur distribuendo anno per anno e, alle volte, mese per mese, gl'incassi fatti, non alludono in alcun modo ad anni finanziarii. Possiamo credere che in tutti quei casi l'espressione pura e semplice " anno " equivalesse ad " anno finanziario ", se ammettiamo che un altro anno, l'anno regio, avesse allora importanza ufficiale? Sarebbe un colmo di brevità, poco spiegabile in testi dove le lungaggini non mancano punto, e adatto a generare i più complicati equivoci. Si pensi con quanta cura noi distinguiamo oggi il nostro " anno scolastico " dal " finanziario ", dal " giuridico ", dal " commerciale ". Come mai il raffinato macchinismo governativo dei Tolemei non tenne una norma analoga? E in verità, coloro medesimi che, senza rendersi conto di ciò, vollero credere ai due diversi computi ufficiali, si trovarono imbarazzatissimi nel decidere dove fosse usato l'un computo e dove l'altro! Gli stessi papiri di Flinders Petrie, che sembrano datati ὡς αἱ πρόσοδοι allo Smyly, sembrano datati nell'altra maniera, " regia ", al Lesquier; e per prudenza Grenfell e Hunt lasciano sempre, nelle loro ipotesi e nei calcoli, adito a entrambe le possibilità. Che concetto ci farem noi dunque di cotesta amministrazione tolemaica che data tanto ambiguamente i suoi documenti pubblici?

C'è anche di peggio. Possediamo, com'è noto, circa una quarantina di doppie date mensili, cioè di papiri, dove la data del giorno e mese macedonici viene fatta corrispondere alla data del giorno e del mese egiziani. Nei *P. Hibeh* Grenfell e Hunt han raccolto in un comodo prospetto tali equazioni, e dopo d'al-

lora una nuova soltanto è stata pubblicata (1). Da tutti quei papiri risulta pertanto che i Tolemei, pur usando di regola il proprio calendario macedonico, non solo tolleravano il calendario *τῶν Αἰγυπτίων*, ma ne permettevano, in certa guisa, pubblico riconoscimento. Se adunque (la conseguenza è stringente) esisteva anche per gli anni un computo *τῶν Αἰγυπτίων* e se, esistendo, aveva valore, non dico ufficiale (come pretendono i critici), ma anche soltanto " ufficioso ", di necessità i papiri che recano la doppia data mensile dovrebber recare insieme una doppia data annuale. Non c'era nessun motivo di rispettare sì i mesi *τῶν Αἰγυπτίων* e no gli anni *τῶν Αἰγυπτίων*. Invece accade proprio questo: che in quei papiri la data mensile egiziana è posta senz'altro dopo la data macedonica; è quindi, al pari di questa, compresa entro l'unica cifra che indica l'anno del re. Una sola eccezione abbiamo per l'anno 29 di Filadelfo (2); ma è davvero eccezione che conferma, perchè come in questo caso il papiro si è preso cura di indicare le due cifre annuali (che per l'appunto coincidono), così l'avrebbe fatto tutte l'altre volte, se la seconda cifra, *τῶν Αἰγυπτίων*, avesse avuto un qualsiasi valore ufficiale. Si può pensare che l'anno macedonico e l'egiziano coincidessero sempre, e che perciò paresse superfluo riferire le due cifre. Allora si deve credere che l'anno *ὡς αἱ πρόσοδοι* appartenesse a un terzo metodo di calcolo degli anni, diverso per 1 unità dagli altri due; ma il supporre questi tre metodi condurrebbe, come ognun vede, a ipotesi anche men verisimili e non semplificherebbe in nulla il problema.

Sicchè, non troviamo traccia di anni " finanziarii " dove ce ne aspetteremmo larga e compiuta menzione; non troviamo traccia di anni *τῶν Αἰγυπτίων*, dove è precisa menzione di mesi egiziani. Che dunque? Non meno singolare si presenta la quistione guardata da un altro aspetto.

Dove ricorrono quelle otto doppie date annuali? Lasciamo le due *τῶν Αἰγυπτίων* e le due greco-demotiche che si addicono bene a documenti tolemaici di qualsiasi natura. Ma le quattro

---

(1) Cfr. *P. Lille* I 1. Nel testo citato dal Plaumann " Klio " XIII (1913) 308 la doppia data è resa inutile dall'essere incompleta.

(2) Vedi sotto a p. 352 n. 1 e *P. Hibeh* p. 359.

altre *ὡς αἱ πρόσοδοι* vorremmo leggere in testi finanziarii, non altrove. Illusione anche questa. Nessuno dei papiri dove appaiono è prettamente finanziario. Qualcuno può avere con la finanza attinenze più o men strette: contratti, ricevute. Gli altri sono petizioni al re, simili a quel gran numero di petizioni che possediamo e dove di *πρόσοδοι* non è parola. Uno infine è la denunzia per il furto d'un mantello; ossia prettamente giudiziario. Bisogna supporre che " finanziario „ significhi " anno amministrativo „? Allora quasi nessuno dei nostri papiri è datato secondo l'anno " regio „, perchè amministrativi, in un senso o nell'altro, son quasi tutti; sicchè l'anno " regio „ diventa un anno presso che mai adoperato, che sorprende di veder rammentato quelle poche quattro volte, all'improvviso e — si badi — per primo. Onde la supposizione si regge male.

Così, mentre nè l'*ἔτος ὡς αἱ πρόσοδοι* nè l'*ἔτος τῶν Αἰγυπτίων* appaiono dove dovrebbero, il primo d'essi rinveniamo proprio là dove nessuno lo pretenderebbe. Constatazione gravissima; la quale rende inaccettabile che i due metodi di computo degli anni fossero entrambi ufficiali.

I fatti che lumeggiammo esigono dunque perentoriamente che uno dei due metodi fosse non ufficiale (egizio) — e perciò sol poche volte usato, quasi di furto, e tosto chiarito o corretto con la cifra del computo ufficiale (tolemaico). Così ci spieghiamo perchè rarissimo il contrasto appaia ne' documenti pervenutici; e così ci rendiamo conto delle frasi diverse con le quali la distinzione fra le due cifre è fatta. *Τῶν Αἰγυπτίων* è la frase con cui il regime tolemaico designa il calendario egizio in contrapposto al suo; ed è quindi anche la frase con cui contrappone al computo governativo degli anni il computo non ufficiale. Gl'indigeni invece, non appena adoperato il lor proprio computo, lo rettificano col computo ufficiale che denominano delle *πρόσοδοι*, perchè come tassatore il governo si rivela ad essi fin da principio e sempre in primo luogo. Al che offre riprova il fatto che nei due casi in cui il divario di 1 unità appare fra il testo demotico e il testo greco, la cifra demotica (non ufficiale) è inferiore di 1 unità alla greca (tolemaica), precisamente come nel divario espresso con la frase *ὡς αἱ πρόσοδοι*.

Ma, posto che l'anno " finanziario „ e il " regio „ fanno una sola cosa, ossia l'anno ufficiale; e

che l'anno *τῶν Αἰγυπτίων* è l'anno non-ufficiale, resta da determinare la natura e la durata dell'uno e dell'altro.

Che *τῶν Αἰγυπτίων* sia l'anno del calendario egizio, viene sùbito in mente a ciascuno. E una prima conferma si trova nell'uso costante che, in tutti i casi di doppia data annuale, vien fatto del mese egizio, non mai del macedonico. Ma in qual punto del calendario egizio cominciava un tal anno? I decreti di Canopo e di Rosetta dànno una risposta quasi sicura. Entrambi riconoscono esplicitamente che il 1° Thoth è il principio dell'anno; ed entrambi lo riconoscono quando tal principio, non coincidendo già col sorgere di Sirio, e quindi non avendo un significato astronomico, non poteva avere altro valore che civile. Al che non è difficile trovare conferme. Prima de' Tolemei appar sporadicamente (1), ma fu forse costante, l'uso di calcolare con anni egiziani interi le durate dei regni. Sotto Filometore, poi, cotesto uso ha preso la prevalenza anche sull'uso macedonico: difatti, mentre allora il governo datava tuttavia coi mesi macedonici, l'anno però ufficialmente cominciava col 1° Thoth, e terminava con l'ultimo dei cinque giorni epagomeni (2). Sicchè tutto induce a credere che l'antica tradizione anteriore ai Tolemei e prevalente di nuovo sotto il sesto Tolemeo, non si sia mai obliterata, ma abbia invece costituito per l'appunto quell'anno non-ufficiale di cui constatammo la furtiva esistenza, sotto i primi Tolemei. Da ultimo, la cronologia dei sacerdoti egiziani, studiata dallo Strack (3), si basa sopra una cronologia dei re che è certo a sua volta fondata su anni egizii identici a quelli del Canone, giacchè con il Canone si accorda in tutto, e non si accorda con diverso computo. Non v'ha più dunque ragione di dubbio che l'anno non-ufficiale (*τῶν Αἰγυπτίων*) è l'anno che comincia col 1° Thoth e termina col 5° epagomeno.

Più aspro è sincerarsi dell'anno ufficiale.

Possiamo cominciare col definirlo negativamente. Esso difatti *non* è, senza dubbio, identico all'anno egiziano: ciò risulta

---

(1) Cfr. E. Meyer *Geschichte des Altertums*³ I 2, § 160.

(2) Cfr. *P. Par.* 55 e 62; al quale ultimo reca una infelice correzione il Grenfell *Revenue Laws* App. I p. 182. Cfr. anche *P. Lond.* I 18 e 35, V. sotto p. 12 n. 3.

(3) *Die Dynastie der Ptolemäer* p. 160 sgg.

come ovvia conseguenza di quanto abbiamo or ora assodato circa l'anno non-ufficiale; ed è inoltre comprovato dai papiri. Lo Smyly (*a. c.*) dimostrò in maniera irrefutabile che il così detto " anno finanziario „ non poteva cominciare col 1° Thoth; e le sue conclusioni valgono naturalmente in ugual misura per l'" anno regio „, dappoichè mostrammo che i due anni sono una medesima cosa. Ma nè pure l'anno ufficiale è l'anno macedonico iniziantesi col 1° Dios: ciò appare in maniera perentoria dai papiri. Un testo del regno di Filopatore (*P. Lille* I 4) passa dall'Hyperberetaios all'Apellaios senza mutare il numero dell'anno, 5; ossia non tiene nessun conto del 1° Dios. Altri due, del medesimo regno, datati col 3 Dios, accennano (*P. Lille* II 26; 39) a mesi anteriori, senza perciò avvertire che l'anno sia non più il 4 ma il 3. E poichè questo accade dove il calendario macedonico serve di base, la conseguenza non può essere dubbia.

Or se l'anno ufficiale non è quello del calendario egizio e nè meno quello del calendario macedonico, non può essere che quello compreso fra l'accessione al trono e i successivi anniversarii. Per lo meno, parrebbe artificioso ricercare ipotesi diverse, prima di aver tentato di assodare questa. A tale scopo è in Appendice un prospetto, costruito sulla maggior copia di materiali che ci fu dato raccogliere. Avvertiamo soltanto che le equazioni in esso stabilite fra date egiziane e date macedoniche son quelle che risultano dalla tavola di Grenfell e Hunt in *P. Hibeh* pag. 336-7 e hanno quindi valore approssimativo (1).

Dal prospetto risultano chiare alcune conseguenze di non piccolo rilievo. Risulta che si può determinare, per Filadelfo, Evergete e Filopatore, con l'approssimazione ora di un mese, ora di venti giorni, ora con precisione assoluta, il giorno in cui salirono al trono. Risulta anche che gli anniversarii di quel

(1) Tranne i casi discussi nelle apposite note. In mancanza di precisi riferimenti, il mese macedonico appare in corsivo. Per l'anno, in cui l'equazione fra i due calendarii è ignota, ci siamo attenuti all'equazione dell'anno più vicino. Ove fu possibile precisare il giorno, il computo fu fatto nell'ipotesi che i due calendarii seguissero corso normale, senza cioè nè soppressioni nè intercalazioni. E ciò perchè il ciclo delle intercalazioni non ci par ricostruito in maniera probabile da E. Cavaignac " B. C. H. „ XXXVIII (1914) 1 sgg. — V. Appendice, Tab. I.

giorno cominciavano gli anni ufficiali per tutta la durata del regno. Risulta infine che, com'era *a priori* prevedibile, tanto il giorno della salita al trono quanto gli anniversarii venivan calcolati sopra il calendario macedonico, non già sopra l'egizio. Difatti, nel caso di Evergete l'anno comincerebbe, tenendo a base il calendario egizio, nel periodo 4 Mechir-Pharmouthi: in quel periodo non si trova affatto, per gli anni anteriori al 16° di regno, il 25 Dios, data dell'accessione al trono; per contro, tenendo a base il calendario macedonico, l'anno comincerebbe nel periodo Hyperberetaios-Audnaios, che ben comprende il 25 Dios; il decreto poi di Canopo (*OGIS.* I 56) in cui questa ultima data si trova, dà la definitiva conferma (1). Concluderemo, adunque, che i primi Tolemei dettero all'Egitto un anno civile che, sulla base del loro proprio calendario macedonico, era calcolato a partire dal giorno della salita al trono, e corrispondeva quindi all'antichissimo uso de' dinasti egiziani (2).

Questo risultato è di importanza non piccola: ma resterebbe almeno parzialmente inutile, se non riuscissimo a scoprire il rapporto fra l'anno ufficiale e l'anno non-ufficiale. Anche qui i pochi testi dànno risposta chiara e concorde.

Premettiamo che, data la nostra tesi, si prospettano due possibilità. Le quali in breve sono: nel computo non-ufficiale può segnare il principio al I anno di regno o il 1° Thoth che segue immediatamente la salita al trono; o il 1° Thoth che immediatamente precede. Nel primo caso, i giorni compresi fra l'anniversario regio e il 1° Thoth successivo saranno contraddistinti, nel computo non-ufficiale, da una cifra annuale minore di 1 unità: i giorni invece compresi fra il 1° Thoth e l'anniversario regio saranno contraddistinti da una stessa cifra annuale così nell'un computo come nell'altro. Nel caso contrario, i giorni compresi fra la salita e il 1° Thot avran la stessa cifra annuale in tutt'e due i computi; i giorni invece compresi fra il 1° Thoth e l'anniversario regio avran cifra superiore di 1 unità nel computo non-ufficiale. Che mostrano i testi? Già lo sappiamo: in essi la

(1) Con ciò cade la teoria del Lesquier *o. c.*, la quale ha inoltre il mal fermo fondamento che l'egregio Autore ha riconosciuto (*P. Lille* II p. 44).

(2) E. Meyer *Gesch. d. Altertums*³ I 2, § 160.

cifra non-ufficiale è o pari (due casi) o minore di 1 (sei casi) alla cifra ufficiale. Quindi la prima possibilità è la vera, non la seconda. Quindi, gli Egiziani (nel computo non-ufficiale) davano a ciascun 1° Thoth (e a tutto l'anno che con esso s'iniziava) la stessa cifra dell'anniversario regio subito precedente.

Ciò è chiaro di per sè. Ciascun 1° Thoth apparteneva a un certo anno ufficiale e ne portava la cifra: l'indipendenza del calcolo non-ufficiale consisteva semplicemente nel dare quella cifra, dopo che al 1° Thoth, a tutto l'anno egiziano, sino alla fine, anche al di là del nuovo anniversario regio. — Ma, uscendo dal ragionamento, dobbiamo adesso sperimentar nei particolari queste affermazioni. Perchè l'occhio abbia percezione immediata della cosa, riassumiamo in Appendice i dati dei testi (1).

D'onde risulta: i tre casi in cui si ha coincidenza fra le cifre dei due computi, il mese si trova compreso fra il 1° Thoth e l'anniversario regio; i tre casi in cui si ha la differenza di 1 unità in meno nel computo non-ufficiale, il mese è compreso fra l'anniversario regio e il 1° Thoth. Così appunto voleva il ragionamento a cui più brillante conferma non potrebbe desiderarsi.

Procediamo di un passo, e coglieremo il frutto della nostra fatica. Abbiam veduto che i primi Tolemei si valsero ufficialmente di un anno regio nel vero senso della parola, ossia computato a partire dalla salita al trono. Abbiam veduto che, durando tale uso, ebbe vigore un anno non-ufficiale, il quale era lo stesso anno regio, principiante col 1° Thoth. Ora, il Canone usa per i primi Tolemei, come per gli altri, l'anno egizio principiante col 1° Thoth. Riterremo che quest'uso sia determinato unicamente dall'uso degli ultimi Tolemei? Non riterremo invece che, per uniformare la datazione dei primi Tolemei a quella degli ultimi, l'autor del Canone approfittasse dell'anno non-ufficiale? Se quest'ultimo in ispecie aveva, com'è verosimile

(1) Dobbiamo, naturalmente, omettere i due casi (*PP.* III p. 168-9; *P. Tebt.* inedito = *P. Hibeh* p. 359), in cui i testi dànno bensì la doppia cifra annuale, ma non il mese. — V. Appendice, Tab. II.

in sè, e come risulta dalla cronologia dei sacerdoti (1), carattere religioso sovra tutto, diventa anche più probabile che il Canone, emanazione della scienza religioso-astronomica d'Egitto, si rifacesse all'antico computo che i primi Tolemei non vollero ufficialmente riconoscere, che s'infiltrò tuttavia qua e là (2) ne'

(1) Cfr. sopra p. 349 e n. 3.

(2) Il computo non-ufficiale si è forse insinuato anche là dove non è constatabile a prima vista. Vogliamo additare alcuni casi sospetti. — **P. Lille I 1**: Filadelfo, anno 27 Phaophi: comprende nel medesimo anno (almeno non v'è accenno al mutarsi della cifra annuale) così l'inverno (*recto* l. 14) come la messe (*verso* l. 9). Ora (v. p. 363), l'anno ufficiale cominciava circa in Peritios = Tybi; sicchè era impossibile che Phaophi e Pharmouthi (messe) si seguissero in quest'ordine nel medesimo anno ufficiale 27. Si seguono invece in quest'ordine nell'anno non-ufficiale 27. Quindi è probabile che quest'ultimo usurpi furtivamente il posto di quel primo. — **P. Hibeh 72**: Evergete, anno 6, Phamenoth: contiene menzione del 9 Athyr e del Choiak come anteriori al Phamenoth, senza avvertire che l'anno muti. Se ciò significa che l'anno è il medesimo, si tratta di computo non-ufficiale. Difatti l'anno ufficiale cominciava (v. p. 17) col 25 Dios = ± Tybi; quindi in esso Phamenoth precede, non segue, il 9 Athyr. Lo segue invece nell'anno non-ufficiale. — **P. Gizeh** = "Archiv„ II 80: Evergete, anno 20: par che faccia cominciare l'anno fra la messe (Pharmouthi circa) e il 9 Tybi. Esso, ufficialmente, cominciava (cfr. p. 363) il 25 Dios = ± 1 Phamenoth. Quindi o la messe fu nel Mechir, ed è possibile; o v'è equivoco con l'anno non-ufficiale che, iniziandosi col 1° Thoth, cominciava davvero tra Pharmouthi e Tybi. — **P. Eleph. 28**: Evergete, anno 25, Thoth 21: richiesta di *ὀψώνιον ἀπὸ Ἀρτεμισίου* (= Mesore/Thoth) *ἕως Πανήμου* (= Phaophi/Athyr). Nella richiesta son usati i mesi macedonici; il mese egiziano nella data. Ciò rende non improbabile che anche la cifra dell'anno sia non-ufficiale nella data, ufficiale nel contesto. Se così è, avremmo conferma ai nostri risultati: perchè il 21 Thoth apparterrebbe, nel computo non-ufficiale, al medesimo anno 25 cui appartengono, nel computo ufficiale, i posteriori mesi di Daisios e Panemos; ossia il 1° Thoth sarebbe contrassegnato dalla medesima cifra annuale del 25 Dios (anniversario regio) sùbito precedente. — **PP. III p. 330**: per l'a. cfr. p. 365: vi è la serie Choiak-Mesore (*μῆνες θ'*) che non può appartenere nè all'anno ufficiale 25 di Evergete, il quale cominciava col 25 Dios = ± Mechir; nè all'1 di Filopatore, che cominciava col Pachon/Payni. Par chiaro che appartiene invece all'anno non-ufficiale decorrente fra un 1° Thoth e l'altro.

P. Hibeh 102: Filadelfo, a. 37. 38: un tale promette di pagare nel Daisios il *ἰατρικόν* dell'a. 38, e data *Lλζ Παῦνι ς*. Nell'a. ufficiale 37 il 6 Payni era = ± 15 Daisios; nell'a. ufficiale 38, il Daisios era = ± Payni. Quindi, se supponiamo che le due cifre annuali si riferiscano entrambe al

documenti degli anni loro, che poi finì per prevalere del tutto (1), adattato forse in qualche altra maniera. Si aggiunga per ultimo

computo ufficiale, dobbiamo intendere che il ἰατρικόν venisse imposto un anno prima. Ma, notando l'uso del mese macedonico nel testo e dell'egiziano nella data, è lecito supporre che l'anno 37 sia non-ufficiale e quindi = anno 38. In tal caso la promessa è di pagare *entro* il mese, pena una multa: il che è molto più verisimile. — **P. Hibeh 33**: Evergete (?), anno 2 (Phamenoth): ἀπογραφὴ λείας εἰς τὸ τρίτ[ον ἔ]τος. L'anno 3 (ufficiale) cominciava (v. p. 363) il 25 Dios = ± Athyr/Choiak. Il Phamenoth dell'a. (ufficiale) 2 è quindi lontano circa 9 mesi dal principio dell'a. 3. La distanza, dato il contesto del papiro, par troppa. Se anno 2 (non-ufficiale) è = anno 3 (ufficiale), le cose procedon meglio: l'ἀπογραφή cade nei primi mesi dell'a. 3, che è ancora a. 2, giusta la nostra teoria, essendo il Phamenoth compreso fra l'anniversario regio (Athyr-Choiak) e il 1° Thoth.

Un caso singolarissimo è fatto conoscere da E. Cavaignac " B. C. H. „ XXXVIII (1914) 19. In un papiro inedito la data *anno 1* (Filopatore) *28 Gorpiaios = 12 Tybi* risulterebbe posteriore alla data *anno 2* (Filopatore) *4 Tybi*. Si pensa sùbito a un doppio sistema di computo. — Se non che la spiegazione del Cavaignac non regge: egli che, con lo Smyly, fa principiar l'a. finanziario col Mechir, suppone che, oltre a questo a. e oltre all'a. egizio cominciante col Thoth, vigesse un terzo a. (regio) che comincerebbe col Dios: ipotesi troppo complicata; anche se non fosse certo (sopra p. 350) che l'a. ufficiale dei Macedoni in Egitto non s'iniziava col Dios. — Invece la teoria dello Smyly *o. c.* è dal papiro in questione urtata nel suo punto più debole (p. 116), perchè se ne accentua il dissidio che male lo Smyly riesce a superare. Inoltre, pur prescindendo dalle obiezioni svolte sopra (p. 346), è poco chiaro, posta quella teoria, che l'autore del contesto datasse, chi sa perchè, secondo un computo (regio?), laddove il pubblico ufficiale postillò, chi sa perchè, secondo un computo diverso (finanziario?). — Con la nostra teoria invece il papiro, di cui la lettura è definita certa, può chiarirsi facilmente come un errore. Chi scrisse la data *anno 2, 4 Tybi* sapeva che il computo egizio degli anni regi era spesso inferiore di 1 unità al computo ufficiale; sicchè, disorientato anche dal trovarsi nel principio di un nuovo regno, e quindi di una diversa corrispondenza fra i due computi, accrebbe di 1 unità la cifra non-ufficiale; ma sbagliò perchè invece in quel mese essa coincideva con la cifra ufficiale; indi la corretta postilla aggiunta dall'impiegato. I casi che abbiamo esaminati, in cui il computo non-ufficiale s'insinua subdolo e innominato nel testo dei papiri ufficiali; il caso del *P. Lille* II 35 (sotto p. 366) spiegano la psicologia dell'errore da noi supposto. In ogni modo, molto potrà forse chiarire il papiro non appena edito integralmente.

(1) Sul modo come il calendario egizio prevalse può gettar qualche luce lo studio dei documenti di Epifane. Ci riserviamo di farlo in apposito articolo.

che l'apparire delle doppie cifre annuali costantemente sotto i tre Tolemei, mostra come non da sporadici computi derivassero ma da un regolare, anche se inufficiale, sistema di computo; tanto regolare da essere designato τῶν Αἰγυπτίων per parte del governo, e da non aver bisogno di specificazione per parte degli indigeni.

Ma se il Canone usa proprio il computo non-ufficiale, il Canone è, per i primi Tolemei, Filopatore incluso, posdatato, non *predatato*, come fino ad oggi fu opinione di tutti: è posdatato perchè il computo non-ufficiale dava, come vedemmo, a ciascun 1° Thoth la stessa cifra dell'anniversario regio sùbito precedente.

Tal conclusione notevolissima conduce a correggere la cronologia degli avvenimenti connessi con il principio dei regni de' Tolemei sino a Filopatore. Accingendoci a questa revisione cercheremo a un tempo conferma ai risultati fin qui raggiunti.

III.

Della posdatazione del Canone, che accertammo per i primi Tolemei, le conseguenze cronologiche son le seguenti, quando si combinino con i dati raccolti in Appendice (tab. I):

1. Alessandro Magno fu in Egitto prima del 14 Novembre 332. — A ciò invero conduce di per sè l'esame dei testi. Alessandro prese Tiro sotto l'arconte ateniese Niketes, nel mese di Ecatombeone (Arriano II 24, 6) ossia, come concordi traducono i moderni (1), circa nel Luglio 332. Sùbito appresso assediò Gaza e l'espugnava (Diodoro XVII 48,7; Giuseppe *Arch.* XI 325) dopo due mesi; dunque, al più tardi, nei primi di Ottobre. In sette giorni (Arriano III 1, 1) pervenne a Pelusio, donde mosse verso Eliopoli e Menfi. Per questi avvenimenti

---

(1) Niese *Gesch. d. griech. u. mak. Staaten* I 81 e n. 2; Beloch *Gr. Gesch.* II 643. Il Droysen *Hist. de l'Hellén.* (trad. fr.) I 292 data col 20 Agosto; ma infirma egli stesso la sua cronologia, cui fa implicitamente giuste obiezioni il Niese. Del resto, anche la data, molto bassa, del 20 Agosto non guasta i nostri risultati.

è quindi già molto scendere ai primi di Novembre. Di un singolare indugio non v'è traccia nelle fonti, e si troverebbero difficilmente i motivi. Sicchè il Canone segnando col 1° Thoth 332 il principio del regno di Alessandro in Egitto posdata, come vuole la nostra teoria.

Si osservi ancora. Arriano, quando pone nell'Ecatombeone la conquista di Tiro, traduce in mese attico una data che forse era macedonica; e il Niese (l. c.) pensa che la traduzione avvenisse secondo la consuetudine per cui Ecatombeone = Loos. Ciò è assai probabile. In tal caso i due mesi dell'assedio di Gaza sarebbero, circa, il Gorpiaios e l'Hyperberetaios; e Alessandro sarebbe giunto in Menfi quando il Dios era cominciato. Quindi, predatando nel calendario macedonico la sua conquista dell'Egitto, si doveva datarla dal 1° Dios (± Ottobre) 332 (1). E per conseguenza il Canone, che la datò dal 1° Thoth (14 Novembre) 332, fece corrispondere l'anno egiziano all'anno macedonico in cui cominciava. Ossia, ci risulta che si condusse, rispetto agli anni macedonici di Alessandro Magno, con la stessa norma che tenne rispetto agli anni regii dei primi Tolemei.

2. In guisa analoga il Canone dovrebbe comportarsi anche per la morte di Alessandro. Così è. Essa avvenne nel giugno 323; onde, predatando secondo il calendario macedonico, i cronografi segnarono col 1° Dios 324 il principio del regno a' vari successori: il che appare dalla lista cronologica dei re macedoni che il Beloch (III 2, 80) ha ricondotto alla sua forma originaria. Orbene: nel Canone il 1° Dios 324, ossia l'anno macedonico compreso fra l'Ottobre 324 e l'Ottobre 323 (cfr. Beloch III 2, 22) è divenuto il 1° Thoth 324, ossia l'anno egizio compreso fra il 12 Novembre 324 e l'11 Novembre 323. In altri termini, anche per la morte di Alessandro Magno il Canone posdata rispetto al calendario macedonico (ripetiamo), con la stessa regola onde posdata poi rispetto agli anni regii de' primi Tolemei.

(1) Abbiamo sopra (p. 350) mostrato che i Tolemei non principiarono gli anni dei loro regni col 1° Dios. Ma quest'uso non c'è ragione di negare per Alessandro Magno. Anzi, cfr. nel testo il § 2.

3. La morte di Arrideo avvenne prima del Novembre 317. — Ciò, non solo non ha nulla di assurdo, ma corrisponde a quanto già il Beloch (III 2, 63), pur ritenendo predatato il Canone, aveva dovuto concludere, per la forza delle testimonianze. Egli pose la morte di Arrideo nel Settembre-Ottobre 317: il che si accorda del resto con la cronologia dei re di Macedonia (III 2, 80).

4. Tolemeo Sotere assunse titolo regio prima del Novembre 305. — La data, sebbene con imbarazzo dei critici che credevano alla predatazione del Canone (1), risulta irrefutabile anche dai testi. I quali son tutti concordi (Diodoro XX 53, 3; Plutarco *Demetrio* 18; Appiano *Siriaco* 54; Giustino XV 2, 10) nel riferire che Tolemeo si disse re dopo la sconfitta toccata contro Antigono a Salamina di Cipro (autunno 306), quando re ebbero a proclamarsi Antigono stesso col figlio Demetrio, Cassandro, Lisimaco, e Seleuco. Lo Strack (*o. c.* 191 n. 7) per tener fede, non già al Canone, ma alla propria interpretazione di esso, respinse in blocco queste notizie e pose l'assunzione del titolo regio sol dopo il Nov. 305. Ciò è assurdo perchè non esiste alcun motivo d'un tanto ritardo. Ottimamente invece il Beloch (III 1, 161) pensò che Tolemeo divenisse re non appena respinta dall'Egitto quell'invasione di Antigono che tenne tosto dietro alla battaglia di Salamina. Con questa ipotesi e si spiega che alla battaglia di Salamina le fonti collegassero la proclamata regalità di Tolemeo, e insieme si colloca nel punto politicamente più opportuno la palese affermazione del " regno " di Egitto. Ma l'invasione di Antigono accadde, com'è certo (Beloch o. c. III 2, 197; Niese I 322, n. 3), nell'inverno 306/5; sicchè il titolo regio fu assunto al più tardi nella primavera 305. Se il Canone predatasse porrebbe quindi nel 1° Thoth 306 il principio del " regno " di Sotere; lo pone invece nel 1° Thoth 305: la prova è lampante che il Canone posdata.

I papiri demotici che lo Strack l. c. adduce per la sua tesi e che recano la data dell'anno 13 di Alessandro figlio, mese

(1) Quest'imbarazzo si riflette nel Droysen *H. d. H.* II 435 n. 1 e nel Bouché-Leclercq *Hist. des Lagides* I 71.

Athyr, non significano nulla, adesso, nè in favore nè contro la posdatazione. Da essi, per noi, risulta appena che l'anno ufficiale di Alessandro figlio cominciava fra il 1° Thoth e l'Athyr e che Tolemeo ebbe titolo regio solo dopo l'Athyr (= Gennaio) 305; proprio come noi abbiamo asserito or ora.

Porfirio (presso EUSEBIO I 161) conferma tutta questa cronologia. Dà a Tolemeo Sotere 17 anni di reggenza, 21 di regno. Movendo dal 323/2, che è l'anno della morte di Alessandro Magno, ed è il più basso termine possibile, si giunge con i 17 anni di reggenza al 307/6 e si pone il titolo regio nel 306/5.

Il *Marmo Pario* (JACOBY *das Marmor Parium* p. 24), che porta invece la data del 305/4, ci dà semplicemente il I anno di " regno " secondo il metodo della posdatazione.

Concludendo, non è possibile dubitare che il Canone posdata, come per Alessandro Magno e per i primi due successori, così anche per Tolemeo Sotere.

5. Per Tolemeo Filadelfo manca ogni dato quanto al principio del regno, che dovrebbe cadere, secondo la nostra teoria, prima del Nov. 285. Solo la notizia già citata di Porfirio *può* condurre al 286/5 (1).

6. Tolemeo III Evergete salì al trono il 25 Dios (Gennaio/Febbraio) 247. — E non, come ritenne il Beloch, il 246. Questa differenza di un anno non è trascurabile; anzi, essa giunge in buon punto a recare spazio nella cronologia di avvenimenti che gli studiosi hanno estremamente compressi. Com'è noto, Evergete dovette, non appena celebrate le sue nozze (Callimaco presso Catullo 66, 11 sgg.) e quindi poco dopo esser salito al trono, muovere in spedizione contro Seleuco per vendicare la morte della sorella Berenice: è quello che si chiama il *λαοδίκειος πόλεμος* o " terza guerra siriaca ", con cui si connette la " guerra fraterna " tra Antioco Ierace e Seleuco Cal-

(1) Il NIESE *o. c.* I 389 sceglie la fine del 285, e avremmo posdatazione. Il BELOCH III 1, 227 si esprime con prudenza. Il DROYSEN *o. c.* II 602 fa cominciare con l'anno 285 il regno di Filadelfo. Così il BOUCHÉ-LECLERCQ *H. d. Lag.* I 94. Cfr. " Rev. Philol. " XXXII (1908) 131.

linico. Come pure è noto, di tali due guerre le date e il nesso sono assai mal sicuri, e v'è dibattito fra i critici. Due tesi si combattono, di cui l'una possiamo dire rappresentata dal Beloch (1) e l'altra dal De Sanctis (2). Fra queste due tesi, non qui dobbiamo scegliere. Rileviamo invece come e l'una e l'altra sieno favorite dalla nostra nuova data.

Tanto il Beloch quanto il De Sanctis pongono nel 244 la riconquista per parte di Seleuco delle province a mezzodì del Tauro. Tutt'e due non nascondono che però fra il Febbraio 246 e il 244 è poco lo spazio per la marcia vittoriosa dell'Evergete (la cui rapidità, lodata da Catullo 66, 35, non si deve esagerare), il suo ritorno in Egitto, il naufragio della flotta seleucica, il riconquisto a mezzodì del Tauro. E lo spazio si fa anche più stretto pel De Sanctis che deve trovarne un po' anche alla insurrezione di Antioco Ierace. In ispecie poi comprime sin quasi all'impossibilità i fatti la ipotesi del De Sanctis, per ogni altro rispetto convincentissima (3), che la spedizione terrestre, condotta dall'Evergete a vendetta di Berenice morta (GIUSTINO XXVII 1), fosse preceduta da una serie di operazioni navali condotte dagli ammiragli egiziani mentre Berenice era ancor viva (papiro di Gurob).

C'è di peggio. Alla guerra laodicea vien riferito un papiro (4) datato con l'anno 2, Peritios 24. Il riferimento è sodisfacente. Ma se lo si accetta, come fa il Beloch, bisogna dedurne che la guerra laodicea durava nel II anno del regno di Evergete. Difatti il papiro parla di prigionieri *ὑπολελειμμένοι*,

---

(1) *Gr. G.* III 2, 450 sgg. Tralasciamo di ricordare la bibliografia anteriore al Beloch. Ricordo speciale merita il CARDINALI " Riv. di Filologia classica „ XXXI (1903) 431 sgg. e " Riv. di Storia antica „ X (1906) 501.

(2) " Atti di Torino „ XLVII (1911-12) 801-8, 967-68. Qui è anche la bibliografia posteriore al Beloch. Cfr. in modo speciale G. CORRADI " Atti di Torino „ XL (1904-5) 805 sgg. Va solo aggiunto che la tesi del De Sanctis si ebbe, quantunque non senza riserve, le lodi del BOUCHÉ-LECLERCQ *Hist. des Séleucides* II 558.

(3) Non mi accordo invece col WILAMOWITZ " Hermes „ XLIX (1914) 447.

(4) *PP.* II 29 *e*. Eccone il testo: .....] *των αιχμαλωτων τους υπολελειμμ[ενους* || .....] *διατηρει επιμελως και επιμελου αυτ[ων* || .....]*ν και αυτοι παραγινησθε συναποκατα*[..... || *μη τι*]*ς αυτων διαδραι* || *ερρωσο Lβ περιτιου κδ.*

ossia, evidentemente, lasciati addietro da un esercito in avanzata. L'ordine poi contenuto in παραγίνεσθε ci aiuta a integrare la parziale lacuna del verbo successivo; συναποκαθίστημι invero ricorre con παραγίγνομαι nei documenti di malleveria con i quali qualcuno si obbliga a " presentarsi " in dato luogo e tempo per " riconsegnare " la cosa o la persona mallevata (1). Par dunque da concludere che il papiro in questione consegnava, sotto responsabilità di chi lo riceveva, un certo numero di prigionieri, con l'obbligo di averne cura, di custodirli e di renderli più tardi, mentre l'esercito proseguiva la marcia. Tutto ciò ci riconduce in piena spedizione, nel 3° mese del II anno ufficiale di regno, che è l'Aprile/Maggio 245 per la teoria della predatazione. Ma, prolungata così nel II l'impresa che si suol contenere nel I anno di Evergete, diventa anche più arduo continuar a porre nel 244 la rivincita di Seleuco.

Ricordiamo invece che l'anno ufficiale II di Evergete è per noi il 246. Si guadagna in tal modo un intero anno, sicchè ai fatti riesce sufficiente lo spazio in quest'ordine: nel 247, dopo l'assunzione al trono (Gennaio/Febbraio) e dopo le nozze, Evergete comincia la guerra, che dura sin verso la metà del seguente anno 246. Di qui al 244 resta agio per il riprendersi di Seleuco, se il naufragio occorsogli datiamo p. e. sul finire del 246, e le vicende terrestri supponiamo distribuite fra il 245 e il 244.

Ancora una volta la datazione risultante dalla nostra teoria, nonchè impacciare, risolve difficoltà non lievi.

7. La morte di Tolemeo III Evergete è posteriore al Phamenoth (Aprile) 222 e anteriore al Payni (Luglio) 222 (cfr. tabella a pag. 363).

Tal cronologia concorda con un passo di Polibio (V 42, 4) di non dubbia interpretazione. Nel consesso tenuto da Antioco il Grande l'Ottobre 222 (2) si accusa di ῥαθυμία il re d'Egitto allora regnante: ῥαθυμία è parola con cui Polibio designa

(1) Cfr. *P. Hibeh* 62. 69. 93; *P. Par.* 7, 10; *P. Oxyrh.* 259. 785. E Mitteis-Wilcken *Grundz. u. Chrest.* III 1, 266.

(2) La data par da ritenersi certa, cfr. Beloch *G. G.* III 2, 145 sgg. V. sotto p. 361 n. 3.

Filopatore sempre, e quasi lo contraddistingue (1). Di qui pertanto si deduce che nell'autunno 222 Evergete era già morto; e morto da qualche mese: proprio come risulta dal Canone interpretato secondo la nostra teoria.

Altro vantaggio. Evergete sopravvisse almeno di qualche mese alla battaglia di Sellasia; la quale a sua volta fu di pochi giorni anteriore alle Nemee (Luglio/Agosto). Quindi essa dovette accadere nel 223, a meno di supporre, contro verisimiglianza, che le Nemee fossero state alquanto anticipate. Ma la data del 223 si accorda con il ciclo normale delle Nemee, per cui queste feste cadono sempre (non si conosce eccezione) negli anni dispari a. C.

Per ben valutare l'importanza dei due vantaggi conseguiti, si rammenti che intorno alla cronologia di Sellasia dura un vivace dibattito. Il Niese (2) preferì datare la battaglia col 222, violando il ciclo delle Nemee; il Beloch (*G. G.* III 2, 169) si oppose recisamente, scelse il 221 e dovette, contro l'evidenza di Polibio, ritenere che la *ῥαθυμία* designasse non Filopatore ma Evergete. Entrambi quindi urtarono contro l'uno dei due scogli che per noi non esistono. I critici si son schierati dall'una parte o dall'altra. Recentemente il Niccolini (3) ha tentato un'ipotesi conciliativa; ma dovette per ciò restringere gli avvenimenti in troppo stretto tempo e supporre marce estremamente forzate di cui la critica anticipata è già nel Beloch *l. c.*; sicchè anche la ipotesi conciliativa riesce difficilissima da accettarsi (4).

Dovremmo concludere che anche per Tolemeo IV Filopatore la nostra teoria supera la prova. Se non che la datazione della battaglia di Sellasia si connette con tutta una serie di riferimenti cronologici che debbono contemporaneamente esser vagliati: ricerca che trova il suo luogo in uno studio, di pubblicazione

---

(1) Cfr. HOLLEAUX *La première expédition d'Antiochos-le-Grand en Koilé-Syrie* in " Mélanges Nicole „ p. 273 sgg.

(2) " Hist. Zeitschrift „ XLV (1881) 489; " Hermes „ XXXV (1900) 53.

(3) *La Confederazione achea* (Pisa 1914) p. 280. Analoga è la tesi di E. CAVAIGNAC " B. C. H. „ XXVIII (1914) 20.

(4) Del tutto infelice pare l'ipotesi di W. BETTINGEN *König Antigonos Doson* (Weida 1912, diss.) 49.

imminente, su *La guerra Cleomenica*. Circa questo punto pertanto invitiamo i lettori a sospendere il giudizio, pur confidando di convincerli presto ed efficacemente.

IV.

Non possiamo più esitare a riassumere in poche parole i risultati raggiunti.

Abbiamo conseguito la certezza che l'anno regio dei Tolemei *non era*, come fu per Alessandro Magno, il macedonico, che si inizia col 1° Dios; che esso *era* probabilmente un anno computato bensì sul calendario macedonico ma compreso fra la salita al trono e i successivi anniversarii. Dunque: una certezza negativa, e una probabilità positiva.

Altra probabilità, la quale raggiunge però un grado assai alto, è ormai per noi che (fino almeno ad Epifane) il Canone, servendosi dell'anno non-regio ma egiziano, posdata, non predata, come ritenevasi sin oggi: e posdata sia rispetto all'anno macedonico di Alessandro Magno, sia rispetto all'anno ufficiale dei Tolemei. Certezza è ad ogni modo che nell'interpretare il Canone non siamo più così strettamente legati a un metodo prefisso, da dovere, per ossequio ad esso, deformare la più ovvia cronologia di importanti avvenimenti.

Effetto delle conseguenze or ora riassunte è questa lista cronologica:

Ottobre (fine)	332:	Alessandro Magno in Egitto.
Settembre/Ottobre	317:	Filippo Arrideo muore.
Febbraio	305:	Tolemeo I Sotere re in Egitto.
Gennaio/Febbraio	247:	Tolemeo III Evergete sale al trono. Principio del Λαοδίκειος πόλεμος.
Estate	246:	Fine " " "
Giugno	222:	Morte di Tolemeo III Evergete, onde si deduce, per ora solo a guisa di proposta:
[Luglio/Agosto	223:	Battaglia di Sellasia].

Appendice. — TABELLA I. (Cfr. sopra, pag. 350).

Nome del re	Anno di regno	Periodo entro cui comincia l'anno ufficiale — Date egiziane	Periodo entro cui comincia l'anno ufficiale — Date macedoniche	(Risultato) L'anno ufficiale comincia:	Note
Tolemeo II Filadelfo	25	Mesore – Mechir	*Gorpiaios - Dystros*	fra il **24 Audnaios** e il **27 Peritios**	(1)
	26	2 Choiak – Phamenoth	*Audnaios - Xandicos*		(2)
	31	10 Thoth – Payni	*Hyperberetaios - Panemos*		(3)
	36-38	25 Tybi – 5 Mechir	24 Audnaios - 27 Peritios		(4)
Tolemeo III Evergete	1	—	25 Dios	il **25 Dios**	(5)
	6	11 Choiak – Pachon/Payni	*Hyperberetaios* – Artemisios		(6)
	13	1 Choiak – Pharmouthi	*Gorpiaios – Audnaios*		(7)
	18	Thoth – Payni	*Daisios - Dystros*		(8)
	22	4 Mechir – 24 Tybi	*29 Hyperberetaios – 30 Hyperberetaios*		(9)
	24	Athyr - Pharmouthi	*Loios - Audnaios*		(10)
	25	Tybi - Pharmouthi	Hyperberetaios – Audnaios		(11)
Tolemeo IV Filopatore	2	Phaophi - 1 Payni	Panemos - *9* Peritios	fra il **18 Audnaios** e il **9 Peritios**	(12)
	5	11 Payni - 29 Athyr	18 Audnaios – 27 Daisios		(13)

(1) Circa il principio del regno del Filadelfo non può disgraziatamente desumersi nulla dai **P. Eleph. 3-4** (cfr. il comento del Rubensohn), perchè ignoriamo del tutto la corrispondenza fra il mese egizio (Tybi) e il macedonico. Per l'anno 25, cfr. **P. Hibeh 85**: è datato con l'anno 24, mese di Mesore; concede una certa quantità di semi *εἰς τὸ κεL*. Ora la semina avveniva (secondo gli anni e i luoghi) fra il Phaophi e il Choiak e la raccolta fra il Phamenoth e il Pachon. È incerto se la frase *εἰς τὸ κεL* si riferisca alla prima o alla seconda. Conviene scegliere un termine medio: Tybi/Mechir. Cfr. anche **P. Hibeh 42**, dove Athyr succede a Phaophi nel medesimo anno 24.

(2) **P. Lille I 5**; datato, anno 26, 1° Choiak: ordina di distribuire le semenze *τοῦ ἐκ τοῦ κϛL καὶ τοῦ κεL*. Pare certo che alluda alle semenze della penultima e ultima raccolta. Questa essendo al più tardi nel Payni, l'anno non può cominciare fra Payni e 1° Choiak; ma al contrario fra il 1° Choiak e il Phamenoth/Pachon.

(3) **PP. II 4** (**9**): comprende nel medesimo anno (30) la serie Epiphi — 9 Thoth: cfr. **PP. III** p. 103.

(4) **PP. III** p. **264** sgg. (cfr. Smyly " Hermathena „ XIV (1907) p. 106 sgg.). È un elenco di tasse riscosse, divise per anni (36. 37. 38) e per mesi. L'ultima data dell'anno 36 è il 25 Tybi (= 14 Audnaios). La prima data dell'anno 38 è il 5 Mechir. Manca per quest'ultimo anno la corrispondenza fra i due calendarii; noi abbiamo fatto il computo movendo dalla corrispondenza dell'anno 36 (5 Mechir = 5 Peritios) e supponendo che fra l'anno 36 e il 38 il calendario macedonico non abbia subìto intercalazioni nè soppressioni, o ne abbia subìte di minime. L'ipotesi è consona all'andamento generale dei due calendarii in quegli anni. Alla medesima conclusione conducono i testi, tuttora inediti, di cui dà un cenno E. Cavaignac in " B. C. H. „ XXXVIII (1914) 16: da essi appare che l'anno 36 di Filadelfo doveva cominciare fra il Choiak e, al più tardi, il Pachon.

Col risultato complessivo da noi raggiunto circa il principio dell'anno ufficiale del Filadelfo si accorda **P. Hibeh 116**, donde l'anno par cominciare col Mechir che, se si accetta la data annuale attribuita al papiro dagli editori, corrispondeva al Peritios. Malsicuro e, ad ogni modo, vago è **PP. III** p. **123-4**.

(5) **OGIS. I 56** (p. **97**). Con la maggior parte de' critici diamo alla frase *παρέλαβεν τὴν βασιλείαν παρὰ τοῦ πατρός* il significato dell'accessione al trono, non della correggenza.

(6) **PP. II 12** (**1**) contiene la menzione di Artemisio e poi del 10 Choiak. Artemisio = ± Pachon/Payni. Quindi l'inizio dell'anno ufficiale dovè cadere tra l'11 Choiak e il Pachon/Payni. Ignoriamo a che corrispondesse allora il Choiak; forse = Gorpiaios/Dios. Nella tabella abbiamo messo ipoteticamente il mese intermedio.

(7) **PP. III** p. **205**: terra seminata sino al 30 Athyr anno 12, per l'anno 13. Dunque l'anno 13 comincia dopo il 30 Athyr e prima del Pharmouthi ch'è in media il mese della raccolta.

(8) **PP. I 16** (**2**) cfr. **III** p. **14**: contiene (anno 17) la serie Payni-Epiphi-Mesore.

(9) **PP. II 25 (b)**: contiene (anno 21) la serie 24 Tybi-3 Mechir.

(10) **P. Lille II 1**: semina nell'anno 23, raccolta nel 24. Scegliendo, per la semina e la raccolta, i mesi medii, si ha che l'anno cominciava in Athyr-Pharmouthi. Cfr. n. successiva.

(11) **P. Lille II 1** già citato (cfr. **3**): semina nel 24, raccolta nel 25; ma la data è 13 Choiak anno 25; quindi il periodo Athyr-Pharmouthi (v. n. precedente) si restringe in Tybi-Pharmouthi. Con questo risultato concorda **P. Lille II 17**, dove appare che E[piphi] precede Choiak, e quindi l'anno deve cominciare nel periodo Tybi-Epiphi. Concorda pure **P. Eleph. 10-11** (cfr. **17**), dove appare che Payni precede Epiphi. Concorda infine **P. Hibeh 90**, contratto, scritto nell'anno 25, dove si pone il principio dell'anno 27 (che poi non fu, per la morte di Evergete) fra la semina e il raccolto (Athyr-Pharmouthi).

Additiamo a parte altri indizii: **P. Hibeh 114**: anno 3, forse di Evergete: contiene la serie Mechir-Phaophi: ciò fa supporre il principio dell'anno in Athyr-Mechir; il 25 Dios cadeva allora in ± Athyr-Tybi (tabella di Grenfell e Hunt). — Per l'anno 7 è poco significativo **PP. II 9 (2)** cfr. **III** p. **129** dov'è Payni dopo Pachon. — **P. Hibeh 81**: anno 9; contiene la serie 29 Phaophi – 18 Choiak; essendo il 25 Dios = 6 Tybi. — **P. Hamburg 24**: anno 24; un cleruco promette nell'anno 24 Dios una restituzione per l'anno 25; cfr. il comento di P. Meyer. — Incerto è **P. Hibeh 34** cfr. **73**. — E si riferiscono ad anni incerti i seguenti papiri con la serie di mesi successivi per ciascuno indicata: **PP. III** p. **59** (Pachon-Payni); p. **80** (Epiphi-Mesore); p. **82** (Payni-Mesore); p. **83** (Pachon-Payni); p. **89-91** (Pharmouthi-Mesore); p. **92** (13 Tybi-25 Payni); p. **94** (12 Tybi-Mesore); p. **291** (18 Mesore - 30 Thoth).

(12) **PP. III** p. **330**; contiene la serie Payni-Thoth (4 mesi), anno 1. Quindi l'anno 2 può cominciare al più presto il 1° Phaophi, al più tardi il 1° Payni. — L'anno 1 poi dovè cominciare *dopo* la fine del 25 di Evergete, ossia dopo il 25 Dios = 21/22 Phamenoth, e *prima* del 1° Payni. Restano dunque al massimo due mesi e dieci giorni per quel non completo anno 26 di Evergete, che ci è testimoniato da **P. Lille II 23**. — Con tali risultati si accorda bene **P. Lille II 42**: contiene (anno 1) la serie Athyr-12 Tybi.

(13) **P. Lille II 29**: datato 29 Athyr, anno 4; parla del 10 Payni successivo senza avvertire che l'anno sia diverso; sicchè si può accettare la serie 29 Athyr - 10 Payni; e porre l'inizio dell'anno fra l'11 Payni e il 29 Athyr. — Questo periodo è allargato, per lo spostamento del primo termine, da **P. Lille II 13**, che contiene la serie 29 Athyr-Choiak. È ancora allargato, per lo spostarsi di entrambi i termini, da **P. Lille II 12** (serie Choiak-27 Phamenoth), **26** (Mechir-27 Phamenoth), **39** (18 Tybi-27 Pham.), **I 4** (anno 5, Tybi-Pachon).

Il **PP. III** p. **151** (Choiak-Tybi) si riferisce ad un anno 18 di non si sa qual Tolemeo. Potrebb'essere Filopatore.

I risultati ottenuti per la fine del regno di Evergete e il principio del regno di Filopatore sono illustrati da **PP. III** p. **280**, dove appaiono elenchi di tasse divise per anni, ma in modo che si passa dall'anno 26

all'anno 2, mentre in **PP. III** p. **304** si trova l'anno 26-1 come un sol tutto. La spiegazione è chiara. L'anno 26 di Evergete (rimasto incompiuto) cominciava col 25 Dios = ± 22 Phamenoth; l'1 di Filopatore, con l'Audnaios/Peritios = Pachon/Payni (cfr. pag. 365). L'intervallo (o durata dell'anno 26) era di circa 2 mesi. Ora è evidente che, dividendo per anni le tasse, i 2 mesi dell'anno 26 non si potevano considerare anno intero, ma conglobare con l'1 del re successivo. D'altra parte le tasse s'imponevano, — è verisimile, — al principio di ciascun anno ufficiale, sicchè all'anno misto 26-1 doveva rimanere il numero della prima sua parte, 26, l'1 riuscendo omesso. Il sistema era di necessità poco felice; il che spiega il bisogno di usare talvolta la formula più compiuta, 26-1. Purtroppo cotali testimonianze, non perentorie, si accordano anche p. e. con la teoria dello Smyly *o. c.* Tuttavia giova che s'inquadrino bene nella nostra tesi, la cui fondatezza risulta da ben altre prove.

Tabella II. (Cfr. sopra, pag. 352).

Nome del re	Anno ufficiale	Principio dell'anno ufficiale (anniversario regio)		Casi di coincidenza	Casi di differenza
		nel calendario macedonico	nel calendario egizio	fra il computo ufficiale e il non-ufficiale	
Tolemeo II Filadelfo	27	24 Audnaios – 27 Peritios	Choiak - Tybi	Phaophi (1)	—
	29		Choiak - Tybi	Tybi (2)	—
	35		4 Mechir - 6 Phamenoth	—	Epiphi (3)
Tolemeo III Evergete	12	25 Dios	circa *Tybi*	—	Phamenoth (4)
Tolemeo IV Filopatore	5	18 Audnaios – 9 Peritios	18 Payni - 8 Epiphi	Phamenoth (5)	—
	13		*Phaophi - Choiak* (??)	—	Tybi (6)

(1) **P. Lille I 1**; cfr. Wilcken " Archiv " V 219-20.

(2) **P. Leyden I 379**; cfr. *P. Hibeh* p. 341.

(3) **P. Hibeh 80.**

(4) **PP. III** p. **8**; cfr. III p. 168-9, dove manca il mese.

(5) **P. Lille II 35**: ε(ἔτος) ὡς αἱ πρόσοδοι Φαμενώ[θ]. Lo Smyly " Hermathena " XIV (1907) 116 ritiene che quella data presupponga una cifra

diversa per l'altro anno, quello che non è " finanziario ". Egli ha ragione, perchè pensa che entrambi gli anni sieno ufficiali. Ma se, come sostenemmo noi sopra (p. 348), solo l'anno *ὡς αἱ πρόσοδοι* stesso è ufficiale, diventa più probabile che la data su riferita indichi una stessa cifra per i due anni: sembra che chi scrisse volesse avvertire esser la cifra 5 corretta *anche* nel computo ufficiale. — Comunque, ognuno vorrà concedere che le interpretazioni son per noi possibili entrambe; nel qual caso, deve il calcolo decidere qual sia preferibile.

(6) Griffith " Proc. Soc. Bibl. Arch. „ 1901 pp. 294-302, contratto che in demotico reca la data " anno 12, Tybi 4 „, in greco " anno 13, Tybi 4 „. Per l'anno 13 di Filopatore manca purtroppo la corrispondenza dei due calendarii. L'ultimo dato sicuro si riferisce all'anno 5; poi sino al 4 di Epifane non abbiamo nulla di certo. E son anni di disordine nel corso del doppio calendario, come osservan Grenfell e Hunt. Quindi lasciamo ogni ipotesi, anche solo approssimativa. Notiamo però che, per accordarsi con gli altri casi, il nostro testo, se non contiene errore, presuppone l'equazione Audnaios/Peritios = Phaophi/Choiak; ossia Dios = Mesore/Phaophi. Ora nel 5 di Filopatore abbiamo Dios = Pharmouthi/Pachon; nel 4 di Epifane Dios = Pachon/Payni; nel 9 di Epifane Dios = Thoth. Ci sembra che, dunque, l'equazione presupposta dal papiro su citato non strida a confronto con l'equazioni cronologicamente più vicine.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 9 Gennaio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti: il Vice-Presidente CAMERANO, il Direttore della Classe D'OVIDIO e i Soci SALVADORI, NACCARI, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, MATTIROLO, GRASSI, FUSARI, BALBIANO, PANETTI. — Scusa l'assenza il Segretario SEGRE, sostituito dal Socio PARONA.

È letto e approvato il verbale della precedente adunanza (26 Dicembre 1915).

Chiede di parlare il Vice-Presidente CAMERANO, e pronuncia il seguente discorso:

A Voi, nostro illustre Presidente, porgo, a nome della Classe, i più vivi rallegramenti per l'alta onorificenza che S. M. il Re volle concedervi: il Collare dell'Annunziata.

Voi siete il quarto Presidente della R. Accademia delle Scienze di Torino che viene assunto a questo onore.

Primo fu Prospero Balbo, padre di Cesare, l'*Italico*, insigne statista e scrittore di rara eloquenza e perfezione.

Segue Alessandro Saluzzo, primogenito del Conte Giuseppe Angelo (uno dei fondatori della nostra Accademia) e fratello di Cesare e di Diodata Saluzzo, nostri colleghi illustri. Alessandro

Saluzzo fu soldato valoroso e autore celebrato della Storia militare del Piemonte.

Terzo, nel tempo, viene Federigo Sclopis, del quale alta suona la fama, e viva ne è la memoria.

Nella schiera eletta entrate ora Voi, che dei predecessori siete degno compagno per l'altezza della mente, per l'efficacia e la nobiltà dell'opera compiuta e per il patriottismo.

Voi, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria, continuate l'opera di Prospero Balbo, che della nuova Deputazione fu primo Presidente e fate rivivere nei vostri scritti la sua felice e dotta eloquenza.

Voi, Presidente della Società nazionale " Dante Alighieri ", che difende il diritto dell'idioma di Dante, trovate in Alessandro Saluzzo chi per primo volle " che i soldati fossero con *voci patrie* comandati e che le ordinanze della milizia avessero *lingua patria* e solenne ".

Voi, che in un momento grave e solenne per la patria nostra incitaste dal Parlamento, con parola eloquente ed inspirata, gli italiani a correre in aiuto dei fratelli e a compiere l'Italia, trovate riscontro in Federigo Sclopis, che nel proclama da lui dettato quando Carlo Alberto dichiarò la prima guerra d'indipendenza, invocò " l'aiuto che il fratello aspetta dal fratello, dall'amico l'amico ". Il proclama di Federigo Sclopis scosse gli animi dei generosi di tutta l'Italia, le vostre parole confortano gli Italiani ai maggiori sacrifizî per la redenzione delle ultime terre soggette al giogo del secolare nemico e per il compimento della Patria.

Tutta la vostra vita, o Paolo Boselli, tutta l'opera vostra vi rendono degno dell'alta onorificenza che S. M. il Re ha voluto conferirvi. Quattro volte ministro, alla Istruzione, all'Agricoltura, alle Finanze, al Tesoro, primo Segretario dell'Ordine Mauriziano, presidente della " Dante Alighieri ", negoziatore di trattati, presidente di numerose e importanti Commissioni parlamentari per lo studio di gravi questioni economiche e sociali, presidente del Consiglio Provinciale, della R. Deputazione di Storia Patria, del Comitato nazionale per la Storia del Risorgimento e via dicendo, sempre portaste negli uffici coperti con attività instancabile opera dotta, profonda, praticamente efficace e informata al più puro e ardente patriottismo.

Noi vi abbiamo moderatore illuminato e prudente, dalla mente larga ed equilibrata, dal cuore generoso e gentile.

Io vi rivolgo, a nome di tutti, il caldo augurio che per lunghi anni siate serbato alla stima e alla gratitudine nostra e degli Italiani.

La Classe accoglie con plauso il discorso del Vice-Presidente, eloquente interprete dei sentimenti di tutti i Colleghi, e rinnova l'applauso al commosso ringraziamento del Presidente.

S. E. Boselli esprime tutto il suo gradimento per il saluto e l'omaggio resigli dal Collega Camerano, e dice che la nomina a Presidente dell'Accademia e la riconferma all'alta carica sono da lui considerate come onore massimo, non inferiore a quello che gli viene dalla suprema onorificenza conferitagli ora dal Re; e soggiunge d'essersi affrettato a scegliere il Collare dell'Annunziata che fu di Federigo Sclopis, anche nell'intento di rendere con ciò omaggio all'Accademia, della quale lo Sclopis fu Presidente fra i più illustri.

Si presentano quindi, per la stampa negli *Atti,* le seguenti Note:

I. Guareschi, *Esperienze ed osservazioni intorno alle miscele delle terre alcaline con gli alcali.* Nota I.

N. Jadanza, *Il Cannocchiale Panfocale di Porro ed un problema sull'anallattismo.*

LETTURE

Esperienze ed osservazioni intorno alle miscele delle terre alcaline con gli alcali.

Nota I del Socio ICILIO GUARESCHI.

Nel mentre io pensavo come spiegare il curioso modo di agire della calce sodata su certi gas e specialmente sul gas solfidrico e visto dalle prime esperienze che l'ossido di calcio, l'idrato di sodio e l'idrato potassico da soli, separatamente, non reagiscono molto vivamente (o non reagiscono affatto) sui così detti gas asfissianti, e che coll'acido solfidrico non dànno mai *incandescenza*, mi venne l'idea di esperimentare il loro miscuglio fatto a temperatura ordinaria e vedere se in queste condizioni diventano più attivi. Ed invero così è; mescolati che siano, la loro attività è straordinaria.

Pubblico ora questa breve *Nota preliminare*, perchè mi è parso che nessuno sino ad ora abbia fatto osservazioni simili.

Esp. 1ª. — 10 gr. di calce viva commerciale, ben conservata da alcuni mesi, di color grigio bruno (A), in granelli di circa 1 mm., furono mescolati su cartoncino con 5 gr. di KOH in piccoli frammenti e polvere. Il miscuglio fu posto in un tubo ad U di circa 1 cm. di diametro e alto 12-14 cm., poi feci passare l'aria attraverso a un litro di gas solfidrico e questo sul miscuglio; subito la miscela diventò quasi nera e poco dopo si produsse una *magnifica incandescenza* con sviluppo di nebbia o fumi bianchi. L'incandescenza era vivissima, benchè intensa fosse la luce del giorno, e si ebbe più presto che non sulla calce sodata. Visto all'oscuro il fenomeno è bellissimo.

Esp. 2ª. — La stessa calce (A): gr. 15 in tubo ad U ecc. con 1 litro di gas solfidrico e corrente d'aria. Annerisce un poco,

il solfidrico passa subito oltre e la calce si scalda quasi niente. Nessuna incandescenza.

Esp. 3ª. — Gr. 10 della stessa calce grigia (A) mescolata con 5 gr. NaOH in grani e polv. con 1 litro di gas H^2S e corrente d'aria, annerisce poi quasi subito; si osserva *viva incandescenza* che si propaga nella massa.

Esp. 4ª. — 10 gr. di calce viva bianca, comune, recente [che segno con (C)], ridotta in granelli di circa 1 mm. e mescolati con 5 gr. di NaOH con acido solfidrico (operando sempre con 1 litro H^2S e corrente d'aria), si colora bene in bruno, sviluppa molto calore e vapor d'acqua, poi *incandescenza vivissima.*

Esp. 5ª. — 10 gr. di calce viva dal marmo con 5 gr. NaOH, con H^2S si colora poco, ma dà incandescenza.

Esp. 6ª. — 10 gr. di calce (C) + 4 gr. NaOH; la miscela imbrunisce, poi *incandescente.*

Esp. 7ª. — Idem. 18 gr. con 3 gr. NaOH id. id. incandescenza.

Esp. 8ª. — Colla calce (C) sola il solfidrico passa e non produce affatto incandescenza.

Esp. 9ª. — Gr. 15 della stessa calce (C) con 1 gr. di NaOH; si ha ancora *viva incandescenza.*

In tutte queste esperienze si notano le colorazioni più varie. In alcuni punti un bel rosso vivo (esp. 1ª con KOH) che sembra carminio, in altri verde.

Esp. 10ª. — 15 gr. calce (C) con gr. 0,2 di NaOH imbruniscono, si scaldano poco e non si ha incandescenza. La quale dunque non avviene col rapporto di 75:1.

Esp. 11ª. — Gr. 15 idem con 0,15 NaOH (cioè rapporto 30:1); si colora in bruno, si sviluppa molto calore e acqua, ma non arriva all'incandescenza.

Esp. 12ª. — Gr. 15 di calce (C) con 0,5 di KOH; si ha imbrunimento e inverdimento, molto calore (H^2S però in parte passa oltre) e poco dopo si ha incandescenza.

La potassa evidentemente è più energica della soda.

Tra la calce sodata e queste miscele vi sono altre differenze, ma intanto noto questo, che l'acido solfidrico, anche in

corrente rapidissima, è subito fissato dalla calce sodata e non passa oltre se non è tutta saturata, al punto che una carta con acetato di piombo all'estremo opposto del tubo non dà segno di H^2S se non quando tutta la calce sodata è saturata di H^2S; mentre coi miscugli di calce e soda si assorbe sì del gas solfidrico, ma in parte passa subito inalterato. Specialmente quando il gas passa schietto, privo di aria.

Esp. 13ª. — Gr. 10 di calce (C), ma in grani grossi circa 2 a 4 mm. e con 6 gr. NaOH furono trattati con corrente di gas solfidrico schietto, poi successivamente facevo passare una corrente d'aria. Non si ebbe incandescenza.

Esp. 14ª. — Colla stessa calce in grani grossi, ma triturata e nel rapporto di 10 gr. con 5 gr. di NaOH si ebbe incandescenza.

Esp. 15ª. — Gr. 10 di calce (C) in grani piccoli con 3 gr. di NaOH più 1 litro di H^2S e corrente diedero una magnifica incandescenza.

Dunque i migliori risultati si hanno quando passa il solfidrico spinto dalla corrente d'aria. Praticamente trovo sempre più utile l'uso dei tubi ad U.

Esp. 16ª. — Mescolai 10 gr. di calce (C) con 2 gr. di solfato di rame in parte deacquificato $CuSO^4 . 3H^2O$, poi feci passare 1 litro di gas solfidrico in corrente d'aria. Imbrunì, il solfidrico passò oltre subito, si sviluppò pochissimo calore e *non* si ebbe incandescenza.

Ho ripetute le esperienze precedenti usando la calce (C) e la soda caustica in rapporti molecolari.

Esp. 17ª. — Con 5,6 gr. di CaO e 4,0 gr. di NaOH non si ebbe incandescenza.

Esp. 18ª. — Con 5,6 gr. di CaO e 2 gr. di NaOH (ossia 1 mol. per $^1/_2$ mol.) *non si ebbe incandescenza.*

Esp. 19ª. — Con 5,6 gr. di CaO e 2 gr. NaOH in polvere si ha incandescenza, ma poca.

Esp. 20ª. — Faccio la miscela di 11,2 CaO con 0,2 di NaOH in polv. (rapporto 56 a 1) e non si ha incandescenza.

Esp. 21ª. — Con 11,2 di CaO (sempre C) + 0,4 NaOH in polv., cioè rapporto di 28 : 1, ossia 20 mol. Ca per 1 mol. NaOH, e *si ha incandescenza.*

Esp. 22ª. — Ripeto la precedente esperienza con CaO *fresca*, bianca, comune, che segno con (C[1]), 11,2 gr. mescolo con 0,4 di NaOH in polv. Il solfidrico come al solito passa, ma verso l'ultimo terzo del tubo si manifesta una *bella incandescenza.*

Ho voluto provare anche l'idrato di calcio $(CaOH)^2$.

Esp. 23ª. — Gr. 10 di $Ca(OH)^2$ in grani, con 5 gr. di NaOH in pezzetti ed in polvere. Col solfidrico e corrente d'aria si scalda molto, sviluppa acqua, il solfidrico passa oltre subito e *non* si ha incandescenza. Occorre la calce viva CaO.

Ricerche fatte coll'ossido di bario BaO.

Visti questi risultati, era naturale che io dovessi esperimentare colla *barite*, data la sua maggiore energia che generalmente questo ossido ha relativamente alla calce.

Avevo in laboratorio un campione di barite caustica bruna, anidra; era ancora ben conservato. Lo ridussi in granuli piccoli come quelli della calce, circa 1 mm. e misti a poca polvere. Vista in granelli aveva colore violaceo. Scaldata anche al rovente non dava acqua. Coll'acqua agisce violentemente. Nell'acido cloridrico diluito la poltiglia acquosa a poco a poco si scioglie tutta, dando un liquido limpido incoloro con traccie di silice. Dà intensa reazione di ferro e di solfuri. Nulla o traccie di alluminio.

Esp. 24ª. — Gr. 15 di questa barite mescolai con 3 gr. di NaOH in polv. e grani e poi feci come al solito passare 1 litro di gas solfidrico in corrente d'aria; non annerì, si scaldò molto, si sviluppò molt'acqua, ma non si ebbe incandescenza.

Esp. 25ª. — Gr. 20 di barite con 1,5 gr. di NaOH in grani e polv. (rapporto 13,3 : 1); dopo 1 minuto circa si manifesta *vivissima incandescenza* che si propaga ed è curioso che si propaga anche all'indietro, cioè in senso contrario alla corrente del gas solfidrico e dell'aria, ove era già preformato il solfuro;

anche qui come sempre nel fenomeno della incandescenza si notano densi fumi bianchi o nebbia che passa nell'acqua della boccia di Habermann ed anche nell'aspiratore.

Esp. 26ª. — Gr. 25 della stessa barite in granuli, ma sola, trattati come precedentemente non diedero nulla di speciale; si scaldò pochissimo e quindi nulla di incandescenza.

Esp. 27ª. — Ai 25 gr. precedenti mescolai 1 gr. di NaOH in polvere. Ed allora, poco dopo il passaggio dei gas solfidrico ed aria, si manifestò l'incandescenza con fumi bianchi. Ma meno intensa che nell'esperienza 24ª.

Esp. 28ª. — Gr. 25 della precedente barite mescolai con 1 gr. di KOH in granuli e polvere e la miscela diede quasi subito una *vivissima incandescenza* con *fumi bianchi*, e anche qui pur retrocedendo.

Esp. 29ª. — Nelle stesse condizioni con 25 gr. di barite e 2 gr. di KOH non ebbi incandescenza.

Esp. 30ª. — Esperimentai cen l'*ossido di berillio (glucinio)*, ma non ottenni nulla; non agisce affatto.

Esp. 31ª. — Colla stessa barite e corrente di gas solfidrico e solfidrato di ammonio non si ebbe nulla di speciale.

Esp. 32ª. — Gr. 25 di barite in granuli, vecchia, di Trommsdorff, violacea, con 4 gr. di KOH in grani e polvere. Si ha anche in questo caso *viva incandescenza*, ma il tubo si ostruisce.

Esp. 33ª. — Gr. 25 idem con 1 gr. di KOH con 1 litro di gas solfidrico e corrente d'aria, dà *vivissima incandescenza*, luce rossastra, bellissima.

Esp. 34ª. — Gr. 25 idem con 2 gr. di KOH, dà *incandescenza vivissima* e il tubo si rompe.

Osserverò qui che St.-Meunier nel 1865 (1) aveva notato alcuni fatti che hanno qualche relazione con le mie esperienze. Egli vide che la potassa e la soda caustica allo stato di fusione sciolgono molta calce, barite, stronziana e magnesia, e che queste soluzioni posseggono un notevole potere ossidante su molti metalli (piombo, rame, platino, ferro, ecc.). Queste miscele,

---

(1) St.-Meunier, *Dissolution de quelques oxydes métalliques dans les alcalis caustiques en fusion*, " C. R. ", 1865, t. 60, pp. 557 e 1233.

secondo Meunier, assorbono dell'ossigeno, che poi lasciano sfuggire; forse si formano dei perossidi facilmente decomponibili, ed è noto che già la potassa fusa nell'aria assorbe un poco di ossigeno e dà la reazione dei perossidi.

Nel caso mio le esperienze sono fatte in condizioni molto diverse, cioè con sostanze allo stato solido e a temperatura ordinaria; ed inoltre le terre alcalino-terrose sono in quantità molto maggiore relativamente agli alcali. Questi agiscono benissimo ancora quando il rapporto in peso è di 1 a 30 e anche più. Però forse anche in queste condizioni, durante il passaggio dell'aria insieme al solfidrico, potrebbero formarsi dei perossidi che poi promuovono la incandescenza. Farò delle esperienze coi perossidi.

Conclusione. — Dalle esperienze sovradescritte si può concludere che il curioso fenomeno della incandescenza con acido solfidrico in corrente di aria si manifesta benissimo con soli miscugli di terre alcaline con alcali caustici, e specialmente colla barite, anche quando gli alcali sono in quantità relativamente piccola.

Altre esperienze in condizioni diverse saranno fatte; anche impiegando l'*ossido di stronzio* e l'*idrato di litio* e cogli ossidi di metalli pesanti.

Torino, R. Università, gennaio 1916.

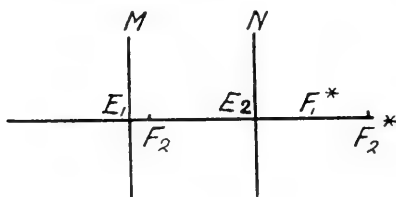
Il cannocchiale Panfocale di Porro e due problemi sull'anallattismo.

Nota del Socio NICODEMO JADANZA.

Cannocchiale Panfocale di Porro.

I.

È noto che se due lenti si trovano ad una distanza $\Delta < \varphi_1$, l'immagine di un oggetto situato alla distanza D dalla 1ª lente M la cui distanza focale $= \varphi_1$ si trova ad una distanza x dalla 2ª lente N la cui distanza focale è φ_2 data da (fig. 1)

Fig. 1

$$x = \varphi_2 \frac{\Delta(D - \varphi_1) - D\varphi_1}{(\Delta - \varphi_2)(D - \varphi_1) - D\varphi_1}.$$

Quando $D = \infty$, il valore di x diventa la distanza di F^* dalla lente N e sarà

$$(1) \qquad F^* = \varphi_2 \frac{\varphi_1 - \Delta}{\varphi_1 - \Delta + \varphi_2}$$

essendo F^* la distanza del 2° fuoco dalla lente N.

Il 2° fuoco dunque si trova tra E_2 e F_1^*. Indichiamo la distanza di esso da F_1^* con $\frac{\varphi_1}{n}$, sarà

$$E_1 F^* = \varphi_1 - \frac{\varphi_1}{n} = \frac{n-1}{n} \varphi_1 .$$

Volendo che nel punto F^* si formi l'immagine di un punto situato alla distanza D dalla lente M, dovrà essere

$$\Delta + x = \frac{n-1}{n} \varphi_1 :$$

e quindi, ponendo $l = \frac{n-1}{n} \varphi_1$, si otterrà l'equazione

$$(2) \qquad \varphi_2 \frac{\Delta (D - \varphi_1) - D\varphi_1}{(\Delta - \varphi_2)(D - \varphi_1) - D\varphi_1} + \Delta = l$$

dalla quale si ricaverà Δ per ogni valore particolare di D.

Dalla (2) si ottiene l'equazione di 2° grado

$$(3) \qquad \Delta^2 (D - \varphi_1) - \Delta [D\varphi_1 + l(D - \varphi_1)] + D\varphi_1 (l - \varphi_2) + \\ + (D - \varphi_1) l\varphi_2 = 0$$

o anche

$$\Delta^2 - \Delta \left[l + \frac{D}{D - \varphi_1} \varphi_1\right] + \frac{D\varphi_1}{D - \varphi_1} (l - \varphi_2) + l\varphi_2 = 0.$$

Per $D = \infty$ si ha

$$(4) \qquad \Delta^2 - \Delta (l + \varphi_1) + \varphi_1 (l - \varphi_2) + l\varphi_2 = 0$$

dalla quale si deduce

$$\Delta = \frac{\varphi_1 + l}{2} \pm \frac{1}{2} (\varphi_1 - l) \sqrt{1 + \frac{4\varphi_2}{\varphi_1 - l}}.$$

La radice positiva dev'essere esclusa perchè dà un valore di Δ maggiore di φ_1; sarà dunque

$$(5) \qquad \Delta = \frac{\varphi_1 + l}{2} - \frac{1}{2} (\varphi_1 - l) \sqrt{1 + \frac{4\varphi_2}{\varphi_1 - l}}$$

il valore di Δ quando si guarda un oggetto all'∞.

La (3) per $D = \varphi_1$, dà

$$(6) \qquad \Delta = l - \varphi_2.$$

E quindi dovrà essere $\varphi_2 < l$.

Quando $D = 0$ la (3) diventa

$$\Delta^2 - \Delta l + l\varphi_2 = 0,$$

donde

$$\Delta = \frac{l}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - 4l\varphi_2};$$

sicchè dovrà essere $\varphi_2 \leq \frac{l}{4}$ perchè si possano guardare oggetti alla distanza *zero*.

Ponendo $\varphi_2 = \frac{l}{4}$ si avrà per $D = 0$

$$\Delta_0 = \frac{l}{2}, \tag{7}$$

ed in questo caso si avrà dalla (6), indicando con Δ_{φ_1} il valore di Δ quando $D = \varphi_1$,

$$\Delta_{\varphi_1} = \frac{3}{4} l$$

e dalla (5), indicando con Δ_∞ il valore di Δ quando $D = \infty$,

$$\Delta_\infty = \frac{\varphi_1 + l}{2} - \frac{1}{2}(\varphi_1 - l)\sqrt{1 + \frac{l}{\varphi_1 - l}}.$$

Essendo $l = \frac{n-1}{n}\varphi_1$ sarà

$$\Delta_0 = \frac{n-1}{2n}\varphi_1; \quad \Delta_{\varphi_1} = \frac{3(n-1)}{4n}\varphi_1; \quad \Delta_\infty = \frac{\varphi_1}{2n}[2n - 1 - \sqrt{n}]. \tag{8}$$

Il cannocchiale dunque si farà colla seconda lente mobile rispetto alla prima, ed il percorso della lente mobile sarà

$$\Delta_\infty - \Delta_0 = \frac{\varphi_1}{2n}(n - \sqrt{n}).$$

Calcolando i valori di φ in corrispondenza ai valori diversi di Δ si otterrà

$$\varphi_0 = \frac{n-1}{3n+1}\varphi_1; \quad \varphi_{\varphi_1} = \frac{n-1}{2(n+1)}\varphi_1; \quad \varphi_\infty = \frac{n-1}{n+1+2\sqrt{n}}\varphi_1. \tag{9}$$

Esempio numerico.

Supposto

$$\varphi_1 = 200^{mm}, \qquad n = 20$$

si avrà

$$l = 190^{mm}$$
$$\varphi_2 = 47,5$$

e quindi

$$\Delta_0 = 95^{mm},0$$
$$\Delta_{\varphi_1} = 142\ ,5$$
$$\Delta_\infty = 172\ ,64.$$

In corrispondenza sarà

$$\varphi_0 = 62^{mm},3$$
$$\varphi_{\varphi_1} = 90\ ,5$$
$$\varphi_\infty = 126\ ,9.$$

II.

La teoria del cannocchiale panfocale si può fare geometricamente nel seguente modo:

È data una lente M (fig. 2) di distanza focale φ_1 (obbiettivo

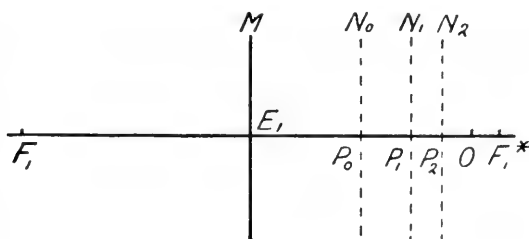



Fig. 2

di un cannocchiale), si vuole ad essa associare un'altra lente N mobile rispetto ad M e tale che il sistema (MN) dia l'immagine reale di un oggetto situato a qualunque distanza dalla lente M

giacente sempre nel punto O ad una distanza da E_1 eguale ad $l < \varphi_1$.

Consideriamo dapprima l'oggetto in E_1; la lente M non agirà su di esso, e quindi affinchè la lente N dia la immagine reale di E_1 in O dovrà essere la distanza $E_1 O = l$ al minimo eguale al quadruplo della distanza focale φ_2 della lente N, e quindi $l = 4\varphi_2$, donde $\varphi_2 = \frac{l}{4}$. La lente N si porrà dunque nel punto medio P_0 del segmento $E_1 O$ (si suppongono le lenti infinitamente sottili) e la immagine di un oggetto che si trovasse sulla lente M si formerebbe in O capovolta e della stessa grandezza.

Se l'oggetto si trova nel primo fuoco F_1 della lente M, perchè la sua immagine si formasse in O, questo punto dovrebbe essere il secondo fuoco della seconda lente N, e poichè la distanza focale di N è $\frac{l}{4}$, essa dovrà trovarsi nel punto P_1 che dista da E_1 di $\frac{3}{4} l$.

Consideriamo in ultimo l'oggetto a distanza infinita; sarà allora il punto O secondo fuoco del sistema composto; la distanza Δ della lente N dalla lente M si troverà osservando che il secondo fuoco di un sistema composto di due lenti è il coniugato del secondo fuoco F_1^* della prima lente rispetto alla seconda lente, si avrà quindi, ricordando che $\varphi_2 = \frac{l}{4}$,

$$- \frac{1}{\varphi_1 - \Delta} + \frac{1}{l - \Delta} = \frac{4}{l},$$

donde l'equazione di 2° grado

$$\Delta^2 - (\varphi_1 + l)\Delta + \frac{1}{4} l (l + 3\varphi_1) = 0,$$

di cui la sola radice utile è

$$\Delta = \frac{\varphi_1 + l}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\varphi_1(\varphi_1 - l)}$$

e la posizione della lente sarà in P_2 distante da E_1 del valore precedente Δ.

L'escursione della lente N sarà

$$\frac{\varphi_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\varphi_1(\varphi_1 - l)}.$$

La costruzione geometrica della posizione P_2 della lente N corrispondente all'oggetto infinitamente lontano sarà la seguente.

Sul segmento $E_1 F_1^*$ (fig. 3) come diametro si descriva una mezza circonferenza e dal punto O estremo del segmento $E_1 O = l$ si innalzi la perpendicolare OK ad $E_1 F_1^*$, il segmento $K F_1^*$ sarà $\sqrt{\varphi_1(\varphi_1 - l)}$. Se dal punto medio H del segmento $O F_1^*$ ed in direzione $H E_1$ si riporta il segmento $O P_2 = \frac{1}{2} K F_1^*$ si avrà in P_2 la posizione richiesta.

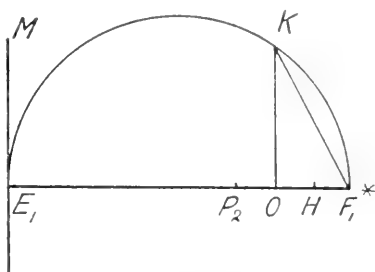



Fig. 3

Due problemi sull'anallattismo.

1) *Data la lente* M, *obbiettivo di un cannocchiale astronomico, di distanza focale* φ_1, *si vuole associare ad essa un'altra lente* N

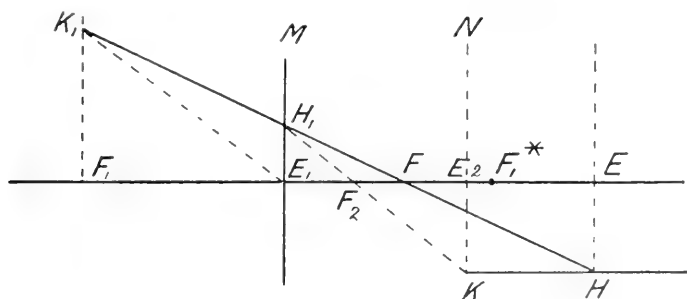



Fig. 4

in modo che il sistema composto sia anallattico rispetto ad un punto assegnato ed abbia una data distanza focale φ.

Il fuoco F del sistema composto delle due lenti M, N (fig. 4)

essendo noto, indichiamo con δ la sua distanza da E_1. La distanza focale φ che dev'essere *minore* di φ_1 essendo anch'essa nota, sarà pure noto il *primo* punto principale E del sistema composto, il quale si ottiene portando sull'asse il segmento $FE = \varphi$. Conducendo per F una retta arbitraria FH_1K_1H, questa incontrerà il primo piano focale della lente M nel punto K_1, la lente stessa nel punto H_1 ed il piano principale E nel punto H. Congiungendo i punti K_1 ed E_1 e per H_1 conducendo la retta H_1F_2K parallela alla K_1E_1, questa incontrerà l'asse nel punto F_2 primo fuoco della seconda lente N e la HK parallela all'asse nel punto K che appartiene alla seconda lente N. Sarà dunque F_2E_2 la distanza focale φ_2 della lente *anallattica* N ed il segmento E_1E_2 la distanza Δ delle due lenti (infinitamente sottili) che compongono l'obbiettivo composto anallattico rispetto ad un punto dato e di data distanza focale.

La legittimità della costruzione precedente si vedrà subito se si rammenta che: *il primo fuoco di un sistema composto di due lenti ha per coniugato il primo fuoco della seconda lente rispetto alla prima;* e che: *il primo piano principale di un sistema composto di due è il luogo geometrico dei punti d'incontro delle rette di emergenza parallele all'asse colle corrispondenti rette d'incidenza.*

Si possono dedurre i valori di Δ e φ_2 in funzione di φ_1, δ e φ nel seguente modo.

Dai due triangoli simili $K_1F_1E_1$, $H_1E_1F_2$ si deduce

$$\frac{\Delta - \varphi_2}{\varphi_1} = \frac{H_1E_1}{K_1F_1} ;$$

e dagli altri triangoli simili K_1F_1F, H_1E_1F

$$\frac{H_1E_1}{K_1F_1} = \frac{\delta}{\varphi_1 + \delta} ;$$

sicchè sarà

$$(1) \qquad \Delta - \varphi_2 = \frac{\varphi_1 \delta}{\varphi_1 + \delta} .$$

Dai due triangoli simili $H_1E_1F_2$, F_2E_2K si ha

$$\frac{\Delta - \varphi_2}{\varphi_2} = \frac{H_1E_1}{KE_2}$$

e dagli altri due egualmente simili $H_1 E_1 F$, FEH, osservando che $HE = KE_2$

$$\frac{H_1 E_1}{K E_2} = \frac{\delta}{\varphi},$$

sarà quindi

$$\Delta - \varphi_2 = \frac{\varphi_2 \delta}{\varphi}. \tag{2}$$

Dalle (1) e (2) si ottengono le altre

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{\varphi \varphi_1}{\varphi_1 + \delta} \\ \Delta &= \frac{\varphi_1 (\varphi + \delta)}{\varphi_1 + \delta} \end{aligned} \right. \tag{3}$$

che determinano le incognite φ_2 e Δ.

È sempre utile che φ sia poco differente da φ_1 perchè non sia troppo diminuito l'ingrandimento del cannocchiale; potremo porre quindi

$$\varphi = \frac{n-1}{n} \varphi_1 ; \tag{4}$$

le (3) diventano in tal caso

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{(n-1) \varphi_1^2}{n (\varphi_1 + \delta)} \\ \Delta &= \frac{[(n-1) \varphi_1 + n\delta] \varphi_1}{n (\varphi_1 + \delta)} \end{aligned} \right. \tag{5}$$

le quali convengono al caso di δ qualunque.

Nel caso dell'*anallattismo centrale*, che è quello che si presenta più utile nella pratica, si farà $\delta = \frac{\varphi_1}{2}$ e si otterranno le altre

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{2n-2}{3n} \varphi_1 \\ \Delta &= \frac{3n-2}{3n} \varphi_1 . \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Un valore conveniente di n è $n = 30$ e perciò nel caso che si voglia rendere centralmente anallattico un cannocchiale astronomico il cui obbiettivo ha la distanza focale φ_1, si possono adoperare le formole seguenti:

$$(7) \qquad \begin{cases} \varphi_2 = 0,644\, \varphi_1 \\ \Delta = 0,978\, \varphi_1 \text{ (*)} \end{cases}$$

e si avrà

$$\varphi = 0,967\, \varphi_1 .$$

2) Un altro problema sull'anallattismo è il seguente (**).

Dati Δ, F *ed* F* *trovare* φ, φ_1 *e* φ_2.

Tra queste sei quantità esistono le note relazioni

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}$$

$$F = E_1 + \frac{\varphi_1 (\Delta - \varphi_2)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \qquad F^* = E_2^* + \frac{\varphi_2 (\varphi_1 - \Delta)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} .$$

Ponendo per brevità

$$F - E_1 = \delta , \qquad F^* - E_2^* = K$$

sarà

$$(a) \qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \\ \dfrac{\varphi_1 (\Delta - \varphi_2)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} = \delta ; \qquad \dfrac{\varphi_2 (\varphi_1 - \Delta)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} = K \end{cases}$$

dalle quali bisognerà ricavare le incognite φ, φ_1 e φ_2 supposte date le tre Δ, δ e K.

(*) Secondo il Sig. Salmoiraghi il Porro adoperò sempre i valori:

$$\varphi_2 = 0,617\, \varphi_1 ; \qquad \Delta = 0,95\, \varphi_1 .$$

(**) Questo problema non si presenta quasi mai in pratica; esso fu il solo risoluto dall'illustre Galileo Ferraris, che fu il primo a dare una teoria esatta dell'*anallattismo* nella sua Memoria: *Sui cannocchiali con obbiettivo composto di più lenti a distanza le une dalle altre*, che si trova a pag. 45 del vol. XVI (1880-81) degli " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ".

Dalla prima di queste ultime si deduce

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi}$$

e quindi

$$(\Delta - \varphi_2) = \frac{\delta\varphi}{\varphi} \;; \qquad \varphi_1 - \Delta = \frac{K\varphi_1}{\varphi}$$

dalle quali si deducono

$$\varphi_1 = \frac{\Delta\varphi}{\varphi - K} \;; \qquad \varphi_2 = \frac{\Delta\varphi}{\varphi + \delta} \,,$$

e questi valori sostituiti nella (a) dànno l'equazione di 2° grado

$$\varphi^2 - \Delta\varphi + K\delta = 0 \,,$$

di cui l'unica soluzione utile è la seguente:

$$\varphi = \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 - 4K\delta} = \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{2}\sqrt{1 - \frac{4K\delta}{\Delta^2}} \,.$$

Sostituendo a K il suo valore si avrà:

$$\varphi = \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{2}\sqrt{1 - \frac{4\delta}{\Delta^2} \cdot \frac{\varphi_2(\varphi_2 - \Delta)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}} \,,$$

la quale mostra che φ è sempre minore di Δ, e che raggiunge Δ soltanto quando $\Delta = \varphi_1$, cioè quando $K = 0$.

Torino, Dicembre 1915.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 16 Gennaio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI

PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Carle, Pizzi, Ruffini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 2 gennaio.

Il Socio Brondi, anche a nome del Socio Ruffini, presenta i seguenti volumi pubblicati a spese del Ministero degli Interni: *Le riforme nell'amministrazione e le mutazioni nel fine delle Istituzioni Pubbliche di Beneficenza* (Roma, 1906); *Ordinamento delle Istituzioni Pubbliche di Beneficenza* (Roma, 1908); *Gli statuti e la procedura per le riforme delle Istituzioni pubbliche di Beneficenza* (Roma, 1910); *Domicilio di soccorso - Spedalità - Azione popolare - Disposizioni generali nella legge 17 luglio 1890 N. 6972 sulle Istituzioni pubbliche di Beneficenza* (Roma, 1914). L'esame del contenuto di queste pubblicazioni, delle quali anche il Socio Ruffini mette in rilievo la grande importanza, è oggetto di una *Nota* del Socio Brondi che sarà pubblicata negli *Atti*. La Classe ringrazia per il dono il Ministero degli Interni.

Il Socio Vidari presenta il primo volume de' suoi *Elementi di Pedagogia*, intitolato *I dati della Pedagogia* (Milano, Ulrico Hoepli, 1916). La Classe ringrazia e si rallegra col Socio Vidari.

Il Socio D'Ercole, con parole che saranno pubblicate negli *Atti*, commemora il Socio corrispondente Guglielmo Windelband, professore ordinario di Filosofia nella Università di Heidelberg, del quale fu recentemente annunziata la morte, lumeggiandone gli alti meriti scientifici. Aggiunge alcune considerazioni il Socio Ruffini ricordando del Windelband la genialità che informa tutti gli scritti suoi e le benemerenze verso le scienze storiche, rispetto alle quali egli, con un discorso, oramai celebre, dal titolo *Storia e Scienza della natura*, segnò le linee fondamentali di una nuova classificazione delle scienze, a cui si inspirarono, e in Germania e anche in Italia, molti pensatori, giungendo a importanti e luminose applicazioni.

Il Presidente si compiace della commemorazione fatta dal Socio D'Ercole e delle osservazioni del Socio Ruffini, con deferente attenzione così l'una come le altre ascoltate dalla Classe, perchè dimostrano tutta l'obbiettività, la serenità, l'imparzialità con la quale la nostra Accademia considera e giudica persone e cose anche nel campo nemico, per la sola reverenza al sapere, dovunque e di chiunque sia, per solo spirito di verità, per il solo culto degli ideali scientifici che debbono essere, e sono fra noi, ideali di bene, ideali di giustizia, ideali d'umanità. E tanto più viva è la sua soddisfazione, in quanto che altrove, in queste lunghe tragiche ore delle genti insanguinate e della civiltà inabissata nel buio, la scienza s'è trasformata, con scempio d'ogni legge umana e divina, in strumento di barbarie, ed ha rinnegato quel carattere umano che della scienza è, e deve essere, la vera, grande, sovrana, immortale bellezza.

Segue il Socio Vidari, il quale, pure associandosi alle parole commemorative del Windelband, pronunciate dai Soci D'Ercole e Ruffini, è spiacente di dover ricordare che il nome

del Windelband stesso era compreso tra i firmatari del noto appello rivolto dagli intellettuali tedeschi ai neutrali sin dal principio della conflagrazione europea. In quell'appello erano affermazioni e giudizi che suscitarono doloroso stupore e che non possono, in questo momento sopratutto, essere dimenticati. Per queste ragioni si associa alla commemorazione solo in quanto ebbe un carattere puramente e strettamente scientifico.

Il Socio Prato presenta per la pubblicazione negli *Atti* una sua *Nota* dal titolo *Ancora sulle premesse economiche del contratto collettivo di lavoro.*

Il Socio Stampini presenta, pure per la pubblicazione negli *Atti*, una monografia del Dottore Prof. Massimo Lenchantin de Gubernatis, intitolata *Noterelle fonetiche.*

LETTURE

La morte di Guglielmo Windelband.

Commemorazione del Socio nazionale residente PASQUALE D'ERCOLE.

In questi ultimi giorni i giornali hanno annunziata la morte di Guglielmo WINDELBAND, nominato Socio corrispondente della nostra Accademia nel maggio del 1914.

È una perdita sensibilissima per gli studi filosofici in genere e per gli studi storici della filosofia in ispecie, essendo egli uno de' valorosi rappresentanti dei medesimi, e, per giunta, ancor giovine, essendo nato nel 1848.

Quanto agli studi storici della Filosofia, che hanno trovato in Germania esimii cultori di essi, va in generale rilevato che questi studi sono stati di una straordinaria importanza ed utilità in tutto il campo della storia antica, al quale essi si connettono in tanti punti delle loro manifestazioni. Al qual riguardo e proposito basterebbe nominare il solo Eduardo Zeller, che colla sua monumentale *Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung*, in cinque ponderosi e poderosi volumi di circa 1000 pagine ciascuno, ha portato una immensa luce in tutto il campo degli studi storici, sociali, politici, estetici, religiosi e filosofici dell'antichità.

Per ciò che concerne il WINDELBAND, certamente insigne anch'egli negli studi storici della Filosofia, debbo anche notare, che, comunque storico, non ha però negletto gli stessi studi teoretici e speculativi della scienza filosofica, la quale è tanto

più compiuta quanto più tiene in conto la relazione e connessione degli uni cogli altri.

L'indirizzo filosofico generico del Windelband è quello del Criticismo kantiano, e in siffatto indirizzo cominciò a considerare e trattare argomenti che, da una parte, erano di natura prevalentemente teoretica, dall'altra, si riferivano ai più svariati argomenti filosofici.

Infatti, i suoi primi lavori furono: *a) Die Lehren vom Zufall*, 1870; *b) Ueber die Gewissheit der Erkenntniss*, 1873; *c) Der gegenwärtige Stand der psychologischen Forschung*, 1876: *d) Geschichte und Naturwissenschaft*, 2ᵉ Aufl., 1890; *e) Vom System der Kategorien*, Tüb., 1890; ed altri.

A chi è addentro nelle cose filosofiche non sfuggirà l'importanza di questi argomenti, specialmente di quest'ultimo delle Categorie, le quali, cominciando da quelle kantiane e passando per le fichtiane e schellinghiane, giungono alle hegeliane, che nel lor complesso costituiscono il vasto sistema categorico filosofico dell'Idealismo assoluto di Giorgio Hegel, ossia quello dell'Idea logica, dell'Idea naturale, o Natura, e dell'Idea spirituale, o Spirito. E per ciò che concerne la Logica hegeliana, base di tutto il sistema, rileverò volentierissimo che il Windelband, proprio negli ultimi tempi, e precisamente nel 1914, ha trattato in modo specifico e diretto anche l'argomento logico col suo scritto intitolato: *I principii della logica* (apparsi in traduzione italiana nell'opera *Enciclopedia delle scienze filosofiche* diretta con la cooperazione di Guglielmo Windelband da Arnold Rüge. Volume primo. Milano-Palermo-Napoli-Genova: Editore Remo Sandron, 1914). Nel quale argomento egli considera in 48 ampie pagine la Logica storicamente e teoricamente, facendo " una rassegna critica „ della medesima da Aristotele ad Hegel inclusivamente.

Ma i lavori ancor più importanti e più proprii della sua attività filosofica sono gli storici della Filosofia, tra' quali, oltre ed accanto ad alcuni minori (tra cui, per esempio, *Platon*, in " Frommans Klassiker der Philosophie „), sono notevoli ed hanno acquistata fama i seguenti maggiori intitolati: *Geschichte der alten Philosophie*, Nördling, 1887; *Geschichte der Philosophie*, Freiburg i. Br.; della quale si è fatta una traduzione italiana da E. Zaniboni sulla 5ª edizione tedesca, presso l'editore Remo

Sandron (Milano-Palermo-Napoli); e *Geschichte d. neueren Philosophie*, 5ª Aufl., Leipz., 1911.

Questi lavori storici del WINDELBAND sono veramente encomiabili, essendo frutto di lungo studio fatto sulle fonti degli scrittori e accompagnato da una penetrazione non comune di intelligenza dello spirito sì de' singoli filosofi, che della progressiva evoluzione della filosofia in genere: evoluzione, per giunta, da una parte, guardata anche ne' diversi punti della medesima, sociale, etico, estetico, religioso e filosofico, dall'altra, esposta con linguaggio chiaro, preciso, caldo e colorito.

Gli è perciò che per parte mia esprimo il più vivo compianto per la morte immatura del nostro illustre socio corrispondente, e penso che lo esprimeranno anche gl'insigni colleghi dell'Accademia.

PER UN COMMENTO
alle leggi della pubblica beneficenza.

Nota del Socio VITTORIO BRONDI.

I quattro volumi presentati all'Accademia (1) sono fra le più notevoli pubblicazioni del Ministero dell'Interno, e costituiscono, anzi, una novità del genere. È la prima volta, infatti, che fra le pubblicazioni dei diversi Ministeri, pur così varie di natura e di oggetto, appare l'ordinato e metodico commento di una delle più importanti leggi organiche dell'amministrazione italiana, quale è il disegno colorito con le suddette pubblicazioni concernenti la legge sulle opere pie del 17 luglio 1890 e quelle complementari della medesima.

Non a caso o con vedute aprioristiche fu scelto questo complesso di norme legislative per una esposizione interpretativa; la scelta si riconnette all'intenso lavorio, che rispetto ai servizii di assistenza e beneficenza pubblica si accentuò presso il Ministero dell'Interno in questi ultimi anni e che, fra l'altro, si accompagna all'origine della legge 18 luglio 1904, integratrice della precedente e creatrice di appositi organi per detti servizii.

E l'interesse che suscita questo ramo della nostra legislazione non potrebbe essere più diffuso e vivace.

(1) *Le riforme nell'amministrazione e le mutazioni nel fine delle istituzioni pubbliche di beneficenza*, Roma, 1906; *Ordinamento e amministrazione delle istit. pubbl. di benef.*, Roma, 1908; *Gli statuti e la procedura per le riforme delle istit. pubbl. di benef.*, Roma, 1910; *Domicilio di soccorso, spedalità, azione popolare, disposizioni generali della legge 17 luglio 1890, n. 6972, sulle istit. pubbl. di benef.*, Roma, 1914.

Dal punto di vista economico e sociale si tratta dell'ingente patrimonio di circa due miliardi e mezzo di lire, spettante ad oltre trenta mila organismi giuridici, gli uni e gli altri in continuo aumento. E si tratta di fini svariatissimi di beneficenza a cui le rendite sono devolute: fini, che ora si concretano in atti di pura carità evangelica, semplici come gli intimi motivi degli spiriti che li hanno voluti, ora, invece, importano congegni e ingranaggi di complessità tecnica, frutto di larghe e ripetute esperienze e di meditate riflessioni; fini, che talora rispecchiano assetti sociali scomparsi o sconvolti, stati d'animo svaniti o pressochè oscurati dal tempo, mentre talvolta, sotto la pressione di bisogni nuovi, erompono come getto di vivi rampolli sul vecchio tronco della beneficenza. Questo costante accumularsi e questo perenne germogliare di energie caritatevoli e soccorritrici dal seno della compagine sociale imprimono il carattere della più grande importanza pratica alle norme intese a regolare nel modo più proficuo la vita degli enti, in cui quelle energie vengono a individuarsi e personificarsi.

Nè meno viva è l'attenzione che la legge sulle opere pie si attira dal punto di vista giuridico.

Si è detto ben sovente ed è, anzi, opinione comune che il nostro diritto amministrativo è d'importazione straniera e più propriamente francese, essendosi con la unificazione amministrativa del Regno recise le varie tradizioni paesane.

Non è dubbio che l'impalcatura dell'amministrazione italiana sia stata in gran parte costruita su modelli francesi, ma non è men vero che l'edificio in molti suoi lati palesa linee di vigorosa e spiccata originalità, per molteplici istituti creati o perfezionati con elementi tradizionali o teorici dal genio nazionale. Uno di questi istituti è l'opera pia quale è delineata e configurata dalla legge 17 luglio 1890.

Difatti, in Francia la beneficenza organizzata in enti autonomi a favore della generalità, ove nasca da fonte privata, rimane tale non soltanto per l'origine ma anche per la sua figura giuridica, che sostanzialmente rientra nell'ámbito del diritto privato. Sia che la beneficenza privata si impernii in una associazione, sia che faccia capo ad una fondazione, la sua massima conversione verso il diritto pubblico ci è data col riconoscimento di essa come

établissement d'utilité publique (1). Ora, questo, come dice l'HAURIOU, non è compreso nell'ordito dell'amministrazione pubblica e le sue regole possono considerarsi come appartenenti al diritto privato; tutt'al più, per l'attività che, sebbene d'iniziativa privata, è rivolta all'interesse pubblico, si tratterebbe, secondo questo scrittore, di istituti *sur la frontière du droit public et du droit privé, à cheval, pour ainsi dire, sur les deux domaines*, se pure non è da preferirsi l'opinione di chi, come l'AVRIL e il MICHOUD, riannoda e fa corrispondere addirittura la distinzione fra *établissements publics* ed *établissements d'utilité publique* alla divisione delle persone morali in *pubbliche* e *private* (2).

Da noi invece la destinazione permanente al pubblico di una massa di beni per fini di beneficenza, fatta con atto di volontà privata, individuale o collettiva, origina, mediante il qualificato riconoscimento da parte dello Stato, l'*istituzione pubblica di beneficenza*, ossia una figura giuridica, che per disposizione di legge entra decisamente e pienamente nel campo del diritto pubblico e nell'organismo dell'amministrazione pubblica.

Le conseguenze di ciò sono notevolissime. Esse facilmente si rilevano pensando alla organica e specifica disciplina giuridica, che, come gli enti autarchici territoriali, ebbero questi enti istituzionali con le norme circa la loro struttura e il loro funzionamento, con gli ordinamenti della vigilanza e della tutela statuale, coi poteri di riforma nell'amministrazione, di mutazione del fine, di indirizzo e di coordinamento spettanti agli organi governativi.

(1) Cfr. nel volume *L'assistance française*, Paris, 1916, HÉBRARD DE VILLENEUVE, *Régime légal actuel de l'assistance publique et privée*, pag. 15; soltanto alcune speciali fondazioni, anche se d'origine privata, sono deferite, per particolare disposizione di legge, all'amministrazione del *bureau d'assistance* e per conseguenza possono considerarsi come facienti parte di un *établissement public*, ossia dell'amministrazione pubblica: cfr. Legge sull'assistenza medica gratuita 15 luglio 1893, art. 11; HAURIOU, *Précis de droit administratif*, 6e éd., Paris, 1907, pag. 246-7.

(2) Cfr. HAURIOU, op. cit., p. 252; AVRIL, *Les origines de la distinction des établissements publics et des établissements d'utilité publique*, Paris, 1900, pp. 29-31, 295 e segg.; MICHOUD, *La théorie de la personnalité morale*, I, Paris, 1906, pp. 202-5, 402.

Tutto ciò ha dato una soluzione al grave problema sui modi e sui limiti dell' intervento dello Stato in questo campo così delicato, soluzione, bisogna dirlo subito, che ebbe risultati felici, come dimostra l'incessante e crescente gettito delle fonti sociali della beneficenza; ma tutto ciò nello stesso tempo ha originato, come effetto di tanta regolamentazione giuridica portata dalla legge 17 luglio 1890 e dalle altre che la modificano e completano, una massa di questioni e di controversie, per le quali è sempre vivo e fresco il bisogno di indagini e di studi.

Opportunissima, anche da questo lato, appare pertanto la pubblicazione del Ministero dell'Interno, l'organo centrale a cui, con i servizii di assistenza e di beneficenza, converge la massima copia di dati e di elementi.

Il contenuto dei quattro volumi abbraccia la più gran parte della materia compresa nella legge del 1890, della quale non restano ad essere illustrati che i due capi sulla tutela e sulla vigilanza governativa, e, come già da prima avvertimmo, si è pur tenuto il debito conto delle altre leggi accessorie e complementari. Le linee sistematiche del lavoro seguono in generale quelle della legge organica, e ciò con giusto pensiero, giacchè, avendo lo studio tendenze e fini essenzialmente pratici, sarebbe stato un fuor d'opera indugiare in sottigliezze e scrupolosità sistematiche.

Ma, d'altro lato, il rispetto all'ordine legislativo è un ossequio ragionevole; ogni volume sta da sè per la materia in esso racchiusa e i varii articoli di legge sono opportunamente raggruppati e disposti secondo gli argomenti e il nucleo di questioni a cui si riferiscono, cosicchè il commento, invece di spezzettarsi in minute chiose di articolo per articolo, procede pieno e nutrito e fluisce entro naturali confini concettuali.

Il metodo seguìto consiste nella esposizione critica della giurisprudenza amministrativa e giudiziaria, svoltasi in applicazione della legge, e la caratteristica che prima spicca in questa esposizione è la densa pienezza della materia trattata. L'applicazione della norma giuridica ai casi concreti è perseguita attraverso alle più minute manifestazioni giurisprudenziali e si può sicuramente affermare che nessuna delle questioni agitate dinanzi a collegi amministrativi o a giurisdizioni ordinarie e speciali venne dimenticata o trascurata, per cui è proprio il

caso di ripetere qui — con mutato concetto — *quod non agnoscit glossa non agnoscit curia.*

Alla completezza della materia si accompagna una illustrazione della medesima veramente eccellente; l'elaborazione critica del vasto materiale palesa una signorile maestria, quale soltanto può essere frutto di squisito senso giuridico e di soda dottrina. Di questa, poi, è sempre fatto un uso giudizioso e sagace, nulla ponendosi in mostra a titolo di puro sfoggio appariscente, nulla trascurandosi della produzione dottrinale che sia direttamente connesso o conferisca all'argomento. La trattazione, svolgendosi ferma e serrata sulla linea della legge, non soltanto pone in rilievo la portata e l'efficienza, ma addita anche i difetti, le oscurità e le lacune del testo legislativo e suggerisce gli opportuni rimedi mediante proposte di riforme e di modificazioni ai singoli punti, cosicchè l'opera, mentre appresta e fornisce gli strumenti per una fruttuosa applicazione del diritto vigente, traccia insieme il solco e getta il seme del diritto futuro.

Questi risultati sono raggiunti senza ingombranti avviluppi di scorse e raffronti storici e di speculazioni sociali e filosofiche, che sarebbero dissonanti dall' indole del lavoro, ma con la piena e illuminata padronanza della legislazione regolatrice della materia e col sussidio di una larghissima esperienza, la miglior pietra di paragone della bontà degli ordinamenti legislativi. L'opera occupa oramai un posto altamente ragguardevole nella recente letteratura giuridica e per essa, che ad una voluta semplicità di forma e sobrietà di apparato congiunge il pregio peregrino della più succosa sostanza, ben si può scrivere, a guisa di motto, il verso di Orazio:

non fumum ex fulgore, sed ex fumo dare lucem.

Ancora sulle premesse economiche del contratto collettivo di lavoro.

Nota II del Socio GIUSEPPE PRATO.

A conclusioni non diverse conduce la considerazione del problema da qualche altro punto di vista.

Scopo fondamentale dell'organizzazione deve considerarsi, come è noto, la consecuzione del monopolio dell'offerta rispetto ad un ramo di industria (1). Dato dunque il caso limite, in cui l'intento sia integralmente raggiunto, il problema è di vedere se l'unico contraente così sostituito ai molti abbia potere di realizzare, in confronto ad essi, una somma di rimunerazione complessivamente più elevata. Ma sappiamo che, per la legge di Cournot, il monopolista non può fissare che il prezzo a cui vuol vendere oppure la quantità della merce che vuole esitare, non le due cose contemporaneamente (2); dilemma che, nel caso d'una merce eminentemente non conservabile come il lavoro (3), fa capo alla necessità del collocamento immediato o di poco differito dell'intiera quantità disponibile, a un prezzo sul quale la volontà dell'offerente non esercita influenza se non nella misura in cui riesce a rinvigorire le proprie forze di resistenza o

(1) Cfr. LORIA, *Il movimento operaio*, p. 33 e sgg.

(2) Cfr. *Principii matematici della teorica della ricchezza* (tr. it.), in " Biblioteca dell'economista „, ser. 4ª, vol. II, p. 101 e sgg.

(3) Di tale attributo mi pare non tenga conto sufficientemente l'EDGEWORTH, quando afferma che le unioni possono raggiungere un saggio di salario più elevato non cercando di fissare il *quid pro quo*, le quantità di lavoro da scambiarsi con ricchezza, ma soltanto la ragione dello scambio. Cfr. *Mathematical psychics*, p. 43 e sg.

di attesa, pur al costo della distruzione d'una quota di ricchezza uguale alla inoperosità temporanea procurata agli agenti produttivi che rappresenta.

Nell'ipotesi quindi di una parità, nei due casi, di consapevolezza in ciascuna delle parti contrattanti delle condizioni e disposizioni di scambio dell'altra; e supponendo non alterate per il fatto della mutata forma d'offerta le facoltà di riserva di cui capitale e mano d'opera rispettivamente dispongono, è chiaro che un sindacato operaio perfettamente monopolistico sarà organicamente inetto a conseguire durevolmente un vantaggio superiore alla somma di quelli realizzati dai singoli suoi membri, dovendo limitarsi a distribuire diversamente la rimunerazione complessiva, spostando a pro dei gruppi inferiori una parte dei proventi eccezionali più alti. Onde risulta evidente che la sostituzione pura e semplice del contratto collettivo all' individuale ha per primo effetto di eliminare le tariffe che stanno in cima alla scala, cioè di vietare alla serie dei prezzi di toccare i massimi a cui la molteplicità delle transazioni isolate li spingerebbe.

Ma l'ipotesi del monopolio rimane, in questo campo anche più che in altri, puramente teorica; il che del resto è conseguenza logica del fin qui detto; perocchè il sindacato operaio risulta dalle esposte considerazioni un'entità economica *sui generis*, viziata nel suo sviluppo da una organica, quasi paradossale forza limitatrice: la non convenienza cioè di raggiungere il monopolio completo. Nel fatto, in teoria come in pratica, l'organizzazione non comprende che una parte, spesso assai ristretta (1), della categoria che rappresenta; onde le tariffe che adotta rientrano nella

(1) In Inghilterra i soci della *Trade-unions* raggiungono al massimo il 30 % del totale degli operai industriali; non toccano che il 14,05 % in Austria (1905), il 12 % nel Belgio (1905), il 20 % in Francia (1902), ecc. La proporzione diventa minima se si considera l'intiera classe salariata (appena il 3 % agli Stati Uniti). Cfr. A. Graziani, *Istituzioni di economia politica*, 2ª ed., Torino, 1908, p. 493 e sgg. Nei paesi scandinavi, che raggiungono la proporzione più alta, questa tocca il 50 % degli operai delle industrie. Cfr. C. Renard, *Syndacats, trade-unions et corporations*, Parigi, 1909, p. 321. Per alcune categorie la percentuale è invero assai maggiore. Pei tipografi salì, in qualche paese, al 75 %. Cfr. *Bollettino dell'ufficio del lavoro*, agosto 1906, p. 445 e sgg. Ma ciò non toglie all'insieme del movimento il carattere di fenomeno di minoranza.

figura intermedia dei prezzi di coalizione, rivestendone tutti i caratteri.

Tra questi sta in prima linea la considerazione dei costi a cui un sindacato deve sottostare per mantenere integra la propria compagine contro le forze dissolventi che continuamente la insidiano.

Ben nota è l'importanza del problema ai sindacati capitalistici, i quali si trovan continuamente di fronte al dilemma, o di assorbire, con sacrificio proprio, i concorrenti più deboli (spesso moltiplicati appunto per sfruttare la modificata condizione del mercato), ovvero di eliminarli ed assogettarseli, con procedimenti il più delle volte non meno costosi. Parimenti per le leghe, la posizione più vantaggiosa è quella in cui riescon composte da pochi individui, ottimi operai, che comandano despoticamente a numerosi plebei, ma non li ammettono ai benefizi dell'organizzazione. Questa plebe è continuamente spinta ad agire da krumira, come le ditte deboli sono spinte a vendere a sotto costo; ed a pretendere, come quelle, la sua ricezione nel seno della lega, il che, quando riesce, ne rende più difficile la condotta, e la costringe ad esigere un salario minore, quale prezzo di equilibrio di un maggior numero di individui, cioè d'una maggior offerta (1). Còmpito dell'organizzazione essendo quello di premunirsi contro il rischio di concorrenza dei disoccupati, essa deve — come ammettono i suoi fautori più convinti — far sopportare in parte il costo della assicurazione dagli operai più eletti. Questi però, si afferma, vi sottostanno soltanto fino a quel limite in cui la tariffa — per dirla in termini assicurativi — non supera il premio (2). Se non che proprio nella determinazione di questo punto risiede, in pratica, la grande incognita. Nè giova dimenticare a tal proposito, il nuovo orientamento di cui offre spettacolo da alcuni anni il movimento unionistico, con la tendenza ad assorbire schiere sempre più numerose delle classi inferiori, non già perchè le giudichi utili al raggiungimento dei proprii fini economici diretti, bensì per valersene a scopi di

(1) Cfr. Pantaleoni, *Scritti varii d'economia*, ser. 2ª, p. 202.

(2) Cfr. Cabiati, *La politica industriale delle organizzazioni operaie*, conclusione del § 2°.

ascensione politica (1); fatto che, indipendentemente dagli eventuali vantaggi che se ne attendono per altra via, non può a meno di agire in senso depressivo sul livello dei salari collettivamente stipulati. I migliori conoscitori, del resto, dell'ambiente operaio, non negano che una parte notevole dei miglioramenti procurati alla massa siano ottenuti a prezzo di sacrifizi dei gruppi superiori (2).

La determinazione dei salari minimi richiesti dalle organizzazioni, ci informa il Cabiati, vien fatta il più delle volte in base alla media ponderata delle mercedi correnti; ma, ottenuto questo risultato, è interesse dei sindacati " che non sussistano " distacchi troppo considerevoli fra il compenso di operai di " abilità non troppo dissimile; onde la loro tendenza ulteriore " consiste assai più nell'elevare i salari degli operai in condizioni " peggiori che non nel migliorare quelli degli operai in condi" zioni già discrete „ (3). Gli industriali, costretti a pagar più cara la mano d'opera scadente, se ne rivalgono, possibilmente, sulla superiore. Lo confermano, per l'Australia, ufficiali e non sospette inchieste: " When the court prescribes a minimum " equal to or above the average wage previously paid, the " employer may meet this change by two different policies. In " order to keep his payroll down, he often lowers the pay of " his more competent hands, to compensate himself for the " higher rate he is obliged by law to give his poorer workers. " This brings about a level wage for all employees. Such effect " has been remarked by a royal commission investigating the " operation of the wage boards in Victoria and has been com" mented upon in the decisions of the arbitration court in New

(1) Cfr. V. Porri, *Socialismo di stato, socialismo delle gilde e tradeunionismo nel mondo del lavoro inglese*, in " Riforma sociale „, giugno-luglio 1915. Ma la deformazione politica del movimento unionistico è fenomeno universale.

(2) Già notava il d'Eichtal che la convenzione collettiva, tendendo a fare della mediocrità la regola e il limite generale, riesce all'oppressione dei migliori per parte dei meno abili, semplicemente perchè questi sono più numerosi, cit. De Ribes-Christofle al Congresso della federazione industriale francese del 1907. Cfr. " Bulletin de la Fédération des industriels et commerçants français „, marzo 1907, p. 491.

(3) Cfr. *La politica industriale delle organizzazioni operaie*, § 2°.

" Zealand. Statistics indicate that, in probable a third of the " occupations regulated by the court in that colony, the maximum " wage does not exceed the minimum fixed by the award „ (1).

Incontestabile è certo, come oppone il Cabiati, che la stipulazione della tariffa collettiva non toglie a qualunque operaio la facoltà " di chiedere un salario superiore, che gli verrà concesso se e nella misura in cui la sua efficienza di lavoro sorpassa quella della mano d'opera media „; ma non è d'altra parte men vero che questa " libertà „ gli servirà a ben poco, tranne se trattisi di lavoratore di abilità eccezionale (dotato quindi di una specie di personale monopolio), o di industria richiedente un grado particolarissimo di perizia tecnica e nella quale i lavoratori molto specificati rappresentino, rispetto al totale, una infima, sebbene indispensabile minoranza. In ogni altro caso l'imprenditore, accedendo alle proposte del sindacato quanto ai gruppi più poveri, pretenderà al tempo stesso sicure garanzie rispetto ai meglio retribuiti, che l'ente appaltatore dovrà impegnarsi a fornirgli a condizioni possibilmente compensatrici dei sopra-valori accordati ai primi. È chiaro che l'inconveniente deve nascere quanto più le unioni, per fini politici, abbandonano la loro tradizionale tattica aristocratica, per aggregarsi masse amorfe, la cui esorbitanza di pretese non è certo proporzionata all'apprezzamento di cui godrebbero sul mercato libero (2).

Per quanto però considerazioni extra-economiche premano nel senso di far oltrepassare d'assai il limite di maggior convenienza, è evidente che il sistema della incorporazione dei più deboli non può spingersi troppo oltre senza rivelarsi assolutamente rovinoso. Barriere regolamentari rigorose stanno pur sempre a tutela del privilegio, che gli organizzati vogliono, malgrado tutto, mantenere (3). Onde la necessità di apprestare altre

---

(1) Cfr. V. S. Clark, *The labour movement in Australasia*, Westminster, 1906, p. 230.

(2) La tendenza si esagera talora fino al punto da tentare di reclutare la totalità della maestranza d'un'industria e da escogitare piani di iscrizione obbligatoria alle leghe. Cfr. G. D. H. Cole, *The world of labour*, Londra, 1913, p. 370 e sgg.

(3) Cfr. per l'analisi dei metodi adottati a tal uopo: T. E. Wolfe, *Admission to american trade-unions*, in " J Hopkins university studies „,

difese contro la persistente minaccia di concorrenza degli esclusi, considerandoli come nemici, contro i quali è lecita qualsiasi violenza. Alla funzione assicuratrice del contratto collettivo vengon così ad aggiungersi degli scopi offensivi, fonte alla loro volta di costi spesso elevatissimi. Se invero questo genere di stipulazione si riducesse, come vorrebbero alcuni (1), ad una intesa di massima sovra una formula-tipo, adatta a servir di norma e di base ai contratti individuali o ad interpretarne e dirimerne le ambiguità in caso di controversia, a nessuno verrebbe in mente di contestarne la utilità. Ma ben diverso è il còmpito che all'istituto si assegna. E l'incertezza stessa che domina nella individuazione della sua figura giuridica — tanto che alcuni perfino lo definirono un atto di gestion d'affari o una stipulazione a favore di terzi (2) — ne dimostra la tendenza verso un più preciso e più largo concetto di obbligatorietà.

Intento dominante ed effetto necessario della fissazione di un salario minimo (clausola essenziale d'ogni contratto collettivo) sono in realtà quelli di eliminare dal mercato tutta la porzione d'offerta il cui valore non tocca il livello di retribuzione stabilito. L'ostracismo dei non sindacati si otterrebbe del pari con l'adozione d'una clausola che espressamente vietasse ai padroni di assumerli. Ed è noto quante volte simile pretesa sia stata scritta fra le domande delle unioni, e come di frequente queste siano riuscite a farla trionfare. Ma le resistenze sono sempre, in tal campo più che in altri, tenacissime (3); e, d'altronde, l'accordo sul minimo di mercede offre del problema una soluzione meno odiosa e più elegante, anche se in parte più subdola; avendo, fra l'altro, il merito illusorio di apparire premura di sollecitudine benefica anzichè atto di dichiarata ostilità verso i

XXX, n° 1, Baltimora, 1912. G. Sorel ricorda che, quando le vecchie unioni vollero ammettere operai *unskilled*, pochi fra questi poterono entrarvi, per l'altezza delle quote. Cfr. *Avenir socialiste des syndacats*, Parigi, 1901, p. 34.

(1) Cfr. Colson, *Cours d'économie politique*, vol. II, p. 118.

(2) Cfr. P. Pic, *Traité élémentaire de législation industrielle. Les lois ouvrières*, 4ª ed., Parigi, 1912, p. 331 e sgg., e P. Lottmar, *Der Arbeitsvertrag*, t. I, 1902, sez. 5ª, *Der Tarifvertrag*.

(3) Cfr. F. T. Stockton, *The closed chop in american trade-unions*, in " J. Hopkins university studies ,, XXIX, n° 3, Baltimora, 1911.

più miseri (1), pur facendo capo, in pratica, ad una pari espropriazione a loro danno (2). Sappiamo infatti che, essendo il minimo basato sulla capacità media e non sulla peggiore, il primo suo effetto è di provocare il licenziamento degli infimi, inetti a migliorare la propria lavorazione fino a raggiungere quel grado di rendimento (3), e che in tale provvedimento si trovan pacificamente concordi imprenditori e maestranze (4). Le democrazie australiane offrono al riguardo tesori di istruttiva esperienza (5). Ai reietti della automatica selezione riserbasi, sotto l'egida delle unioni, una ben invidiabile sorte: quella di servire come avventizi od aiuti agli operai veri per accrescerne la efficienza (6);

---

(1) Cfr. in tal senso le ridondanti frasi del Gemähling, *Travailleurs au rabais*, p. 372 e sg.

(2) La richiesta del minimo di salario diviene così una manifestazione di quella aggressività dei redditi superiori (coalizzati) contro gli inferiori di cui parla il Loria, *La sintesi economica*, Torino, 1909, p. 316.

(3) Ne convengono anche i più convinti difensori del proposto metodo, come R. Jay, *Le contrat collectif de travail*, in " Revue d'économie politique „, XXI, 1907, pp. 561 e sgg., 649 e sgg.

(4) Cfr. Cabiati, *La politica industriale delle organizzazioni operaie*, § 2°.

(5) Cfr. Clark, *The labour movement in Australasia*, p. 228 e sgg.; e *Labour conditions in New Zealand*, in " Bulletin of the Bureau of labor „, Washington, 1903. Cfr. anche M. Métin, *Le socialisme sans doctrines*, Parigi, 1901, p. 142 e sgg.; e specialmente D. Bellet, *Illusions socialistes et réalités économiques*, Parigi, 1912, p. 160 e sgg. e passim. Che il tentativo di elevare certi salari abbia potuto deprimerne altri, diffondendo anzichè estirpando certi sfruttamenti, lo ammettono anche autori animati da benevola simpatia per la riforma, come il Chapman, *Work and wages*, vol. II, p. 257 e sgg.

(6) Cfr. Cabiati, *La politica industriale delle organizzazioni operaie*, § 2°. Talvolta, anche nel contratto collettivo, si stipula una tariffa per gli inabili, ma circondando la magnanima concessione di molte cautele e per lo più limitandola ai vecchi ed agli infermi. Cfr. per l'Australia (Victoria), " Bulletin de l'Office international du travail „, 1907, p. 203; e, per la Germania, J. Leroy, *Le contrat collectif de travail en Allemagne*, Parigi, 1909, p. 116. Anche la legge inglese 20 ottobre 1909 sui minimi di salario a domicilio autorizza a impiegare " a condizioni speciali „ gli operai più deboli. Cfr. Pic, *Traité élémentaire de législation industrielle*, p. 785. Ma i sindacati vigilano perchè del permesso non s'abusi. E, in Australia, si nota che gli industriali stessi esitano ad assumere questi operai tollerati, per non esser sottoposti a particolare sorveglianza legale e divenire sospetti di *sweating*. Cfr. Bellet, *Illusions socialistes et réalités économiques*, p. 160.

sistema di sfruttamento d'altronde assai simpatico alle aristocrazie proletarie dei due mondi, che ne seppero fare una così sapiente applicazione rispetto alla mano d'opera gialla, in taluni paesi degli antipodi (1), e che, anche in Europa, accettano senza proteste, anzi spesso stimolano spietatamente, i servizi delle umili vittime d'una nefanda ingordigia (2).

Un altro effetto del salario minimo industriale deve necessariamente esser quello di deprimere le mercedi nelle campagne circostanti, rallentando l'assorbimento per parte delle fabbriche della forza di lavoro greggia, inetta per qualche tempo ad un rendimento adeguato a tale livello di retribuzione, ma la cui continua chiamata negli opifici è causa della differenza favorevole ai lavoratori che si osserva nei salari agricoli dei distretti di florida industria (3).

Così tutti gli sforzi dell'organizzazione contro gli accordi

---

(1) Cfr. L. Aubert, *Américains et Japonais*, Parigi, 1908, p. 80 e sgg. Anche in Europa e fra operai della stessa razza e nazionalità non sarebbe difficile citare esempi di analoghi sfruttamenti. Il Denny ricorda, fra gli altri, il caso non infrequente di cottimisti specializzati, che impiegano manovali con salario a tempo per compiere in loro vece la parte di lavoro esclusivamente manuale e li trattano con tirannico arbitrio. Cfr. A. B. Bruce, *The life of William Denny*, Londra, 1889, p. 113.

(2) Le memorande inchieste sulla condizione dei minorenni italiani nelle vetrerie francesi, che condussero a provvidi interventi legislativi, non posero soltanto in luce l'odiosa indifferenza morale congiunta alla miseria profonda di certe regioni nostre, ma altresì la brutalità inaudita con cui gli operai francesi sfruttavano fino all'esaurimento ed alla morte le deboli forze dei loro piccoli ausiliarî. Cfr. specialmente il benemerito rapporto di L. Scelsi, *I minorenni italiani e le vetrerie francesi*, in " Bollettino del Ministero degli affari esteri ", dicembre 1900; e le successive relazioni dell' " Opera di assistenza degli operai emigrati in Europa e nel Levante ", che, per iniziativa di Ernesto Schiaparelli e di Alberto Geisser, diede opera coraggiosa al risanamento della piaga. Lo Scelsi insiste in modo speciale sull'influenza esercitata sul doloroso fenomeno dalle esigenze della mano d'opera locale, che rendon inevitabile la condizione servile degli Italiani.

(3) Cfr. su questo aspetto, generalmente trascurato, del problema: T. Mackay, *The dangers of democracy*, p. 173 e sg.; e, per le interdipendenze tra i compensi del lavoro industriale e dell'agricolo in un paese, Cornelissen, *Théorie du salaire et du travail salarié*, p. 358 e sgg. Dati e rilievi interessanti al riguardo reca pure L. G. Chiozza Money, *The future of work*, Londra, 1914, p. 141 e sgg

individuali fan capo, nella migliore ipotesi, alla creazione d'un privilegio a pro degli operai cittadini medi, venditori di un " lavoro ordinario, quale può esser fornito da un operaio privo " di capitale e di coltura speciale, o di rara ed eccezionale abi" lità " (1); pagandone le spese i migliori, a cui si precludono i guadagni massimi, e gli infimi, relegati nella disoccupazione cronica o in uno stato di rassegnata schiavitù. Ma se ai primi non mancano, fino a un certo segno, mezzi di sottrarsi alla tirannica imposizione, giovandosi della mobilità che li distingue — la forte emigrazione di lavoratori scelti avveratasi negli ultimi anni dall'Inghilterra, in contrasto colla crescente espansione industriale, potrebbe indicarlo (2) —, i secondi non si adattano senza assidua lotta alla loro sorte, mantenendo negli imprenditori, con una offerta insistente, velleità di tenace resistenza ai vincoli pretesi. Di qui il carattere forzatamente precario delle vantate conquiste e la necessità di difenderle con la preparazione e le frequenti azioni belliche, le quali si traducono per le unioni in nuovi costi elevatissimi. Chiarita infatti l'insufficienza del sistema dei sussidi d'emigrazione, con cui le leghe si sforzaron per molti anni di alleggerire il mercato dalle scorie più ingombranti (3); prevalso il concetto che il livello dei salari dipenda, non dal rapporto fra domanda e offerta, ma dalla ferma insistenza dei lavoratori in un elevato tenor di vita, l'arma dello sciopero diviene espediente di politica normale, ed imperversa con una estensione ed una violenza ignote per l'addietro. Agli Stati Uniti l'aumento nel numero degli scioperanti fu, dal 1881 al 1905, continuo e impressionante (4), e le somme pagate dalle unioni ai loro membri impegnati nella lotta toccarono, dal 1881 al 1900, un totale di 16.174.793 dollari, mentre

---

(1) Cfr. Pantaleoni, *Pure economics* (tr. ingl.), Londra, 1898, p. 285.

(2) Cfr. J. Bardoux, *L'Angleterre radicale (1906-1913)*, Parigi, 1913, p. 479.

(3) Molto popolare fra il 1840 e il 1860, questo sistema del vecchio unionismo fu quasi del tutto abbandonato in seguito, sebbene tuttora se ne avverta qualche traccia. Cfr. W. E. Weyl, *Benefit features of the british trade-unions* ", in " Bulletin of the Bureau of labor ", 1906, maggio, p. 669 e sgg.

(4) Cfr. *Twenty-first annual report of the U. S. commissioner of labour*. Washington, 1906, p. 15.

a 257.863.478 si calcola l'ammontare delle mercedi perdute (1). Nè è possibile tradurre in cifre il sacrifizio economico imposto alle ingenti masse implicate negli ultimi formidabili conflitti, che perturbarono così profondamente il mondo del lavoro britannico. L'incertezza stessa dei metodi proposti a misurare il danno di uno sciopero e i compensi che ne procura l'eventualità della vittoria porge una chiara riprova dell'alto costo dei vantaggi che, nella migliore ipotesi, è lecito ripromettersi per tale via (2).

Uno studio d'altronde più analiticamente approfondito dei più caratteristici ambienti operai rivelerebbe agevolmente altri sacrifizi ed altre perdite a cui i consociati devon sottostare, in omaggio alla tattica delle organizzazioni. La guerra dichiarata ai lavoratori inferiori, agli stranieri, alle concorrenze femminili ed infantili, domiciliari e carcerarie non si esplica esclusivamente e sempre in opposizione agli imprenditori per vincolarne la libertà di scelta. Almeno altrettanto importante è l'azione diretta, che, col boicottaggio, ove non basti la pacifica persuasione, mira ad eliminare inesorabilmente la pressione di queste forze. Il fenomeno è particolarmente notevole per noi in quanto tende a far scomparire ogni forma di provento individuale o famigliare accessorio, sia che trattisi di miglioramenti personali ottenuti nella fabbrica stessa per anzianità e capacità propria o per altrui benevolenza (partecipazione ai profitti, premi di diligenza o di produttività (3)), sia che si parli invece dei guadagni

(1) Cfr. *Sixteenth annual report of the U. S. commissioner of labour*, Washington, 1901, p. 24.

(2) Cfr. la elegante polemica che al riguardo si svolse, nel 1905 e 1906, fra il Loria, il Montemartini, lo Jannaccone, il Colètti, il Bachi; riassunta e coronata di suggestive osservazioni proprie da G. Valenti, *Principii di scienza economica*, Firenze, 1906, p. 484 e sgg. *n.*

(3) Contro il cottimo lottarono a lungo le unioni. Cfr. D. Schloss, *Les modes de rémunération du travail* (tr. fr.), Parigi, 1902, p. 56 e sgg. Oggi vi si sono in massima adattate, dove la sua adozione sia conciliabile col contratto collettivo. Cfr. Webb, *La democrazia industriale*, p. 302. Anzi i loro fautori più fervidi sostengono che nella pratica del sistema, come integrazione del salario comune, sta il compenso dei migliori operai vincolati dal contratto collettivo. Cfr. Cabiati, *La politica industriale delle organizzazioni operaie*, § 2°. Se non che apologisti meno accorti, ascrivendo a merito

realizzati nelle ore libere o dovuti all'opera supplementare della moglie, dei figli, di congiunti men validi. La lotta contro simili integrazioni del bilancio di famiglia è, pure nei casi in cui si dissimula, universale e vivacissima; ma, a giudizio stesso dei

delle organizzazioni la tendenza a sopprimere tali disuguaglianze, forniscon su questo punto pericolose testimonianze. Nei sindacati francesi, scrive uno dei più ingenui, la lotta contro le forme stimolanti di rimunerazione è sempre ardentissima. Il regime sindacale tende sempre più a regolare sovranamente il salario, la durata del lavoro, il modo di rimunerazione, la produttività stessa dei suoi membri. E questo ci rivela un notevole spostamento della costrizione. All'origine i raggruppamenti operai si difendono contro la concorrenza esterna; ma, in seno alla professione, regna un individualismo assoluto; ciascuno aumenta a suo piacimento il proprio benessere personale, ricorre alle ore supplementari, regola a sua volontà, mediante il cottimo, la propria produttività. Ed è questo lo stadio a cui si sono arrestate le vecchie unioni inglesi di operai qualificati (quelle probabilmente a cui si riferisce l'argomento defensionale del Cabiati). Ma, nelle altre, a poco a poco la libertà individuale scompare, per far posto alla regola comune, e il controllo sindacale si estende, determinando un concetto sempre più rigoroso della coesione professionale indispensabile. Cfr. GEMÄHLING, *Travailleurs au rabais,* p. 378 e sgg. La bella inchiesta americana sui vari metodi di restringere artificialmente la quantità di lavoro fornita ci procura su questo punto le più istruttive rivelazioni. " Usually it is " found — riassume il rapporto — that the scale of wages established by " a union is a minimum scale, and that the employer is permitted without " opposition to pay higher, but not lower, wages to individuals. This being " the case, it would appear that the employer could offer to the speedier " men a wage higher than the minimum, and thus gradually raise the " level of speed, should he see fit. This indeed does occur in various trades, " but its full and free operation as a mean of inducing speed is checked " by two or three conditions generally insisted on by the unions. In the " first place the payment in excess of the minimum must not be computed " in proportion to outpout, since this would establish a bonus system and " a dead line, both of which are practically a return to piecework. In the " second place, the minimum is usually placed so high that, in the esti" mation of the employer, he can not afford to pay more than the mi" nimum. As a matter of fact it has been found that where the minimum " scale is in vogue, the wages range very close to the minimum, but in " nonunion establishments, there is much wider range between the lowest " and highest extremes „. Cfr. C. D. WRIGHT, *Regulation and restriction of outpout* (12th special report of the commissioner of labor), Washington, 1904, p. 19. Il prestigio d'altronde che ancora conserva negli ambienti unionistici il pregiudizio della " massa di lavoro „ concorre alla diffusione

suoi apologisti, difficile fra tutte, per le tenaci opposizioni e reazioni che suscita fra gli operai sindacati medesimi, di cui minaccia spesso gli interessi più gelosi, le più personali abitudini, le ragioni più intime di vita morale, fondata su doti di intelligenza, virtù di operosità, spirito di sacrificio degni d'ogni rispetto (1). Qualunque risultato adunque ottenuto in tal senso rappresenta, per parte dei consociati, una rinunzia, la quale, per quanto difficilmente valutabile in cifre precise, deve esser portata in aggiunta dei costi che la soppressione della indipendenza dei contratti singoli importa a carico della collettività organizzata. Nel lavoro agricolo il fenomeno si profila con lineamenti anche più tipici, per le resistenze che incontra, nella psicologia ostinata, diffidente ed interessata del contadino, ogni tentativo di farlo divergere dalla linea di condotta istintiva dell'individuale tornaconto. Onde lo sforzo delle leghe per monopolizzare la mano d'opera, vietando qualunque patto di partecipanza o sopprimendo ogni libertà di scelta dei proprietari, entro i limiti stessi del contratto-tipo, si svolge attraverso una serie non interrotta di aspri contrasti, di cui gli episodi selvaggi dei boicottaggi romagnoli ed emiliani e gli assassinii di Molinella non sono che gli indizi tragicamente appariscenti (2). Ma, anche fra il proletariato cittadino, la sensazione della esorbitanza dei costi a cui le reazioni sempre più intense provocate in ogni senso ed in ogni campo fatalmente condannano la esecuzione integrale del

d'una psicologia contraria all'intensificazione individuale dello sforzo, retribuita con varie forme di sopra-salario. Per l'estensione e l'efficacia di questo fattore morale, cfr. Maxweiler, *Sur le conflit des évaluations dans le débat du salaire*, in " Revue d'économie politique ", XXI, 1907, p. 584 e sgg.

(1) Cfr. Gemähling, *Travailleurs au rabais*, p. 320 e sgg. Ai moventi psicologici delle ostilità contro ogni forma di sopra-salario accenna pure F. W. Taussig, *Inventors and money-makers*, New York, 1915, p. 66.

(2) Cfr. M. Missiroli, *Satrapia*, Bologna, 1914, p. 15 e sgg. e N. Ragghianti, *Gli uomini rossi all'arrembaggio dello Stato*, Bologna, 1914, p. 11 e sgg. Il problema dei costi dell'azione sindacale nelle campagne dovrebbe poi esser particolarmente studiato in rapporto alla disoccupazione prodotta dalle provocate misure difensive dei proprietari, che con la trasformazione delle colture, dove non bastò la sostituzione delle macchine al lavoro umano, ridussero sensibilmente la richiesta di quest'ultimo, deprimendone il valore di mercato.

programma sindacale (1), tende ad attenuarne sensibilmente il prestigio (2). Si sente confusamente che una condizione di mercato procurata e mantenuta mercè una serie così concatenata di inevitabili atti di violenza contiene, nella sua logica stessa, i germi di formidabili correttivi, a contrastare i quali occorron sacrifizi continui e spesso superiori al compenso. E la confessione più evidente della nuova consapevolezza che si vien diffondendo della inettitudine dei mezzi adoperati, cioè del contratto collettivo puro e semplice, a raggiungere gli scopi che gli furon proposti appare nel recente orientamento politico dei partiti operai, i quali pretendono di far sopportare dalla società — sotto forma di pensioni di invalidità e di vecchiaia, di assistenza gratuita, di lavori pubblici pei disoccupati, di mille forme di anti-economica liberalità — il costo dell'ostracismo spietato mercè il quale le unioni si liberano delle più nocive concorrenze. Soltanto invero a tal fatto il prezzo di coalizione da esse praticato conserva la speranza di mantenere un discreto livello (3).

(1) Di tali reazioni richiede una special menzione quella che si manifesta nella costituzione dei sindacati padronali di difesa, sorti in massima parte o radicalmente trasformati per opporsi agli scioperi, ai boicottaggi, ecc., ed importanti a lor volta costi spesso elevati che, falcidiando il prodotto netto dell'industria, tendono a diminuire non meno i salari che i profitti. Che si tratti in massima parte di fenomeno di ritorsione lo dice la cronologia e lo dimostra la storia di tali associazioni. Cfr. B. Succio, *Le organizzazioni sindacali padronali di resistenza nel campo economico sociale*, Torino, 1911, p. 19 e sgg.

(2) Fin da quando l'azione delle unioni inglesi prese ad accentuarsi nel senso delle nuove direttive, non mancò chi ebbe ad osservare che il sacrificarsi pel " diritto divino „ dei sindacati non poteva rimanere per lungo tempo un'idea popolare in un paese che, nel nome della libera dignità umana, aveva così inesorabilmente estirpato ogni concetto di diritto divino dagli organi supremi della sua vita pubblica. Cfr. Mackay, *The dangers of democracy*, p. 29.

(3) Nella lotta agraria che dura da più anni, con alterna vicenda, in Romagna si può osservare in modo tipico come il successo della politica delle leghe presupponga il continuo intervento dello stato come datore di lavoro, a rimedio degli inconvenienti provocati dal tentativo di monopolio operaio. Cfr. A. Caroncini, *La questione delle trebbiatrici a Ravenna*, in " Giornale degli economisti e rivista di statistica „, ott. 1910, genn., marzo, giugno 1911. Ciò ammette del resto anche il Cabiati, quando dice che i lavoratori ravennati " si valgono dei lavori pubblici come riserva per im-

Prescindendo però da questo aspetto del problema, che dal campo puramente economico sconfina in quello, meno rigoroso, del parassitismo sociale; e tentando di ridurre a risultanze positive quanto siam venuti esponendo, sembrami incontestabilmente confermato anzitutto che il metodo del contratto collettivo abbia, a giudizio stesso dei suoi fautori, per primo effetto di frenare le forze ascensionali degli ottimi (tecnicamente e moralmente) e di peggiorare la condizione degli infimi, con l'intento di giovare agli strati medî, costituenti il nerbo delle organizzazioni; onde mal s'oppone chi nel diffondersi di questa pratica ravvisi una sicura via di miglioramento per le sorti del proletariato, considerato nel suo complesso. Passando poi a riguardare il fenomeno nell'esclusivo e limitato rispetto di quella parte delle classi lavoratrici che si ritiene particolarmente avvantaggiata da simile mezzo, devesi riconoscere altresì che i risultati che se ne ripromettono rimangon in molti casi, indipendentemente dall'esito apparente delle formulate richieste, totalmente o parzialmente illusori, se pur non toccano la zona delle utilità negative.

L'impresa di appalto della mano d'opera nella quale si assomma l'azione del sindacato tende infatti, come vedemmo, a sostituire al prezzo di concorrenza una tariffa, che del prezzo di coalizione presenta in grado eminente le caratteristiche ben note di insicurezza e di costosità. La scomparsa pertanto dell'offerta libera è contrassegnata da un aggravio delle passività da dedursi dal prezzo della merce per ottenere il ricavo netto; ciò che basta a classificare tale manifestazione della tattica sindacale tra gli atti contrari alla funzione riduttrice di costi in cui il Pantaleoni ravvisa l'utilità essenziale di consimili aggruppamenti.

Se non esistessero ostacoli a riversare sui profitti l'artificiale incremento di costi, il sistema raggiungerebbe evidente-

porre ai proprietari delle terre patti sempre migliori „. Cfr. *I conflitti di Romagna, le cooperative e il socialismo*, Milano, 1911, p. 27. In Australia poi i partiti operai non esitano a proclamare apertamente che il lavoro di stato, con relativo salario minimo, è il complemento logico dell'interventismo applicato all'industria privata. Cfr. Bellet, *Illusions socialistes et réalités économiques*, p. 162 e sgg.

mente il suo scopo. Ma sappiamo che la rimunerazione del lavoro, come quella degli altri agenti della produzione, tocca un limite massimo nel rendimento dell'opera a cui viene applicato, e che, in regime di concorrenza (anche imperfetta), essa ha tendenza normale, in un periodo sufficientemente prolungato, a raggiungerlo; onde è vuota di senso, economicamente parlando, l'espressione comune d'un lavoro pagato " meno di quanto merita " (1). Stretta in un cerchio così inesorabile, ben si comprende come l'azione sindacale non possa, a lungo andare, trovar scampo alla bancarotta delle nuove sue massime relative alle leggi del salario, fuorchè nella invocazione e nella richiesta minacciosa di estranei risarcimenti, tendenti a far sopportare dalla collettività i costi anormali di cui viene ad esser gravata la merce offerta; compensi però ispirati a quei concetti extra-economici di cui è organicamente viziata la terminologia e la logica comune in quest'ibrida materia.

***

Le considerazioni dianzi svolte circa l'influenza deprimente che la pratica del contratto collettivo può esercitare sul mercato generale dei salari, han d'uopo d'esser completate da taluni rilievi accessori che per altra via ne confermano l'attendibilità.

Devesi anzitutto por mente ai vantaggi ben noti che un sistema di prezzi multipli (o variabili, o duplici o a classi che dir si voglia) assicura ad un monopolista, totale o parziale, consentendogli da un lato di ridurre al minimo le rendite dei consumatori, dall'altro di sfruttare fino all'estremo limite i gradi inferiori della domanda. L'affermazione del Marshall, che il monopolista possa indursi a diminuire il prezzo stabilito in misura unica per tutto il prodotto, a fine di ampliare lo smercio ed accrescere il profitto netto (2), diviene ogni dì meglio una ipotesi teorica destituita di base nel mondo reale, dove esiste ormai tale sinonimia fra monopolio e prezzo multiplo (3) che

---

(1) Cfr. Wicksteed, *The common sense of political economy*, p. 339 e sgg.

(2) Cfr. *Principles of economics*, vol. I, p. 546.

(3) Cfr. Nicholson, *Principii di economia politica*, p. 403.

v'ha chi considera una eventuale uniformità del valore come indice manifesto di circostanze perturbatrici (1). E queste discriminazioni, che si manifestano in rapporto alla destinazione della merce, o alla capacità d'acquisto dei compratori, o ai luoghi o al tempo di smercio (2), tendendo ad attuare una sempre più perfetta individualizzazione dei prezzi (3), non son proprie soltanto dei casi di monopolio puro, ma ricompaiono in quelli nei quali, come nell'esempio addotto dal Walras (4), di tale situazione non si avvertono che pochi e transitori elementi. La politica dei sindacati industriali (coalizioni limitate e precarie e non monopolî assoluti) porge di simile verità la più eloquente riprova (5).

Non è dunque senza meraviglia che vediamo il sindacato operaio orientare la propria condotta sopra un indirizzo nettamente opposto, convergendo le forze alla instaurazione uniforme e durevole di quel prezzo-tipo, di cui i venditori più accorti ben conoscono gli inconvenienti.

I partigiani delle leghe contestano l'esattezza dell'asserto di Yves Guyot: " L'égalité des salaires était un des postulats " socialistes. Il a disparu. Les trade-unionistes admettent fort " bien l'inégalité des salaires entre professions, mais ils veulent " l'égalité des salaires dans la profession „ (6). Ma la tendenza in tal senso è innegabile. Fra i tipografi tedeschi (7), francesi (8),

(1) Cfr. R. T. Ely, *Monopolies and trusts*, New York, 1900, p. 108.

(2) Cfr. la bella analisi di P. Jannaccone, *Il " dumping „ e la discriminazione dei prezzi*, in " Riforma sociale „, 1914, marzo.

(3) Cfr. Cassola, *La formazione dei prezzi nel commercio*, p. 3 e sgg.

(4) Cfr. *Éléments d'économie politique pure*, Losanna, 1889, p. 501.

(5) Cfr. G. W. Jenks, *La questione dei sindacati industriali* (tr. it.), in " Biblioteca dell'economista „, ser. 4ª, parte 2ª, p. 622 e sgg. Riassume le differenze locali dei prezzi praticati dai *trusts*, quali risultarono alla *Industrial commission*: J. A. Hourwich, *Trust and prices*, in " Annals of American academy of political and social science „, XLVII, novembre 1902.

(6) Cfr. *Les conflits du travail et leur solution*, p. 249.

(7) Cfr. Leroy, *Le contrat collectif de travail en Allemagne*, annexe, p. 232.

(8) Cfr. *Rapport Champeau sur l'unification des salaires par régions*, al IX Congresso nazionale della " Fédération des travailleurs du livre „ Lione, 1905.

belgi (1), la lotta per l'unificazione delle tariffe nazionali durò a lungo ostinatissima, non cedendo alfine se non provvisoriamente di fronte alla constatata, incoercibile forza delle cose (2). Più accentuato e generale è però il movimento nell'industria tessile, nella quale la concorrenza dei distretti rurali è più intensa e terribile (3). Anche gli addetti alla sartoria furono fra i primi a proclamarne, fin dal 1867, il principio (4); e lor tennero dietro, in Francia, i vetrai (5), i guantai (6), e, in seguito, quasi tutte le categorie specializzate. In Inghilterra, i cotonieri porgon esempio di una larga unificazione; imitati tuttavia da molti altri mestieri, fra i quali è diffusa opinione che sia vantaggioso porre " tutti gli stabilimenti industriali di " un singolo distretto, e tutti i distretti nel campo dell'industria, " per quanto è possibile, in condizione di uguaglianza per ri- " spetto al prezzo a cui ottengono il lavoro umano „ (7). Ma ciò spesso non si raggiunge che a spese degli operai di determinate aziende o di certi centri (8) ed a costo di lotte esaurienti. Se ne ebbe di recente (estate del 1915) un interessante saggio anche a Torino, dove la singolare insistenza dei dirigenti lo sciopero laniero nel pretendere un assurdo pareggiamento di tariffe con quelle di Biella, escludendo ogni comparativa indagine circa la condizione di produttività e di costi dei due di-

---

(1) Cfr. Vanderwelde, *Enquête sur les associations professionnelles d'artisans et d'ouvriers en Belgique*, Bruxelles, 1891, vol. I, p. 93 e sgg.

(2) Cfr. Gemähling, *Travailleurs au rabais*, p. 374. Rimane negli statuti delle federazione francese (art. 1°, § 3°) il principio di cercar " di stabilire una tariffa quanto più è possibile uniforme in tutto il paese „.

(3) Cfr. per la Francia, V. Renard, *Rapport à la Commission d'enquête parlementaire sur l'industrie textile*, in " Enquête sur l'état de l'industrie textile et la condition des ouvriers tisseurs „, Parigi, 1905, vol. II, p. 297 e sgg.; e De Seilhac, *Les grèves textiles dans le Nord*, in " Revue populaire d'économie sociale „, 5 dic. 1903.

(4) Cfr. Office du travail, *Les associations professionnelles ouvrières*, t. II, Parigi, 1901, p. 618.

(5) Cfr. XI Congresso nazionale della " Fédération nationale des travailleurs du verre „, Albi, 1906, *Compte rendu*, p. 61.

(6) Cfr. *Les associations professionnelles ouvrières*, t. II, p. 217.

(7) Cfr. Webb, *La democrazia industriale*, p. 194 e sg.

(8) Cfr. Webb, *La democrazia industriale*, p. 282.

stretti, fu causa preponderante dell' inasprirsi e prolungarsi del conflitto (1).

Vendere a un sol prezzo, sopra un territorio quanto più è possibile esteso, per modo da impedire agli imprenditori di contrapporre alle pretese degli operai d'un luogo la discrezione di quelli di un altro, viene dunque considerato come ottimo e positivo acquisto per l'azione sindacale. Ed è forse, in molti casi, necessità logica della tattica adottata: poichè, una volta ammesso il principio della soppressione della libertà plastica e mutevole dei contratti singoli, sostituiti da accordi semi-permanenti e rigidi collettivamente stipulati, gli errori di valutazione e le sperequazioni di trattamento non appaiono troppo più probabili nel calcolo d'una media generale che nel tentativo d'un equo ragguaglio alle condizioni locali. Nulla, in realtà, di più difficile che l'apprezzamento esatto dei fattori di disparità che debbono influire sulle mercedi in due, non molto dissimili, mercati. I relatori della grande inchiesta francese sui salari del 1891-93 così concludevano le loro amplissime indagini circa le cause di variazioni topografiche riscontrate: " Le salaire dépend à la fois " de la région et de la localité, mais d'une manière assez com- " plexe, car il est impossible d'apercevoir, par exemple, une " relation simple entre le taux des salaires et la situation géo- " graphique ou le chiffre de la population de chaque localité " (2). Se ciò è vero, qualunque giudizio *a priori* sopra un problema così delicato non può che esser fonte di arbitrio e far capo a peggiori ingiustizie. Ma, se il rinunziare alla pretesa può essere per le unioni una necessità, non è men evidente che, confessandosi inette a valersi del complesso strumento dei prezzi multipli, esse si classificano da sè stesse fra i venditori men progrediti e più empirici, che, con l'unicità delle tariffe, eliminano dal mercato le domande marginali e rinunziano a sfruttare le migliori, deprimendo sensibilmente le condizioni di smercio.

---

(1) Cfr. *Verbali delle adunanze fra industriali e rappresentanza operaia durante lo sciopero tessile torinese*, settembre–ottobre 1915. Dai delegati operai fu invocato più volte, a loro giustificazione, l'esempio dei sindacati esteri, tendenti alle uniformità nazionali e regionali pei salari.

(2) Cfr. Cornelissen, *Théorie du salaire et du travail salarié*, p. 359.

Come lo stato italiano, creando con la legge sull' " equo trattamento „ del personale una artificiale uniformità di costi delle imprese di trasporti, tende ad isolare dalle comunicazioni coi maggiori centri le località più povere (1), così l'organizzazione operaia, togliendo col sistema del salario-tipo per territori e per industrie la possibilità di adattare il prezzo alla destinazione del lavoro venduto, al potere d'acquisto delle aziende che lo ricercano, alle spese di produzione ed al costo della vita delle diverse località, restringe fatalmente il campo d'impiego, con danno della classe rappresentata, non meno che con pregiudizio sociale evidentissimo.

La discriminazione dei prezzi, oltrechè in relazione alla sede o alle qualità dei compratori, si pratica in base alle diversità, anche minime, fra le diverse porzioni d'una merce. E tale intento si propone, per dir vero, la minuta individuazione dei gruppi in cui i moderni contratti collettivi scompongono la massa di lavoro disponibile (2). Se non che, così squisitamente graduata si presenta la scala dei valori personali, sia pure esclusivamente tecnici, che ogni sforzo per ridurli a serie di uniformità fisse e nettamente delimitate deve di necessità risolversi in una classificazione almeno parzialmente arbitraria. Quanto osservammo degli effetti del sistema studiato sull'insieme della popolazione operaia si ripete, in minori proporzioni, riguardo ai singoli gruppi in cui la porzione organizzata viene a ripartirsi. Il sacrifizio, entro ciascuno di essi, degli ottimi e degli infimi deve fatalmente avverarsi in misura tanto maggiore quanto più

(1) È ciò che avviene, del resto, ad ogni fissazione uniforme e stabile di qualunque prezzo sopra un'area non troppo ristretta. Anche con la miglior volontà di tener conto delle differenze dei mercati locali, l'autorità non riesce abitualmente che a distruggere gli scambi, provocando la carestia ed esasperando il rincaro, che volevasi prevenire. Il classico esempio del *maximum* rivoluzionario non ha d'uopo d'esser narrato. Cfr. D. Zolla, *La crise des subsistances sous la Révolution*, in " Revue des deux mondes „, 1° dicembre 1915.

(2) La tariffa dei cottimi fissata nel 1905 pei tessitori di Avesne-les-Aubert occupa più di 7 pagine del volume dell'*Office du travail* sui conflitti ed accordi in quell'anno. In Inghilterra talune tariffe dell'industria tessile arrivano a formare dei grossi opuscoli. Quella per la filatura del distretto di Bolton occupa 85 pagine. Cfr. R. Jay, *Le contrat collectif du travail*.

rimane lontana dalla perfezione la differenziazione raggiunta. Anche adunque dal punto di vista della presentazione della merce, il contratto collettivo non realizza i vantaggi che, in regime di monopolio o di coalizione, si raggiungono con la sapiente molteplicità dei prezzi. È uno dei casi a cui meglio si adatta l'osservazione del Pareto circa le perdite di ofelimità connesse ai grossolani ripieghi con cui si sostituisce, in molti scambi, il metodo teoricamente più perfetto (1). Ma, così operando, non vi ha dubbio che le unioni procedano a ritroso di tutto l'innegabile movimento di reazione prodottosi ai dì nostri, sotto l'azione della viva realtà, contro il concetto astratto della uniforme " unità di lavoro „ e del " lavoratore medio „, caro alle teorie della prima metà dell'ottocento (2). Lo sviluppo della scienza, sullo scorcio del secolo, prese le mosse appunto dallo studio e dalla considerazione delle deviazioni da siffatto tipo medio, mentre una più squisita rilevazione statistica delineava le leggi delle differenze naturali fra individui in ciascun gruppo, ed applicazioni geniali la estendevano ai rapporti con le produttività singole e collettive (3). Ad un sistema fondato sulla ignoranza o la negazione di simile indirizzo mancan certo i requisiti essenziali di un proficuo adattamento alle esigenze della vita.

Il danno derivante dal difetto di variabilità simultanea si aggrava per il carattere durevole dei prezzi così stabiliti. " Il " sistema dei prezzi costanti, che è largamente usato nella " nostra società, dimostra ancora il Pareto, non procaccia gene- " ralmente il massimo di ofelimità „. Il che, relativamente alla merce-lavoro, è verità manifesta. Giustamente infatti il Wicksteed riscontrò in questa specie di beni degli elementi fortemente speculativi, dovuti alla somma difficoltà che si prova, in molteplici casi, a calcolare preventivamente con esattezza il presumibile rendimento della quantità da acquistarsi (4). Costretto a contrattare una tariffa d'una certa durata, l'imprenditore dovrà forzatamente far entrare nelle proprie valutazioni tutti i plausibili

(1) Cfr. *Manuale di economia politica*, p. 341.

(2) Cfr. G. Sorel, *Introduction à l'économie moderne*, Parigi, 1911, p. 29.

(3) Cfr. H. L. Moore, *Laws of wages. An essay in statistical economics*, New York, 1911, p. 182 e sgg.

(4) Cfr. *The common sense of political economy*, p. 328.

motivi di deprezzamento non troppo remotamente futuro della merce offerta, nè accetterà se non quelle condizioni che lo assicurino contro le eventualità men favorevoli (1). Ciò basterà ad impedire che il prezzo salga mai oltre i limiti d'una media ragionevole, ben lontani dalle vette a cui lo vediamo rapidamente elevarsi allorchè una felice congiuntura imprime subitamente ad un'industria un eccezionale fervore d'espansione (2). Gli stravaganti salari toccati, anni addietro, al personale d'ogni grado

(1) Oppongono, per dir vero, i fautori del sistema che gli imprenditori ritraggon vantaggio dalla sicurezza che acquistano che, per un certo tempo, i salari non subiranno cambiamenti; onde riesce loro possibile far preventivi di gestione più esatti. Ma molte sono le industrie in cui questo fattore non è preponderante rispetto al costo di produzione complessivo: e sono infinite le circostanze (tecniche o relative alle condizioni di mercato) che concorrono a modificare la convenienza di assumere del personale ad un determinato prezzo, entro un periodo non troppo breve. È, in massima, preferibile per un industriale esser libero di conformare le mercedi alla congiuntura generale dell'industria che possedere la certezza di non dover subire una richiesta di aumento in un momento di eccezionali guadagni. Non ne occorre altra prova che la facilità (comprovata dalle statistiche) con cui gli scioperi a ciò rivolti ottengono lo scopo in quest'ultimo caso, e la probabilità di insuccesso di quelli tendenti ad impedire le riduzioni, nei momenti di depressione o di crisi. Cfr. per l'illustrazione statistica di quest'ultima verità: Moore, *Laws of wages*, p. 105 e sgg. Il considerare il contratto collettivo come una assicurazione stipulata dall'industriale contro i pericoli di cronici ricatti, secondo fanno anche economisti non eccessivamente favorevoli alle esorbitanze del movimento operaio (cfr. p. e. De Molinari, *La guerre civile du capital et du travail*, in " Journal des économistes ", 15 settembre 1899), non risponde agli insegnamenti dell'esperienza, essendo provatissimo che gli scioperi non furono punto eliminati con l'applicazione di questo metodo, nè d'altri consimili vincoli temporanei alla libertà d'azione delle parti; e potendo del resto gli operai disertare individualmente, con mille pretesti, l'officina appena si dischiuda altrove la prospettiva d'una retribuzione migliore. Quest'ultimo punto è bene illustrato da A. C. Pigou, *Principles and methods of industrial peace*, Londra, 1905, p. 210 e sgg. Certo è che il sistema della cauzione di garanzia si rivela in pratica affatto insufficiente contro tale pericolo. Neppur basterebbe, probabilmente, il ripristino delle vecchie disposizioni che consideravan reato punibile con pene personali l'inadempienza del contratto di lavoro; legislazione di cui gli assidui sforzi degli operai ottennero l'abrogazione dovunque, fuorchè in Russia e, pel lavoro agricolo, in Ungheria. Cfr. Louis, *L'ouvrier devant l'État*, p. 70 e sgg.

(2) L'inconveniente non sfuggì ai più intelligenti delegati operai, che,

delle ditte automobilistiche torinesi non sarebbero stati certamente fissati in un contratto dibattuto nei primordi del vertiginoso movimento ; nè le stipulazioni intervenute al vertice della parabola valsero a salvarli dal precipizio in cui caddero pochi mesi dopo.

La soppressione del mercato libero — aspirazione fondamentale dell'unionismo — eliminando un termine di confronto indispensabile alla valutazione corretta, tende ad aggravare l'inconveniente di una tariffa stabilita in precedenza e per un certo periodo costante. E se è vero quanto osserva il Wicksteed circa l'inefficienza organica dei patti che si scostino dalla posizione economica ideale, " da quella cioè corrispondente al valore eco-" nomico marginale di ciascun lavoratore, posto che tutti po-" tessero muoversi liberamente verso le posizioni più favore-" voli „ (1), non si vede come tale coincidenza possa, tranne che per mero caso, venir attuata da un accordo contrattuale arbitrario, a cui manchi, per giunta, il positivo e sperimentale elemento di paragone che alla determinazione del prezzo-tipo offre lo spettacolo di un esistente mercato aperto. La tendenza che si va manifestando nei paesi in cui la spontanea fluttuazione dei salari individuali fu sottoposta a maggiori limitazioni, legali o sindacali, di sostituire ai criteri economici quelli connessi ad un certo livello di tenore di vita intellettuale e morale significa per sè stessa in gran parte una preziosa confessione delle difficoltà insuperabili che gli incaricati di fissare durevolmente ed uniformemente le mercedi — funzionari dei *wages' boards* (2), o negoziatori di contratti collettivi — incontrano, appena vogliano agire in senso rigorosamente conforme alle forze naturali che essi son chiamati a sostituire. La complessità formidabile dei

nel terzo congresso dei sindacati tedeschi (Francoforte, 1889), ne trassero argomenti contro il metodo proposto. Cfr. B. Raynaud, *Le contrat collectif de travail*, Parigi, 1901, p. 161 e sgg.

(1) Cfr. *The common sense of political economy*, p. 328.

(2) Il difetto di duttilità e la manchevole attitudine ad adattarsi prontamente ed incessantemente alle mutevolissime variazioni del mercato è invero considerato come difetto organico gravissimo dei sistemi di salario minimo legale, anche dai più fiduciosi interventisti. Cfr. Pic, *Traité élémentaire de législation industrielle*, p. 778 e sgg.

fattori di cui dovrebbero tener conto non tarda a rinserrarli in sì aspra cerchia di perplessità contradditorie da indurli a rifugiarsi nel regno delle frasi vaghe e delle idealità sentimentali, inaccessibile alla logica ferrea del fenomeno concretamente positivo (1).

Ma, ove questa via di scampo sia, dalla resistenza o dalle reazioni (a lungo andare inevitabili) delle altre forze, preclusa, uniformità e costanza di retribuzione in un mestiere non possono che agire in senso contrario al facile raggiungimento dei massimi a pro della mano d'opera, nei periodi di anormale prosperità (2), col pericolo di far rifluire verso rami di attività men vincolati i più intelligenti ed i migliori. Ciò che si osserva nelle campagne, dove la consuetudine mantiene in talune mercedi una stabilità e uniformità più accentuata (3), onde i più abili, disperando di raggiungere un guadagno corrispondente al loro spirito di iniziativa, emigrano verso sedi ed occupazioni il cui saggio di retribuzione sia più sensibile (4), riesce a tal riguardo altamente istruttivo.

***

Di qualche fattore psicologico è pure d'uopo tener conto, la cui importanza assume, in materia di tal fatta, valore specialissimo.

---

(1) Ne offre un saggio interessante, nel suo tentativo di analisi storica, etica ed economico-giuridica dell'argomento, J. A. Ryan, *Salaire et droit à l'existence* (tr. fr.), Parigi, 1910, p. 23 e sgg.

(2) In Australia si osserva che il salario minimo diviene sempre e subito un salario massimo, " nessun industriale consentendo ad elevarlo di un penny ". Cfr. Bellet, *Illusions socialistes et réalités économiques*, p. 161; e M. T. Raukin, *Arbitration and conciliation in Australasia*, Londra, 1916, p. 74 e sgg.

(3) Un'analisi delle cause che conferiscono alle mercedi agricole un carattere più consuetudinario leggesi in Chiozza-Money, *The future of work*, p. 146 e sgg. Più profondamente illustra le ragioni per le quali le medesime si sottraggono, in molti casi, all'azione della concorrenza e presentano una immobilità maggiore G. Valenti, *Principii di scienza economica*, p. 472 e sgg.

(4) Lo confermano, per l'Inghilterra, recenti inchieste ufficiali. Cfr. *The land. Report of the land enquiry committee*, vol. I, 4ª ed., Londra, 1913, p. 31 e sgg.

Requisito essenziale di correttezza d'un contratto e di massima approssimazione del prezzo al saggio tipico è l'impersonalità delle trattative e la completa assenza di preoccupazioni non economiche nel dibattito.

L'affidarne la cura a tecnici spassionati, che negoziano il lavoro come una merce qualsiasi, facendo astrazione completa dai rapporti degli individui, sembrerebbe dover realizzare in modo ideale questa condizione; ed è ciò che affermano i difensori del sistema (1).

Se non che, osservando la realtà delle cose con men ingenuo e prevenuto spirito critico, si scorge che proprio l'opposto è la verità. Nel contratto singolo può darsi che l'operaio il quale si renda inviso, per un motivo qualsiasi, al suo principale si veda rifiutati i miglioramenti a cui potrebbe aspirare e, in casi estremi, venga perfino perseguitato a segno da dover cambiar sede. Ma il fatto — dannoso anche all'industriale, se si tratta di un buon operaio — rimane episodio isolato, nè influisce sul livello delle mercedi praticate nel mestiere. Col contratto collettivo si ottiene invece il trionfale risultato di estendere alla massa l'odiosità procacciatasi dai pochi, riflettendo sulla negoziazione intiera l'azione perturbatrice degli accidentali attriti litigiosi. Le statistiche degli scioperi ci insegnano quante volte il prolungamento d'un conflitto si dovette alla irreduttibile resistenza padronale alla pretesa riammissione di pochi operai licenziati. Nè può ascriversi fra i fattori di soluzioni conciliative e di dibattito spassionato, come ben nota il Cree (2), la quotidiana dose di contumelie di cui dagli oratori dei comizi e dalla stampa sindacale vengono gratificati gli imprenditori, gli epiteti che li qualificano, la propaganda di esecrazione di cui son fatti segno (3).

---

(1) Così R. Dalla Volta, *I problemi dell'organizzazione del lavoro*, Firenze, 1903, p. 105.

(2) Cfr. *A criticism of the theory of trades' unions*, p. 31 e sgg.

(3) Da ciò essenzialmente il rifiuto non infrequente degli industriali di trattar la composizione del conflitto con qualcuno degli organizzatori, resosi più particolarmente inviso per la virulenza del suo linguaggio e delle sue invettive. Nell'ultimo conflitto fra gli armatori liberi italiani ed i loro dipendenti se ne ebbe un esempio.

Mentre quindi, permanendo la libertà dei rapporti fra le parti, sono perfettamente concepibili — e, nel fatto, più frequenti che non si creda — gli scambi contenenti qualche elemento altruistico (cioè quelli in cui, non insistendosi troppo dai due scambiatori nella posizione di massimo vantaggio si mira ad una combinazione che rappresenti un uguale beneficio per entrambi (1)), l'instaurato regime di coalizione tende a moltiplicare gli scambi nettamente egoistici, in cui i due si sforzano di subire il minimo uguale svantaggio, in confronto alla posizione di massima preferenza a cui dovettero rinunciare. La teoria della lotta di classi, che è il presupposto della tattica unionistica, ha un substrato soltanto parzialmente economico, numerosi essendo i moventi etici, gli impulsi sentimentali, le astrazioni filosofiche onde essa ebbe vita. Negare che la medesima eserciti, in un fenomeno rigorosamente positivo come quello della determinazione d'un prezzo, un'influenza perturbatrice, introducendo nel dibattito eterogenei elementi, mi sembra una prova di più dello spirito anti-scientifico con cui soglionsi trattare simili problemi (2).

Lo scostarsi che così si osserva del mercato dagli attributi di impersonalità che ne costituiscono la migliore garanzia riesce, anche per un altro verso, palesissimo e particolarmente pericoloso. Gli apologisti delle unioni si fan forti delle testimonianze di molti industriali che, in più occasioni, ebbero a dichiarare di non vedere di mal occhio l'organizzarsi del personale, anzi di ritenerlo assai utile, perchè coi delegati, meglio che con la massa, è facile intendersi. Il giudizio però sembrerebbe almeno strano se, come si pretende, dal formarsi delle coalizioni scaturì veramente una falcidia dei profitti a pro delle mercedi. Ma la meraviglia si attenua ove si rifletta all'opportunità che il concentramento dell'offerta nelle mani di pochi mandatari porge alle

(1) Se, come si afferma, nello scambio isolato il lavoratore rappresenta la parte più debole, le transazioni di questo tipo saranno in massima a lui favorevoli, e l'esistenza di un certo numero di tali contratti contribuirà ad elevare la media generale.

(2) Più efficace di qualsiasi organo arbitrale per riuscire ad un equo componimento fondato sul comune vantaggio sono il sincero spirito conciliativo e le disposizioni amichevoli delle parti. È la premessa, piena di buon senso, del PIGOU, *Principles and methods of industrial peace*, p. 113.

arti di corruzione, a cui le debolezze della natura umana appresiano troppo frequenti ragioni di successo. Il contratto collettivo, atto spesso assai complicato e perciò richiedente nei negoziatori un alto grado di competenza tecnica, presuppone una delega dei poteri per parte della massa a una o più persone strettamente specializzate, le cui funzioni consultive e direttive tendono vie meglio ad assumere carattere di professione permanente (1). Senza insistere sulle predisposizioni speciali che a simili compromessi potrebbero venir supposte in uomini appartenenti, come i condottieri operai, ad un'ibrida classe di piccoli borghesi spostati (2), non può almeno negarsi che l'aver sostituita l'opera di plenipotenziari allo spontaneo gioco delle forze formative dei prezzi crei rischi speciali di colpevoli e non confessati accordi, a tutto danno dei rappresentati, illusi ed incoscienti. Roberto Michels descrive assai bene per quale irresistibile processo di organiche forze la democrazia operaia si renda insensibilmente inetta al raggiungimento dei primi suoi scopi, attraverso l'opera d'una oligarchia sempre più stabile, egoista, parassitaria e tirannica (3). Ma le sue osservazioni, prevalentemente riguardanti l'azione politica, sono altrettanto vere se le riferiamo al campo economico (il quale del resto già vedemmo come molte volte sia subordinato e sacrificato al primo). Pur ammettendo come ecce-

(1) Cfr. Webb, *La democrazia industriale*, p. 197 e sgg.

(2) La formazione di questo ceto caratteristico è ben descritta da R. Michels, *La sociologia del partito politico nella democrazia moderna* (tr. it.), Torino, 1912, p. 285 e sgg. Durante l'attuale guerra è segnalata come una vera calamità pubblica, in Inghilterra, l'ingombrante, continua presenza alla capitale di vere folle di codesti " delegati ", pei quali ogni pretesto è buono per escogitare oziose missioni, a spese dei loro, più o meno spontanei, rappresentati. Cfr. *Trade and the State*, in " The Candid ", febbraio 1916.

(3) Il dispotismo con cui i dirigenti trattano gli iscritti si rese palese nel modo più odioso in occasione del gigantesco e disastroso sciopero generale inglese del 1912, che risultò dovuto a un colpo di testa di pochi uomini — i capi della *Transport workers' federation* — senza interpellare le masse, lanciate contro la sconfitta. La " Review of reviews ", le cui tendenze sono pure abbastanza radicali, denunziò in quell'occasione " l'abbominevole sistema di autocrazia " che va prevalendo negli ambienti operai. Cfr. *Trade-unionismo sano e trade-unionismo morboso*, in " Minerva ", 1° ottobre 1912.

zionale la corruzione specifica, devesi ricordare esser infinite le vie per le quali, senza diretta prostituzione pecuniaria, si può trafficare (perfino inconsapevolmente) la propria coscienza. Non è raro, ad esempio, l'udire industriali o proprietari di collegi elettorali da tempo infeudati al socialismo confessare l'appoggio, tacito o palese, da essi concesso ai candidati del partito dominante, in cambio d'una specie di garanzia dai medesimi promessa contro incomposte od eccessive agitazioni economiche delle disciplinate maestranze. L'accusa di " addomesticamento " dei dirigenti le organizzazioni, appena il mutato tenor di vita o la conquista di un seggio in parlamento li pongano in più intimo contatto coi vituperati capitalisti, si ripete dovunque ed ogni giorno. E in Francia, dove il sindacalismo rivoluzionario dilagò più minacciosamente, il tipo dell'imprenditore che si assicura contro le ostilità, non sempre puramente verbali, degli operai, professando opinioni radico-socialiste e finanziando partito, stampa e sindacati, è divenuto quotidiano motivo di arguzia satirica perfino nel romanzo e sulle scene (1).

Dato dunque il consolidarsi della burocrazia direttiva delle leghe in una classe nettamente distinta di specialisti, a lor volta strettamente avvinti da comunanza di origine, di mentalità, di interessi e tendente a fare dell'organizzazione un ente superiore, non del tutto spoglio di attributi mistici, e vivente come scopo a sè stesso, l'abdicazione in tali mani della facoltà di dibattere le condizioni a cui la massa dei sudditi dovrà cedere la propria opera, anzi di regolare la sorte economica del proletariato intiero, vincolandola in base ad una arbitraria estensione del principio della gestione di affari, parmi tolga, a propriamente parlare, in gran parte al fenomeno la figura — sotto la quale vien presentato — di coalizione spontanea, per conferirgli quella di intermediazione interessata, se non di astuta speculazione sovra una merce della cui vendita il produttore possa venire indotto a non occuparsi direttamente. Ora è noto che la funzione intermediaria degenera in pericoloso parassitismo ogni volta che gravi

(1) Contro la corruzione plutocratica, che sfibra nei suoi duci la forza ascendente dalle masse, si scaglian invece violentemente talune aperte e documentate denunzie. Cfr. specialmente F. Delaisi, *La démocratie et les financiers*, Parigi, 1910, p. 186 e sgg. e passim.

di costi troppo elevati il processo di scambio a cui presiede, specie a causa del numero eccessivo di coloro che vi si dedicano; onde la dannosità economica dell'opera prestata risulta in ragione della facilità di esercitarla (1). Ma il modo come si reclutano, fra le classi di elementare coltura e di intensi appetiti, i condottieri operai, porge esempio di un' offerta spontanea sempre più larga di tale servizio, sotto il crescente allettamento dei vantaggi materiali e morali connessi a simile stato. E l'accrescimento numerico si risolve a sua volta nel tentativo di estendere l'organizzazione a strati sempre nuovi, in virtù della legge di esistenza, per la quale, se in un dato campo gli intermediari divengono soverchi, il loro zelo nella ricerca di clienti sempre più miserabili si infervora oltre ogni limite di economica convenienza (2).

Indipendentemente intanto dai costi indiretti di cui illustrammo qualche saggio (3), il puro mantenimento dell'organo importa per sè stesso un carico sensibile (4). La percentuale delle spese di amministrazione all'insieme delle altre nel rendiconto complessivo delle unioni inglesi oscillò, dal 1900 al 1907, fra il 20,7 (1907) e il 24,9 (1900) (5). Ed i metodi con cui si ottengono, per alimentare questi bilanci, i contributi regolari degli iscritti non escludono il ricorso ad un terrorismo, che, in più di

(1) Cfr. A. Mariotti, *Della intermediazione e dei suoi rapporti con la cooperazione e la concentrazione capitalistica del commercio al minuto*, Napoli, 1914, p. 17 e sgg.

(2) Cfr. A. Mariotti, *Dell'intermediazione e dei suoi rapporti con la cooperazione e la concentrazione capitalistica del commercio al minuto*, p. 20. Il dilatarsi ipertrofico del nuovo unionismo, del sindacalismo agrario, ecc., illustra questa verità.

(3) Fra tali costi convien tener conto in modo particolarissimo delle perdite cagionate dagli scioperi, provocati e sostenuti all'unico scopo di imporre il riconoscimento dell'organizzazione, cioè il diritto dei capi a trattare essi soli per la massa. Chi volesse applicare a tali conflitti il sistema analogico con cui l'Edgeworth istituisce un parallelo fra scioperi e guerra, potrebbe assomigliarli alle guerre dinastiche, dichiarate e combattute nell'interesse e pel puntiglio della casta dominatrice; poichè in fondo riconoscimento della lega equivale in pratica a riconoscimento della sua burocrazia. Il numero di scioperi dovuto a questa causa cresce impressionantemente, mentre declinan quelli per aumento di salari. Mi sembra assai

(V. note (4) e (5) a pag. seg.).

un caso, non trova riscontro fuorchè nella crudeltà di ricatti con cui sordidi sensali di miseria umana sfruttano gli infimi strati delle plebi tradizionalmente più degradate (1). Spogliati delle

---

suggestiva la seguente tabella, che raccoglie i dati per gli Stati Uniti, attraverso un non breve periodo:

Anni	Percentuale al totale degli scioperi cagionati da richieste		Anni	Percentuale al totale degli scioperi cagionati da richieste	
	di aumento di salario	di riconoscimento delle unioni		di aumento di salario	di riconoscimento delle unioni
1881	61,15	5,73	1894	30,54	12,45
1882	54,41	5,95	1895	41,98	12,35
1883	45,40	7,53	1896	26,80	21,93
1884	29,57	6,77	1897	35,81	12,99
1885	37,52	7,44	1898	36,36	15,72
1886	41,69	8,73	1899	38,84	19,53
1887	33,64	15,60	1900	32,94	15,35
1888	25,94	13,69	1901	29,04	27,98
1889	29,95	12,65	1902	32,86	25,27
1890	31,48	12,88	1903	31,57	23,24
1891	26,67	14,27	1904	23,19	32,42
1892	29,12	15,25	1905	28,07	30,86
1893	24,21	13,72	—	—	—

Cfr. Moore, *Law of wages*, p. 125.

(4) Non mancano di rendersene conto gli operai. I commissari americani della *Industrial commission*, notarono appunto che nel dovere di fedeltà all'unione che i loro compagni men fortunati impongono a quelli saliti ai posti migliori, è implicito il riconoscimento dei costi da essi sopportati per aiutarli a conquistarli. Cfr. Ely, *Studies in the evolution of industrial society*, New York, 1913, p. 365 e sg.

(5) Cfr. E. Guyot, *Le socialisme et l'évolution de l'Angleterre contemporaine (1880-1911)*, Parigi, 1913, p. 541.

(1) Il " terrorismo delle unioni ", che fu l'incubo dell'Inghilterra intorno al 1860, non aveva per scopo soltanto di far tremare i padroni col sacco dei loro opifici, la rottura delle macchine e gli incendi; ma si estendeva, in forma non meno violenta (guasto o sottrazione di strumenti, esplosione di macchine, violenze e vie di fatto dall'ingiuria all'assassinio) contro gli operai in ritardo nel versamento delle quote sociali. Cfr. Webb, *Histoire du tradunionisme* (tr. fr.), Parigi, 1897, p. 286; e Comte de Paris, *Les associations ouvrières en Angleterre*, 7ª ed., Parigi, 1884, p. 4 e sgg. Se la pratica della libertà ha salvati quei servi per metà emancipati da talune fra

parvenze illusorie e secondarie per ridurli a termini comparabili, i due fenomeni si concretano entrambi nella speculazione d'un ristretto gruppo di persone, che, subordinando al proprio controllo l'altrui lavoro, riescono a distrarre a proprio vantaggio una parte del prodotto. La lotta diuturna contro l'intermediazione privata (1), che viene dipinta come una delle benemerenze del moderno movimento operaio, farebbe capo così al contrasto fra due parassitismi, l'uno dei quali in sostanza non diverso nè men oppressivo dell'altro; anche se, nelle sincere intenzioni di molti fra i suoi creatori, mirante a scopi radicalmente antitetici (2). E l'antico profitto del commercio fornitore di schiavi, scomparso con l'emancipazione (3), rinascerebbe dissimulato in questa illusoria forma (4).

queste odiose pratiche, non ha disarmate le ostilità implacabili, espresse ben di frequente nelle persecuzioni più rivoltanti. Ne conviene il Gemähling, *Travailleurs au rabais*, p. 381 e sgg. Ma dove l'organizzazione è più primitiva, quegli episodi si riproducono in tutto il loro orrore. E lo sanno in Italia i liberi lavoratori o semplicemente i non-leghisti emiliani e romagnoli. Certo i metodi di dominio che additano alla pubblica esecrazione gli sfruttatori di certe plebi meridionali non toccaron che raramente uguali eccessi.

(1) Non privo di significato rispetto all'affinità sostanziale dei due fenomeni appare il fatto che, nelle leggi più rigorose contro la privata speculazione sull'altrui collocamento o lavoro, si sentì il bisogno di dichiarare esplicitamente che i divieti comminati non si estendevano all'opera prestata ed ai contratti stipulati da associazioni operaie. Così nel progetto di legge sul *marchandage*, votato dalla camera francese il 17 marzo 1910; e, assai prima, nel decreto 2 marzo 1848 del governo provvisorio. Cfr. E. Payen, *Réglementation du travail réalisée ou projetée. Ses illusions, ses dangers*, Parigi, 1913, p. 192 e sgg.

(2) Riesce interessante trovar esposto questo punto di vista, fin dal 1786, rispetto a quell'embrione dell'organizzazione operaia odierna che fu, per più aspetti, il *compagnonnage*. In un memoriale inedito infatti indirizzato in quell'anno da un gruppo di operai al Consiglio del commercio francese leggonsi gravi accuse contro il costo dell'associazione, per le alte quote e per i frequenti conflitti di cui è causa; onde invocasi la costituzione di una vera borsa del lavoro pubblica, dove esclusivamente possano padroni e operai convenire per intendersi direttamente. Cfr. E. Levasseur, *Histoire des classes ouvrières et de l'industrie en France avant 1789*, 2ª ed., Parigi, 1901, p. 827 e sg.

(3) Cfr. De Molinari, *Questions économiques à l'ordre du jour*, p. 79 e sgg.

(4) A chi ripugnasse il confronto, si potrebbe invece richiamare il caso

" L'associazione, scrive egregiamente il Lorenzoni, è un
" mezzo per diminuire lo sfruttamento; ma è anche, per l'op-
" posto, un mezzo di attuare nuovi sfruttamenti; quest'ultimo
" effetto non rimane escluso in una economia organizzata a base
" di coalizioni „ (1).

***

Fraintenderebbe singolarmente quanto siamo venuti esponendo chi volesse ravvisarvi l'apologia della tesi ostile all'esistenza dell'organizzazione operaia, o semplicemente negatrice della asserita sua utilità. Il problema degli effetti dell'unionismo sulla efficienza economica complessiva della struttura industriale moderna è infinitamente più vasto di quello a cui si rivolse la nostra attenzione; e, se non v'ha dubbio che recenti avvenimenti hanno singolarmente avvalorata l'opinione di quanti additano nel movimento una causa limitatrice di produttività sociale (2), è del pari incontestabile che ragioni validissime confortano tuttora l'opposto punto di vista.

Ma il riconoscere o meno i vantaggi che, per molti aspetti, l'organizzazione può procurare è perfettamente indipendente dal-

---

dei *coolies*, che pur essendo teoricamente perfettamente liberi, dipendono però nel fatto rigorosamente dall'*engagiste*, l'intermediario contrattante. Cfr. P. Jannaccone, *Il contratto di lavoro*, in " Enciclopedia giuridica italiana „, Milano, 1897, p. 59 e sgg. dell'estr.

(1) Cfr. *La cooperazione agraria nella Germania moderna*, Trento, 1902, vol. II, p. 235. Onde la tesi estrema, sostenuta da altri, che l'associazione tenda ad accrescere anzichè a temperare lo squilibrio esistente nella distribuzione della ricchezza. Cfr. Cassola, *La proprietà e la distribuzione della ricchezza*, Milano, 1916, p. 86 e sgg.

(2) La necessità in cui si trovò il più demagogo fra i ministri inglesi di sospendere i regolamenti, gli accordi ed i privilegi unionistici nelle industrie assoggettate alla mobilitazione patriottica, e gli scongiuri da lui ripetuti anche ultimamente (nella seduta dei Comuni del 21 dicembre 1915), perchè i sindacati temperassero per qualche tempo la loro intransigenza, specie quanto all'impiego di lavoratori non esperimentati, furono certo sintomatiche confessioni degli ostacoli creati in tempi normali da vincoli siffatti al pieno rendimento di un'impresa qualunque. Non li nega, in sostanza, riferendo le constatazioni ufficiali, G. D. H. Cole, *Labour in war time*, Londra, 1915, pp. 155 e sgg., 170 e sgg.

l'indagare se, nella sua tattica, essa non esca talora di strada, e se l'uno o l'altro dei suoi metodi preferiti non raggiunga per avventura fini opposti a quelli che si propone.

Ora a ciò effettivamente si riduce il caso che ci occupa: in cui ci siam proposti di ricercare semplicemente se la vendita collettiva della merce-lavoro abbia probabilità speciali di mantenere elevato il livello dei prezzi, sia riguardo all'insieme della mano d'opera disponibile che rispetto a quella porzione della medesima che forma oggetto particolare di tali contratti. La risposta fortemente dubitativa a cui siam giunti toccherebbe adunque le ragioni vitali del fenomeno unionistico soltanto se rispondesse a verità l'asserto del Clark: " Organisation means collective bargaining „ (1). Nel fatto però la necessaria identità non esiste, se non nella mente di chi scambia le deviazioni temporanee per fatalità logiche di qualsiasi movimento. Mentre forse le illazioni che scaturiscono in via normale dai principî onde il fenomeno ebbe vita ci condurrebbero a ritenere piuttosto che in tanto l'opera delle unioni appaia feconda in quanto sia rivolta, anzichè a sterili conati di monopolio o di intermediazione parassitaria, a rinforzare la posizione dell'operaio isolato, favorendo l'evoluzione spontanea, che viene sempre meglio eliminando la costui condizione di inferiorità iniziale nei confronti dell'imprenditore.

Allorchè i Webb, facendosi forti dell'autorità dell'Edgeworth, esaltano il contratto collettivo in base al postulato che una coa-

(1) Cfr. *Essentials of economic theory*, p. 453. Dello stesso parere è T. G. Spyers, *The labour question*, Londra, 1894, p. 11, e Dalla Volta, *I problemi dell'organizzazione del lavoro*, p. 104. Neppure la reciproca è vera; poichè anche quando il lavoro non era organizzato si ebbero frequenti esempi di contratti collettivi. Cfr. H. von Nostitz, *Das Aufsteigen des Arbeiterstandes in England*, Jena, 1900, p. 604 e sgg. " Il concordato di tariffa, " osserva G. Messina, nella pratica inglese e in quella degli altri stati, non " si dimostra limitato al campo delle *trade-unions*. Da un lato vi sono " unioni che cercano di raggiungere i loro scopi con mezzi diversi dal " contratto collettivo, e dall'altro intere legioni di operai non unionisti " amano vedere fissate le condizioni del lavoro, ed in ispecie il salario, in " un concordato „. Cfr. *I concordati di tariffa nell'ordinamento giuridico del lavoro*, in " Rivista di diritto commerciale, industriale e marittimo „, 1904, II, parte 1ª, p. 458 e sgg.

lizione tende normalmente all'elevazione delle tariffe (1), non riflettono che ad un maggior ricavo nell'esito d'una merce qualsiasi il produttore può giungere non meno innalzandone il prezzo che riducendone il costo; operazione quest'ultima in cui i sindacati rivendicano le essenziali loro benemerenze.

E quando gli autori stessi insistono sulla utilità di porre in grado il lavoratore di mercanteggiare, con piena indipendenza e a ragion veduta, l'opera propria (2), dimenticano tutte le vie per le quali l'organizzazione può tendere a tale mèta, senza farsi diretta appaltatrice degli altrui servizi.

Parecchi anni addietro il Nicholson osservava, sulle orme del Jevons (3), che, se l'influenza dell'organizzazione nell'elevare il livello nominale dei salari risulta discutibile, la sua funzione specifica sta nel promuovere in tutti i modi gli interessi dei suoi membri, nell'innalzare la loro condizione generale e nell'accrescere i salari reali (4). Più recentemente il Dibblee, fondandosi sulla considerazione delle origini e del significato storico del fenomeno unionistico insisteva sulla importanza particolarissima che, in confronto alla più appariscente azione di resistenza, ebbe fin dal principio e conserva la specifica funzione assunta dalle leghe di preservatrici e regolatrici delle riserve del lavoro; nella quale benemerenza innegabile nei confronti dell'economia generale deve cercarsi la ragione profonda del privilegio giuridico con cui il legislatore inglese volle preservati dalle conseguenze di inconsulte esorbitanze in altri campi i fondi mutualistici (5). A mano a mano che la concomitanza di forze estranee a cui accennammo accresce la fluidità e la potenza di attesa del lavoratore, un simile ordine di idee acquista forza e valore sempre maggiori.

Col sussidio mutualistico, con l'assistenza legale gratuita,

---

(1) Cfr. *La democrazia industriale*, p. 605.

(2) Cfr. *La democrazia industriale*, p. 602 e sgg.

(3) Il quale aveva eloquentemente sostenuta questi tesi a Manchester, nel 1868, in una imponente riunione operaia. Cfr. *Methods of social reform and other papers*, Londra, 1904, p. 98 e sgg.

(4) Cfr. la voce *Wages* in "Encyclopaedia britannica", 9ª ed., Edimburgo, 1888, vol. XXIV, p. 306 e sgg.

(5) Cfr. *The laws of supply and demand*, 2ª ed. Londra, 1912, p. 235 e sgg.

con l'opera di libera consulenza, con la malleveria personale per le obbligazioni assunte dal socio, può l'intervento sociale riflettersi sui contratti individuali nel senso di aumentare la capacità del produttore a rimanere a lungo sul mercato, rinfrancando le energie della resistenza isolata e sottraendo i contraenti alla tirannia del bisogno impellente; di illuminare le ignoranze; di suggerire le formule di intesa; di attutire gli attriti, di eliminare le difficoltà: altrettanti modi di accrescere la dignità e la proficuità dei patti che si stipulano e di mantenere sostenuta la media.

La sistemazione del collocamento, inteso nel duplice senso di informazione pronta, precisa, larghissima e di consultivo avvicinamento delle parti, viene giustamente rivendicata come loro còmpito peculiare dalle unioni, in confronto ai tentativi di affidarne la cura ad organi pubblici. Ma le finalità partigiane, che in pratica snaturano la spassionata correttezza del servizio, vietano al medesimo di raggiungere il massimo di efficacia (1).

Sugli spostamenti da luogo a luogo potrebbe poi specialmente esercitarsi l'influenza delle leghe, se non assumendo il pieno controllo delle correnti migratorie, come propose un giorno ai loro capoccia il Pantaleoni (2), almeno ottenendo, secondo egli stesso suggerisce, facilitazioni di trasporto, tariffe differenziali e per comitive, ecc. (3), così da accrescere l'intensità di circola-

(1) " Entre les mains des syndacats socialistes — deplorava il De Molinari — les Bourses du travail sont devenues des foyers d'agitation au lieu d'être des foyers d'information ". Cfr. *Questions économiques à l'ordre du jour*, p. 77.

(2) Cfr. *Scritti vari di economia*, ser. 2ª, p. 203. Nello stesso senso, ma più accentuatamente, altri vorrebbe che le unioni assumessero direttamente l'esecuzione completa di un lavoro. Così Y. Guyot in una conferenza tenuta a Liegi: *L'organisation commerciale du travail*, Parigi, 1900. Ma il rischio di sfruttamento non sarebbe punto eliminato.

(3) Cfr. *Scritti vari di economia*, ser. 2ª, p. 259. Quanto sia fecondo simile campo di attività lo dice l'esempio di certi enti di patronato, i quali adempiono egregiamente e con la massima imparzialità tale còmpito, raggruppando gli emigranti di passaggio in qualche stazione di confine e procurando loro facilitazioni fortissime di tariffe. I segretariati di Chiasso e di Basilea dell' " Opera di assistenza degli operai emigrati in Europa e nel Levante ", fan risparmiare in tal modo ogni anno agli italiani parecchie

zione del lavoro fra i vari mercati, sotto l'impero della legge del tornaconto (1).

Ottenere, per quanto più è possibile, la " commercializzazione del lavoro ", è il miglior modo per ricavarne, a pro della vita economica universale, il più alto rendimento (2), sinonimo a sua volta, a non lungo andare, di retribuzione reale maggiore (3).

Alla legge cui fa capo il progresso della economia ortodossa, per la quale ogni aggiunta alla efficienza produttiva dell'industria, e null'altro fuorchè questo, tende ad elevare permanentemente i salari, recenti studi statistici recan conforto di prove sempre più copiose e sicure. Ed appare di giorno in giorno più chiaro che, attraverso una scientifica organizzazione tecnica e sociale dell'industria, il lavoratore tende a realizzare veramente un guadagno corrispondente a quanto produce (4). O molto io mi inganno o ciò equivale a dire che, soltanto rendendosi conto di questa verità essenziale ed adoprandosi con piena buona fede nel senso indicato dalla logica di principî e di forze che non è in poter loro deviare o comprimere (5), sarà dato alle leghe

---

centinaia di migliaia di lire. Ma le organizzazioni potrebbero sistemare e coordinare in modo permanente, all'estero ed all'interno, simili agevolezze, diminuendo di molto i costi ed i disagi che ostacolano la mobilità della mano d'opera.

(1) Una recente inchiesta americana, pone in chiara luce la stretta correlazione esistente fra l'efficienza industriale d'un paese e l'organizzazione *scientifica* del collocamento. Cfr. *America's interest after the european war*, in " Annals of american Academy of political and social science ", LXI, settembre 1915, parte 3ª, n[i] 3, 4, 5, 6, 7. È questo un magnifico campo di azione per dei sindacati apoliticamente tecnici.

(2) Cfr. D. Bellet, *Le chômage et son remède*, Parigi, 1912, p. 276.

(3) Di questa verità teorica, cfr. le eleganti dimostrazioni statistiche del Moore, *Laws of wages*, p. 44 e sgg.

(4) Cfr. Moore, *Laws of wages*, p. 188.

(5) Agirebbero evidentemente in senso opposto agli scopi così indicati le unioni di mestiere se, giustificando l'accusa che spesso loro è mossa, favorissero una riduzione artificiale, anzichè una intensificazione di produttività della forza-lavoro alle loro dipendenze, opponendosi, per esempio, all'introduzione di sistemi di gestione scientifica nella azienda, come fecero in America. Cfr. *Leghe operaie e gestione scientifica delle aziende*, in " Minerva ", 21 maggio 1911. Si avrebbe in tal caso fatalmente un esempio

operaie assicurare l'indefinito progresso proprio, in pari tempo contribuendo a quello delle classi che rappresentano e della società in cui vivono.

Sopra la visione inconciliabilmente antagonistica, il concetto armonico della solidarietà profonda fra capitale e lavoro si rivendica così ancora, sovranamente.

*
* *

Le conclusioni a cui siam giunti non suonano d'altronde condanna assoluta e sistematica del contratto collettivo. Limitate all'influenza che è lecito attendersene rispetto al livello dei salari e delle condizioni di lavoro in generale, e perciò non riflettenti che indirettamente la decantata sua azione nel campo della pacificazione sociale (1), esse non vietan d'altro lato di riconoscere che, in molti casi, tale contratto possa con vantaggio venir sostituito all'individuale, specie quando abbastanza breve ne sia la durata e ristretta l'estensione e supposto sempre che solide garanzie giuridiche ed economiche rendano non illusorie le responsabilità contratte dall'unione stipulatrice. Credo però che le considerazioni svolte ci autorizzino almeno ad asserire che la premessa teorica su cui si appoggiò la tesi della sua preferibilità non riposa su basi scientificamente indiscutibili, nè tanto meno può assumersi come punto di partenza assiomatico.

Ciò avrebbe, a vero dire, un interesse puramente accademico, se il discusso postulato non costituisse il presupposto car-

degli effetti dannosi che l'esistenza di un monopolio anche parziale esercita normalmente sull'efficienza dei mezzi di produzione. Cfr. R. Auspitz et R. Lieben, *Recherche sur la théorie du prix* (tr. fr.), Parigi, 1914, p. 244.

(1) È particolarmente in tal senso che la pratica del contratto collettivo venne esaltata dalla commissione incaricata di sorvegliare l'applicazione della tariffa concordata fra industriali ed operai tipografi tedeschi (uno dei più grandiosi saggi di durevole applicazione del sistema), in una memoria presentata al Reichstag nel 1904. Cfr. *Soziale Praxis*, 21 genn. 1904, p. 426. Ed è come organo di pace sociale che essenzialmente considera il contratto collettivo il Pigou, *Principles and methods of industrial peace*, p. 137 e sgg.

dinale di tutto un movimento dottrinario e legislativo, mirante a incoraggiare con un regime privilegiato un indirizzo, che, abbandonato a sè, probabilmente non tarderebbe a rivelare l'organica sua fallacia. Fra gli autori stessi che esprimono la maggior fede nell'avvenire della tendenza, i più ritengono che, sotto l'impero della libertà e del diritto comune, non molto potrebbe sperarsene (1). Onde il disegnarsi gagliardo di una corrente scientifica e pratica di schietto interventionismo (2), al quale parecchi fra i suoi fautori non assegnano altri limiti fuorchè quelli imposti dal timore di paralizzare, con un'armatura giuridica troppo costrittiva, la portata della promettente riforma (3).

Fra questi due contrari poli — convinzione della necessità della creazione d'un *jus singulare* ed esitanza a costituirlo di tutto punto prematuramente (4), in modo da comprometterne l'efficacia — ondeggia invero la mente dei legislatori che s'applicarono alla soluzione concreta del problema. Dalle discussioni suscitate dal progetto di " sciopero obbligatorio „ di Millerand (1901-1906) (5), alle controversie a cui dàn luogo i disegni di regolamentazione legale del contratto collettivo 2 luglio 1906 e 11 luglio 1910 (6), assistiamo in Francia al contrasto di due punti di vista, la cui divergenza, limitata all'opportunità dei mezzi, non intacca gli scopi proposti alla riforma. Ad uguali

(1) Cfr. Raynaud, *Le contrat collectif du travail*, p. 347 sgg. Tale opinione non sembra però divisa dal Carnelutti allorchè scrive: " Il regolamento " collettivo zampilla dalla duplice fonte dell'*arbitrato* e del *contratto*, e " disegna, nell'avvenire lontano, il nuovo equilibrio dei contraenti, otte- " nuto senza intervento della legge „. Cfr. *Infortuni sul lavoro*, vol. I, p. 39. Cfr. anche *Sul contratto di lavoro relativo ai pubblici servizi assunti da imprese private*, in " Rivista di diritto commerciale, industriale e marittimo „, 1909, I, p. 416 e sgg.

(2) Per le manifestazioni varie di questa tendenza cfr. A. Groussier, *La convention collective de travail*, Parigi, 1913, p. 253 e sgg. e passim.

(3) Cfr. le osservazioni di R. Jay, in " Bulletin de la Société d'études législatives „, 1907, p. 548 e sgg.

(4) Si sostiene da parecchi che il contratto collettivo ancora non è pervenuto ad un sufficiente stadio di cristallizzazione. Cfr. A. Hüglin, *Der Tarifvertrag zwischen Arbeitgeber und Arbeitnehmer*, 1906, p. 3.

(5) Cfr. A. Boissard, *Contrat de travail et salariat*, Parigi, 1910, p. 146 e sgg.

(6) Cfr. H. Capitant, *Cours de législation industrielle*, Parigi, 1912, p. 466 e sgg.

considerazioni si presta il notevolissimo progetto adottato dal Consiglio superiore del lavoro belga il 27 giugno 1911 (1). In questi, come negli altri piani elaborati e dibattuti in più paesi, come nei commenti teorici onde furono oggetto (2), il concetto della desiderabilità essenziale di veder attuato il sistema, appena se ne scorga la possibilità, è sempre implicito e preponderante. Sia che considerino il fenomeno come un elemento del nuovo ambiente industriale, ogni discussione intorno al quale sarebbe oziosa non meno d'un dibattito sulla opportunità dell'esistenza dell'atmosfera (3); sia che lo prospettino come una luminosa mèta, verso cui tendono tutte le forze di progresso dell'umanità ascendente, autori e legislatori concordano in massima in un apprezzamento decisamente ottimistico. Da tale unanimità di giudizî alla creazione d'un diritto privilegiato non è che un passo; e le deroghe al diritto comune contenute negli accennati progetti non sono, per dichiarazione stessa dei loro autori, che gli indizi delle direttive su cui verrà orientandosi la coscienza giuridica futura (4).

Ora è chiaro che qualunque dubbio o riserva, il quale temperi di qualche incertezza quanto v'ha di troppo categorico nel punto di vista iniziale e pregiudiziale, deve trasformarsi in ammonimento di prudenza riguardo alle conseguenze pratiche che se ne attendono. Fino a quando la superiorità economica assoluta del contratto collettivo non è matematicamente dimostrata, rimane lecito pensare che un movimento legislativo fondato su tale presupposto risulti almeno prematuro. È inutile discutere d'una cosa — ammoniva il buon senso del Bagehot, concludendo il citato, classico saggio — se non si sia d'accordo sulle pre-

(1) Cfr. C. De Visscher, *Le contrat collectif de travail. Théories juridiques et projets législatifs*, Gand e Parigi, 1911, p. 372 e sgg.

(2) Ricorderò fra questi in modo speciale l'acuto e dotto articolo del Messina, in cui le premesse relative alla diversità della posizione economica iniziale delle parti, annullante la libertà di scelta nell'operaio, ed all'attitudine del contratto collettivo a rimediarvi, sono accolte senza riserve o discussione, con valore assiomatico. Cfr. *I concordati di tariffe nell'ordinamento giuridico del lavoro.*

(3) Cfr. W. J. Ashley, *The adjustment of wages*, Londra, p. 10.

(4) Cfr. Groussier, *La convention collective de travail*, p. 355 e sgg.

messe; poichè ripugna di ammettere, conferma l' Edgeworth, che ad una correzione teorica rimanga, a lungo andare indifferente la pratica (1).

Se anche lo spettacolo della politica economica dei tempi nostri può renderci molto scettici circa l'efficacia reale di questi consolanti truismi, non meno assidua e coscienziosa deve essere l'opera della scienza imparziale nel denunziare i pericoli delle soluzioni empiriche, frutto di leggerezza ed unilateralità teorica e di frettoloso semplicismo.

---

(1) Cfr. *Mathematical psychics*, p. 128 e sgg.

Noterelle fonetiche.

Περσεφόνη, Persiphone. — *Beneficus, benificus; benevolus, benivolus.* — **Sulle alterazioni di** *ĕ* **in** *i* **nei mss.** — *Illae = ille.*

Nota di MASSIMO LENCHANTIN DE GUBERNATIS.

Περσεφόνη, Persiphone.

Nel v. 4 dell'ormai troppo celebre *laudatio Alliae* è degna di nota la forma *Persiphone*, di cui non si aveva che un solo esempio nelle 'inscriptiones falsae', pubblicate in *CIL* vol. VI fasc. 5 n. 3555:

PERSIPHONE · PACATA · DITI · DECVMBIT
INTEGRITATI · LITAT ·

L'edizione, edita per la prima volta dall'Osann 'ex schedis Hasii' nella *Sylloge inscriptionum antiquarum Graecarum et Latinarum* p. 456 n. 179, senza che alcun dubbio sorgesse sulla sua autenticità, viene accompagnata, nel vol. citato del *Corpus*, dalle seguenti osservazioni: " figura feminae recumbens in operculo sarcophagi: inscriptio recens incisa. In museo Vaticano (*Chiaramonti* a sin.) ". Essendo adunque questa epigrafe una falsificazione, la forma *Persiphone* della *laudatio Alliae* rappresenta davvero un piccolo acquisto per l'onomastico latino, giacchè difficilmente può attribuirsi a mero errore del lapicida, ma sembra invece una grafia che ha la sua ragione di essere nello sviluppo storico della lingua.

Non mancano esempi di affievolimenti vocalici della medesima specie sia in parole latine, sia in parole mutuate dal greco,

e il fenomeno da alcuni glottologi si attribuisce all'accento intenso sulla sillaba iniziale, che sarebbe una innovazione latina sviluppatasi forse per influenza d' una lingua non indoeuropea. Nè sembra fuori luogo ricordare che l'intensità iniziale è ammessa tanto dai dotti che ritengono l'accento latino del periodo letterario un tono (accento musicale) (1), quanto da coloro che lo giudicano invece erroneamente un accento d' intensità o di fiato, simile a quello della nostra lingua (2).

Come adunque con l'ipotesi di una intensità iniziale si può spiegare il passaggio *ĕ* > *ĭ* nelle serie *sĕdĕo*, *obsĭdĕo*, *praesĭdĕo*; *lĕgo*, *collĭgo*, *sēlĭgo*; *rĕgo*, *ērĭgo*, *porrĭgo*, così anche troverebbero la loro spiegazione *Alixentrom* (3) (Ἀλέξανδρον), *Alixentros* (Ἀλέξανδρος), *Persiphone* (Περσεφόνη) (4).

Tuttavia contro questa spiegazione si elevano parecchie difficoltà. Non parlo dell'ipotesi dell'intensità iniziale sulla cui esistenza credo si possano muovere fondati dubbi (5); ma richiamo l'attenzione sul fatto che, sebbene il culto di Persefone sia antico (nel 249 a. C. fu riconosciuto dallo Stato (6)), tuttavia il nome, con cui si designava la dea, non era *Persephone* ma *Proserpina*, che è riduzione latina del greco Περσεφόνη, come ha dimostrato l'Usener, che poi ha mutato opinione, e come concordi ritengono il Jordan, il Wissowa, il Roscher. La metatesi *περ*, *pro* si può infatti spiegare con la supposizione di una forma Πορσεφόνη (cfr. Κέρκυρα, Κόρκυρα; Τρεφώνιος, Τροφώνιος) con lo scambio *πορ pro*, oppure con l'ipotesi che a base della forma latina vi fosse una forma dialettale italica *per-*, che

(1) Di questo parere i filologi e i glottologi francesi, tra i quali eccellono l'Havet e il Meillet.

(2) Questa è l'opinione dei dotti tedeschi e di coloro che ne seguono le orme, tra i quali specialmente degno di nota il Lindsay.

(3) Cfr. Ernout *Le parler de Préneste* p. 25.

(4) Stolz *Historische Grammatik* I p. 95 sgg.; *Handbuch*[4] p. 164 sgg.; Sommer *Handbuch der lateinischen Laut- und Formenlehre* p. 108 sgg.

(5) Tra gli avversari alla ipotesi della intensità iniziale latina basti ricordare il Curtius e il Pedersen fra gli stranieri, il Cocchia e il D'Ovidio fra noi.

(6) Roscher *Lexikon* III 2 col. 3146, 14 sgg.; De Sanctis *Storia dei Romani* II 529.

divenne in latino *pro* (cfr. l'umbro *fratrusper* = *pro fratribus*). Per l'epentesi di *r* in *σεφ*, *serp* cfr. *ἄφλαστον*, *aplastrum* (1).

Persephone adunque è la forma letteraria latina che s'impose quando l'influenza greca dominò sulla letteratura, in un periodo quindi in cui l'intensità iniziale aveva finito di esistere (2). Perciò il fattore dell'accento iniziale intenso non può servire a spiegare la corruzione di *Persephone* in *Persiphone*.

Un'altra spiegazione, degna essa pure d'essere presa in molta considerazione, ha proposto il Rasi (3) che ritiene *Persiphone* come " una forma erroneamente, forse popolarmente, itacizzata da un presupposto *Περσηφόνη* (cfr. *Πέρση*, *ης*; *Πέρσης*, *ου*) per *Περσεφόνη* ". Ma verso la fine del III e il principio del IV secolo (4), epoca a cui risale l'epitafio di Allia, il nome della divinità infernale era entrato da lunga pezza nella letteratura romana, e l'autore non avrebbe mai dovuto procedere lui stesso alla riduzione in latino di una forma *Περσηφόνη* erroneamente presupposta. Mi pare invece assai probabile che egli, nell'atto di dar prova della sua erudizione mitologica, di cui amava fare sfoggio, non si sia accorto di usare una grafia che riproduceva la pronuncia volgare.

Presso i grammatici latini è fatta netta distinzione tra il suono di *ĕ* e di *ē*. Servio, ad es., fiorito nel quarto secolo d. C., osservava (*GL* IV 421, 19 K.) ... *e quando producitur, vicinum est ad sonum i litterae, ut meta; quando autem correptum, vicinum*

(1) Roscher *Lexikon* vol. cit. col. 3141, 42. Gli antichi invece consideravano Proserpina come parola latina. Varrone *de ling. lat.* p. 68 scriveva: *Proserpinam ... quod haec ut serpens modo in dexteram, modo in sinisteram partem late movetur. serpere et proserpere idem dicebant ut Plautus quod scribit ' quasi proserpens bestia '*. Si attengono all' etimologia degli antichi il Curtius, il Bücheler e l'Usener che prima aveva dimostrato rettamente la derivazione di *Proserpina* da *Περσεφόνη*.

(2) Vendryes *Histoire de l'intensité initiale en latin* p. 63 sgg.

(3) *Gli studi recenti sull'epitafio di Allia Potestas e la metrica del carme* in " Atti del Reale Istituto Veneto... " LXXIII 2 p. 697. Anche il Pascal nel suo articolo *Una strana iscrizione metrica latina* in " Atene e Roma " XVI (1913) p. 111 osservava giustamente che la grafia della lapide *Persiphone* non doveva essere toccata.

(4) Cfr. Lenchantin *L'epitafio di Allia Potestas* in " Riv. di fil. " XLI (1913) p. 399.

est ad sonum diphthongi, ut equus (1). Questa sensibile differenza tra *ē* ed *ĕ* è attestata dai riflessi romanzi: ad un *ē* latino risponde, cosa notissima, un *e* stretto italiano (stella lat. *stēlla*, cera lat. *cēra*), mentre a un *ĕ* latino risponde un *e* largo italiano in sillaba chiusa (bello lat. *bĕllus*) e il gruppo *ie* in sillaba aperta: (dieci *decem*, diede *dedit*). Ma come nella pronuncia italiana non viene in tutte le regioni distinto l'*e* largo dall'*e* stretto, così nella pronuncia volgare e più specialmente provinciale non era sempre distinto l'*ē*, il cui suono si avvicinava per attestazione dei grammatici a quello dell'*i*, dall'*ĕ*, il cui suono, pure per attestazione dei grammatici, si avvicinava a quello del dittongo *ae*. Quindi non dovremo meravigliarci se con *ĭ* sia stato talvolta rappresentato il suono dell'*e* breve per natura (2), che è un fatto esso pure documentato, sia per l'*ĕ* tonico sia per l'*ĕ* atono, dai grammatici solleciti della buona pronuncia.

Nell'*Appendix Probi* (3), che tanta importanza assume riguardo alla conoscenza del latino volgare, leggiamo *GL* IV 198, 5 K. *sĕnatus non sinatus* e ibd. 199, 6 *bipennis non bipinnis* e nella ortografia che va sotto il nome di Capro *GL* VII 93, 3 K. *cella pĕnaria non pinaria dicendum* e ibd. 100, 23 *primo pĕdatu non pidatu dicendum* (4).

Anche il dittongo *ae* simile per consenso dei grammatici al suono di *ĕ*, era, come questo, talora rappresentato da *i*; così nell'*Appendix Probi* IV 197, 26 K. *aquaeductus non acquiductus*;

(1) Cfr. MARIUS VICTORINUS *GL* VI 33, 3 K.: *o, ut e, geminum vocis sonum pro condicione temporis promit*; [SERGIUS] *explan. in. Don* in *GL* IV 520, 28 .....*quando e correptum est, sic sonat quasi diphthongus, ĕquus; quando productum est, sic sonat quasi i, ut dēmens*; POMPEIUS *GL* V 102, 4: *e aliter longa, aliter brevis sonat..... dicit ita Terentianus 'quotiescumque e longam volumus proferri, vicina sit ad i litteram'. ipse sonus sic debet sonare quomodo sonat i littera. quando dicis ēvitat, vicina debet esse, sic pressa, sic angusta, ut vicina sit ad i litteram. quando vis dicere brevem e, simpliciter sonat.*

(2) Credo inutile osservare che si tiene solo conto della quantità di natura e non di quella di posizione.

(3) Della terza parte dell'*Appendix*, che può considerarsi come un antibarbarus ortografico, abbiamo, fondamentali, le edizioni del FOERSTER " Wien. Stud. „ XIV (1892) p. 294 e di W. HERAEUS " Archiv „ XI (1900) p. 302 sgg.

(4) Per questi esempi LINDSAY-NOHL op. cit. p. 25; DIEHL *Altlat. Inschriften*[2] p. 73.

ibd. 198, 32 *terraemotus non terrimotium*. Nelle lingue romanze si manifesta pure il fenomeno, che è inutile ricordare, per cui un latino *ĕ* breve in sillaba aperta e un dittongo *ae* si rispecchiano nel medesimo modo: in italiano, ad esempio, da *laetus* abbiamo lieto, come da *dĕcem* dieci.

In *Persiphone* è avvenuto adunque il passaggio di un *ĕ* tonico in *i*, per cui non mancano esempi tanto in sillaba aperta che in sillaba chiusa: *fĭlix* accanto a *fĕlix*, *vĭgeo* accanto a *vĕgeo*, *fĭber* accanto a *fĕber* (1), *bipinnis* sconsigliato dall'*Appendix Probi*, *carictum* accanto a *carectum* (2), *commircium* accanto a *commercium*, su cui è importantissima la testimonianza di Velio Longo *GL* VII 77, 12 K. *mium et commircium quoque per i antiquis relinquamus, apud quos aeque et Mircurius per i dicebatur, quod mirandarum rerum esset inventor, ut Varro dicit. nostris iam auribus placet per e, ut et Mercurius et commercia dicantur.*

Ma non si tratta solo di una pronuncia arcaica, ma bensì d'una pronuncia volgare o meglio dialettale. Nel dialetto di Preneste (3), che è uno dei pochi parlari, legato da stretti vincoli col latino, di cui, mercè dotti studi, noi possiamo avere un'idea meno imprecisa specialmente riguardo alla fonetica, incontriamo il passaggio di *ĕ* in *ĭ* in sillaba tonica od atona in forme come *Mirqurios* (*CIL* XIV 4099) *Mircurios* (ibd. 4106) *Alixentros* (ibd. 4099; 4103). Ad una iscrizione di Lucera *CIL* IX 782 appartiene *stircus* (per *stercus*), che giustamente lo Stolz ritiene un oschismo (4). Il dialetto prenestino ha, per la comunanza di vocabolario e di sintassi e le molteplici somiglianze morfologiche e fonetiche, un carattere indiscutibilmente latino, nonostante certe notevoli divergenze che si rilevano nel periodo anteriore alla colonizzazione che Silla fece di Preneste; e quindi si presta a un confronto ed è di alto interesse sia per le con-

(1) Pei luoghi, ove ricorrono queste forme, cfr. GEORGES *Lexikon der latein. Wortformen.*

(2) *De dub. nom.* in *GL* V 573, 2 *carecta Virgilius in bucolicis 'tu sub carecta latebas', nunc caricta.*

(3) Cfr. CONWAY *The Italic Dialectes* I p. 310 sgg.; ERNOUT *Le parler de Préneste d'après les inscriptions* estratto dalle *MSL* XIII (1905) p. 1 sgg.

(4) *Handbuch*[4] p. 41. Cfr. LINDSAY-NOHL op. cit. p. 264; CONWAY op. cit. I p. 225.

cordanze sia per le discordanze con la lingua di Roma, riescendo a fornirci una immagine, sebbene incompleta e sbiadita, di quello che poteva essere un dialetto nei dintorni della Città, cioè di quello che era il *sermo rusticus* rispetto al *sermo urbanus*.

Tuttavia il fenomeno del passaggio di *ĕ* in *ĭ* non è solo un carattere del *sermo rusticus*, che nel periodo arcaico si parlava non lungi da Roma, ma si manifesta sporadicamente e specialmente in epoca tarda come un volgarismo, combattuto da alcuni grammatici e da altri registrato e talvolta approvato. Un volgarismo di questo genere è appunto la forma *Persiphone* (1).

Un'altra congettura sarebbe possibile, quando seguissimo Teodoro Claussen („ Roman. Forsch. „ XV (1903) p. 853 e „ Neue Jahrb. „ XV (1905) p. 412) che nella pronunzia assai stretta di *ε*, che si osserva in molti dialetti greci (cfr. Brugmann *Grundriss* I² § 118; Hirt *Handbuch der griech. Laut- und Formenlehre* § 81, 2), vorrebbe rintracciare la ragione del riflesso *i* in forme come *piper* (*πέπερι*), *citrus* (*κέδρος*), *incitega* (*ἐγγυθήκη*), *nicromantia* (*νεκρομαντεία*). Ad essere un po' scettici, sebbene non risolutamente, rispetto a cotesta ipotesi, vale però il fatto che il fenomeno *Περσεφόνη*, *Persiphone* e sim. non si manifesta solo in parole d'importazione ellenica, ma è un idiotismo di pronuncia non raro, come risulta dagli esempi addotti e dalle testimonianze dei grammatici e come meglio apparirà dalle considerazioni che seguono.

Beneficus, benificus; benevolus, benivolus.

I grammatici attestano la coesistenza di queste forme. Probo *Inst. art. GL* IV 119, 2 K., senza decidersi tra l'una e l'altra, scrive: *sunt nomina quae i litteram et in e litteram convertant, ut puta malivolus et malevolus et cetera talia*. Invece Velio Longo *GL* VII 76, 13 K. osserva: *Niso etiam placet ut benificus per i scri-*

(1) Sul passaggio di *ĕ* in *ĭ*, che avviene tanto in sillabe atone, quanto in sillabe toniche, si deve escludere l'influenza sia dell'accento storico della penultima, sia della pretesa intensità iniziale: cfr. sotto p. 448.

batur, quomodo malificus, quod video consuetudinem repudiasse. non enim, si hae duae litterae, e et i, per ius affinitatis recipiunt immutationem, ideo necesse est illas utique semper immutari. item antiquos ait per e et i scribendum, quoniam significet ante. quod mihi frigidum et ineptum videtur. Dà la preferenza alle forme con *i* Albino *GL* VII 298, 14 K. *benivolus et benificus, licet a bene adverbio sit compositum, tamen per i, non per e scribitur; similiter et malivolus et malificus, sicut a pace pacificus.* Con questa testimonianza si accorda la grafia di Messio Arusiano *GL* VII 458, 26 K. *Benivolus illi, Cic. pro Flacco quam benivolum hunc populo Romano, quam fidelem putatis.*

La grafia delle iscrizioni varia. Fluttuante tra *beni-* e *bene-* è la scrittura di *benevolentia*, su cui importante Placido *CGL* V 8, 28 (= 50, 10) *benivolentia et malivolentia per i, non per e dicitur, quomodo benignus et malignus, non benegnus et malegnus. saepe enim ex duabus partibus compositum nomen aut priorem aut sequentem litteram corrumpit; ideo benivolentiam dicimus; nam benevolentia crassum quiddam sonat.* Dal *Thesaurus* s. v. enumero i luoghi delle epigrafi in cui ricorre la forma *beniv*: " CORP. I 589. EPIST. procur. de aq. Sald. (CORP. VIII 2728, *saec. II med.*) 69. CORP. XIV 2073 (*a. 213*). 170, 13. VI 1066 (*a. 213*). XIII 6405 (*a. 225*). VI 32415 (*fere 250*). 32416 (*a. 257*). 32417. DECRET. centon. Sentin. *a. 261* (CORP. XI) 22. CORP. XI 6337, 15. EDICT. imp. inc. (CORP. III 13569) *ter*. CORP. VI 32051 (*a. 349*) 2. X 5349 (*a. 408*) 5. 451, 6. 519, 4. 1126, 8. 4665, 3. 4863. 6243, 6. 6441, 9. 7233, 5. XII 3637. *benibolentiam*: CORP. VI 32416 (*a. 257*). X 1126 (*saec. IV*) „. *benivolus* si legge p. e. in CORP. V 4870. IX 3590; *benivolens* in CORP. IV 1326 e più spesso di *benevole* ricorre *benivole*. Si ha *benificus* in CORP. IV 29. 30; *benificium* in CORP. VIII 10525 (età di Cesare). XII 4333 (età d'Augusto): cfr. I 587. 589. V 5050, 30. 34. XI 6481, 11 (dell'anno 148).

Si legge invece *benevolentia* in CARM. epigr. 68 (CORP. I 1019) 4. DECRET. decur. Tergest. (CORP. V 532) 1, 22 (dell'a. 138-61). CORP. XI 5283 (non prima di Costantino). Si ha *benevolus* p. e. in CORP. VI 12864. 33466 CARM. epigr. 334, 2, e *beneficus* e *beneficium* costituiscono le forme usuali e più frequenti di quelle in *beni-*, che or ora ho registrato, togliendole dal *Thesaurus*.

Questi esempi sono più che sufficienti per farci concludere

che le forme composte con *beni-* coesistevano accanto a quelle composte con *bene-* in tutte quasi le parti del mondo romano, in Roma, che può essere ritenuta il centro di irradiazione, nel Lazio, in Etruria, in Umbria, in Calabria, nelle provincie greche, nella Gallia e nell'Africa, per un periodo che si estende dall'età più antica sino al IV secolo e oltre.

Varie e di più guise le spiegazioni tentate dai filologi e dai glottologi moderni.

Il Ritschl (1), riducendo in ambito troppo ristretto il curioso fenomeno, si accontentava di notare che ogni *ĕ* finale, in composizione con una parola che incomincia per consonante, si attenua in *i*.

Il Brambach (2), accogliendo questa regola, aggiungeva che le teorie dei grammatici si erano opposte al movimento naturale della lingua in un'epoca in cui le leggi sulla formazione delle parole si erano oscurate. Così essendo, non risulterebbe improbabile che i dotti si lasciassero trarre a ricomporre le parole, secondo l'analogia e l'etimologia e, per ridurci al caso nostro, scrivessero e raccomandassero di scrivere *beneficus* e non *benificus*, *maleficus* e non *malificus* e via dicendo.

I grammatici più recenti in genere vedono in forme come *benivolus* un fenomeno di apofonia, dovuto all'intensità iniziale. Da un **béne-volus* si avrebbe avuto **bénivolus* e, scomparso l'accento intenso della sillaba iniziale ed entrato in vigore l'accento della penultima, *benívolus*. La grafia *benevolus* avrebbe preso piede per opera dei dotti che badavano agli elementi di cui la parola era composta (3).

Altri invece pensano che il vocalismo iniziale si sia opposto all'azione regolare dell'apofonia; cioè la presenza di *e* nella prima sillaba di *beni-* avrebbe esercitato un'azione assimilatrice tanto forte da condurre l'*i* della sillaba seguente ad assumere il suono di *e* (4).

---

(1) " Rhein. Mus. „ N. F. VII (1853) p. 580 = *Opusc.* II p. 561.

(2) *Die Neugestaltung der latein. Orthographie* p. 179.

(3) Cfr. p. e. Stolz *Histor. Grammatik* I p. 96 sgg.

(4) Parodi *Noterelle di fonol. lat.* in " Sidfcl. „ I p. 395 sgg.; Vendryes *L'intensité initiale* p. 294 sg.

Bisogna tuttavia osservare che in *bĕnĕ* l'*e* finale, dalla antica desinenza dell'istrumentale *ē* o dell'abl. *ēd* (1), fu abbreviato in forza della legge della 'correptio iambica', per cui nei disillabi di forma giambica ogni vocale lunga finale poteva essere nella poesia arcaica considerata per breve, mentre nell'uso classico cotesta scansione fu ammessa solo per le parole comunissime, come precisamente *bĕnĕ*, *mălĕ*, ma non per altre meno adoperate quali *cătē*, *fĕrē*. Ora essendo l'*ẹ* finale di *bene* originariamente lungo, non poteva essere intaccato dall'accento iniziale che, come sostengono coloro che ne affermano l'esistenza, solo esercita la sua influenza sulle vocali brevi, producendo i fenomeni di apofonia e di sincope (2).

Il Cocchia, deciso avversario dell'ipotesi di un accento intenso che potesse salire in latino oltre la terz'ultima sillaba (3), rispetto alla nostra questione scriveva (4): " Quanto a *bĕnĕvolus* e *mălĕvolus* di fronte a *benivolus* e *malivolus* a noi par così sicuro e decisivo il raffronto con le frasi *bene velle* e *male velle* delle commedie plautine, che attribuiamo senz'altro l'alterazione di *bene-* in *beni-* nei composti ad una mera spinta dissimilativa, cominciata a manifestarsi dapprima là dove il *bene* era fuori accento, come in *benivolentia* e *dis benivolentibus* ".

Il D'Ovidio (5), pur accogliendo con plauso le sagaci osservazioni del Cocchia, su questo punto obiettava (6): " ... che in *benĭvolus* (e *malĭvolus*) e sim. si abbia una semplice dissimilazione eufonica di *bene-*, la quale sia incominciata dapprima nella formula protonica in *benivolentia* e sim., non par verosimile e resta sempre più credibile l'ipotesi (cfr. Corssen II 319)

(1) Lindsay *Die lateinische Sprache* p. 632; Stolz *Handbuch*[4] p. 211.

(2) Oltre alle maggiori grammatiche storiche, fu trattato largamente di questa questione dal Vendryes, il quale op. cit. p. 164 osserva: " En tout cas, l'intensité initiale n'exerce aucune influence sur une voyelle longue intérieure ".

(3) *Rassegna critica di filologia e linguistica* in " Riv. di fil. " XV (1887) p. 391 sgg.

(4) Ibd. p. 408.

(5) *Spigolature romanze dalle pagine di un latinista* in " Archivio glottologico " X (1886-1888) p. 413.

(6) Ibd. p. 421.

che si tratti di un *i* analogico (cfr. *agrĭcola, pacĭficus*), non già eufonico o solo accessoriamente tale, così da non vi essere alcun bisogno di ricorrere alla protonia „.

È questa in fondo la spiegazione di Albino VII 298 16 K. ...*malivolus et malificus sicut a pace pacificus*. Certo chi guardasse con occhio di grammatico, dovrebbe negare lo stretto rapporto tra l'*e* affievolito in *i* di *malivolus* e *benivolus* e l'-*i*- di *pac-i-ficus*, sia che lo si consideri come la così detta vocale di composizione, corrispondente all'-*ŏ*- di altre lingue (p. e. δρακοντ-ό-μαλλος, νιφ-ό-βολος), o come la vocale del tema, nata per la notissima confusione tra i temi in consonante e quelli in -*i*- della terza declinazione (1). Ma con ciò non sarebbe da escludere che la forza inconscia dell'analogia, attraversando il regolare processo fonetico, potesse condurre a tali ravvicinamenti, quando a questa ipotesi non si opponesse il fatto della coesistenza in luoghi e tempi diversissimi delle forme medesime, composte ora con *bene-*, *male-*, ora con *beni-, mali-*. Infatti non è verosimile ammettere che l'attività inconscia e illogica dell'analogia, che ostacola e intralcia saltuariamente le leggi fonetiche, potesse esercitarsi nel tempo e nello spazio con grande regolarità, rispetto al fenomeno di cui ci occupiamo.

Il Lindsay osserva che l'*ĕ* finale, quando in composizione cessa di essere tale, si muta in *i* ed esemplica con *bĕnifĭcus* accanto a *bene*, *quippini* accanto a *quippe*, *sicine* accanto a *sic(e)*, *hoccine* accanto a *hoc-ce* da **hod-ce* (2). Ma, prospettato in questo modo, il fenomeno non cessa di essere oscuro e, senza fermarmi sul confronto con *quippini*, *hoccine*, mi basti osservare che la coesistenza di forme con l'*i* o con l'*e*, dimostra che la regola non era seguìta costantemente.

A me sembra che le grafie *benificus*, *benivolus* rappresentino la pronuncia dialettale e volgare per cui il suono di *ĕ* venne corrompendosi in *i*, come ebbi a dimostrare riguardo a *Persiphone* (3). Il fenomeno, abbiamo visto, si accentuò nel periodo

---

(1) Cfr. Lindsay op. cit. p. 418.
(2) Ibd. p. 238.
(3) Cfr. sopra p. 443.

della decadenza, ma non è estraneo nelle epoche antiche della lingua latina. Ricordando a questo proposito le parole di Velio Longo che esplicitamente attesta aver usato gli antichi pronunciare *mius*, *commircium*, e riferendoci ancora alle già citate forme *Mircurios*, *Mirqurios*, *Mircurialis*, *stircus*, che giustamente lo Stolz (1) ritiene dialettali, potremo considerare come provincialismi o volgarismi non meno di *Persiphone*, anche *benificus*, *benivolus*, coesistenti accanto a *beneficus* e *malevolus* dell'uso letterario (2).

Nell'affievolimento della vocale si deve escludere tanto l'influenza dell'accento espiratorio iniziale che, se pur ha esistito, aveva cessato di agire nel latino storico, quanto l'influenza dell'accento della penultima, giacchè troviamo intaccate tanto le vocali toniche, quanto le atone: *fiber*, *bipinnis*, *pinaria*, *pidatu*.

Sulle alterazioni di *ĕ* in *i* nei manoscritti.

Non ho tenuto conto delle alterazioni di *ĕ* in *i* nei mss., giacchè questi, in materia così fragile come l'ortografia, hanno una importanza assai minore dei testi epigrafici e delle testimonianze esplicite dei grammatici. Non nego tuttavia che la tradizione manoscritta possa offrire una base meno solida sì, ma utile di studio, quando venga esaminata e vagliata con le debite cautele e con l'intento di distinguere ciò che risale all'autore stesso dagli errori dei copisti (3).

(1) *Handbuch*[4] p. 41.

(2) Il GRANDGENT *Introduzione allo studio del latino volgare* (trad. di M. MACCARONE) p. 111, toccando di passaggio le alterazioni analoghe a quelle da noi studiate, in *benĭvolus* scorge erroneamente un *i* adoperato per *ē*.

(3) A questo metodo si attenne, ad esempio, il SEPULCRI nel pregevolissimo saggio su *Le alterazioni fonetiche e morfologiche di Gregorio Magno* in *SM* I (1904) p. 184 sg. LO STABILE, studiando diligentemente in “Riv. di fil.„ XLIII (1915) p. 561 sgg. la latinità del nuovo *Psalterium* edito dal Codex Casinensis 557, nella parte dedicata alla fonologia, non dimentica il passaggio di *e* in *i*, non distinguendo però i casi in cui *e* è breve da

Per quanto si riferisce ai classici, non ci troviamo in buone acque. Tra i mss., di cui nel più de' casi disponiamo, e gli autografi sono passate tante mani che le alterazioni, data la facilità con cui si producono in ogni tempo, si devono presupporre numerosissime, essendo già incominciate sin dalla più remota antichità. " È noto — osserva il Valmaggi (1) — che la diligenza dei *librarii*, vuoi per fretta, vuoi per inettitudine, lasciava spesso a desiderare. Cicerone dichiara di non sapere dove mettere le mani tanto i libri *mendose et scribuntur et veneunt* (2). Varrone (3), Livio (4), Marziale (5), Gellio (6), Simmaco (7) — per ricordar qualche esempio tra i più insigni e di età diverse — parlano degli errori dei copisti come di piaga addirittura cronica dell'industria libraria. Tanto cronica che gli stessi esemplari di maggior pregio non erano immuni da errori (8). È facile adunque presumere qual sorte fosse riservata all'ortografia, specie per quelle quisquilie che sono poi la parte più incerta e controversa ".

Ho citato queste parole che convengono, come meglio non potrebbero, al caso nostro: scrivere *beneficus* o *benificus*, *maleficus* o *malificus*, se poteva aver un po' di peso per gli autori che andavano per il sottile, riesciva indifferente agli amanuensi in genere. In conseguenza, supporre avariata la tradizione, anche prima del tempo a cui risalgono i manoscritti nostri di più venerata antichità, non è cosa nè arrischiata nè infondata (9). In quanto ai codici medievali e umanistici, sui quali in gran parte si basano i nostri testi, è risaputo che l'ortografia era andata

---

quelli in cui è lungo. Troppa fede alla tradizione manoscritta presta il Corssen *Ueber Aussprache, Vokalismus und Betonung der latein. Sprache* II[2] p. 371 sgg.

(1) *Ortografia e morfologia* in " Riv. di fil. „ XLI (1913) p. 588.

(2) " *Ad Q. fratrem* III 6, 6. E i libri greci non correvano sorte diversa: v. Strabone XIII p. 609 „.

(3) " *L. L.* IX 106 „.

(4) " XXXVIII 55, 8 „.

(5) " II 8, 3 sgg: cfr. VII 11, 2; 17, 7 „.

(6) " VI 20, 6 „.

(7) " *Ep.* I 24 „.

(8) " Gellio V 4, 1 sgg. „.

(9) Cfr. Valmaggi art. cit. p. 690.

soggetta a variazioni di più specie, conscie ed inconscie, dovute all'uso del tempo e alle dottrine grammaticali prevalenti.

Invece gli scarsi frammenti papiracei assumono importanza e valore pari alle epigrafi. Mentre in Wessely *Schrifttafeln zur älteren lateinischen Palaeographie* I col. 2 lin. 17 ricorre la retta grafia *beneuolentiam* (1), in un fr. di glossario del sec. IV (Wessely op. cit. 20 lin. 24 = *CGL* II 563, 33) abbiamo *coclia* e in un altro fr., contenente una legittimazione per quattro *protectores*, del IV secolo (Wessely op. cit. 21 lin. 2) troviamo *horiorum*.

Nel *CGL* si legge, eccetto che in IV 591, 52, sempre *benivolentia*; cfr. II 29, 21; 215, 30; 318, 38; 337, 41; III 385, 29; IV 211, 24; 313, 45; 585, 48. Frequentemente s'incontra *benificus* accanto a *beneficus*, e si ha *malivolus* in II 336, 36; 336, 52; III 177, 12; 497, 7; 527, 61; *malevolus* in II 336, 44; III 334, 70.

Queste forme rientrano evidentemente nella serie di quelle sopra esaminate: sono cioè veri e propri volgarismi di pronuncia.

Illae = ille.

Nella *laudatio Alliae* v. 18 *Et nitor in facie permansit eburneus illae* avevo considerato (2) *illae* non come un dativo, pur accennando alla possibilità che potesse esserlo, ma come un errore del lapicida, tratto forse in inganno per essersi fermato con l'occhio, sull'originale da cui copiava, alla fine del v. 20, che termina in *papillae*; e in conseguenza nel testo critico avevo scritto *ille*. Ma la correzione non fu approvata nè dal Pascal (3) nè dal Rasi (4) il quale mi obiettava: " ... l'argomento che ad-

(1) Il Travaglio *De orthographia qua veteres usi sunt in papyris cerisque latinis* in " Memorie del R. Ist. Lomb. " vol. XXII p. 12 cita per sbaglio la forma *benivolentia* da Wessely op. cit. n. 11, ove questa parola non si trova. Dal Travaglio stesso (ibd.) erano già registrate *horiorum* e *coclia*.

(2) " Riv. di fil. " XLI (1913) p. 391.

(3) " Atene e Roma " XVI (1913) p. 259.

(4) " Atti del Reale Ist. Ven. " LXXIII 2 p. 699.

duce il Lenchantin a suffragio della sua correzione... io l'inverto traendolo ad altra " sentenzia ch'ei non tenne ", e dico che molto probabilmente qui l'autore del carme adoperò appunto la forma *illae* alla fine del verso per ottenere una rima (perfetta) con *papillae* ". Alla osservazione rispondeva il Nohl (1), nella recensione sulla *Nota* del Rasi, in questi termini: " Dagegen scheint mir nicht glaublich, dass v. 18 *illae* als dat. beabsichtigt sei wegen des Reims mit *papillae*, das nicht etwa in der folgenden, sondern erst in der zweitnächsten Zeile steht: Lenchantin nimmt wohl mit Recht an, dass es *ille* steht ".

Che l'epigrafista potesse usare, accanto alla forma *illi*, quella *illae* è possibile, nonostante che immediatamente dopo in quattro versi (20, 21, 23, 25) abbia ripetuto *illi* sempre al dat. femminile. Infatti sono numerose le iscrizioni di carattere in modo speciale volgare, le quali presentano un sincretismo grande di grafie corrette e scorrette. D'altra parte non bisogna dimenticare che il dat. *illae* si incontra di rado. Nel Neue-Wagener infatti non sono registrati che gli esempi seguenti: Caton. *RR* 153; 164; Plaut. *Stich.* 560; *CIL* I 1429: IV 1824, ai quali si può aggiungere *CE* 947 Büch. Onde, anche per questa ragione, non credo convenga escludere senz'altro che, nel verso citato dell'epitafio di Allia, *illae* stesse per *ille*.

Abbiamo constatato che i grammatici, per inculcare la buona pronuncia, di cui osservavano il progressivo decadimento, ponevano in rilievo la differenza tra *ĕ* ed *ē*, notando che mentre l'*e* lungo si avvicinava al suono di *i*, invece *e* breve si avvicinava al suono del dittongo *ae* (2). Ma la piccolissima differenza tra la pronuncia di *ĕ* e del dittongo *ae*, in un'epoca in cui il senso della quantità si andava ottundendo (3), non poteva non condurre a una confusione nell'ortografia (4) da parte di coloro che non erano più in grado di cogliere con l'orecchio le sfumature tra i due suoni. Di questo fatto fanno fede molte epigrafi: *CIL* IX 384 *aego*; IX 1002; X 5939 *baene*; III 2107 *aeam*;

---

(1) " Wochenschrift für klass. Philologie " XXXI (1914) col. 953.

(2) Cfr. sopra p. 3 sgg.

(3) Lenchantin " Boll. di fil. class. " XX p. 111 sg.

(4) Stampini *Trattato della ortografia latina* p. 8 sg.

III 1195; VI 3409; VII 118 *aeques*; V 4616 *maemoria*; X 2184 *piaetati*; VIII 1398 *Caereri*; IX 1545 *Caereris*; IX 1023 *daeo*; VI 2242 *daeae*; IV 1684 *maeae*; VI 3483; 13419 *benae*; VI 3496 *libertabusquae posterisquae*; VI 8455 *quinquae*. E il fenomeno, come si vede, si manifestò in tutto il mondo romano a cominciare dal primo secolo (1).

Questi esempi, il cui numero si potrebbe facilmente aumentare (2), mi sembrano sufficienti a rendere verisimile che in *illae* = *ille* si nasconda un volgarismo ortografico. All'ipotesi è dato maggior fondamento dal fatto che nell'epigrafe di Allia, oltre ad altre incongruenze o errori di scrittura, ricorre la forma *Persiphone* che è essa pure un idiotismo ecfonetico, come già è stato dimostrato (3).

---

(1) Cfr. Bücheler " Rhein. Mus. „ XIII (1858) p. 153.
(2) Seelmann *Die Aussprache des Latein* p. 182 sgg.
(3) Cfr. sopra p. 438 sgg.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 23 Gennaio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente CAMERANO, il Direttore della Classe D'OVIDIO, e i Soci NACCARI, PEANO, GUARESCHI, GUIDI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI, BALBIANO, PANETTI, e SEGRE, Segretario.

Letto e approvato il verbale dell'adunanza precedente, il Socio GUARESCHI offre in omaggio, in nome della Commissione, la *Relazione della Commissione Torinese per lo studio dei gas asfissianti e mezzi di difesa*; ed il Socio GUIDI presenta, per la stampa negli *Atti*, una Nota del Prof. G. ALBENGA, *Sulle linee d'influenza delle tensioni interne negli archi*.

LETTURE

Sulle linee d'influenza delle tensioni interne negli archi.

Nota di GIUSEPPE ALBENGA.

Per effetto di un carico unitario P, che agisca in un punto qualunque dell'asse di un arco e giaccia nel piano di esso, si sviluppano nella sezione generica S: un momento flettente M, uno sforzo di taglio T ed uno sforzo normale N.

Si abbia un arco incastrato alle imposte, immaginiamo di tagliarlo secondo la sezione S ed a questa sezione, considerata come terminale del tronco sinistro e distinta con il simbolo S_l, applichiamo le sollecitazioni arbitrarie M^*, T^*, N^*, o, ciò che fa lo stesso, la loro risultante R^*; alla stessa sezione, considerata come estrema del tronco di destra (S_r), si applichino invece le sollecitazioni $-M^*$, $-T^*$, $-N^*$. Per questa condizione ideale di carico il punto d'applicazione della P si sposterà in direzione di questa forza di una quantità δ, la sezione S_l roterà di un angolo φ_l^* e si muoverà di η_l^* e di ζ_l^* rispettivamente nelle direzioni di T e di N: analoghe deformazioni φ_r^*, η_r^* e ζ_r^* subirà la sezione S_r, e si avrà, per quanto ho dimostrato in una breve nota sul teorema di Land [1]:

$$(1) \qquad 1 \,.\, \delta = M(\varphi_l^* - \varphi_r^*) + T(\eta_l^* - \eta_r^*) + N(\zeta_l^* - \zeta_r^*).$$

Dalla (1) discende subito una costruzione semplice e diretta delle linee di influenza per le tensioni unitarie normali σ nei punti dell'intradosso e dell'estradosso.

[1] " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. L, 1914-15.

* * *

Nei punti situati ai lembi della sezione le tensioni σ sono, come è noto, proporzionali ai relativi momenti di nocciolo [1]. La ricerca delle linee di influenza delle σ_i all'intradosso e delle σ_e all'estradosso può quindi ridursi a quella delle linee d'influenza dei corrispondenti momenti M_m ed M_n. Con un semplice cambiamento di scala passeremo da queste linee di influenza a quelle delle tensioni.

Noi possiamo scegliere le sollecitazioni applicate a ciascuna faccia del taglio, in modo da soddisfare a 3 relazioni prefisse, per esempio in modo che le deformazioni da esse provocate siano legate fra di loro da 3 equazioni arbitrarie.

Indichiamo con h_m la distanza del punto di nocciolo m dal baricentro della sezione: noi potremo sempre fare sì che si abbia:

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi_l^* - \varphi_r^* = 1 \\ \eta_l^* - \eta_r^* = 0 \\ \zeta_l^* - \zeta_r^* = -h_m \end{cases}$$

con che la (1) diventa:

$$1 \,.\, \delta = M - N h_m$$

o ricordando la espressione del momento di nocciolo M_m:

$$(3) \qquad 1 \,.\, \delta = M_m .$$

La (3) ci dice che la linea d'influenza degli spostamenti δ per quella condizione fittizia di carico che soddisfa le (2) è pure linea di influenza del momento di nocciolo M_m.

Facendo invece

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi_l^* - \varphi_r^* = 1 \\ \eta_l^* - \eta_r^* = 0 \\ \zeta_l^* - \zeta_r^* = h_n \end{cases}$$

---

[1] Cfr. C. Guidi, *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni*, vol. II, 7ª ed., pag. 143. Seguo le notazioni di questo autore.

dove h_n è la distanza del punto di nocciolo n dal baricentro, si ricava:

$$(5) \qquad 1 \, . \, \delta = M + N h_n = M_n$$

e la nuova linea d'influenza della δ ci darebbe la linea d'influenza del momento M_n.

* * *

La teoria dell'ellisse di elasticità ci dà modo di tracciare facilmente la linea degli spostamenti δ.

Manteniamo fissa la sezione S_l ed immaginiamo collegate le due imposte dell'arco con un legame rigido. Avremo così un arco incastrato ad un estremo, libero all'altro e tale che le deformazioni dell'estremità libera coincidono con le deformazioni relative delle sezioni S_l ed S_r dell'arco tagliato secondo S.

In questo nuovo sistema ogni forza R applicata all'estremo libero S_r provocherà una reazione $-R$ all'incastro S_l e produrrà una rotazione di S_r intorno all'antipolo della linea d'azione di R rispetto ad una ellisse (1), che coincide con la nota ellisse degli spostamenti terminali dell'arco considerato, perchè con lo spostarsi della sezione S non variano nè la intensità nè la distribuzione dei pesi elastici elementari e quindi la conica fondamentale della corrispondenza antipolare non muta (2).

Le (2) corrispondono ad una rotazione relativa unitaria delle due faccie del taglio, con centro nel punto m. Nel sistema ora considerato una tal rotazione si produce applicando alla sezione terminale S_r una forza R, agente secondo l'antipolare del punto m rispetto all' ellisse di elasticità e la cui intensità soddisfi all'eguaglianza

$$R \, . \, r \, . \, G = 1$$

dove r è la distanza della linea d'azione della R dal baricentro elastico del sistema e G è il peso elastico di esso.

---

(1) Cfr. C. Guidi, op. cit., pag. 249.

(2) Vedi G. Colonnetti, *Sulla teoria degli archi*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", vol. XLVIII, 1912-13.

Per determinare la linea di influenza del momento di nocciolo M_m basterà quindi applicare alla sezione S_r del tronco destro dell'arco la forza R ora determinata ed alla sezione S_l del tronco sinistro la forza $-R$, avente la stessa linea d'azione della precedente, e calcolare gli spostamenti δ generati da queste forze. La linea della δ può tracciarsi coi procedimenti noti dai corsi di scienza delle costruzioni per mezzo di poligoni funicolari dei pesi elastici e dei loro momenti statici.

***

È ovvia la estensione alle linee d'influenza della σ in un punto qualsiasi della sezione ed è facile modificare la trattazione precedente in modo da applicarla ad altri tipi di arco.

Pisa, Dicembre 1915.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 30 Gennaio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Socii: Chironi, Direttore della Classe, Carle, Pizzi, Ruffini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza del Socio Vidari.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza del 16 gennaio.

Il Socio Segretario Stampini, riferendosi alla commemorazione del Socio corrispondente Windelband fatta, nell'adunanza precedente, dal Socio D'Ercole, dichiara di sentirsi in dovere di non differire più oltre, anche per riguardo ed omaggio alla nazione amica, quella commemorazione dell'insigne glottologo, filologo e pedagogista francese Michele Bréal, Socio straniero della nostra Accademia sin dal 1903 e morto il 25 novembre u. s., la quale egli si riservava di tenere, con maggiore agio e maggiore ampiezza, in tempo più opportuno. Ricorda i primi studî di zendo e di sanscrito iniziati dal Bréal a Parigi e proseguiti a Berlino, ove fu discepolo del Weber e di quel Francesco Bopp, della cui Grammatica comparata delle lingue indo-europee doveva il Bréal più tardi pubblicare la sua magistrale traduzione e illustrazione. Accenna alle due tesi per il dottorato, che val-

sero al Bréal larga e meritata fama, specialmente quella comprendente uno studio di mitologia comparata su Ercole e Caco, del quale a ragione fu detto essere una delle pietre miliari che segnarono i progressi di quella nuova disciplina nella seconda metà del secolo XIX. Rapidamente menziona i numerosi altri scritti di linguistica, di filologia, di mitologia comparata, ma in particolar guisa si sofferma a parlare di quell'opera coraggiosa e sapiente *Quelques mots sur l'instruction publique en France* che fu subito largamente esaminata e discussa, non solo in Francia, ma pure in Italia nella allora nascente (anno 1872) nostra " Rivista di filologia e d'istruzione classica ", per le grandi, per quanto dure, verità che vi erano contenute e potevano ben riferirsi anche alla istruzione pubblica del nostro paese. Ricorda la cittadinanza onoraria conferitagli dalla città di Gubbio come attestato di riconoscente ammirazione per il poderoso dottissimo lavoro sulle Tavole Eugubine, e termina dando un breve cenno dei tanto discussi studi omerici del Bréal, rappresentati dal libro *Pour mieux connaître Homère*.

Ma il Socio Stampini non può fare a meno di rivolgere un mesto pensiero ad un altro nostro illustre Socio straniero, che come tale apparteneva alla nostra Accademia dal 1908 dopo esserne stato per tredici anni Corrispondente, e che si spense il 18 maggio dello scorso anno; al suo carissimo amico, e amico di tanti Italiani anche fuori del novero dei professori; all'insigne maestro di filologia romanza Wendelin Foerster, che, giovanissimo ancora, aveva meritato l'altissimo onore d'esser chiamato, per voto della Università di Bonn, a successore dell'immortale fondatore di quella scienza, Federico Diez. E si sente in dovere il Socio Stampini di tributare una parola di compianto alla memoria del Foerster, non solo per l'intima amicizia che a lui da circa un quarantennio lo legava, non solo per l'ammirazione di una costante, indefessa, feconda attività scientifica e per l'immenso contributo di indagini nuove e felici, dato alla scienza da lui e dagli scolari del suo " Seminario di filologia romanza ",

che lo STAMPINI ricorda con commosse parole di aver visitato, quando fu in Bonn nel 1911, ma anche perchè il FOERSTER era vero, grande, fedele amico dell'Italia e degli Italiani; perchè il FOERSTER, che pur era una delle più alte personalità scientifiche della Germania, non figura coi firmatari del noto appello degli intellettuali tedeschi. Anzi il Socio STAMPINI legge la chiusa di una mestissima lettera, inviatagli dal FOERSTER il 27 luglio del 1914, appunto alla vigilia dello scoppio della guerra mondiale, in cui si mostrava sconfortato e atterrito per " la possibilità di una guerra grande, internazionale ", mentre la moglie per le sue condizioni di salute lo consigliava a far ritorno nella sua diletta Italia: e soggiungeva domandandosi: " e perchè? " Cosa sono a noi i regicidi Serbi? In che tempi viviamo! E ho " dovuto io passar la settantina per veder ancora tutta questa " miseria? Tu vedi che sono in ispiriti piuttosto eccitati e scrivi " alcune buone parole al tuo vecchio amico ". Sono le sue precise parole, perchè il FOERSTER si compiaceva di parlare e scrivere in italiano, e anche di conversare in piemontese, egli che fu benemerito e ammirato editore e illustratore di quelle " Prediche gallo-italiche " che sono il più cospicuo documento del vecchio dialetto piemontese e ad un tempo rappresentano uno dei più insigni e antichi testi dialettali dell'Italia.

Alle due commemorazioni dette dal Socio STAMPINI si unisce il Direttore della Classe CHIRONI, ricordando del BRÉAL i notevoli contributi alle scienze giuridiche, e del FOERSTER il grande amore che ebbe per la Sardegna, da lui a lungo e più volte visitata e studiata, e l'ammirazione che professava per la singolare abilità, per la larga e rara dottrina di coloro stessi che avevano dato opera alla formazione delle così dette " Carte di Arborea ", della cui falsità il collega STAMPINI ricordò la dimostrazione data dal FOERSTER con nuovi, ingegnosi, irrefutabili argomenti.

Il Socio EINAUDI, anche a nome del Socio PRATO, presenta ed illustra: 1° la Annata 1915 della rivista " La Riforma So-

ciale „ da essi diretta; 2° il Supplemento annuo alla stessa rivista, compilato dal Prof. Riccardo Bachi col titolo *L'Italia Economica nel 1914*, preziosa miniera di notizie sicure e vagliate sui diversi aspetti della vita economica e sociale nell'anno in cui si iniziò la guerra europea; 3° un altro Supplemento intorno al *Corso dei titoli di Borsa in Italia dal 1861 al 1912*, ultimo scritto dovuto alla penna del Dott. Achille Necco, morto gloriosamente il 9 del settembre 1915 al Passo della Sentinella, colpito in fronte da una palla austriaca. Il Socio Einaudi segnala alla Classe gli scritti di questo giovane valoroso, buono e studiosissimo, il cui numero-indice dei prezzi è oramai in ogni paese citato ed usato, alla pari dei più famosi numeri-indici stranieri. E il Socio Ruffini si associa ricordando l'ultima lettera che il Necco scrisse dal campo, alla vigilia di accingersi alla impresa in cui trovò la morte, lettera che è forse la più bella, per altezza e nobiltà morale, fra quante siansi lette in questi mesi, pur fecondi di così nobili manifestazioni dell'animo umano.

La Classe ringrazia i Soci Einaudi e Prato e si associa alla commemorazione del Dott. Necco.

Il Socio Patetta presenta, per gli *Atti*, illustrandone brevemente il contenuto, una sua Nota dal titolo *Di alcune poesie latine di Gaspare Tribraco in onore dei Gonzaga*.

LETTURE

Di alcune poesie di Gaspare Tribraco in onore dei Gonzaga.

Nota del Socio FEDERICO PATETTA.

1. Il poeta e grammatico Gaspare dei Trimbocchi, o Tirimbocchi, detto, con nome d'origine evidentemente letteraria (1), il Tribraco, ebbe la fortuna d'essere lodato oltre misura da contemporanei veramente insigni, quali Tito Vespasiano Strozzi e Matteo Maria Boiardo; ma i loro elogii, che forse furon conforto della sua misera vita, non lo salvarono dopo morto dall'indifferenza e dall'oblìo, consueto guiderdone d'ogni opera poetica, che non si levi più in su della mediocrità.

Non fa quindi meraviglia, che parte dei suoi versi sia andata perduta e che ben poco si conosca delle sue vicende, anche dopo le diligenti ricerche del Tiraboschi e di parecchi altri studiosi, riassunte e continuate dalla signorina Anita della Guardia in una notevole monografia (2) pubblicata a Modena nel 1910.

Dopo questa pubblicazione, venne ancora alla luce, per merito di Giulio Reichembach (3), una notizia molto importante,

(1) Il nome *Tribraco,* probabilmente foggiato dallo stesso Gaspare, venne in seguito assunto come cognome o dai figli di lui o da altri della famiglia Trimbocchi. Così in un documento del 1484, pubblicato dalla signorina Della Guardia a pag. 1, nota 2, della monografia citata nel testo, compare un Pomponio Tribraco, maestro di scuola a Sestola; e nella *Bibliot. modenese* del Tiraboschi, t. V, Modena, 1784, pagg. 296 e segg., è memoria di un Dionigi Tribraco, morto nel 1526 e che pare si vantasse *di esser del sangue di Gaspare.* Mutatosi il nome di Tribraco in cognome, è naturale che fin dal secolo decimoquinto ricompaia anche per Gaspare il nome di battesimo, e che gli scrittori recenti, a partire dal Tiraboschi, l. c., pag. 287, uniscano il nuovo cognome all'antico e parlino quindi di *Gaspare Tribraco dei Trimbocchi* e non semplicemente del Tribraco.

(2) *Gaspare Tribraco dei Trimbocchi maestro modenese della 2ª metà del secolo XV.*

(3) *Date di nascita di umanisti,* nel " Giorn. stor. della letter. ital. ", vol. LVII, 1911, pagg. 329-331.

che cioè il Tribraco, del quale s'ignorava l'anno di nascita e che si diceva modenese, fu battezzato a Reggio il 23 febbraio del 1439. S'ebbe così un dato cronologico iniziale, che serve a dare il giusto valore agli altri pochi, che già si conoscevano.

Basterà a noi indicare i più importanti.

Nel 1461 il duca Borso concesse al Tribraco, poco più che ventenne, dieci lire marchesine *in sussidio* per andare a Venezia e di là in Grecia *per lettere greche*. Il viaggio in Grecia restò probabilmente allo stato di progetto. Tuttavia il Tribraco nel 1473 s'offriva, come vedremo, di rispondere in versi greci a un carme greco del Filelfo.

Alla fine del 1464 i Sapienti del Comune di Modena condussero il *compatriotta* Tribraco *in magistrum gramaticalium* per cinque anni e coll'annuo stipendio di cento lire. Egli però non tenne il suo impegno fino al termine pattuito, poichè negli anni 1466, 67 e 68 compare fra gli stipendiati dal duca Borso, e il Comune di Modena procedette, il 27 giugno del 1468 (1), alla nomina d'un nuovo maestro.

Dal 1468 in poi non c'è più notizia di rapporti del Tribraco cogli Estensi o coi suoi compatriotti; e perciò il Tiraboschi congetturava che egli fosse morto negli ultimi anni della vita del duca Borso, cioè prima del 19 agosto 1471.

Invece preziosi documenti pubblicati dal Luzio e dal Renier (2) ce lo mostrano al servizio dei Gonzaga almeno dal 1473 al 1475; e uno di questi documenti, cioè una lettera scritta da Venezia contro il Tribraco il 19 aprile 1473, c'illumina anche su alcuni avvenimenti anteriori.

Il Tribraco doveva essere a Venezia nel 1471 o in principio del 1472, e vi aveva accettato la nomina a cancelliere della comunità di Ragusa. Avendo però ottenuto un anticipo di cinquanta ducati d'oro, non si curò di recarsi ad assumere l'ufficio, e fu quindi condannato alla restituzione e, non potendo pagare, imprigionato.

Vedendo ch'egli *ne la prigione se ne moriva*, due suoi conoscenti s'interposero e, rendendosi garanti per lui, ottennero che

---

(1) Non il 27 gennaio 1465, come si legge in Della Guardia, o. c., pag. 18.

(2) *I Filelfo e l'umanesimo alla corte dei Gonzaga*, nel " Giorn. stor. „ cit., vol. XVI, 1890, pagg. 183 e segg.

fosse liberato coll'obbligo di restituire entro quattro mesi i cinquanta ducati o assumere l'ufficio, avendo essi stessi indotta la comunità di Ragusa a confermare eventualmente la nomina. " Ma il bon poeta (*scrivevano i due poveretti al marchese Luigi III*) " mettendo dietro alle spalle tanti benefitii..... se ne fugite insa-" lutato hospite „ sicchè *da più mesi* avevano dovuto pagare per lui. Avendo poi saputo ch'egli si trovava a Mantova e vi *leggeva negli studii de humanità con bona provisione,* pregavano il marchese di costringerlo ad adempiere il dover suo.

Ciò che essi non sapevano o non volevano dire, era che il Tribraco si trovava al servizio di Federico Gonzaga, il quale fin dal 22 febbraio aveva scritto al padre, avvertendolo che l'umanista modenese sarebbe stato in grado di tradurre un carme greco diretto al marchese da Francesco Filelfo, ed eventualmente di rispondere con egual numero di versi, greci o latini a piacimento.

In altra lettera del 26 ottobre 1475 Federico parla d'una grave malattia del Tribraco, precettore dei suoi figli, ed esprime il timore di perderlo.

Non avendo trovato altri documenti, il Luzio e il Renier congetturarono che questo timore non fosse vano. Ma essi vennero poco dopo a conoscenza d'una supplica, colla quale donna Caterina, vedova del Tribraco, e la figlia Pandora, il 6 aprile 1493, chiedevano un sussidio al marchese Giovanni Francesco II, figlio di Federico e già allievo dello sfortunato poeta, dichiarando che " *per somma necessitade* morivano *de fame* „. Il Renier espresse quindi il sospetto che la morte del Tribraco dovesse esser avvenuta non molto tempo prima (1). Se così fosse, egli avrebbe vissuto, dopo il 1475, per quasi diciott'anni, senza lasciare alcuna traccia di sè.

2. Le poesie del Tribraco finora note, sparse in nove codici descritti dalla signorina Della Guardia (2), appartengono tutte

(1) " Giorn. stor. „ cit., vol. XVII, pagg. 442-443.

(2) O. c., pagg. 77 e segg. Sono sei codici della Biblioteca estense, uno ferrarese, uno dell'Università di Bologna, uno della Riccardiana. Ad altri codici accenna però il Tiraboschi, fra cui ad uno della Biblioteca di Königsberg, che si potrà certo rintracciare.

al primo periodo della sua vita, all'epoca cioè della dimora in Modena ed in Ferrara, e riboccano quindi di lodi sperticate per gli Estensi.

Di poesie in lode dei Gonzaga nessuno, ch'io sappia, fece cenno; quantunque non sia credibile che le *facili muse*, compagne del Tribraco alla corte del duca Borso e nelle splendide dimore degli Strozzi e dei Boiardo, gli si mostrassero infedeli non appena egli si volse al servizio dei Signori di Mantova; e un codicetto del secolo XV, contenente un suo carme in onore di Barbara Gonzaga, sia infatti registrato in un catalogo di manoscritti, che verso il 1902 si trovavano in vendita a Monaco di Baviera presso la libreria antiquaria di Lodovico Rosenthal.

Il codicetto fu acquistato da me, insieme a due altri parimenti d'origine italiana (nn. 117 e 233 del catal. cit.); e poichè la descrizione data nel catalogo Rosenthal è del tutto erronea ed in ogni modo passò inosservata, non mi par fuor di luogo farlo oggetto di breve studio.

Al n. 134 del catalogo 120 della libreria antiquaria predetta, si legge:

" Tribrachus Mutinensis. Ad inclytam dominam Barbaram " Gonzagiam carmen. Manuscrit sur velin du XV siècle. 9 ff. " in-4. D. — maroq. noir. Ce poème fort intéressant est d'une " belle écriture. Le titre est écrit en or. Avec une très jolie ini- " tiale rehaussée d'or ".

Esaminando il codicetto, si nota anzitutto che ai nove fogli scritti indicati nel catalogo se ne debbono aggiungere tre rimasti in bianco, salvo prove di penna. La pergamena è bianca e finissima. Le pagine contengono quindici linee, precedentemente tracciate con materia colorante, e misurano mm. 210 per 142. La scrittura è umanistica, elegante ed accurata, e può essere ragionevolmente attribuita a mano italiana della seconda metà del Quattrocento. Il primo e l'ultimo foglio erano evidentemente incollati alla legatura originale, sostituita, nella seconda metà del secolo scorso, e probabilmente in Italia (1), dall'attuale, in mezza pelle vitellina di color violetto cupo.

(1) Manca nel codice qualunque traccia di provenienza. Si potrebbe pensare o alla collezione Morbio, il cui catalogo di vendita non ho pre-

Nel dorso della legatura è scritto in oro il titolo: TRIBRACHI CARMEN.

I primi due fogli sono in bianco, con due sole prove di penna; una delle quali, consistente nelle lettere maiuscole *VESPA*, potrebbe far pensare ad un Vespasiano (Gonzaga?).

Nel f. 3, oltre al titolo in lettere d'oro e all'iniziale Q, parimenti in oro su fondo azzurro con ornati in bianco, è notevole il fregio che copre tutto il margine sinistro. A metà di questo fregio, finemente disegnato con inchiostro rossastro e che forse avrebbe poi dovuto esser miniato, si vede un sole raggiante, che potrebbe esser un'impresa.

Nel titolo si legge: *Ad Inclytam dominam d. Barbaram Gonzagiam. Tribrachi mutinensis Carmen.*

Il carme, in metro elegiaco, comincia coi versi:

Quam bene iunguntur melimelis cinnama, quantum
Dulcia cecropiis et melimela favis;

e continua, apparentemente ininterrotto, fino alla prima pagina del foglio 11 contenente i due soli versi finali:

Te neque facundo Cornelia vicerit ore,
Te neque, si redeat, Laelia maior erit.

Nel rovescio del foglio è una prova di penna:

Salve, sancta parens, summo quae grata tonanti.

Il foglio 12 è in bianco.

3. Chi dall'esame esterno e superficiale passi alla lettura del codicetto, s'avvede subito, che esso non contiene un solo carme completo, ma tre, dei quali due sono mutili. Studiando quindi meglio la struttura del codicetto, tenendo conto della corrispondenza dei buchi di tarlo e d'altre piccole magagne che sono nei singoli fogli, osservando le traccie che alcune macchioline nel margine sinistro del f. 3[a] impressero nel margine destro del f. 10[b], può facilmente ristabilire l'ordine primitivo delle carte

sentemente modo di consultare, o alla Biblioteca Capilupi. Per questa però nulla trovo nel *Catal. de' codici manoscritti della famiglia Capilupi di Mantova, illustrato dall'ab.* D. GIOVANNI ANDRES, Mantova, 1797.

fraudolentemente turbato per dissimulare lo stato vero del codice, che è lacunoso.

L'antico codicetto cominciava cogli attuali due primi fogli, che sono accoppiati e i soli che non fossero preparati per la scrittura tracciandovi le linee e i margini; cosicchè è certo che debbono esser stati aggiunti, quando il codice fu dato per la prima volta al legatore.

Seguiva un fascicolo di dieci fogli (1), dei quali sono perduti il primo, il settimo, l'ottavo e il decimo.

Gli attuali fogli 4 e 9, ancora uniti, corrispondono ai fogli 2 e 9 dell'antico fascicolo: gli attuali fogli 5 e 6, mancanti di corrispondente, ai fogli 3 e 4; gli attuali fogli 7 e 8, ancora uniti, ai fogli 5 e 6.

Le mancanze furono probabilmente determinate dall'esser stati asportati i fogli, che contenevano il principio delle poesie, e quindi fregi e lettere iniziali miniate, e dall'essersi in seguito perduti anche alcuni dei fogli corrispondenti staccati.

Al foglio perduto, che era dopo l'attuale foglio 9, si riattaccavano gli attuali fogli 10, 3, 11 e 12 formanti un fascicolo di quattro fogli (2), col quale il codice finiva.

4. Veniamo al contenuto del codicetto.

I fogli 4-8 contengono degli esametri in lode del cardinale Francesco Gonzaga, figlio del marchese Luigi III. Francesco, nato nel 1444, fu cardinale dal 1461, vescovo di Mantova dal 1466, legato pontificio dal 1471, e morì nel 1483.

Il carme del Tribraco, ora mutilo in principio e in fine (3),

---

(1) Che vi fossero prima altri quaderni è poco probabile, data la perfetta corrispondenza dei buchi di tarlo negli attuali fogli 2 e 4.

(2) Gli attuali fogli 10 e 12 sono ancora accoppiati; il f. 3 fu certamente staccato dall'attuale 11. Si potrebbe congetturare che fra questi due fogli ne fossero inseriti altri, in numero di due o più; ma, come si vedrà in seguito, pare che non ci sia interruzione di testo, e c'è inoltre corrispondenza nei numerosi buchi di tarlo e nella consunzione degli angoli esterni.

(3) Il frammento contenuto nel codicetto comincia col verso:

" Frena tenent pueros genialia quaque colentis "

e finisce coi versi:

" Haec reliquis meliora ratus, si carmina cedro
Digna feram, si non saltem metuentia scombros ".

fu scritto, posteriormente alla nomina di Francesco a legato, per celebrarne il ritorno da Roma a Mantova, dove sarebbe stato accolto con non minor pompa di quella usata nel 1459 per papa Pio II.

Il poeta ci fa inoltre sapere, che l'Apennino s'abbassò per lasciar passare il cardinale; che i fauni, i satiri, le driadi, le amadriadi e le ninfe accorsero ed ammirarono; che l'Eridano stesso e il Mincio plaudirono dai loro gorghi, quantunque la loro età potesse dispensarli da ogni fatica, dice il Tribraco, e quantunque, diremmo noi fra parentesi, avessero veduto ben altri uomini e ben altri avvenimenti.

Non mancano, naturalmente, le lodi della famiglia Gonzaga, del marchese Luigi, della moglie Barbara, dei loro figli e specialmente del primogenito Federico.

Del marchese è detto, che era un Nestore per gli anni e per la saggezza, e che tuttavia era ancora in grado di sostenere la parte d'Ettore:

> ..... viden ipse parentem
> Nestora consilio, maturis Nestora et annis.
> Et tamen audentem quod adhuc " decet Hectora „ dicas.

Paragonare il marchese Luigi, nato nel 1414 e perciò forse non ancora sessantenne, a Nestore, era una balordaggine; una delle molte, che si trovano nelle poesie del nostro povero retore.

Il marchese morì poi nel 1478, appena compiuto il sessantaquattresimo anno d'età. Questa e le altre poesie del codicetto, essendo state scritte durante la sua vita, non possono dunque esser posteriori al 1478. È invece probabile che risalgano ai primi tempi della dimora del Tribraco in Mantova, perchè non vi si fa cenno dell'ufficio di precettore dei figli di Federico, e nessuna poesia è diretta a lui personalmente.

Al cardinal Francesco il Tribraco, *Phoebo monstrante futurum*, profetizza la tiara. Lorenzo de' Medici s'accontentò invece di augurargliela (1), e risparmiò così a Febo l'onta di comparir bugiardo.

Il Tribraco ammonisce poi il cardinale della fragilità dei

---

(1) " Giorn. stor. „ cit., vol. XVI, pag. 136.

doni, che altri gli fanno. Egli invece non darà nè gemme, nè vesti frigie, nè avorii, nè incenso, nè lane tinte di porpora, cose tutte esposte alle ingiurie del tempo, ma versi degni del cedro o almeno tali da non dover temere di servir d'involucro agli scombri.

Così finisce il frammento; e non occorre esser indovini per dire che dal magnificare i suoi *doni* il Tribraco doveva passare a chiedere un compenso corrispettivo, benchè di natura meno sublime.

Nei successivi due fogli, ora mancanti, finiva il carme in onore di Francesco e ne cominciava un altro, parimenti in esametri, in onore del marchese Luigi. Di questo carme restano trenta versi nell'attuale foglio 9, poi, dopo una lacuna di un foglio, i trenta versi di chiusa.

Il poeta ricorda le imprese guerresche del marchese, gli dice che quando Lachesi, *post pyliam senectam*, troncherà lo stame della sua vita, potrà morir tranquillo, perchè avrà eredi degni di lui, e finisce offrendosi di dar gloria coi suoi versi ai Gonzaga e chiedendo protezione ed aiuto:

..... numerisque accedere nostris
Gloria si qua potest, age, vatem admitte benignis
Auribus, et placidus vexatam amplectere Clio.
Quod si restituas titubanti in pectore vires,
Hinc domus aeternos Gonzagia sumet honores,
Virgilium tu me facies, tu me Orphea vatem.

In questi versi è evidente, oltre alla presunzione dell'autore, l'accenno alle tristi vicende del soggiorno a Venezia.

Il codicetto si chiudeva col carme in distici elegiaci diretto a Barbara Gonzaga. Questa, sposata al marchese Luigi fin dal 1433, era più vicina alle nozze d'oro che a quelle d'argento. Pure il poeta le dedica quasi un epitalamio. Che fra i primi 26 versi contenuti nell'attuale f. 3 e gli ultimi due, che sono nel f. 11, ci sia una lacuna, che dovrebbe esser d'almeno sessanta versi, non mi pare probabile, come ho già accennato; quantunque il Tribraco lavorasse di mosaico, e le reminiscenze classiche e le allusioni storiche e mitologiche siano nelle sue composizioni come tasselli, dei quali mal si può calcolare il numero e l'ordine logico.

5. Essendo il carme in lode di Barbara Gonzaga molto breve e l'unico del codicetto probabilmente non mutilo, lo riproduco senz'altro.

Quam bene iunguntur melimelis cinnama, quantum
  Dulcia cecropiis et melimela favis (1),
Quam bene frondiferae sociantur (2) vitibus ulmi,
  Quam bene purpureis tempora verna rosis,
5 Tam bene Gonzagio cum principe Barbara iuncta,
  Tam bene Gonzagio Barbara iuncta toro.
Quanta per hesperias gentes (3) huic nomina Mavors,
  Tanta tibi tribuit candidus usque pudor.
Quanta sub hoc regnat pietas, prudentia quanta,
10 Dum regit aut populos aut fera bella gerit,
Tanta tibi ingenuo regnat sub pectore, si fas
  Dicere quod summo Iuno sit aequa Iovi.
Sed neque sydereus tantos puto damnet honores
  Iuppiter, at domina gaudeat ille magis.
15 Principe te, castae vivit Lucrecia mentis,
  Fidaque dulichio Penelopea viro:
Principe te, Alcestem praesentia saecula norunt,
  Quicquid et exemplo dignius esse potest.
Ipsa licet taceas, te regia fronte venustas
20 Arguet a magnis regibus ire genus.
Aut sis illa licet, quae quondam Astraea virago
  Dicitur ad superos hinc abiisse lares (4),
Principis ad sacras iusti remeaveris arces
  Nubere Gonzagio digna reperta duci,
25 Vive nurus inter latias, regum inclyta mater,
  O decus, o latii gloria prima soli.
Te neque facundo Cornelia vicerit ore.
  Te neque, si redeat, Laelia maior erit (5).

---

(1) Il Tribraco ricordava evidentemente l'epigramma di Marziale, XIII, 24:

" Si tibi cecropio saturata cydonia melle
  Ponentur, dicas haec melimela licet ".

(2) Il ms. ha *sotiantur*.

(3) Il ms. ha *gentē*, cioè *gentem*.

(4) Reminiscenza di Giovenale, VI, 19: " Paulatim deinde ad superos " Astraea recessit ".

(5) Cornelia, madre dei Gracchi, e Lelia, figlia di C. Lelio Sapiente console nell'anno 614 di Roma, sono lodate nel *Bruto* di Cicerone, cap. 58, per l'eloquenza e l'eleganza del discorso.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI.

CLASSI UNITE

Adunanza del 6 Febbraio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Salvadori, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Somigliana, Fusari, Panetti, e Segre, Segretario;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: il Direttore della Classe Chironi, e i Soci Carle, De Sanctis, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari e Prato.

Scusano l'assenza, per motivi di salute, i Soci Naccari e D'Ercole.

Vien letto e approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente a Classi Unite, 20 giugno 1915.

Indi il Socio Guareschi, in sostituzione di Naccari, legge la Relazione sul Concorso al premio Avogadro. Senza discussione viene messa ai voti la proposta della Commissione di conferire il premio al Prof. H. N. Morse della Johns Hopkins University di Baltimora (Maryland). L'Accademia approva la detta proposta.

Il Socio Camerano, ancora in sostituzione del collega Naccari, legge la Relazione della 2ª Giunta per il XIX premio Bressa (Internazionale, quadriennio 1911-1914).

Il Socio Vidari legge la Relazione della Commissione per il premio Gautieri per la Filosofia (triennio 1912-1914).

Per questi due premi la votazione si farà nella prossima adunanza a Classi Unite.

Relazione sul concorso al premio Avogadro.

Egregi Colleghi,

I concorrenti al premio Avogadro furono due soli.

I due brevissimi scritti presentati da uno di essi non furono giudicati degni di essere presi in considerazione.

L'altro concorrente invece, che è il sig. H. N. Morse, professore di chimica inorganica e analitica nell'Università John Hopkins di Baltimora, inviò una sua opera molto pregevole, in cui sono descritte le esperienze fatte dall'autore con l'aiuto dei sig.ri J. C. W. Frazer e W. W. Holland per misurare direttamente la pressione osmotica delle soluzioni acquose.

Il bando del concorso chiedeva un lavoro di Chimica che avesse relazione con la legge dell'Avogadro e fosse pubblicato nel triennio 1912-14. L'opera del Morse, se non è di Chimica pura, spetta indubbiamente alla Chimica fisica e, per le applicazioni che se ne può fare, ha grande importanza anche per la Chimica propriamente detta. Com'essa abbia relazione con la legge dell'Avogadro applicata alle soluzioni, risulterà dalla descrizione dei risultati. Essa comprende, oltre a molte esperienze anteriori, anche numerose esperienze fatte nel triennio 1912-14 e la discussione di tutti i risultati: l'opera fu pubblicata nel 1914.

Per queste ragioni e per il valore scientifico del lavoro, la Commissione giudicò che le condizioni del bando fossero soddisfatte.

Per incarico dei miei colleghi della Commissione cercherò di dare all'Accademia una descrizione sommaria delle parti più importanti dell'opera del Morse.

Convinto che il metodo diretto di misura della pressione osmotica sia il solo che può darci dei valori sicuri di essa entro limiti di temperatura abbastanza lontani, il Morse si propose di raggiungere con quel metodo la massima esattezza possibile: Le grandi difficoltà ch'era necessario superare, non sarebbero forse state vinte se l'istituzione Carnegie di Washington non avesse fornito i mezzi occorrenti.

Si credeva da principio che la difficoltà principale stesse nella preparazione delle membrane semipermeabili; poi si vide che un'altra difficoltà molto grave, anzi più grave, doveva esser vinta per poter disporre di vasi porosi atti a prestare opportuno sostegno alle membrane. Un lungo periodo del lavoro fu appunto dedicato prima alla ricerca, poi alla costruzione di vasi porosi adatti.

Una prima provvista di cento di tali vasi non ne diede che un solo, il quale resistesse alla pressione interna di 30 atm. cui si voleva arrivare, gli altri per gran parte non ressero a 20 atm. Per studiarne l'intima struttura si fecero delle sezioni sottili dei vasi stessi, e queste vennero esaminate col microscopio. I risultati di tali esami furono comunicati ai fabbricatori, che si dissero sicuri di togliere ogni difetto e fornire vasi perfetti. Ma queste previsioni fallirono e 500 vasi nuovi furono giudicati difettosi. Essi non resistevano ad alte pressioni, avevano degli spazi vuoti entro le pareti; la loro struttura era irregolare e molto diversa da vaso a vaso. Occorrevano per le esperienze dei vasi che avessero pareti ben resistenti e struttura fine e uniforme. Una membrana *ideale* è quella che si forma sulla parete interna del vaso, laddove hanno principio i canaletti esistenti nella parete porosa e che aderisce saldamente alla materia del vaso. Il Morse, riconosciuto inutile ogni altro tentativo, decise di costruire i vasi porosi nel suo laboratorio.

Molte esperienze e molte cure furono necessarie per riuscire in questo intento. Per ottenere la porosità opportuna, due specie di argilla vennero mescolate e fortemente premute insieme. Si formarono così dei cilindri di argilla che venivano poi lavorati esternamente e internamente sul tornio. La cottura fu fatta in un forno Seger o in un forno elettrico a circa 1300°.

Fu cosa difficile il congiungere il vaso poroso al manometro in modo che la cella così preparata resistesse a forti pressioni interne. Dopo molti tentativi si trovò un modo di procedere soddisfacente.

Grandi cure vennero dedicate alla calibrazione dei manometri, ch'erano ad aria compressa.

Per la preparazione delle membrane semipermeabili si abbandonò il metodo del Pfeffer e si ricorse al metodo elettrolitico.

Se una soluzione d'un sale di rame e una di ferrocianuro potassico sono separate da un diaframma poroso che è impregnato di acqua e una corrente passa da un elettrodo che sta nella prima soluzione ad uno che sta nella seconda, gli ioni di rame e di ferrocianogeno devono incontrarsi entro la parete e dar origine a ferrocianuro di rame, là dove s'incontrano. Così delle membrane di questa sostanza si formano nei canaletti delle pareti del vaso e aderiscono alla materia delle pareti stesse.

Il metodo fece ottima prova. Bisognava anzitutto espellere l'aria dai pori sostituendola con acqua. Si empì la cella con una soluzione diluita di solfato di litio e la si immerse nella stessa soluzione. Si fece passare una corrente dall'esterno all'interno con elettrodi di platino. Quando si credette che l'aria fosse tutta espulsa, la cella si riempì di acqua distillata e venne immersa in acqua distillata, che venne rinnovata più volte. Si fece passare una corrente e si misurò di tratto in tratto la resistenza elettrica. Quando questa assumeva un valore poco diverso da quello che si ritiene spettare all'acqua pura, la cella si giudicava pronta per deporvi la membrana.

Se occorreva attendere qualche tempo prima di far tale operazione, si conservava la cella nell'acqua, aggiungendo un po' di timolo o di formaldeide per evitare lo sviluppo delle muffe, che sono dannosissime alle membrane.

Per preparare, ad esempio, una membrana di ferrocianuro di rame, si metteva un cilindro cavo di rame in un gran vaso vuoto di vetro e dentro il cilindro la cella, chiusa con un tappo di gomma. Questo tappo era attraversato dal catodo di platino, da un imbuto, il cui tubo andava fino al fondo del cilindro, e da un tubo che serviva a togliere il liquido sovrabbondante. Si chiudeva il circuito e tosto si riempiva la cella e lo spazio circostante con le rispettive soluzioni di ferrocianuro potassico e di solfato di rame, la cui concentrazione era $^1/_{10}$ della normale. La forza elettromotrice era di 110 V.

Da principio la resistenza era molto grande perchè le pareti del vaso erano impregnate d'acqua. Poi la corrente cresceva, raggiungeva un massimo, indi decresceva e andava verso un valor minimo. Durante l'operazione bisognava aggiungere spesso della nuova soluzione di ferrocianuro. Quando la resistenza elettrica non cresceva più, si sospendeva la corrente. Si

poneva la cella nell'acqua pura per togliere dalla membrana l'alcali che vi si poteva essere accumulato, e dopo tre giorni almeno, si ripeteva l'operazione elettrolitica sopra descritta e così si proseguiva fino a che la resistenza elettrica della membrana non crescesse più.

Una cella va in generale adoperata alla temperatura a cui la membrana vi fu deposta. Gli sbalzi di temperatura possono danneggiarla assai. Perciò grandi cure furono date alla costruzione e all'uso di bagni di temperatura costante. L'opera del Morse ne contiene una minuta descrizione.

L'Autore discute poi lungamente il modo in cui furono preparate le soluzioni di diversa concentrazione. Invece di misurare la concentrazione d'una soluzione tenendo conto del peso della sostanza disciolta rispetto al volume della soluzione, parve al Morse più opportuno di riferire il peso della sostanza a un peso dato del solvente puro e propriamente a 1000 grammi di acqua.

Conviene avvertire che il Morse non è fra i partigiani dichiarati della teoria che assomiglia in tutto la sostanza disciolta ad un gas e dà ragione della pressione osmotica con gli urti delle molecole della sostanza disciolta. Giustamente egli nota la diversità grande dei due casi dovuta all'influenza che deve avere il solvente sui movimenti delle molecole della sostanza disciolta. Egli propende invece ad ammettere che i fenomeni osmotici provengano da un'azione assorbente esercitata sull'acqua dalla membrana colloidale con la faccia che sta a contatto della soluzione più diluita e da un'azione opposta dall'altra parte. Per tenersi più libero da ogni ipotesi e per altre ragioni, che qui sarebbe troppo lungo il riportare, gli parve miglior partito il valutar le concentrazioni nel modo detto di sopra.

Passiamo ora brevemente in rassegna i risultati delle esperienze. Furono studiati lo zucchero di canna, il glucosio e la mannite. Alcune misure sopra elettroliti vennero anche eseguite. Le esperienze più estese vennero fatte con lo zucchero di canna.

Le pressioni osmotiche delle soluzioni acquose di questa sostanza furono misurate per le concentrazioni 0,1, 0,2, ecc. fino a 1, di 0.1 in 0,1, se esprimiamo le concentrazioni mediante frazioni della concentrazione normale. Ciò fu fatto alle tempera-

ture 0°, 10°, ecc. fino a 60°, di 10° in 10°. Per le soluzioni più concentrate si estesero le esperienze fino a 80°. Le pressioni osmotiche misurate salirono fino a 29 atmosfere.

Facendo il rapporto fra ogni pressione osmotica osservata e la pressione che la stessa quantità di sostanza disciolta avrebbe avuto allo stato di gas e alla stessa temperatura in un volume eguale a quello del solvente *puro*, si trova che fra 0° e 25° quel rapporto è costante per ogni concentrazione, ma varia dall'una all'altra concentrazione. Di qui risulta che fra 0° e 25° le pressioni osmotiche delle soluzioni acquose di zucchero di canna crescono al crescere della temperatura come le pressioni dei gas a volume costante.

È notevole poi che quel rapporto, fra i limiti di temperatura indicati, è sempre maggiore dell'unità. Se si ommette la concentrazione 0,1, i valori del rapporto vanno crescendo al crescere della concentrazione e propriamente da 1,061 per la concentrazione 0,2 fino a 1,114 per la concentrazione normale.

Se la legge del Boyle valesse per le pressioni osmotiche di queste soluzioni, quel rapporto dovrebbe essere costante per tutte le concentrazioni ad una data temperatura.

Perchè la legge dell'Avogadro fosse applicabile, il rapporto dovrebbe essere uguale all'unità.

L'A. crede probabile che queste anomalie sieno effetto della formazione d'idrati, ma stima opportuno di eseguire delle altre esperienze prima di tentare di spiegare il fenomeno.

Ad una temperatura compresa fra 25° e 30° il rapporto comincia a diminuire per tutte le concentrazioni e diminuisce più presto per le soluzioni diluite. Ad una certa temperatura che è più alta per le concentrazioni maggiori, il rapporto diventa eguale all' unità e si mantiene tale a temperature più alte. In tali condizioni dunque le soluzioni di zucchero di canna seguono le leggi dei gas.

Glucosio. — Le celle preparate per le temperature 0°, 10°, 20° si guastarono prima che potessero venir usate, perciò le misure ebbero principio da 30°, poi furono continuate a 40° e 50°. Alle temperature comprese fra 30° e 50° le soluzioni di glucosio, le cui concentrazioni sono comprese fra 0,1 e 1, seguono le leggi dei gas con molta approssimazione.

Mannite. — Il Morse misurò le pressioni osmotiche delle soluzioni di mannite a 10°, 20°, 30°, 40°. Per le tre più basse temperature egli usò le concentrazioni da 0,1 a 0,5, di 0,1 in 0,1. La maggiore solubilità della mannite a 40° permise di estendere le esperienze anche alla concentrazione 0,6. In tutte queste esperienze le leggi dei gas si trovarono verificate.

Sostanze elettrolitiche. — Col cloruro di potassio non fu possibile ottenere buone misure. Le cose andarono meglio con le soluzioni di cloruro di litio. Il rapporto fra le due pressioni, calcolato nel modo sopraindicato, si trovò aver valori compresi fra 1,746 e 1,992 per le concentrazioni comprese fra 0,1 e 0,6. Che il rapporto sia maggiore dell'unità si spiega in generale con la dissociazione elettrolitica, ma esso dovrebbe diminuire al crescere della concentrazione e invece aumenta. L'A. non dispera di trovar modo, specialmente con l'uso di membrane d'altra natura, di studiare anche il cloruro di potassio ed altre sostanze elettrolitiche.

L'opera del Morse è ancora lontana dal suo compimento. L'inizio di essa risale a 15 anni sono. La parte più difficile fu la ricerca del metodo opportuno e delle particolarità del procedimento sperimentale. Questo periodo di preparazione non richiese meno di otto anni. Per lo studio completo delle pressioni osmotiche delle soluzioni acquose dello zucchero di canna, del glucosio, della mannite e del levulosio, il Morse prevede che occorrano ancora tre anni.

Tenuto conto delle grandi difficoltà superate in questa indagine sperimentale, che non era mai stata tentata prima su così larga base, del grado di esattezza raggiunto e dell'importanza dell'argomento, la Commissione unanime vi propone di conferire il premio Avogadro al Prof. H. N. Morse.

La Commissione:

L. Balbiano.
I. Guareschi.
A. Naccari, *Relatore.*

Relazione della seconda Giunta per il XIX premio Bressa.

Egregi Colleghi,

Il 9 maggio di quest'anno la prima Giunta per il XIX premio Bressa chiudeva la sua relazione col proporre che la seconda Giunta per il premio stesso esaminasse le opere seguenti:

1. Asch W. u. D., *Die Silikate.*
2. Berlese, *Introduzione in Italia della Prospaltella.*
3. Koebe, *Memorie di matematica.*
4. Nernst W., *Trattato e memorie di chimica.*
5. Ciamician e Silber, *Memorie di chimica.*

Riferisco i giudizii, che intorno a queste opere la prima Giunta ha trasmesso alla seconda e che questa non ha avuto ragioni di modificare.

1. Asch W. u. D., *Die Silikate in chemischen und technischer Beziehung.* Berlin, 1911.

Gli autori discutono specialmente in quest'opera la costituzione chimica dei silicati o meglio dei polisilicati, accennando a tutte le teorie emesse dalle prime ricerche del Berzelius, del Gerhardt, ecc., fino ad ora. Essi trattano con maggiore ampiezza l'ipotesi, che considera i polisilicati come sali di acidi complessi.

Per molti silicati furono da varii autori proposte delle formule quasi più complicate di quelle delle sostanze proteiniche. Per semplificare la questione gli Autori ammisero l'esistenza di nuclei di atomi di silicio e di alluminio in catene chiuse, come gli atomi di carbonio nei composti aromatici.

Tenendo conto delle analogie esistenti fra il carbonio e il silicio i sigg. Asch propongono di considerare moltissimi silicati come derivanti da due nuovi radicali che denominano *essile* e *pentile*, e con grande ampiezza sviluppano questa ipotesi.

Il libro contiene una copiosa bibliografia dell'argomento. Esso è d'indole essenzialmente teorica ed è opera di non comune valore.

2. Prof. Antonio Berlese, *Lotta contro la "Diaspis pentagona"*.

Sono ben noti i danni recati all'agricoltura italiana dalla *Diaspis pentagona* o cocciniglia del gelso. Essa fu osservata per la prima volta nel 1886 dal Targioni che la descrisse e la nominò ritenendola di origine giapponese.

La stessa specie venne descritta nel 1894 dal Sasaki di Tokio col nome di *Diaspis patellaeformis* e nel 1889 dal Tryon, che la trovò in Australia col nome di *Diaspis amygdali*. Il Cockwell nel 1892 la indicò col nome di *Diaspis lanatus* della Giamaica.

Quest'insetto trovasi ora diffuso in tutto il globo. Da noi l'infezione venne dapprima osservata in alcuni comuni della provincia di Como. Presentemente tutta l'Italia settentrionale ne è infetta, in gran parte l'Italia centrale e qualche focolare si nota già anche nel mezzogiorno.

La *Diaspis pentagona* è specie polifaga, e son numerose le piante di cui si nutre. Il Gastine nel suo scritto: *La lutte contre la 'Diaspis pentagona' en Italie,* ne enumera per l'Italia 54. Fra queste il gelso è il più danneggiato, tanto che si può ritenere che per opera di questo parassita la produzione della foglia di gelso venga diminuita di più che un terzo, il che naturalmente porta con sè una corrispondente diminuzione del prodotto dei bozzoli.

Per dare qualche esempio, citiamo il prof. Gabotto, direttore della Cattedra ambulante di agricoltura di Casale Monferrato, il quale calcola che dal 1909 al 1911 il prodotto della foglia di gelso sia diminuito di 127.000 quintali. La diminuzione del prodotto dei bozzoli, che ne conseguì, corrisponde a circa 900.000 chilogr.

La *Diaspis pentagona* fu causa per l'Italia di un altro danno assai grave, perchè la Francia, per difendersi dall'invasione, proibì nel gennaio 1912 l'importazione e il transito di tutti i vegetali allo stato legnoso, eccetto quelli resinosi e la vite, di origine italiana, come pure delle loro parti fresche. Con questo decreto venne quasi interamente soppresso il commercio con la Francia dei fiori recisi, che era di più di mezzo milione di tonnellate per anno.

Di fronte a tali danni era necessario cercare i mezzi di difesa.

Innumerevoli e svariatissimi sono i rimedii che vennero suggeriti per combattere i parassiti delle piante, mezzi meccanici, sostanze chimiche, distruzione delle piante, ma la efficacia di essi quasi sempre fu scarsa. Col progredire degli studi sopra i costumi degli insetti nocivi, vennero meglio in chiaro le relazioni fra quegli insetti e le piante coltivate e di qui venne il pensiero di valersi d'altri animali contro quelli che son nocivi alle piante. Alcuni naturalisti volsero la loro attenzione a un fenomeno frequente fra gli insetti, vale a dire al parassitismo che alcuni gruppi di essi esercitano su altri. Questi insetti, allo stato di larve, si nutrono succhiando e rodendo internamente altre specie, nel corpo delle quali furono deposti allo stato di uovo o di larva dalle loro madri. Questo fenomeno era già stato osservato dal Redi e dal Vallisneri.

In Italia fu il Rondani, entomologo illustre, che pose in chiaro l'importanza di questi insetti parassiti di altri insetti in due suoi scritti pubblicati nel 1868 e nel 1871.

Il Ghigliani, il Sabbioni, il Costa, il Passerini, il Camerano da noi, e fuori d'Italia, fra gli altri, il Ratzenberg, il Gold, il Perris sostennero e diffusero il concetto del Rondani. In breve tempo esso fu accolto e s'incominciò a cercare il modo di volgere a vantaggio dell'uomo l'opera degli insetti parassiti d'insetti nocivi, l'opera dei così detti insetti *endofagi*.

Gli entomologi americani furono i primi ad ottenere effetti pratici ed utili, ed è da ricordarsi l'opera del Riley, che segnò la via a tutta una schiera di naturalisti americani, capitanata dall'Howard. Questi si studiò d'introdurre, acclimare e diffondere negli Stati Uniti le specie d'insetti nemiche degl'insetti nocivi di quel paese.

In Italia il prof. Antonio Berlese, già professore nella Scuola superiore d'Agricoltura di Portici, poi direttore della Stazione di Entomologia agraria di Firenze, da quindici anni si occupa attivamente e con successo di tale questione. Nel 1901 egli scriveva così:

„ Da tempo sono entrato nell'assoluta convinzione che i nostri più efficaci ausiliarii nella lotta contro gl'insetti nocivi sieno altri insetti nemici ai primi, che in questi vivono o di questi si nutrono facendone preda. In più occasioni ho esposto ed illustrato le ragioni di questa mia convinzione, ma più di recente, in seguito appunto a questa mia persuasione, ho ricercato, con molto studio, come e quanto potesse essere agevolata agli insetti parassiti delle specie nocive la diffusione e dato loro incremento in confronto delle vittime che sono le specie nocive alle nostre culture. Altre volte ed in altro luogo ho avvertito che è stata ed è mia fatica quella di tentare l'acclimazione nel nostro paese d'insetti esotici, riconosciuti quali efficaci nemici delle specie nocive nei loro paesi d'origine „.

Nel 1901 il Berlese introdusse contro la *Icerya Purchasi*, cocciniglia nocevolissima agli agrumi, apparsa per la prima volta in Italia nel 1900 a Portici, il *Novius cardinalis*, con esemplari avuti dal Portogallo e dall'America del Nord. Questa coccinella si acclimò fra noi e con la sua voracità frenò grandemente lo sviluppo dell'*Icerya*.

Nel 1901 il Governo fece approvare una prima legge contro la *Diaspis*, ma i rimedii suggeriti allora non ebbero alcun effetto, tanto è vero che i Comuni infetti erano tre nel 1885 e due anni dopo la promulgazione della legge erano 763.

Nel 1904 si fece una legge più severa, ma i Comuni infetti otto anni dopo erano 2218. Vista l'inefficacia dei mezzi usati fino allora, visto anche che la morte della *Diaspis*, provocata dalle vicende atmosferiche o da speciali condizioni fisiologiche della pianta o da determinati metodi di coltura, non costituiva freno sufficiente allo svilupparsi e al propagarsi dell'insetto, gli entomologisti agrari rivolsero le loro cure a studiare i mezzi naturali di lotta per opera dei parassiti e dei predatori della dannosa cocciniglia.

Fra gli entomologi, che più assiduamente si occuparono e si occupano della questione, vanno specialmente menzionati lo

stesso prof. Berlese, di cui è detto più sopra, e il prof. Filippo Silvestri, che succedette al Berlese nella cattedra di Portici. Essi cercarono quali fossero fra noi e negli altri paesi infetti dalla *Diaspis* i suoi naturali nemici più attivi. Il professore Silvestri compì a tal fine dei lunghi viaggi.

Fra i due egregi entomologi si manifestò diversità di vedute intorno all'efficacia dei varii nemici della *Diaspis*, e ciò diede origine a studii più estesi dell'uno e dell'altro con vantaggio della scienza e della pratica.

In complesso il prof. Silvestri, pur non disconoscendo l'opera distruggitrice degli Imenotteri endofagi, ritiene che si debba avere maggior fiducia in quella dei coleotteri predatori.

Di questo avviso è pure il prof. Grassi, il quale, inoltre, in una recentissima pubblicazione, intitolata *Di una malattia infettiva della "Diaspis pentagona" Targ.*, ricerca se la *Diaspis* venga frenata nel suo sviluppo da una speciale malattia infettiva. Le ricerche da lui istituite a questo proposito non l'hanno condotto a scoprire un germe patogeno (come non vi era riuscito nelle sue ricerche in proposito precedentemente il Berlese), ma è persuaso che tale germe esista.

Il prof. Grassi non nega tuttavia l'utilità della Prospaltella: ma vorrebbe che l'opera sua venisse integrata col tentare di far sviluppare la malattia che egli suppone esistere ed anche col favorire lo sviluppo di insetti predatori, come il *Chilocorus bipustulosus* ed altri.

Il prof. Berlese invece accorda piena ed intera fiducia agli Imenotteri endofagi e in particolar modo alla *Prospaltella Berlesei* Howard, da lui scoperta e introdotta e diffusa in Italia.

" Fin dal 1902 ", egli dice, " considerando la diffusione uniforme e senza ostacolo della *Diaspis pentagona* fra noi, dubitai primamente che essa qui non avesse quei nemici naturali, che hanno tutti gli organismi a moderare la loro possibile eccessiva moltiplicazione. Per ciò, ottenuti da moltissime parti d'Italia campioni della cocciniglia, dovetti riconoscere che essa non era aggredita da alcun insetto endofago, a differenza di tutte le altre specie di coccidei nostrali. Per ciò la *Diaspis* doveva essere d'importazione esotica e qui pervenuta senza l'accompagnamento degli insetti suoi nemici ".

Più tardi, nel 1905, il Berlese avendo notato che gli ento-

mologi nordamericani non parlavano più dei danni della *Diaspis amygdali* (sinonimo della *Diaspis pentagona*), chiese al professore Howard, venuto a Firenze, la ragione del fatto. L'Howard gli confermò che da qualche tempo la cocciniglia non recava più danno alle culture nell'America del Nord.

Ottenuti dei campioni di *Diaspis* americana, il Berlese vi riscontrò degli Imenotteri endofagi, che distruggevano la *Diaspis* stessa. Egli li spedì al prof. Howard, specialista del gruppo dei Calcididi, perchè li determinasse. Il più abbondante fra essi venne dall'Howard descritto come una nuova specie col nome di *Prospaltella Berlesei.*

Il prof. Berlese pensò allora che se si poteva ottenere l'acclimamento di questa specie di endofago in Italia, si avrebbe potuto trovare in esso un freno efficace alla diffusione della *Diaspis pentagona.*

Egli fece i primi tentativi di acclimamento a Vanzago in provincia di Milano nel 1906: li estese nell'anno 1907 a S. Pietro, a Grado nel Pisano, e nell'anno stesso, dopo molte cure, potè diffondere la Prospaltella in cinque centri: Genova, Casale Monferrato, Milano, Pisa, Acerra. Nel 1909 il prof. Orsi, inviato speciale del governo Austro-Ungarico, la portava nel Trentino.

Nel 1910 il prof. Berlese era riuscito a costituire in Italia 2320 centri di allevamento, i quali prepararono una grande quantità di legno con Prospaltella, per modo che nella primavera del 1913 la stazione di Entomologia Agraria di Firenze potè distribuire 37.300 pezzi di legno con Prospaltella. La diffusione di questo materiale crebbe grandemente nel 1914, anche perchè il Ministero di Agricoltura concesse dei larghi sussidii. Nel solo Piemonte in quell'anno si distribuirono 142.000 pezzi. Il sindaco di Torino invitò, con apposito manifesto, gli agricoltori delle regioni infette a provvedersene dall'Osservatorio di Fitopatologia, che li distribuisce gratuitamente.

La Società Agraria di Lombardia ne distribuì l'anno scorso 170.000 e poco meno la Stazione Entomologica di Firenze. Nell'anno corrente si arriverà ad un milione di pezzi.

Gli effetti benefici della Prospaltella in un luogo, dove sia stata introdotta, si incominciano a riconoscere due anni circa dopo il suo acclimamento in quel luogo, ma non si fanno ben manifesti che nel terz'anno. Così avvenne che in Italia soltanto

nel 1911 gli agricoltori cominciarono a riconoscere l'utilità della Prospaltella nella lotta contro la *Diaspis*.

Il prof. Berlese, a corredo dei suoi scritti, inviò all'Accademia una copiosa serie di documenti, relazioni di enti agrarii, di associazioni sericole e bacologiche, di istituti agrarii, ecc., i quali provano il buon successo della Prospaltella.

Ne citerò alcuno dei più importanti.

Il Consiglio per gli interessi serici accordava nel 1913 L. 20.000 all'Associazione serica e bacologica del Piemonte perchè mettesse alla prova tutti i mezzi di lotta fino allora proposti contro la *Diapsis* e ne riferisse comparativamente. Concedeva pure L. 9.000 alla Società agraria di Lombardia per una larga diffusione della Prospaltella in Lombardia e L. 4.000 alla Stazione di Entomologia agraria di Firenze per le spese relative alla preparazione del legno con Prospaltella. Raccolte tutte le necessarie informazioni, il Consiglio per gli interessi serici diede il seguente giudizio: " Fu riconosciuto che la Prospaltella è ora l'unico rimedio pratico ed economico per combattere il terribile parassita e ridurre i danni al minimo. Ne occorre una generale e metodica distribuzione affinchè in pochi anni tutta la zona ammalata ne sia sufficientemente provveduta e sia così chiuso il doloroso periodo, durante il quale la *Diaspis* ha prodotto tanto danno ".

L'Associazione italiana dei confezionatori di seme di bachi di Milano, " preoccupata dalla grave diminuzione della produzione di foglie di gelso e conseguentemente anche di bozzoli, riconoscendo una causa principale di tale fatto nell'enorme diffusione di malattie parassitarie e sopra tutto nella *Diaspis* ", apriva nel 1910 un concorso con un premio di L. 2.000 per un rimedio efficace e di facile applicazione pratica, ammettendo al concorso tanto i preparati specifici chimicamente composti quanto nuovi metodi di allevamento e di potatura del gelso e i parassiti della *Diaspis*.

Il Comizio agrario di Como assegnava in tale concorso, come primo premio, una grande medaglia d'oro.

Al concorso si presentò il prof. Berlese, ed ecco il giudizio che ne diede la Giuria nella sua relazione: " La Giuria ritiene di dover escludere ogni ulteriore dubbio sulla reale capacità della Prospaltella di provocare una grande distruzione della

Diaspis... e propone per il prof. Berlese il primo premio, cioè la medaglia d'oro del Comizio agrario di Como e L. 1.400 „.

L'Associazione agraria friulana, nel gennaio 1914 votò un plauso unanime al prof. Berlese per la sua fortunata lotta contro la *Diaspis*.

L'Associazione agraria trevigiana assegnò nel 1914 al professore Berlese una medaglia d'oro di benemerenza.

I bacologi di Vittorio e di Conegliano, riuniti in speciale seduta nell'ottobre 1914, decretarono al prof. Berlese una targa-ricordo *in segno di ammirazione e di riconoscenza*.

Nel maggio 1915, per voto del Consiglio provinciale di Venezia e per unanime deliberazione del Consiglio di Agricoltura per le Cattedre ambulanti di Agricoltura della provincia di Venezia e delle Istituzioni agrarie della stessa Provincia, fu deliberata in onore del prof. A. Berlese una targa d'oro con una pergamena di dedica, come una solenne dimostrazione della riconoscenza degli enti e degli agricoltori veneziani per la scoperta della *Prospaltella Berlesei* e per la sua applicazione alla lotta contro la *Diaspis pentagona*.

Fra le numerose attestazioni di privati, che affermano l'efficacia della Prospaltella contro la *Diaspis*, sono notevoli le seguenti:

S. E. Bertolini scriveva al Berlese nel luglio del 1914: " Ho constatato quest'anno che il trionfo della Prospaltella è stato nelle nostre campagne completo. Ella si è reso così benemerito dell'economia nazionale che le parole tornano inadeguate al fatto „.

S. E. il conte Marcello scriveva al Berlese nel marzo 1914: " Io mi compiaccio assai con Lei per il successo conseguito ed anche per mia parte desidero farle avere l'espressione della mia riconoscenza. Anche la mia tenuta di Fontanella di Oderzo, circa 1000 ettari, è quasi immune di *Diaspis*. Ho cominciato con pochi rametti tre anni fa. Ella ha reso un immenso servigio all'agricoltura del nostro paese „.

L'on. Rota scriveva al prof. Berlese nel luglio 1914: " L'opera Sua fu efficacissima ed Ella merita, con la perpetua gratitudine degli Agricoltori, il plauso del Ministero „.

Nella legge approvata nel 1913: *Provvedimenti intesi a prevenire e combattere le malattie delle piante* all'articolo 10 si abro-

gano le leggi speciali sulla *Diaspis pentagona* e sulla *Doriphora decemlineata* per le considerazioni seguenti, che si leggono nella Relazione ministeriale che precede la legge stessa:

" Si ritiene opportuno abrogare le due leggi speciali, cioè quella sulla *Doriphora*, che non è occorso mai di applicare e quella sulla *Diaspis pentagona*, perchè la *Prospaltella Berlesei* rappresenta oggi il rimedio più semplice, più economico e più efficace contro di essa e dispensa quindi dal valersi della cura diretta „.

I risultati ottenuti in Italia con la Prospaltella richiamarono su di essa l'attenzione degli Stati d'Europa. Il Governo Austro-Ungarico la introdusse nel Goriziano e, avutone buon effetto, pubblicò nel 1913 una tavola colorata con speciale istruzione, in tre lingue, da diffondersi fra gli agricoltori. In quella istruzione sta scritto: " Fu provvidenziale per l'agricoltura che alcuni anni fa il prof. A. Berlese, direttore della stazione entomologica agraria di Firenze, importasse in Europa un parassita endofago della *Diaspis* stessa, la vespetta detta *Prospaltella Berlesei*, la quale fu con notevole successo allevata e propagata nelle regioni ove coltivasi il gelso, tanto in Italia quanto in Austria „.

La Francia inviò in Italia a studiare gli effetti della Prospaltella il sig. Gastine. Egli fece in proposito un rapporto molto favorevole, tanto che il prof. Bouvier, presidente della Commissione franco-italiana riunitasi a Nizza nel 1913 per ottenere l'abolizione dei provvedimenti presi dalla Francia per difendersi dalla *Diaspis*, conchiuse un suo articolo stampato nella *Revue scientifique* dicendo che i benefici effetti della Prospaltella rendevano inutili quei provvedimenti.

Recentemente la repubblica dell'Uruguay, la repubblica Argentina e la Svizzera introdussero la Prospaltella per iniziare la lotta contro la *Diaspis*.

Le condizioni presenti, per quanto riguarda gli effetti della Prospaltella in Italia, sono le seguenti:

La *Diaspis* è distrutta nel Goriziano, nel Trentino, nel Friuli, nella provincia di Treviso e in massima parte delle provincie di Venezia, Padova, Rovigo, Vicenza e anche in qualche centro del Veronese.

In Lombardia la *Diaspis* è distrutta nei dintorni del lago

di Garda; altrove la lotta è iniziata. In Piemonte s'ebbero larghe distruzioni a Casale, Acqui, Asti, Mondovì, Alessandria; la lotta prosegue metodicamente nel resto. In Liguria fu liberata dalla *Diaspis* la provincia di Genova. Anche ad Acerra presso Napoli la *Diaspis* fu distrutta, e la distruzione procede bene nelle Marche, nell'Umbria, nell'Emilia, in Toscana, in Sicilia. Dai documenti raccolti appare non lontano il giorno, in cui, per opera della Prospaltella, la *Diaspis* non sia più un nemico temibile per la coltivazione del gelso e delle altre piante, sulle quali alligna.

3. Prof. P. KOEBE, *Memorie di matematica.*

Il prof. Koebe dell'Università di Lipsia, che aveva già presentato numerosi suoi lavori pel XVII premio Bressa, ha inviato all'Accademia per il nuovo premio altri nove scritti.

Anche questi, come quelli, sono relativi alla così detta *uniformizzazione* delle funzioni o delle curve algebriche od analitiche ed ai problemi di rappresentazioni conformi che strettamente vi si collegano. Nel campo costituito dai punti complessi di una linea algebrica, o più in generale di una linea analitica, (ossia sulla superficie di Riemann corrispondente) si vuol distendere una variabile complessa t, per modo che i valori di questa risultino in corrispondenza analitica *biunivoca* con i punti della linea, sicchè le coordinate di questi punti riusciranno funzioni analitiche uniformi di t. È questo un problema che era stato trattato dal Poincaré e dal Klein. Il Koebe lo riprese fin dal 1907, cercando di riempire tutte le lacune che ancora rimanevano nella dimostrazione dei teoremi fondamentali del Poincaré e del Klein e aggiungendo altri risultati della stessa natura.

Nei nuovi lavori pubblicati nell'ultimo quadriennio rileviamo anzi tutto la dimostrazione, che vien data per la prima volta dell'esistenza e dell'unicità di un'importante classe di variabili uniformizzanti (canoniche generali) per un ente algebrico, già considerate dal Klein. Anche viene dimostrato rigorosamente come tutte le questioni di uniformizzazione delle curve algebriche, prima risolute con altri metodi, si possano trattare con

quel *metodo di continuità*, a cui già si era voluto ricorrere, senza però poggiarlo, come qui si fa, su basi sicure.

Per le curve analitiche $(x\,y)$ vengon determinate quelle variabili uniformizzanti t, per le quali le funzioni uniformi $x(t)$, $y(t)$ riescono insieme funzioni automorfe con un cerchio limite. Con ciò diventa possibile per le curve reali analitiche una distinzione analoga a quella che, per le curve algebriche reali, ossia per le relative superficie Riemanniane simmetriche, aveva fatto il Klein in *ortosimmetriche* e *diasimmetriche*. Come anche il Koebe sia poi condotto a legami con la geometria non euclidea è prevedibile per chi conosca i classici lavori del Poincaré su questi argomenti.

Infine, per quanto riguarda la rappresentazione conforme, è da notare un metodo nuovo, semplice (metodo di accostamento), basato esclusivamente sui fondamenti elementari della teoria di Weierstrass delle serie di potenze, per ottenere la rappresentazione conforme di un campo piano affatto generale, semplicemente o doppiamente connesso, sul cerchio o rispettivamente sulla corona circolare: come pure l'analisi della corrispondenza che nasce fra i contorni di due campi, quando fra questi si abbia una corrispondenza conforme.

L'insieme di questi studi del prof. Koebe è opera altamente pregevole.

4. W. Nernst, *Trattato di chimica teorica e memoria di chimica.*

Fin dal 1893 il prof. W. Nernst, raccogliendo in un volume l'articolo di *Chimica teorica* scritto nel 1892 pel grande *Trattato di Chimica inorganica* del Dott. O. Dammer, intitolava la sua opera *Chimica teorica dal punto di vista della regola di Avogadro e della termodinamica.*

Nella prima edizione di questo trattato si deve anzitutto ammirare l'ordine col quale è disposta la materia, ordine, che fu conservato nelle sue linee generali anche nelle successive edizioni. In queste l'autore andò di mano in mano aggiungendo ai diversi capitoli quel corredo di fatti e di teorie che il progresso di questo ramo di studio della Chimica andava scoprendo,

teorie e fatti in parte dovuti all'autore stesso ed ai suoi allievi. Così il volume, che era di 580 pagine nella prima edizione, diventò di 820 nella settima edizione, che è del 1913. L'interesse destato nel mondo scientifico dall'opera del Nernst viene provato chiaramente dalle sette edizioni, che ne furono pubblicate in vent'anni, oltre alle traduzioni inglese e francese. Il merito intrinseco dell'opera fu poi ben definito dal traduttore francese scrivendo:

" Noi riteniamo fermamente che molti lavori di chimica-fisica, eseguiti in questi ultimi anni in Europa e in America, sieno stati inspirati dal libro del prof. Nernst ".

Quest'opera ha per ciò acquistato l'importanza di una guida teorica e sperimentale nel campo della chimica fisica, e l'importanza crebbe dopo il 1906, avendo il Nernst enunciato in quell'anno il teorema di termodinamica che porta il suo nome e informato a questo teorema i relativi capitoli della sua opera nelle successive edizioni.

Il Nernst risolse il problema che aveva occupato lungamente i chimici, dal Bergman al Thomsen e al Berthelot, cioè la previsione dell'andamento di qualsiasi reazione chimica. Egli dimostrò che le curve, le quali rappresentano rispettivamente il massimo lavoro esterno che si può ricavare da una reazione chimica e il calore sviluppato nella reazione stessa, curve che devono passare tutte e due per lo stesso punto d'origine allo zero assoluto, vanno avvicinandosi l'una all'altra assintoticamente al diminuire della temperatura, in modo da essere vicinissime l'una all'altra presso a quel punto.

Siccome poi l'applicazione del nuovo teorema al calcolo degli equilibrii chimici esigeva la conoscenza dei veri calori specifici delle sostanze reagenti, così il Nernst fu condotto alla misura di essi anche a temperature bassissime, per le quali mancavano affatto i dati sperimentali.

Sotto la sua direzione, modificando ingegnosamente i metodi ordinari, vennero fatte molte serie d'esperienze e ne risultò che i calori specifici tendono ad annullarsi quando la temperatura s'accosta allo zero assoluto.

5. Prof. G. Ciamician e Dott. Silber, *Memorie di chimica.*

I sigg. Ciamician e Silber hanno da più di un decennio intrapreso lo studio sistematico delle trasformazioni chimiche che i composti organici subiscono per l'azione della luce, ed hanno su questo vasto argomento pubblicato non meno di 31 memorie o note. Scopo precipuo delle loro ricerche fu d'indagare quali reazioni possano essere ottenute od agevolate dalla luce, studiando i loro processi tanto dal punto di vista teorico quanto da quello pratico. Essi tentarono cioè di riprodurre artificialmente molti dei fenomeni che in natura si compiono nelle piante sotto l'azione della luce, affine di giungere, con la conoscenza precisa delle singole reazioni, alla spiegazione dei fenomeni che in modo complesso e maraviglioso si svolgono nelle piante.

Le condensazioni del tipo aldolico fra alcoli e chetoni alla luce ed altre condensazioni varie hanno molta importanza. Recentemente gli autori studiarono pure le *autossidazioni* alla luce, giungendo a risultati importanti, in ispecial modo con lo studio delle autossidazioni degli omologhi del benzene.

Fra i lavori di Ciamician e Silber compiuti negli ultimi quattro anni, i cui risultati comparvero in molteplici memorie presentate all'Accademia dei Lincei e a quella di Bologna, sono specialmente da tenersi in considerazione quelli dal n° 18 al 29 che trattano argomenti, i quali si collegano in parte con quelli riassunti nella Memoria VII. Essi si riferiscono a diversi casi interessanti di condensazione.

Sopra tutto importanti sono le condensazioni fra l'acetone e gli alcoli metilico ed etilico, nonchè quelli dell'etilmetilchetone. Trattasi di fenomeni di riduzione e di ossidazione reciproca, i quali conducono alla formazione di glicoli. Queste reazioni sono del tutto simili a quella fondamentale che avviene fra il benzofenone e l'alcool benzilico, reazione di notevole importanza, che gli Autori hanno scoperto e studiato fin dal 1904.

Però è d'uopo avvertire che la reazione fra l'acetone e l'alcool etilico è accompagnata da reazioni secondarie, le quali hanno complicato e reso oltremodo difficile lo studio completo di tutte le trasformazioni avvenute. Di fatto, per riduzione dell'acetone si formano alcool isopropilico ed aldeide acetica, e

quest'ultima, condensandosi con l'alcool etilico, forma un glicol dimetiletilenico. L'andamento di questa reazione venne pienamente confermato mediante esperienza diretta.

Il *metiletilchetone* si comporta alquanto diversamente: esso infatti agisce dapprima su sè stesso riducendosi ad alcool butilico secondario ed ossidandosi a un dichetone.

L'importanza della formazione di questo paradichetone sta principalmente nel fatto, che esso, trattato con ammoniaca, produce del tetrametilpirrolo. Or bene, la formazione alla luce di un paradichetone costituisce un fatto molto notevole, che può forse chiarire le sintesi naturali dei derivati del pirrolo.

Le altre note pubblicate negli ultimi quattro anni studiano dei fenomeni di *autossidazioni* determinati dalla luce. Sotto questo rispetto vennero sperimentati gl'idrocarburi aromatici, gli acidi, i chetoni ed alcune basi, oltre al pirrolo, la piperidina e la nicotina.

La nota relativa all'autossidazione di queste ultime venne soltanto pubblicata nel gennaio 1915.

Queste ricerche hanno dato risultati veramente importanti. Grazie ad esse si è dimostrato che l'ossigeno alla luce, in presenza di acqua, determina alle volte fenomeni di autossidazione così profondi come altrimenti non si possono effettuare che con ossidanti minerali energici. Per esempio, gl'idrocarburi aromatici si autossidano ad acidi. L'acetone si autossida ad acido acetico, ad aldeide ed acido formico.

Le catene carboniche dei ciclochetoni si aprono: così p. e. il cicloesanone dà acido capronico ed adipico.

Speciale menzione merita la nota 27 perchè dimostra che alcune sostanze, le quali per sè stesse non sono autossidabili alla luce, si ossidano se vengono esposte insieme con un corpo autossidabile. Così l'alcool etilico, l'amilico, la glicerina, il glucosio e la naftalina, che non sono autossidabili, si ossidano in presenza del toluene e degli xileni. Tutti questi fatti presentano senza dubbio un grande interesse.

Le ricerche relative al contegno di sostanze organiche nei vegetali, quali sono contenute nelle Memorie IV, V, VI pubblicate nell'ultimo quadriennio, fanno seguito alle precedenti. La nota sull'alcool benzilico è una continuazione di quella sulla formazione dei glucosidi nelle piante.

Le altre trattano delle variazioni della nicotina nel tabacco e di altre questioni relative agli alcaloidi nel tabacco.

Le basi pirrolidiniche che Pictet asserì di aver trovato nel tabacco ed in altre piante non furono riscontrate dagli autori. Si trovò invece sempre l'isoamilamina che era sfuggita ai precedenti sperimentatori.

Quando si consideri che la clorofilla (per molti riguardi paragonabile alla materia colorante del sangue) contiene quale nucleo fondamentale dei complessi formati da pirroli sostituiti, ossia alchilpirroli, si comprende come queste ricerche possano per la loro importanza essere considerate fra le migliori compiute in questi ultimi anni.

Tenendo conto dei giudizi ora riferiti, la seconda Giunta discusse i meriti delle singole opere proposte.

Essa esaminò anzi tutto se quelle opere sieno state pubblicate entro i limiti di tempo stabiliti dal programma del premio.

Quanto al trattato di Chimica teorica del Nernst, la Giunta osservò che la prima edizione di quest'opera fu stampata nel 1892 e soltanto la settima fu stampata entro il quadriennio 1911-14. Non si può quindi tener conto per il premio se non delle aggiunte fatte nell'ultima edizione alle precedenti. E anche da queste aggiunte è necessario togliere quanto fu pubblicato prima del quadriennio anzidetto. Viene così escluso il teorema di termodinamica che porta il nome di Nernst e che è del 1906.

In parte anche le importanti esperienze fatte dallo stesso autore per verificare le conseguenze di quel teorema vanno escluse per la ragione medesima.

Buona parte dei lavori, per i quali il Nernst era stato proposto, viene quindi a cadere fuori del quadriennio, cui spetta il premio. Per ciò parve alla Giunta che il nome di questo scienziato non fosse da comprendersi fra quelli che verranno proposti all'Accademia per l'assegnazione del premio.

Le altre opere sopra indicate furono pubblicate entro i limiti assegnati dal programma.

Discutendo poi le proposte da farsi all'Accademia, la Giunta fu unanime nel ritenere che gli autori presi in considerazione dovessero disporsi in due gruppi. Un primo gruppo di maggior

merito comprenda il Prof. Berlese e i Proff. Ciamician e Silber. Un secondo gruppo comprende i Proff. Asch e il Prof. Koebe, autori di opere certamente pregevoli ma d'interesse più ristretto.

La Giunta si fece poi ad esaminare se fosse opportuno disporre in ordine di merito anche gli autori del primo gruppo. Essa ha notato la diversità essenziale delle opere comprese in quel gruppo. Il metodo suggerito dal Berlese per la lotta contro la *Diaspis* ha certamente fondamento scientifico, ma ha carattere di pratica utilità. Gli studî chimici del Ciamician e del Silber hanno invece indole prettamente scientifica. La Giunta ha inoltre notato che il testatore con le sue disposizioni stabilì che il premio venisse assegnato o ad una insigne ed utile scoperta, come può dirsi quella del Berlese, o ad un lavoro scientifico di molto valore, come son gli studî del Ciamician e del Silber. Il doppio partito, che il testatore additò, è precisamente quello che ora ci si presenta. Parve quindi alla Giunta d'aver compiuto l'ufficio suo avendo posto innanzi all'Accademia le ragioni che possono addursi in favore dell'una o dell'altra soluzione e che, fatto ciò, fosse opportuno deferire all'Accademia la scelta.

Le proposte definitive, che la Giunta Vi fa, sono dunque le seguenti. In prima linea sono proposti, *ex aequo*, nel senso sopra indicato:

il Prof. Berlese per l'introduzione e la diffusione della Prospaltella;

i Proff. Ciamician e Silber per gli studî di Chimica sopra indicati.

Un secondo gruppo comprende:

i Proff. Asch per la loro opera sui Silicati;

e il Prof. Koebe per le sue memorie di Matematica.

Il Segretario della Giunta
A. NACCARI.

Relazione della Commissione per il premio Gautieri per la Filosofia (triennio 1912-1914).

Proporre l'assegnazione di un premio (di L. 1900) alla migliore opera di filosofia pubblicata in Italia nel triennio 1912-14, è problema veramente arduo e spinoso.

Il numero notevole delle pubblicazioni, la natura e l'importanza diversa dei temi trattati (gnoseologia, metafisica, religione, storia, pedagogia, diritto), fra i quali la comparazione riesce per se stessa difficile, la varietà dei metodi seguìti (storico, critico, deduttivo-sintetico), la quale in altre discipline non sarebbe compatibile, infine la diversità medesima nella natura dei pregi e dei difetti che nei varî lavori si riscontrano, concorrono naturalmente a rendere il còmpito della Commissione assai meno agevole di quello che sarebbe nel caso di altre discipline a contorni più certi, a fisionomia e andatura più definita.

Fra le varie opere di filosofia inviate direttamente dagli autori all'Accademia, alcune non parvero tali di essere prese in considerazione per la insufficienza del contenuto (Mignone, *Le false basi della nostra vita*; Orano P., *La rinascita dell'anima*; Meozzi, *Le dottrine politiche e religiose di B. Spinoza*); altre, pur contenendo pregi di pensiero e di dottrina, non parvero di tale altezza da arrivare al premio (Cosentini, *Filosofia del Diritto*; Baratono, *Discorsi sull'Educazione*; Carabellese, *L'Essere e il Problema religioso*; Zini, *La doppia maschera dell'universo*; Bodrero, *Protagora*); altre infine sono veramente degne di segnalazione o per l'esattezza dell'indagine storica e la fedeltà perspicua dell'esposizione, sebbene alquanto fredda e, a ogni modo, incompleta, il che si nota nel libro dell'Ambrosi su *E. Lotze*; o per l'ampiezza del disegno e l'acutezza della critica, sebbene non sempre felice e vittoriosa, che è il caso del libro di E. P. Lamanna su *La Religione nella vita dello spirito*; o per

il geniale ardimento della costruzione sintetica, sebbene discutibile nella base e nelle deduzioni, il che si nota nel *Sommario di Pedagogia* di G. Gentile, scrittore già due volte premiato da quest'Accademia (1). Che se poi vogliasi spingere lo sguardo al di là delle opere inviate dagli Autori all'Accademia, anche qui più d'una ci si presenta degna di molta considerazione. A cominciare dal volume austeramente pensato di A. Pastore sul *Pensiero puro*, salendo alla ricca e forte monografia, già altrove premiata, di A. Aliotta su *La reazione idealistica contro la scienza*, e fino al nuovo volume *Conosci te stesso*, dove B. Varisco, autore già premiato da questa Accademia, svolge con l'ammirata finezza dialettica la sua dottrina gnoseologica, senza tuttavia pronunciarsi sulle conclusioni metafisiche, è una bella fioritura di opere, che rende ancor più arduo l'ufficio del giudice.

La Commissione, dopo maturo esame comparativo delle opere per rispetto alla natura degli argomenti, alle dottrine svoltevi o illustrate o criticate, alla importanza scientifica delle pubblicazioni nella cultura filosofica del nostro Paese, pur rammaricandosi di non poter estendere ad altri lavori il suo giudizio di segnalazione per il premio, ma convinta, per le varie considerazioni che si verranno esponendo, di compiere opera di giustizia, propone che il premio Gautieri sia assegnato alla pubblicazione inviata in esame alla Accademia dall'autore Aurelio Pelazza, dal titolo: *Guglielmo Schuppe e la filosofia della immanenza*, Milano, 1914.

È un volume di 206 pagine in 8°, che può considerarsi come il seguito delle due precedenti pubblicazioni dello stesso Autore, l'una su la *Metafisica dell'Esperienza* (1907), e l'altra su *Riccardo Avenarius e l'empirio-criticismo* (1909), ambedue salutate molto favorevolmente dalla critica. Nel volume presentato al concorso l'Autore prende in esame quelle moderne teorie

(1) Il Gentile ha presentato anche due volumi (*Studi vichiani* e *La riforma della dialettica hegeliana*) che contengono per gran parte studii pubblicati in riviste anteriormente al 1912. Così pure sono nuove edizioni, sebbene rivedute e qua e là ampliate, di opere anteriori al 1912 i volumi inviati dall'Ambrosi (*Il primo passo alla Filosofia*) e dal Billia (*L'esiglio di S. Agostino*).

gnoseologiche e metafisiche le quali, facendo capo a Guglielmo Schuppe, hanno trovato parecchi ingegnosi e vivaci sostenitori, principalmente in Germania, e hanno loro periodica espressione nella “ Zeitschrift für immanente Philosophie „ iniziatasi nel 1896. È, dunque, un importante moto di pensiero filosofico quello che il Pelazza prende a esaminare.

La filosofia dell'immanenza non era finora stata oggetto presso di noi di ampio e approfondito studio analitico e critico. Ne aveva per primo parlato il Martinetti nella sua “ *Introduzione alla Metafisica* „; vi accennò poi il Villa nel suo volume su l'*Idealismo moderno*, più recentemente, ma con rapidi tocchi, il De Ruggero nel volume su *La Filosofia contemporanea*, e più ampiamente il De Sarlo nella *Cultura filosofica* e l'Aliotta nell'opera dianzi citata. Ma nessuno finora aveva pensato a raccogliere in una esposizione organica tutto il complesso di teorie, che intorno allo Schuppe si svolsero in varie pubblicazioni da pensatori come lo Schubert Soldern, il Rehmke, il von Leclair, il Kauffmann; a esaminarle nei loro rapporti storici e dottrinali con la filosofia moderna; a determinarne criticamente il valore.

Ora, tutto questo ci sembra che abbia fatto molto felicemente il Pelazza. Movendo da una sobria ma precisa determinazione delle dottrine gnoseologiche dualistiche e monistiche, fra le quali la filosofia dell'immanenza vuole assidersi arbitra pur derivandone l'ispirazione, l'Autore chiarisce stupendamente in che cosa consista il principio dell'immanenza, per il quale, come non può esistere l'oggetto senza il soggetto, così non può esistere il soggetto senza l'oggetto, e il concetto d'un io in sè, d'una attività spirituale indipendente dal contenuto di coscienza è una vana illusione. Quindi procede alla illustrazione del secondo principio importante della filosofia dell'immanenza, quello, cioè, della oggettività dei dati sensibili, il quale costituisce un punto di così profonda e radicale innovazione rispetto alla dottrina dell'idealismo; e infine dimostra con efficace lucidità la connessione intima e necessaria, secondo la teoria degli immanentisti, degli elementi sensibili e degli elementi razionali nella conoscenza. A questo punto si presentava all'Autore la necessità di chiarire il concetto che, in base ai principi posti, debba farsi della realtà il filosofo; e allora egli procede alla seconda principal parte del suo lavoro, che è una larga viva perspicua

esposizione della logica gnoseologica dello Schuppe, dove è tanta finezza e acutezza d'analisi e di critica, e che culmina nella originale teoria della *cosa* concepita come un sistema complesso di distinzioni e di relazioni necessarie.

In tutta questa parte, che non è soltanto una fedele e precisa esposizione, ma una vera interpretazione e ricostruzione della dottrina attraverso le opere del maestro e de' suoi seguaci, e una indagine accorta dei rapporti che la collegano alle principali correnti della filosofia moderna, si rivelano le doti cospicue di una mente sagace e lucida, di un criterio diritto, di un metodo severo.

L'ultima parte, poi, del lavoro è dedicata alla valutazione critica della dottrina dell'immanenza; e anche qui sono còlte felicemente e le principali caratteristiche e le più gravi deficienze. Che la filosofia dell'immanenza sia, nonostante le proteste de' suoi sostenitori, una nuova forma di idealismo; che essa non possa, senza far violenza a' suoi principî, assicurare i diritti della realtà esterna: che essa del problema del *tu*, o del non-io, non potrà mai, per alcun prodigio di dialettica, dare una soluzione soddisfacente; che gravi conseguenze si derivano da essa nell'etica, sono critiche che l'Autore svolge con sicura e diritta penetrazione, con sobria ma lucida espressione, con quel sano equilibrio spirituale, che rivela un'anima atta ad affrontare senza smarrirsi le più ardue posizioni e le più audaci affermazioni filosofiche.

L'opera del Pelazza è stata universalmente bene accolta dalla critica: e ne è conferma la traduzione, sebbene alquanto abbreviata, in inglese per opera di E. C. Duc (London, Vernon House, 163, Willesden Lane, 1915).

Si può ritenere, adunque, con sicura coscienza che premiando il lavoro del Pelazza si riconosce il valore scientifico di un'opera condotta con forte preparazione di studî, con acutezza di pensiero e alta serenità di mente: un'opera, infine, che in tutta la sua struttura, ma specialmente nelle ultime pagine, rivela una bella nobiltà spirituale. “ Se l'anima individuale, dice sul finire “ del suo libro il Pelazza confutando un concetto centrale dello “ Schuppe, se l'anima individuale è un enigma, la coscienza ge- “ nerica è la quintessenza di tutti gli enigmi „. Ma per lui l'enigma dell'anima individuale si schiude con la morte, e sog-

giunge: “ la vita che noi viviamo su questa terra non è “ la vera vita, ma un passaggio ed una preparazione alla vera “ vita ”.

Parole per lui fatidiche! Aurelio Pelazza si è preparato “ alla vera vita ”, combattendo e morendo, prode soldato volontario, per la Patria e per la Libertà dei Popoli!

G. Carle.
P. D'Ercole.
Giovanni Vidari, *relatore.*

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre.
Ettore Stampini.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 6 Febbraio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Salvadori, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Somigliana, Fusari, Panetti, e Segre, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Naccari.

È letto e approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Socio straniero Darboux ha inviato in omaggio il suo *Rapport sur les concours de 1915* letto all'Académie des Sciences il 27 dicembre scorso.

Il Socio Segre rileva inoltre, fra le opere giunte all'Accademia, *Il primo libro degli Elementi di Euclide*, testo greco, versione italiana, introduzione e note, a cura di Giovanni Vacca. Il Prof. Vacca ha fatto un'opera degnissima di lode. Egli ha tenuto conto di tutti i risultati delle ricerche filologiche e critiche sul celebre libro. Le sue note, numerose, ma succose, dànno ai lettori tutto ciò che è essenziale per bene intendere ed apprezzare — ed eventualmente criticare — il testo euclideo.

Vengono presentate, per l'inserzione negli *Atti*, le seguenti Note, dai loro Autori:

M. Panetti, *Sul problema dinamico dei rotismi epicicloidali*;

C. Somigliana, *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di superficie*;

e queste altre, rispettivamente dai Soci Peano e Segre:

G. Vacca, *Sul poligono regolare di 17 lati*;

G. Boccardi, *2° Saggio sulla Costante di aberrazione.*

LETTURE

Sulle derivate seconde della funzione potenziale di superficie.

Nota del Socio C. SOMIGLIANA.

Sono notissime le formule che dànno le discontinuità delle derivate prime della funzione potenziale newtoniana di superficie. Non si trovano invece, generalmente, nei Trattati quelle delle discontinuità delle derivate seconde. Forse soltanto il Poincaré nella sua *Théorie du Potentiel Newtonien* trova queste formule, ma con un procedimento assai lontano dalla semplicità, così che non è facile convincersi della loro esattezza. Molti anni or sono C. Neumann aveva indicato sommariamente una via generale per giungere alla determinazione di tutte le discontinuità delle derivate di qualunque ordine della funzione potenziale di superficie ([1]), e subito dopo Beltrami ([2]) giustificò, colla consueta eleganza, i procedimenti del Neumann.

Dovendo fare uso sistematico delle proprietà di discontinuità delle derivate seconde della funzione potenziale di superficie in alcune ricerche, che presenterò fra breve a questa Reale Accademia, mi è sembrato opportuno di stabilire, in modo esauriente, le formule che le determinano, servendomi appunto del metodo di Neumann-Beltrami. Questa breve Nota non ha quindi altro carattere, che quello di uno studio preliminare.

Il metodo Neumann-Beltrami consiste essenzialmente nello esprimere le derivate di qualsiasi ordine di una funzione potenziale newtoniana di superficie sotto la forma di una somma di due funzioni potenziali l'una di semplice e l'altra di doppio strato, e inoltre, nel caso che la superficie agente sia aperta, di alcuni potenziali della linea del contorno, che non hanno alcuna

---

([1]) C. Neumann, *Ueber das Newton'sche Potential*, " Mathematische Annales ,, Bd. XVI.

([2]) E. Beltrami, *Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. C. Neumann sulle funzioni potenziali*, " Annali di Matematica ,, S. II, T. X, 1880.

influenza sulle discontinuità di queste derivate, almeno finchè si considerano punti interni alla superficie. È chiaro che, dopo una tale riduzione, il problema delle discontinuità può considerarsi risoluto, in base alle note formule delle discontinuità delle funzioni potenziali di semplice e doppio strato. Tale procedimento ha quindi il vantaggio di ridurre al minimo le difficoltà da superarsi, in quanto riduce la quistione ad un semplice processo di calcolo, evitando quei delicati passaggi al limite, che rendono di solito così complicate queste ricerche. Ne risulta anche dimostrata la proprietà che le discontinuità di tutte le derivate, non sono, in ultima analisi, che conseguenza diretta di quelle delle funzioni potenziali e delle loro derivate prime.

Immaginiamo la superficie σ agente riferita ad un sistema di coordinate curvilinee u, v, che supporremo, per semplicità, ortogonali.

Il suo elemento lineare avrà quindi, colle usate notazioni, la forma

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

ed i parametri differenziali primo e secondo per due funzioni φ, ψ rispetto alla superficie saranno

$$\Delta_1(\varphi, \psi) = \frac{1}{E}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{1}{G}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}$$

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right\}.$$

Sia n la normale alla superficie, i cui coseni di direzione indicheremo con α, β, γ e siano ξ, η, ζ le coordinate cartesiane di un punto dello spazio. Beltrami, nella Memoria citata, dimostra le formule seguenti:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\xi} &= \Delta_1(\psi, \xi) + \alpha\frac{\partial\psi}{\partial n} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta} &= \Delta_1(\psi, \eta) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial n} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} &= \Delta_1(\psi, \zeta) + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial n} \end{aligned}$$

le quali servono al calcolo delle derivate prime di ψ, quando per la determinazione del punto (ξ, η, ζ) si faccia uso della sua

distanza n dalla superficie s, e delle coordinate u, v del piede di questa distanza.

Se s è la linea del contorno di σ, e ν la normale diretta verso l'interno di σ; si ha la seguente formula integrale:

$$(2) \qquad \int_\sigma h\,\Delta_1(\varphi,\psi)\,d\sigma = -\int_\sigma \{h\,\Delta_2\varphi + \Delta_1(\varphi,h)\}\,\psi\,d\sigma - \int_\sigma h\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,ds,$$

la quale, nel caso che σ sia piana, si deduce immediatamente dal lemma di Green, mutando una delle funzioni, che vi compaiono, nel prodotto di due.

Ciò posto, le derivate prime della funzione potenziale

$$V = \int_\sigma h\,\frac{d\sigma}{r}$$

rispetto alle coordinate del punto potenziato (x, y, z) si possono rappresentare mediante le (1), e quindi trasformare mediante la (2). Si trova così:

$$(3) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \int_\sigma (h\,\Delta_2\xi + \Delta_1(h,\xi))\,\frac{d\sigma}{r} - \int_\sigma h\,\alpha\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma - \int_\sigma h\,\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\,\frac{ds}{r}.$$

Questa formula riducendo la derivata alla somma di una funzione potenziale di semplice strato e di una funzione potenziale di doppio strato (oltre un integrale di linea, che non ha influenza) ne determina subito le discontinuità. Un procedimento analogo si applica, col metodo Neumann-Beltrami, a tutte le altre derivate di qualunque ordine.

Per poterlo applicare alle derivate seconde della V, conviene prima ricordare, dalla citata Memoria di Beltrami, una formula analoga alla (3) per la funzione potenziale di doppio strato. Sia

$$W = \int_\sigma g\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma$$

tale funzione. Si trova in questo caso

$$(4) \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = \int_\sigma (\alpha\,\Delta_2 g + \Delta_1(g,\alpha))\,\frac{d\sigma}{r} + \int_\sigma \Delta_1(g,\xi)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma + P.$$

ove P rappresenta un integrale del contorno.

Poniamo ora

$$h_1 = h\,\Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi) \qquad g_1 = - h\,\alpha$$

e la (3) si potrà scrivere

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_\sigma h_1 \frac{d\sigma}{r} + \int_\sigma g_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + Q,$$

ove Q è integrale di contorno. Ponendo quindi

$$V_1 = \int_\sigma h_1 \frac{d\sigma}{r} \qquad W_1 = \int_\sigma g_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma$$

avremo

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial W_1}{\partial x} + Q_1 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial y} + Q_2 \end{aligned}$$

indicando sempre con le lettere finali degli integrali di contorno.

Ora potremo trasformare le derivate dei secondi membri delle (5) ancora mediante le formule (3) (4), e troviamo così

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int_\sigma (h_1 \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h_1, \xi)) \frac{d\sigma}{r} - \int_\sigma h_1 \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + Q_{11}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \int_\sigma (h_1 \Delta_2 \eta + \Delta_1 (h_1, \eta)) \frac{d\sigma}{r} - \int_\sigma h_1 \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + Q_{12}$$

e analogamente

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \int_\sigma (\alpha \Delta_2 g_1 + \Delta_1 (g_1, \alpha)) \frac{d\sigma}{r} + \int_\sigma \Delta_1 (g_1, \xi) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + P_{11}$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial y} = \int_\sigma (\beta \Delta_2 g_1 + \Delta_1 (g_1, \beta)) \frac{\partial\sigma}{r} + \int_\sigma \Delta_1 (g_1, \eta) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + P_{12}.$$

Queste formule permettono di assegnare immediatamente le espressioni delle discontinuità delle derivate seconde della fun-

zione potenziale V. Tenendo conto delle (5) ed adottando la notazione seguente per indicare la discontinuità di una funzione f

$$D[f] = f_{+n} - f_{-n},$$

cioè il salto che la funzione subisce nell'attraversare la superficie nel senso positivo della normale n, troviamo

$$(6)\qquad \begin{aligned} D\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right] &= -4\pi h_1 \alpha + 4\pi \Delta_1 (g_1, \xi) \\ D\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right] &= -4\pi h_1 \beta + 4\pi \Delta_1 (g_1, \eta) \end{aligned}$$

e formule analoghe si avrebbero per le altre quattro derivate seconde.

Per ridurre a forma più esplicita i secondi membri delle formule trovate, prendiamo come linee coordinate u, v della superficie le linee di curvatura. Siano R_1, R_2 i raggi principali di curvatura della superficie, contati positivamente quando la loro direzione (dal centro di curvatura verso la superficie) coincide con quella della normale positiva n, negativamente nel caso contrario. Si hanno allora le formule di Rodrigues

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial u} &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial \xi}{\partial u} \qquad & \frac{\partial \beta}{\partial u} &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial \eta}{\partial u} \qquad & \frac{\partial \gamma}{\partial u} &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} &= \frac{1}{R_2} \frac{\partial \xi}{\partial v} \qquad & \frac{\partial \beta}{\partial v} &= \frac{1}{R_2} \frac{\partial \eta}{\partial v} \qquad & \frac{\partial \gamma}{\partial v} &= \frac{1}{R_2} \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{aligned}$$

che possiamo anche scrivere, indicando con ds_1, ds_2 gli elementi lineari delle due linee di curvatura, cioè ponendo

$$ds_1 = \sqrt{E}\, du \qquad ds_2 = \sqrt{G}\, dv\, ;$$

e con $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ e $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$ i coseni di direzione delle tangenti a queste linee,

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} &= \frac{\alpha_1}{R_1} \qquad & \frac{\partial \beta}{\partial s_1} &= \frac{\beta_1}{R_1} \qquad & \frac{\partial \gamma}{\partial s_1} &= \frac{\gamma_1}{R_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} &= \frac{\alpha_2}{R_2} \qquad & \frac{\partial \beta}{\partial s_2} &= \frac{\beta_2}{R_2} \qquad & \frac{\partial \gamma}{\partial s_2} &= \frac{\gamma_2}{R_2}\, . \end{aligned}$$

Ciò posto troviamo subito

$$\Delta_1(h, \xi) = \frac{\partial h}{\partial s_1}\alpha_1 + \frac{\partial h}{\partial s_2}\alpha_2$$

$$\Delta_1(\alpha, \xi) = \frac{\alpha_1^2}{R_1} + \frac{\alpha_2^2}{R_2}.$$

Ora dalle formule precedenti abbiamo

$$-h_1\alpha + \Delta_1(g_1, \xi) = -\alpha h \Delta_2 \xi - 2\alpha\Delta_1(h, \xi) - h\Delta_1(\alpha, \xi),$$

quindi sostituendo troviamo

$$-h_1\alpha + \Delta_1(g_1, \xi) = -\alpha h \Delta_2 \xi - 2\alpha\left(\frac{\partial h}{\partial s_1}\alpha_1 + \frac{\partial h}{\partial s_2}\alpha_2\right) - \\ -\left(\frac{\alpha_1^2}{R_1} + \frac{\alpha_2^2}{R_2}\right)h.$$

Analogamente si trova

$$\Delta_1(g_1, \eta) = -\alpha\left(\frac{\partial h}{\partial s_1}\beta_1 + \frac{\partial h}{\partial s_2}\beta_2\right) - \left(\frac{\alpha_1\beta_1}{R_1} + \frac{\alpha_2\beta_2}{R_2}\right)h,$$

quindi sostituendo

$$h_1\beta + \Delta_1(g_1, \eta) = -\beta h \Delta_2 \xi - (\alpha_1\beta + \alpha\beta_1)\frac{\partial h}{\partial s_1} - \\ -(\alpha_2\beta + \alpha\beta_2)\frac{\partial h}{\partial s} - \left(\frac{\alpha_1\beta_1}{R_1} + \frac{\alpha_2\beta_2}{R_2}\right)h.$$

Ricordando infine le formole di Beltrami [1]

$$\Delta_2\xi = -\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \Delta_2\eta = -\beta\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \Delta_2\zeta = -\gamma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

e sostituendo nelle (6) troviamo come formule definitive per le

---

[1] BELTRAMI, *Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima*, " Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna ", S. II, T. VII.

discontinuità delle derivate seconde della funzione potenziale di superficie, qualunque sia l'orientazione degli assi x, y, z,

$$(8)\quad \begin{aligned} D\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right] &= 4\pi\, h\left(\frac{\alpha^2-\alpha_1^2}{R_1}+\frac{\alpha^2-\alpha_2^2}{R_2}\right)-8\pi\,\alpha\left(\frac{\partial h}{\partial s_1}\alpha_1+\frac{\partial h}{\partial s_2}\alpha_2\right)\\ D\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right] &= 4\pi\, h\left(\frac{\alpha\beta-\alpha_1\beta_1}{R_1}+\frac{\alpha\beta-\alpha_2\beta_2}{R_2}\right)-4\pi(\alpha_1\beta+\alpha\beta_1)\frac{\partial h}{\partial s_1}-\\ &\quad -4\pi(\alpha_2\beta+\alpha\beta_2)\frac{\partial h}{\partial s_2}\,. \end{aligned}$$

Con semplici sostituzioni circolari sulle lettere α, β, γ si possono avere le formule relative alle altre derivate seconde.

Salvo la forma ed il segno dei raggi di curvatura, queste formule coincidono con quelle date, senza dimostrazione, da C. Neumann nella Memoria citata.

Se ora supponiamo che l'asse z assuma la direzione della normale n nel punto di passaggio della superficie, e gli assi delle x, y quelle delle tangenti alle linee di curvatura s_1, s_2, avremo

$$ds_1 = dx \qquad\qquad ds_2 = dy$$

e le formule precedenti divengono

$$(9)\quad \begin{gathered} D\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right] = -4\pi\frac{h}{R_1} \qquad D\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] = -4\pi\frac{h}{R_2}\\ D\left[\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] = 4\pi\, h\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]\\ D\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right] = -4\pi\frac{\partial h}{\partial x} \qquad D\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right] = -4\pi\frac{\partial h}{\partial y}\\ D\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right] = 0\,. \end{gathered}$$

Queste formule coincidono con quelle date dal Poincaré nella *Théorie du Potentiel Newtonien*, pag. 252, salvo i segni dei due raggi di curvatura che sono presi in senso opposto.

La terza di queste è data anche dal Beltrami nella citata Memoria.

Esse risolvono completamente il problema della determina-

zione delle discontinuità delle derivate seconde della funzione potenziale newtoniana di superficie.

Il passaggio inverso dalle (9) alle (8) si potrebbe fare facilmente in base alle formule elementari, che legano le derivate di una funzione rispetto a due terne di coordinate cartesiane.

Sul problema dinamico dei rotismi epicicloidali.

Nota del Socio MODESTO PANETTI.

1. — Come è noto, si dicono epicicloidali i rotismi nei quali uno o più alberi sono retti da un porta-treno girevole intorno ad un asse permanente. Fissando il porta-treno, un rotismo epicicloidale si riduce ad ordinario, ed i due assi estremi della catena che lo costituisce si trasmettono il moto con un rapporto τ, dipendente soltanto dai raggi primitivi o dai numeri di denti delle ruote componenti.

Nel funzionamento epicicloidale invece il rapporto fra le velocità degli assi estremi dipende dalla velocità del porta-treno. Esiste quindi una relazione fra le velocità angolari ω_1 del 1° asse, ω_2 dell'ultimo, Ω del porta-treno.

Se gli assi sono paralleli questa relazione è algebrica e lineare, e si pone scrivendo

$$\Omega = a\omega_1 + b\omega_2\,, \tag{1}$$

dove a e b sono coefficienti, la cui somma uguaglia l'unità ed il cui quoziente vale il rapporto di trasmissione ordinario cambiato di segno

$$a + b = 1 \qquad \frac{a}{b} = -\tau. \tag{2}$$

Se dunque tale rapporto è positivo, cioè se nel rotismo, reso ordinario, i sensi delle rotazioni degli assi estremi sono concordanti, a e b avranno segni contrari: saranno invece dello stesso segno, necessariamente positivo, se il rapporto τ è negativo.

Nel 2° caso a e b sono entrambi compresi fra 0 ed 1. Nel 1° caso i loro valori assoluti possono essere comunque grandi, se τ è prossimo all'unità.

2. — Consideriamo ora le azioni applicate ai tre mobili nel funzionamento *ideale*, in cui nessuna dispersione di lavoro abbia luogo.

Sia M il momento dell'azione applicata al porta-treno rispetto al suo asse.

Siano M_1 ed M_2 i momenti delle azioni applicate alle ruote prima ed ultima del rotismo.

Per la ipotesi fatta e nel funzionamento a regime dev'essere uguale a zero la somma dei lavori eseguiti dalle azioni applicate al rotismo. Quindi

$$(3) \qquad M\Omega + M_1\omega_1 + M_2\omega_2 = 0.$$

Sostituendo ad Ω il suo valore e raggruppando i termini in ω_1 ed ω_2 risulta

$$\omega_1 (aM + M_1) + \omega_2 (aM + M_2) = 0,$$

e poichè nel funzionamento epicicloidale ω_1 ed ω_2 sono velocità affatto indipendenti, l'annullarsi della somma richiede che siano separatamente nulli i coefficienti delle due variabili. Si ha per conseguenza

$$(4) \qquad M_1 = -aM \qquad M_2 = -bM;$$

dunque: i momenti applicati ai due assi estremi del rotismo hanno valori determinati, indipendenti dalle loro velocità angolari: questi valori sono quelli stessi che si deducono nel caso speciale in cui uno dei due assi rimanga fermo e quindi i mobili del meccanismo sui quali le azioni applicate dall'esterno sviluppano lavoro si riducano a due: un asse-ruota ed il porta-treno.

3. — La ragione meccanica del fatto dimostrato nel precedente numero consiste nell'equilibrio dinamico del gruppo dei satelliti posti fra la prima e l'ultima ruota.

Questo equilibrio può sussistere per qualsiasi velocità angolare costante del loro moto relativo al porta-treno, non escluso il valore zero.

Dunque le relazioni fra i momenti applicati al sistema non vengono modificate dalla velocità dei satelliti e per conseguenza neppure dal rapporto di velocità fra gli assi estremi che da essa dipende.

Così, nel caso del differenziale delle automobili, il moto del satellite intorno al suo asse avviene sotto l'azione delle forze che gli trasmettono le due ruote coniche principali, e che si deducono dividendo i momenti ad esse applicati per i raggi primitivi corrispondenti.

Ma questi sono uguali: le reazioni suddette sono dunque M_1/R ed M_2/R: esse hanno uguale braccio di leva rispetto all'asse del satellite: devono quindi essere uguali: ossia

$$M_1 = M_2 .$$

Ora è questo appunto il risultato al quale conduce la trattazione generale del n. 2 quando nelle (4) si ponga $a = b = \frac{1}{2}$, come è il caso del differenziale.

4. — Dalle (4) si deduce ancora per somma e per divisione, tenuto conto delle (2)

$$(5) \qquad M_1 + M_2 = -M . \qquad \frac{M_1}{M_2} = -\tau :$$

la prima di queste uguaglianze è la condizione di equilibrio del rotismo considerato come un complesso rigido: la seconda è l'equazione che ne definisce il modo di funzionare come rotismo ordinario.

Entrambe si potevano dedurre applicando il principio che fra le condizioni di equilibrio di un sistema deformabile vi sono sempre quelle che corrispondono ad uno stato di vincolamento più completo, purchè non contradditorio ai legami originali.

Tali sono di fatto i sistemi che si ottengono irrigidendo il rotismo, ovvero fissandone il porta-treno.

5. — Si è riconosciuto che i momenti applicati ai due assi-ruota estremi hanno valori determinati in modo unico. Non si può dire altrettanto dei lavori corrispondenti

$$(6) \qquad M_1 \omega_1 = - a M \omega_1 \qquad M_2 \omega_2 = - b M \omega_2 ,$$

poichè le velocità ω_1 ed ω_2 possono variare arbitrariamente.

Se ci poniamo nel caso di un rotismo con un movente (il porta-treno) e due cedenti (gli assi-ruota estremi), e supponiamo il movente regolato per velocità costante

ω_1 potrà variare fra 0 ed $\frac{\Omega}{a}$

ed ω_2 varierà simultaneamente fra $\frac{\Omega}{b}$ e 0,

come si deduce dalla (1).

L'energia disponibile $M\Omega$, che giunge al meccanismo, si suddivide quindi in due parti di grandezza rispettiva modificabile entro i più larghi limiti, come una corrente per opera di un partitore spostabile.

Il mezzo meccanico atto a tale ufficio può essere un freno a fluido, capace di stabilire una relazione fra momento resistente e velocità sull'albero 1 al quale lo supponiamo applicato. Allora, essendo determinato il primo, lo è pure la seconda, e quindi anche il loro prodotto, cioè la potenza

$$a M \omega_1$$

assorbita dal freno.

6. — Si può pensare di valersi di questo mezzo per modificare durante la trasmissione la velocità dell'albero 2, facendola variare fra due valori estremi dei quali siasi prestabilito il rapporto n. Tali valori siano:

la velocità massima $\frac{\Omega}{b}$

e la velocità n volte più piccola $\omega_2' = \frac{\Omega}{nb}$.

Basterà modificare le caratteristiche del freno in modo che la velocità dell'asse-ruota 1 passi da 0 ad

$$\omega_1' = \frac{1}{a} (\Omega - b\omega_2') = \frac{n-1}{an} \Omega .$$

Il lavoro simultaneamente disponibile passerà dalla totalità del lavoro fornito al movente $M\Omega$ alla frazione di esso

$$-M_2\omega_2' = \frac{1}{n} M\Omega,$$

mentre l'altra parte

$$-M_1\omega_1' = \frac{n-1}{n} M\Omega$$

è assorbita dal freno.

QUALUNQUE *sia dunque il rotismo utilizzato, l'energia disponibile sull'albero a velocità regolabile sta a quella fornita al movente, come la velocità dell'albero sta alla massima che esso può raggiungere, bloccando l'albero frenato.*

È questa del resto una conseguenza diretta del fatto che i momenti resistenti hanno valori immutabili, dato il momento motore e il rapporto di trasmissione ordinario del rotismo.

Da essa discende che, se il lavoro assorbito dal freno non è utilizzabile, il sistema ci condanna ad una grave dispersione di energia, appena la variazione nella velocità dell'albero resistente è sensibilmente grande. Non è dunque possibile applicarlo vantaggiosamente come mezzo per risolvere il problema della trasmissione del lavoro con rapporto variabile di velocità.

Sul poligono regolare di 17 lati.

Nota di GIOVANNI VACCA.

I. — Dopochè GAUSS nel 1801 ebbe dimostrata la costruibilità e l'effettiva costruzione colla riga e col compasso di un poligono regolare di 17 lati, numerosi scrittori cercarono di semplificare la sua dimostrazione.

Molti di questi tentativi sono raccolti in numerose pubblicazioni (1).

È però passata inosservata una dimostrazione semplicissima, attribuita ad AMPÈRE, e pubblicata da E. CATALAN nei suoi *Théorèmes et problèmes de Géométrie* (2). Questa dimostrazione può considerarsi come *puramente geometrica* (3), ed assai elementare, tanto da potersi esporre in tutti i suoi passi col puro linguaggio Euclideo.

Credo quindi utile esporre in forma nuova e più semplice la dimostrazione di Ampère, facendola poi seguire da alcune considerazioni su altri poligoni regolari, le quali potranno forse dar adito ad una semplificazione della teoria generale (4).

(1) Notevoli tra queste le: *Questioni riguardanti la geometria elementare*, di F. ENRIQUES, Bologna, 1900, e 1913.

(2) Cfr. la terza edizione, Paris, 1858, pp. 171-174, 200-203.

(3) Mi sembra quindi non possa più ripetersi l'affermazione: " *non si conosce una costruzione del 17-gono ottenuta con pure considerazioni geometriche* " (nell'opera sopra citata a pag. 403 dell'edizione del 1900; la stessa affermazione è ripetuta nell'edizione del 1913). Si confronti pure A. PADOA, *Poligoni regolari di 34 lati*, " Boll. di Matematica ", Bologna, 1903, n. 1.

(4) Che una tale semplificazione sia possibile fu dimostrato in uno scritto profondo ed acuto di S. REALIS, *De la résolution algébrique de l'équation $x^p - 1 = 0$, quand l'exposant p est un nombre premier.* " Nouv. Annales de Math. ", tome II, Paris, 1843, pp. 5-16, 147-156.

II. **Costruzione del poligono regolare di 17 lati.** — In un circolo di raggio 1 sia inscritto un eptadecagono regolare: siano 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 nove suoi vertici consecutivi, e sia A il punto del circolo diametralmente opposto al vertice 0.

Ci proponiamo di calcolare le lunghezze delle corde $A1$, $A2$, ..., $A8$, che più brevemente (1) indicheremo con $1^\cdot$, $2^\cdot$, $3^\cdot$, ..., $7^\cdot$, $8^\cdot$.

Se consideriamo anche le lunghezze delle otto corde 01, 02, ..., 08 si ha ovviamente:

$$\text{(M)}\quad \begin{array}{l} 1^\cdot \times 01 = 02,\ 2^\cdot \times 02 = 04,\ 3^\cdot \times 03 = 06,\ 4^\cdot \times 04 = 08, \\ 5^\cdot \times 05 = 07,\ 6^\cdot \times 06 = 05,\ 7^\cdot \times 07 = 03,\ 8^\cdot \times 08 = 01. \end{array}$$

(Queste relazioni esprimono ciascuna in due modi diversi l'area di rettangoli).

Esistono poi altre 28 relazioni tra le 8 corde $1^\cdot$, $2^\cdot$, ..., $8^\cdot$, le quali tutte si ottengono decomponendo i loro 28 prodotti due a due per mezzo del teorema di Tolomeo (2). Esse sono:

$$\text{(N)}\quad \begin{array}{llll} 1^\cdot 8^\cdot = 7^\cdot - 8^\cdot, & 1^\cdot 7^\cdot = 6^\cdot + 8^\cdot, & 1^\cdot 6^\cdot = 5^\cdot + 7^\cdot, & 1^\cdot 5^\cdot = 4^\cdot + 6^\cdot, \\ 2^\cdot 8^\cdot = 6^\cdot - 7^\cdot, & 2^\cdot 7^\cdot = 5^\cdot - 8^\cdot, & 2^\cdot 6^\cdot = 4^\cdot + 8^\cdot, & 2^\cdot 5^\cdot = 3^\cdot + 7^\cdot, \\ 3^\cdot 8^\cdot = 5^\cdot - 6^\cdot, & 3^\cdot 7^\cdot = 4^\cdot - 7^\cdot, & 3^\cdot 6^\cdot = 3^\cdot - 8^\cdot, & 3^\cdot 5^\cdot = 2^\cdot + 8^\cdot, \\ 4^\cdot 8^\cdot = 4^\cdot - 5^\cdot, & 4^\cdot 7^\cdot = 3^\cdot - 6^\cdot, & 4^\cdot 6^\cdot = 2^\cdot - 7^\cdot, & 4^\cdot 5^\cdot = 1^\cdot - 8^\cdot, \\ 5^\cdot 8^\cdot = 3^\cdot - 4^\cdot, & 5^\cdot 7^\cdot = 2^\cdot - 5^\cdot, & 5^\cdot 6^\cdot = 1^\cdot - 6^\cdot. & \\ 6^\cdot 8^\cdot = 2^\cdot - 3^\cdot, & 6^\cdot 7^\cdot = 1^\cdot - 4^\cdot, & & \\ 7^\cdot 8^\cdot = 1^\cdot - 2^\cdot, & & & \\ & 1^\cdot 4^\cdot = 3^\cdot + 5^\cdot, & 1^\cdot 3^\cdot = 2^\cdot + 4^\cdot, & 1^\cdot 2^\cdot = 1^\cdot + 3^\cdot. \\ & 2^\cdot 4^\cdot = 2^\cdot + 6^\cdot, & 2^\cdot 3^\cdot = 1^\cdot + 5^\cdot, & \\ & 3^\cdot 4^\cdot = 1^\cdot + 8^\cdot, & & \end{array}$$

Queste relazioni si possono condensare nelle due formole:

$$\begin{array}{lll} r^\cdot s^\cdot = (s-r)^\cdot + (r+s)^\cdot & \text{dove } r < s, & r+s \leqq 8 \\ r^\cdot s^\cdot = (s-r)^\cdot - (17-r-s)^\cdot & \quad "\qquad\quad " & r+s > 8. \end{array}$$

(1) Volendo adoperare le notazioni trigonometriche, si ha:

$$r^\cdot = 2\cos(r\pi/17),\ \text{dove } r = 1,\ 2,\ \ldots,\ 8$$

(2) ovvero per mezzo della formola:

$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b).$$

Dalle relazioni (M), moltiplicando membro a membro, si ha subito:

$$1^{\cdot}2^{\cdot}3^{\cdot}4^{\cdot}5^{\cdot}6^{\cdot}7^{\cdot}8^{\cdot} = 1.$$

Ed inoltre: $1^{\cdot}2^{\cdot}4^{\cdot}8^{\cdot} = 1$;

quindi anche: $3^{\cdot}5^{\cdot}6^{\cdot}7^{\cdot} = 1$.

Scriviamo queste due ultime relazioni così:

$$1^{\cdot}4^{\cdot} \times 2^{\cdot}8^{\cdot} = 1 ; \qquad 3^{\cdot}5^{\cdot} \times 6^{\cdot}7^{\cdot} = 1,$$

e decomponiamo i prodotti binari per mezzo delle (N). Avremo:

$$\text{(A)} \quad (3^{\cdot} + 5^{\cdot}) \times (6^{\cdot} - 7^{\cdot}) = 1 ; \qquad (2^{\cdot} + 8^{\cdot}) \times (1^{\cdot} - 4^{\cdot}) = 1.$$

Sviluppiamo il prodotto della seconda eguaglianza, ed applichiamo ancora ai prodotti binari le (N). Avremo:

$$1^{\cdot} - 2^{\cdot} + 3^{\cdot} - 4^{\cdot} + 5^{\cdot} - 6^{\cdot} + 7^{\cdot} - 8^{\cdot} = 1,$$

che scriveremo:

$$\text{(B)} \quad [(3^{\cdot} + 5^{\cdot}) - (6^{\cdot} - 7^{\cdot})] - [(2^{\cdot} + 8^{\cdot}) - (1^{\cdot} - 4^{\cdot})] = 1.$$

Ma il prodotto:

$$\text{(C)} \quad [(3^{\cdot} + 5^{\cdot}) - (6^{\cdot} - 7^{\cdot})] \times [(2^{\cdot} + 8^{\cdot}) - (1^{\cdot} - 4^{\cdot})] = 4,$$

ciò che si vede sviluppando i sedici prodotti binari del primo membro, sostituendo ad ognuno i valori dati dalle (N), ed osservando che il risultato è il quadruplo del primo membro della (B).

Dalla (B) e dalla (C) si calcolano subito:

$$\text{(D)} \quad \begin{array}{l} (3^{\cdot} + 5^{\cdot}) - (6^{\cdot} - 7^{\cdot}) = (1 + \sqrt{17})/2 \\ (2^{\cdot} + 8^{\cdot}) - (1^{\cdot} - 4^{\cdot}) = (-1 + \sqrt{17})/2. \end{array}$$

Dalle (A) e dalle (D) si calcolano (1) collo stesso metodo le differenze:

$$6^{\cdot} - 7^{\cdot} = [\sqrt{(34 + 2\sqrt{17})} - \sqrt{17} - 1]/4$$
$$1^{\cdot} - 4^{\cdot} = 6^{\cdot}7^{\cdot} = [\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} - \sqrt{17} + 1]/4$$

e da queste due ultime relazioni si hanno subito i valori delle corde $6^{\cdot}$ e $7^{\cdot}$, date le quali è pure noto un lato del poligono regolare di 17 lati, cioè il lato 67. Come dovevasi fare.

(1) Dalle stesse (A) e (D) si possono anche calcolare le altre sei corde $1^{\cdot}, 2^{\cdot}, 3^{\cdot}, 4^{\cdot}, 5^{\cdot}, 8^{\cdot}$. In particolare $8^{\cdot}$ è il lato del poligono regolare di 34 lati.

III. **Altri poligoni regolari.** — Se in un circolo di raggio 1 è inscritto un poligono regolare di $2n+1$ lati; se $0, 1, 2, \ldots, n$ sono $n+1$ vertici consecutivi; se indichiamo con A il punto del circolo diametralmente opposto al vertice 0, ed indichiamo con $1^\cdot, 2^\cdot, \ldots, n^\cdot$, le n corde $A1, A2, \ldots, An$, si hanno (1) le relazioni:

$$1^\cdot 2^\cdot 3^\cdot \ldots n^\cdot = 1; \qquad 1^\cdot - 2^\cdot + 3^\cdot - 4^\cdot + \ldots \pm n^\cdot = 1.$$

Valgono infine altresì $n(n-1)/2$ relazioni che si possono riassumere nelle due:

$$r^\cdot s^\cdot = (s-r)^\cdot + (r+s)^\cdot \qquad \text{dove } r < s,\ r+s \leqq n$$
$$r^\cdot s^\cdot = (s-r)^\cdot - (2n+1-r-s)^\cdot \qquad \text{"} \quad \text{"},\ r+s > n.$$

Applicando queste relazioni si ha con semplici sostituzioni successive:

a) Pentagono regolare: $1^\cdot 2^\cdot = 1$; $1^\cdot - 2^\cdot = 1$;

quindi $1^\cdot$ e $2^\cdot$ sono le due radici della: $x^2 - x - 1 = 0$.

b) Eptagono regolare:

$1^\cdot 2^\cdot 3^\cdot = 1$; $\quad 1^\cdot - 2^\cdot + 3^\cdot = 1$; $\quad -1^\cdot 2^\cdot - 2^\cdot 3^\cdot + 1^\cdot 3^\cdot = -2$;

quindi $1^\cdot, -2^\cdot, 3^\cdot$ sono le radici (2) della:

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

c) Ennagono regolare:

$1^\cdot 2^\cdot 3^\cdot 4^\cdot = 1$; $\quad 1^\cdot 2^\cdot 4^\cdot = 1$; $\quad$ quindi $3^\cdot = 1$ (come è evidente);
$1^\cdot - 2^\cdot - 4^\cdot = 0$; $\quad 1^\cdot 2^\cdot + 2^\cdot 4^\cdot - 1^\cdot 4^\cdot = -3$;

quindi $1^\cdot, -2^\cdot, -4^\cdot$ sono le radici (3) della:

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

(1) La seconda di queste relazioni si può dimostrare per es. ricorrendo alle relazioni: $r^\cdot = 2\cos[r\pi/(2n+1)]$, ed esprimendo i coseni per mezzo degli esponenziali.

(2) Questa equazione, per la costruzione dell'eptagono, è stata scoperta da Lodovico Ferrari, come riferisce G. Cardano nel suo *Opus novum de proportionibus*, Basilea, 1570, p. 55:

1 cu. p: 1 æquantur 1 quad. p: 2 pos.

(3) Questa equazione, per la costruzione dell'ennagono, è stata scoperta da Scipione Ferro; cfr. G. Cardano, ibid., p. 99.

d) Poligono regolare di 11 lati:

$$1^\cdot 2^\cdot 3^\cdot 4^\cdot 5^\cdot = 1 ; \qquad 1^\cdot - 2^\cdot + 3^\cdot - 4^\cdot + 5^\cdot = 1 ;$$

e con breve calcolo analogo ai precedenti si hanno le cinque corde $1^\cdot$, $-2^\cdot$, $3^\cdot$, $-4^\cdot$, $5^\cdot$ come radici della:

$$x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0.$$

e) Poligono regolare di 13 lati. Si hanno le due relazioni:

$$(1^\cdot + 3^\cdot - 4^\cdot) - (2^\cdot - 5^\cdot + 6^\cdot) = 1 ;$$
$$(1^\cdot + 3^\cdot - 4^\cdot) \times (2^\cdot - 5^\cdot + 6^\cdot) = 3 .$$

Quindi:

$$1^\cdot + 3^\cdot - 4^\cdot = (1 + \sqrt{13})/2 ; \qquad 2^\cdot - 5^\cdot + 6^\cdot = (\sqrt{13} - 1)/2.$$

D'altra parte con brevi calcoli:

$$1^\cdot 3^\cdot 4^\cdot = (3 + \sqrt{13})/2 ; \qquad 1^\cdot 3^\cdot - 3^\cdot 4^\cdot - 1^\cdot 4^\cdot = -1.$$

Quindi $1^\cdot$, $3^\cdot$, $-4^\cdot$, sono le radici dell'equazione di terzo grado:

$$x^3 - x^2 (1 + \sqrt{13})/2 - x + (3 + \sqrt{13})/2 = 0.$$

Dai precedenti esempi non appare però la ragione della scelta del gruppo di radici che conduce alle equazioni più semplici. Finora la teoria generale più elementare che si conosca è quella esposta da S. Realis.

Roma, Gennaio 1916.

Saggio sulla Costante di aberrazione.

Nota II di GIOVANNI BOCCARDI.

I.

L'anno passato pubblicai in questi *Atti* una Nota, in cui, dopo considerazioni generali sulla determinazione della costante dell'aberrazione annua, esponevo il metodo da me ideato per dedurre il valore di quella costante dalle osservazioni sistematiche di latitudine da noi eseguite in Pino Torinese.

Poggiandomi sul fatto accertato che le variazioni della latitudine hanno un periodo di 429 giorni (oltre ad altri più brevi) mi servii di 648 osservazioni fatte sulle stelle δ e α *Cygni* in due consecutivi periodi di Chandler. In questa Nota aggiungo le osservazioni fatte in un terzo periodo di Chandler, con che la presente determinazione poggia su 1004 osservazioni fatte dal 2 giugno 1912 al 16 gennaio 1916. L'intervallo fra queste date abbraccia un mese circa dippiù del periodo di Chandler, ma questa maggiore estensione mi è imposta dal fatto che io fo le medie dei valori ottenuti per latitudine (φ) in ogni rivoluzione lunare, per eliminare la variazione della latitudine a corto periodo che vi corrisponde. I valori φ, media dei risultati delle osservazioni fatte nelle singole rivoluzioni lunari, che si paragonano con φ_0 (valore della latitudine riferendosi al polo medio) corrispondono presso a poco all'istante medio di ognuna di quelle rivoluzioni ed i periodi di Chandler vanno contati da questi istanti medii.

Il numero grandissimo di osservazioni (col metodo di Struve) poggiate ognuna, in media, su i passaggi a 13 fili e l'errore medio molto piccolo di una sola osservazione dànno affidamento che questo secondo saggio sia da ritenere di notevole valore.

L'estensione (1324 giorni) delle osservazioni adoperate ci permette adesso di avere un buon valore di φ_0, perchè in sì lungo lasso di tempo il polo istantaneo ha eseguito più di tre spire. Naturalmente ulteriori osservazioni ci condurranno ad un valore più esatto di φ_0; ma non sarà esagerato il ritenere che un errore di 0″,01 sull'attuale nostro φ_0 è poco ammissibile.

Beninteso che deducendo noi la latitudine con due stelle, ognuna delle quali ha inevitabilmente un piccolo errore sulla declinazione di cui ci serviamo, che è desunta dal Catalogo fondamentale di Newcomb, per ognuna delle nostre stelle otteniamo un valore di φ_0 leggermente diverso dagli altri. Riferisco qui i valori di φ_0 per δ ed α *Cygni*, ottenuti successivamente con le osservazioni comprese nei tre successivi periodi di Chandler, giusta quello che dicemmo qui sopra riguardo alle rivoluzioni lunari.

δ *Cygni*.

Periodi	N° di osservazioni	Valori di φ_0
1°	136	45°.2′.16″,208
2°	161	„ 16 ,163
3°	173	„ 16 ,221
	Medio (senza pesi)	16 ,197

α *Cygni*.

Periodi	N° di osservazioni	Valori di φ_0
1°	154	45°.2′.16″,324
2°	197	„ 16 ,256
3°	183	„ 16 ,312
	Medio (senza pesi)	16 ,294

La differenza (meno di 0″1) fra i valori di φ_0 per δ ed α *Cygni* non ha nulla di singolare.

Evidentemente se si facesse la media dei valori di φ_0 ottenuti con queste due stelle e con le altre due β *Aurigae* e ψ *Ursae Majoris* otterremo un valore della latitudine di Pino, al polo medio, con altissima precisione; ma nell'attuale ricerca, secondo il mio metodo, bisogna per ognuna delle due stelle, δ

e α *Cygni*, formare i termini noti delle equazioni di condizione, facendo la differenza fra i valori di φ per le singole rivoluzioni lunari e φ_0, quelli e queste relativi ad ognuna delle due stelle.

Anche in questo secondo saggio non ho creduto dover badare al piccolo errore residuale su i moti propri in declinazioni, già per sè stessi tanto piccoli. Basta dare una occhiata ai valori di φ_0 ottenuti per ognuna delle due stelle nei successivi periodi, per convincersi che non vi è aumento nè diminuzione sistematica nei valori di δ su i quali sono poggiati i φ_0. Anzi è sorprendente il riconoscere per le due stelle presso a poco le stesse fluttuazioni nei successivi valori di φ_0, il che è certamente dovuto al fatto che, se è vero che le spire percorse dal polo istantaneo della Terra si chiudono ogni 14 mesi, l'ampiezza e la disposizione delle spire, relativamente al polo medio, variano da un periodo all'altro.

Riguardo alla parallasse annua, già dissi che essa è praticamente nulla per le nostre quattro stelle, per modo che sono autorizzato a considerare i $\varphi - \varphi_0$ come affetti, oltre che dai piccolissimi errori di osservazione, soltanto dalle variazioni della latitudine (non a breve periodo) e dalla imperfezione del valore della costante di aberrazione.

II.

Poichè il materiale di osservazione raccolto in quest'ultimo periodo si aggiunge a quello utilizzato nel mio primo saggio, è inutile riprodurre qui le equazioni di condizione ivi date: mi limito quindi a dare nella stessa forma che nella nota precedente le nuove 16 equazioni di condizione da aggiungersi alle 32 ivi pubblicate. Invece dei valori della longitudine del Sole, stimo meglio dare quelli della detta longitudine più B, cioè $\odot + B$. Però essendo adesso i valori di φ_0 e φ'_0 (per δ ed α *Cygni*) leggermente diversi da quelli della I Nota [1], i valori di $\varphi - \varphi_0$, $\varphi' - \varphi'_0$ ed n sono leggermente diversi per le 32 equazioni pre-

[1] I valori di φ_0 e φ_0' qui adoperati sono i medî di quelli dei tre periodi, dati a pag. 519.

cedenti, quindi li riferisco dopo il quadro delle 16 equazioni dell'ultimo periodo.

Riguardo ai pesi, come nel primo saggio, ho dato il peso $\frac{1}{2}$ a quei soli valori di $\varphi - \varphi_0$ che poggiavano sopra un numero di osservazioni di gran lunga inferiore agli altri, il che ha avuto luogo due sole volte in quest'ultimo periodo.

Nel quadro seguente le date corrispondono agli istanti degli apogei lunari. Ripeto in questa Nota che i coefficienti $b \sin(\odot + B)$ si riferiscono ad una stella fittizia, con ascensione retta e declinazione eguali alla media di quelle di δ ed α *Cygni*. I valori φ e φ' della latitudine, corrispondenti alle epoche T, sono genuinamente quelli ottenuti rispettivamente per δ ed α *Cygni*, mentre i termini noti n sono eguali ad

$$\frac{1}{2}\,[(\varphi - \varphi_0) + (\varphi' - \varphi_0')].$$

Nella colonna C sono scritti i valori numerici dei coefficienti $b \sin(\odot + B)$.

(Vedi i due quadri a pag. seg.)

III.

Quanto a dedurre il valore della correzione Δf al valore della costante di aberrazione $f = 20''.47$ adottato nelle effemeridi che abbiamo calcolato espressamente per le nostre stelle, farò osservare diverse cose.

1° Innanzi tutto, se non esistesse la variazione delle latitudini, i valori φ e φ' per ogni rivoluzione lunare sarebbero affetti soltanto dal piccolo errore di f, ed i valori φ_0 e φ'_0 dedotti dall'insieme delle osservazioni in un periodo di molti anni interi, sarebbero esenti dall'errore di f, e quindi su i termini noti

$$\frac{1}{2}\,[(\varphi - \varphi_0) + (\varphi' - \varphi_0')]$$

rimarrebbe soltanto l'errore di f; sicchè coi rispettivi coefficienti essi potrebbero darci il valore di Δf. Ma come i coefficienti

Quadro per l'ultimo periodo.

		T	$\odot + B$	log $[b \sin(\odot + B)]$	φ	φ'	C	n
1914	Novembre	15,895	118°.30′	9,90341	15″,994	16″,207	+ 0,8006	— 0″,145
„	Dicembre	13,250	146 .13	9,70463	15 ,882	16 ,114	+ 0,5066	— 0 ,247
1915	Gennaio	9,959	174 .26	8,94631	15 ,778	15 ,915	+ 0,0884	— 0 ,399
„	Febbraio	6,813	202 .45	9ⁿ,24588 ½	15 ,915	15 ,937	— 0,1761	— 0 ,160
„	Marzo	6,646	230 .47	9ⁿ,54766 ½	16 ,019	15 ,971	— 0,3529	— 0 ,125
„	Aprile	3,355	258 .18	9ⁿ,95040	15 ,977	16 ,021	— 0,8921	— 0 ,247
„	„	30,792	285 . 8	9ⁿ,94419	16 ,183	16 ,217	— 0,8794	— 0 ,045
„	Maggio	27,979	311 .21	9ⁿ,83498	16 ,325	16 ,443	— 0,6839	+ 0 ,138
„	Giugno	24,250	337 .25	9ⁿ,54388	16 ,279	16 ,476	— 0,3499	+ 0 ,132
„	Luglio	21,792	3 .42	9ⁿ,76930	16 ,327	16 ,528	+ 0,5879	+ 0 ,182
„	Agosto	18,521	30 .15	9,66176	16 ,430	16 ,598	+ 0,4589	+ 0 ,269
„	Settembre	15,321	57 .10	9,88393	16 ,478	16 ,627	+ 0,7655	+ 0 ,307
„	Ottobre	13,083	84 .27	9,95748	16 ,408	16 ,570	+ 0,9067	+ 0 ,243
„	Novembre	9,729	112 . 2	9,92658	16 ,212	16 ,442	+ 0,8445	+ 0 ,082
„	Dicembre	7,027	139 .37	9,77103	16 ,196	16 ,371	+ 0,5902	+ 0 ,038
1916	Gennaio	3,125	167 .13	9,30443	16 ,201	16 ,346	+ 0,2016	+ 0 ,028

Valori di $\varphi - \varphi_0$, $\varphi' - \varphi_0'$ e termini noti n per le 32 equazioni della I Nota, modificati dai nuovi valori di φ_0 e φ_0'.

$\varphi - \varphi_0$	$\varphi' - \varphi_0'$	n	$\varphi - \varphi_0$	$\varphi' - \varphi_0'$	n
+ 0'',159	+ 0'',094	+ 0'',126	— 0'',096	+ 0'',023	— 0'',037
— 0,107	— 0,129	— 0,118	— 0,080	— 0,027	— 0,053
— 0,112	— 0,045	— 0,079	— 0,226	— 0,071	— 0,149
+ 0,043	+ 0,244	+ 0,143	— 0,224	— 0,144	— 0,184
+ 0,219	+ 0,225	+ 0,222	— 0,246	— 0,263	— 0,254
+ 0,149	+ 0,330	+ 0,240	— 0,264	— 0,072	— 0,168
+ 0,074	+ 0,111	+ 0,092	— 0,282	— 0,347	— 0,315*
0,000	— 0,108	— 0,054	— 0,254	— 0,308	— 0,281
— 0,182	— 0,404	— 0,293*	+ 0,090	— 0,092	— 0,001
— 0,365	— 0,464	— 0,415*	+ 0,283	+ 0,137	+ 0,210
— 0,085	— 0,122	— 0,103	+ 0,068	+ 0,186	+ 0,127
+ 0,097	+ 0,019	+ 0,058	+ 0,042	+ 0,257	+ 0,149
+ 0,110	+ 0,137	+ 0,128	+ 0,130	+ 0,325	+ 0,228
+ 0,090	+ 0,065	+ 0,077	+ 0,068	+ 0,148	+ 0,108
— 0,051	+ 0,035	— 0,008	+ 0,060	+ 0,185	+ 0,122
— 0,022	+ 0,043	+ 0,011	— 0,034	+ 0,037	+ 0,002

N.B. I valori notati con * sono quelli ai quali nella I Nota e nella II si è dovuto dare peso $\frac{1}{2}$ in causa del piccolo numero di osservazioni su cui riposano.

sono per sei mesi positivi e per sei negativi, a fine di mettersi in condizioni vantaggiose per la determinazione di Δf, si potrebbe cambiare il segno ai coefficienti negativi e parimenti ai rispettivi termini noti. Con ciò si avrebbe come coefficiente di Δf nella equazione finale un grosso numero e nel secondo membro un termine noto molto piccolo. Il valore di Δf ne verrebbe determinato con grande precisione.

Ma la variazione delle latitudini (a non breve periodo) [1] interviene e, per tenerne conto, nel mio metodo bisogna ricorrere all'artifizio di raggruppare le osservazioni per periodi di Chandler, in modo che tanto nel primo saggio quanto nel presente si sono prese osservazioni corrispondenti ad un numero esatto di quei periodi. Ritenuto che nell'insieme dei termini noti n si abbia allora compenso ed eliminazione dell'effetto della variazione delle latitudini, bisognerebbe addizionare i coefficienti coi propri segni, donde seguirebbe un piccolo coefficiente per Δf nella equazione finale e quindi una determinazione di Δf in cattive condizioni.

Però fortunatamente in questo secondo saggio anche questo metodo (teoricamente rigoroso, ma in pratica non favorevole) si è presentato accettabile, chè l'equazione finale è risultata

$$+4{,}840 \times \Delta f = +0'',089$$

donde

$$\Delta f = +0'',0184 \tag{1}$$

ed il nuovo valore di f eguale a

$$20'',488.$$

La determinazione di Δf si è fatta in questo caso in condizioni favorevoli ed il valore 20'',488 per la costante di aberrazione meriterebbe fiducia.

[1] Di quella a breve periodo si tien conto con fare le medie dei valori di φ entro una rivoluzione lunare.

2° Altri però potrebbe ritenere che il compenso fra i termini noti e l'annullamento dell'effetto della variazione della latitudine si possano conseguire egualmente col determinare la correzione Δf separatamente con le equazioni a coefficienti positivi e con quelle a coefficienti negativi. La media dei valori ottenuti così per Δf sarebbe libera dall'effetto delle variazioni di φ. E questo sarà tanto più giusto quanto più si moltiplicheranno i periodi di 14 mesi che si mettono in conto. L'aberrazione cambia segno di 6 in 6 mesi, la latitudine istantanea di 7 in 7 mesi; per la prima si ha compenso esatto fra le variazioni di 6 in 6 mesi, per la seconda le oscillazioni di φ in più o in meno rispetto a φ_0 non sono eguali. Ove si rifletta che nelle 1004 osservazioni da me messe in conto, le quali abbracciano oramai 1324 giorni, si presentano 4 volte i coefficienti positivi e 4 i negativi, si giungerà forse alla convinzione che esista il compenso, relativamente alle variazioni di φ, anche separatamente nei termini noti corrispondenti a quelli ed a questi. Ed allora il valore di Δf si deve potere ottenere separatamente dalle equazioni con coefficienti positivi e da quelle con coefficienti negativi. L'accordo maggiore o minore fra i due risultati potrà essere una prova della legittimità del procedimento.

Applicando questo metodo a tutte le 48 equazioni di condizione risulta che 26 di esse hanno positivo il coefficiente di Δf e 22 negativo.

La somma $\Sigma C +$ dei coefficienti positivi moltiplicata per Δf va eguagliata alla somma $\Sigma n \pm$ dei termini noti corrispondenti, i quali sono ora positivi ora negativi. Risulta cioè:

$$\begin{matrix} \Sigma C + & & \Sigma n \pm \\ +15{,}8218 \times \Delta f & = & +0'',716 \end{matrix}$$

donde

$$\Delta f = +0'',0453. \tag{2}$$

Similmente dalle equazioni a coefficiente negativo si ha

$$\begin{matrix} \Sigma C - & & \Sigma n \pm \\ -10{,}9817 \times \Delta f & = & -0'',627 \end{matrix}$$

donde

$$\Delta f = + 0'',0571. \tag{3}$$

L'accordo fra i valori (2) e (3) è molto soddisfacente avuto riguardo all'argomento di cui si tratta e depone in favore delle ipotesi del compenso nelle variazioni di φ negli n corrispondenti ai C positivi ed ai negativi, separatamente. Combinare (2) e (3) coi rispettivi pesi equivale a cambiare il segno ai due membri della equazione risultante pei coefficienti negativi ed addizionarla con l'altra; viene così

$$+ 26,8034 \times \Delta f = + 1'',343$$

donde

$$\Delta f = + 0'',0501. \tag{4}$$

IV.

Rimane adesso di scegliere o il valore (1) o l'altro (4). Teoricamente forse si darebbe maggior fiducia al primo; ma per ragioni facili a comprendersi io penso che il meglio si possa fare è di far la media dei valori (1) e (4) dando loro peso eguale.

Risulta così

$$\Delta f = + 0'',03425$$

e finalmente

$$f = \mathbf{20'',504}.$$

Quale sarà l'errore medio di questo valore? Col criterio da me esposto nel primo saggio si andrebbe ad un errore medio di $\pm 0'',00326$; ma, a quel modo che allora io esposi poca fiducia in errori presunti, i quali poi risultano di gran lunga inferiori agli effettivi, e mi attenni a $\pm 0'',01$, così in questo secondo saggio non oso portare così alto le pretese e ritengo che un errore effettivo di $\pm 0'',01$ sia poco probabile sul valore cui son giunto, $20'',504$.

Col fatto nella I Nota avevo ottenuto il valore 20",507. La differenza fra 20",504 (valore certamente più vicino al vero, per ragioni ovvie) e 20",507 è di appena 0",003.

Mi rimane da dare una spiegazione riguardo al peso $\frac{1}{2}$ dato a 5 equazioni su 48. La presente determinazione di una costante astronomica non è fatta nelle condizioni di Le Verrier o di Newcomb, per esempio, i quali hanno lavorato su materiale di osservazione raccolto da altri; per me si avvera il caso di G. Struve o di Bessel, i quali lavorarono su proprie osservazioni. Solo chi osserva può dire qual peso si debba dare alle proprie osservazioni, perchè egli conosce le condizioni in cui osservò. Per parte mia, da quattro anni che proseguo le osservazioni sulle nostre quattro stelle, credo di avere acquistata tale conoscenza del metodo, dell'istrumento e delle condizioni locali, che anche prima di fare una osservazione, dal solo stato della atmosfera posso prevedere come risulterà l'osservazione stessa.

È singolare che il valore 20".50 cui giungo sia proprio quello di partenza assunto da G. Struve, il quale, dopo tante osservazioni e calcoli, lo cambiò nell'altro 20",445 non certo migliore.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

·»✕«·

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 13 Febbraio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: De Sanctis, Ruffini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

Scusano la loro assenza i Soci Carle e D'Ercole.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza del 30 gennaio u. s.

Il Presidente S. E. Boselli presenta una pubblicazione, inviata in omaggio all'Accademia dall'Avv. B. Mattiauda e intitolata *Il nome di Savona e i nomi topografici di origine ligure. Esplorazioni archeologiche nel campo della parola e dell'arte preistorica* (Savona, Tip. Ricci, 1916); ne discorre collegando questa con altre pubblicazioni del Mattiauda, ne rileva le idee principali e accenna alle indagini proprie dell'autore.

Il Socio Einaudi presenta per gli *Atti* una sua *Nota* dal titolo *Di un teorema intorno alla nazionalizzazione della produzione*, esponendone per sommi capi il contenuto.

Raccoltasi quindi la Classe in seduta privata, procede alla nomina della Commissione per il premio Gautieri di Storia (triennio 1913-1915), da conferirsi nel corrente anno, e riescono eletti i Soci De Sanctis, Boselli e Patetta.

LETTURE

Di un teorema intorno alla nazionalizzazione della produzione.

Nota del Socio LUIGI EINAUDI.

I.

Già da qualche anno innanzi allo scoppio della guerra presente, erasi iniziato un movimento di idee che vorrebbe portare alla " nazionalizzazione " della scienza e più della politica economica italiana. Come è naturale, questa corrente di pensiero si è andata rafforzando dopo la entrata in guerra dell'Italia; ed ha avuto manifestazioni varie, ricche sempre di entusiasmo, non

ugualmente rigorose per dirittura di ragionamento persuasivo. Sovratutto sembra a me che sia stata manchevole la elaborazione scientifica della teoria del " nazionalismo economico „: nè avrei potuto perciò, per mancanza di materia prima, farla oggetto di una Nota presentata a questa Accademia, dinnanzi alla quale è lecito discorrere soltanto di problemi aventi carattere scientifico. Non vuolsi, dicendo questo, affermare che la teoria del nazionalismo economico debba essere giudicata soltanto con criteri economici; poichè, essendo il problema nel tempo stesso politico e militare ed economico e sociale, esso deve essere risoluto con criteri complessi dedotti dalle varie scienze, le quali assumono a proprio oggetto i diversi aspetti del fatto umano. Si osserva soltanto che non giova alla solidità di una dottrina *complessa*, impostarla su ragionamenti economici errati; poichè le illazioni, che se ne ottengono, rimangono prive di valore sia dal punto di vista economico, sia da quelli politici o bellici o sociali. Mentre invece un ragionamento economico corretto giova alla impostazione del problema anche dagli altri punti di vista, sicchè più agevolmente si possa conoscere quali deviazioni debbono subire le leggi o tendenze o conclusioni economiche, quando si voglia tener conto altresì delle leggi o tendenze o conclusioni d'altra indole. Che se le prime non si conoscono o si esprimono inesattamente, come si potrà giungere ad una verità qualsiasi?

II.

Ho veduto perciò con molto piacere che un maestro della scienza economica italiana, il prof. Ghino Valenti, ugualmente insigne per la dottrina teorica e per la sapienza delle applicazioni dei principî scientifici ai fatti, abbia voluto fornire ai seguaci della teoria del nazionalismo economico quella base scientifica economica che ad essi aveva finora fatto difetto (1);

---

(1) Ghino Valenti, *La guerra e l'economia nazionale dell'Italia*. Discorso per l'inaugurazione dell'anno accademico nella R. Università di Siena, letto il 14 novembre 1915 (Estratto dall' " Annuario accademico della R. Università di Siena per l'anno 1915-16 „; e riprodotto, senza le appendici, nella " Nuova Antologia „ del 15 dicembre 1915).

dimostrando, con chiarezza cristallina, che cosa si debba intendere per " nazionalizzazione della produzione italiana „ e quali siano le vie che debbono essere seguite da uomini di governo e da industriali ed agricoltori per accrescere la ricchezza del paese.

Io non intendo seguire il prof. Valenti in tutte le sue argomentazioni e conclusioni: poichè esse mi trarrebbero troppo lungi dal mio assunto, che è lo studiare quale sia il nocciolo scientifico della teoria del nazionalismo dal punto di vista economico. Basti notare come, per tutto ciò che ha tratto alle applicazioni pratiche dei principî scientifici, grandissimo sia il peso il quale deve essere attribuito alle opinioni di Ghino Valenti, senza dubbio la maggiore autorità vivente in materia di economia agricola, redivivo e rammodernato Iacini, come ebbi altra volta a chiamarlo. Il punto che qui interessa è quello teorico, astrazion fatta dalle applicazioni sue; e su questo punto ritengo opportuno riferire intieramente il brano centrale del discorso del Valenti:

" Nazionalizzare [la produzione italiana] non significa che " l'Economia italiana debba divenire un campo chiuso, talchè " s'abbia a contentare del poco che essa può produrre e rinun- " ziare al resto. In tal guisa il Paese nostro sarebbe condan- " nato ad una condizione di regresso in confronto al passato e " ad una condizione quasi stazionaria rispetto all'avvenire. Giacchè, " è ovvio, che, se si rinunzia ad ogni importazione da altri paesi, " cessa la possibilità di poter esportare in altri paesi „.

Nella quale premessa mirabilmente è scolpita la meta a cui *non* deve tendere l'azione nostra a vantaggio della nazione; ed è nettamente ricordata a tutti i seguaci del nazionalismo economico l'assurdità ed il danno di chiudere in sè stessa l'economia italiana, l'impossibilità assoluta di esportare senza importare e quindi la necessità di aumentare le importazioni dall'estero quando si vogliano crescere le esportazioni; e la fatalità di vedere scemare le esportazioni, ossia la forza di espansione del paese all'estero, quando si vogliano limitare o ridurre le importazioni.

Dopo la definizione negativa, quella positiva. Così invero prosegue il Valenti:

" Nazionalizzare significa dare il massimo sviluppo a tutte " le risorse paesane, di guisa che non si importi quel che non

" si può ottenere convenientemente in paese: il che sarebbe un
" particolare vantaggio per la nostra Economia, che restava
" finora in debito di fronte all'estero per più di un miliardo di
" lire, a causa del disquilibrio fra le importazioni e le esporta-
" zioni dei beni materiali. Il qual debito veniva da noi soddis-
" fatto con varie partite di credito verso l'estero, tra cui prin-
" cipalmente le spese fatte dai forestieri viaggianti in Italia,
" che equivalevano ad una importazione di oro nel Regno, e le
" rimesse dall'estero dei nostri emigranti. Partite queste, che
" ottenevano il pareggio o quasi, e permisero che il cambio in
" più periodi fosse alla pari. Ma il pareggio che si otteneva,
" cosa non avvertita da molti, era puramente *monetario*, non
" *economico*. Invero, se i beni materiali ed i servigi consumati
" o acquistati dai forestieri possono paragonarsi ad una espor-
" tazione nostra pagata in oro, non è men vero che, se sussi-
" stesse la bilancia commerciale, nel senso antico, quest'oro sa-
" rebbe un capitale che l'Economia potrebbe accumulare. E per
" riguardo alle rimesse degli emigranti, queste servono sì a pa-
" reggiare o diminuire il *deficit*, ma non è men vero ch'esse co-
" stituiscono un capitale, di cui l'Economia nazionale si arric-
" chirebbe annualmente, se appunto non servissero a questo
" ufficio. L'Economia italiana in certo modo fa un prestito cogli
" emigranti corrispondente all'ammontare delle rimesse, e di
" esso si serve per pagare il suo debito con l'estero, assumen-
" dosi in corrispettivo di pagare agli emigranti o alle loro fa-
" miglie il valore corrispondente all'interno. Quindi l'Economia
" italiana non ha per questo fatto quell'incremento di capitale,
" che altrimenti conseguirebbe, perchè l'impiega nella estinzione
" di un debito ".

Nel qual brano è esposto il teorema seguente: mentre oggi si importano, *grosso modo*, 3000 milioni di lire di merci dall'estero e si fronteggia il debito così incontrato con l'importazione di 2000 milioni di merci e con 1000 milioni di rimesse degli emigranti o pagamenti di servigi o merci da parte di forestieri; sarebbe desiderabile che le importazioni di merci scemassero, ad es., a 2500 milioni di lire e le esportazioni, pure di merci, crescessero a 2500 milioni (1), *fermo rimanendo il credito italiano*

(1) Riproduco in nota un brano, non essenziale alla formulazione del

verso l'estero di 1000 milioni per rimesse di emigranti e spese di forestieri. Cosicchè l'economia italiana potesse giovarsi di un incremento, che oggi non ha, di 1000 milioni di lire in oro per le rimesse e le spese suddette, capitale monetario di cui l'Italia potrebbe in seguito fare l'uso migliore possibile a vantaggio della potenza economica del paese.

III.

Che per una esatta posizione del problema giovi accettare l'implicita premessa, posta dall'A., che il commercio internazionale tanto più giovi al paese quanto più ne cresce il patrimonio, si può agevolmente ammettere. Commerciare e scambiare è operazione che procaccia guadagno ad ambe le parti contraenti; ed è quindi logica la deduzione che una nazione non possa non arricchirsi, quando compia una operazione di vendita di beni e di servigi all'estero da essa ritenuta vantaggiosa a sè stessa. Ma " guadagnare „ ed " arricchirsi „ per mezzo dello

---

principio teorico, ma utile per comprendere l'applicazione che del principio il Valenti vorrebbe veder fatta:

" Il nostro còmpito pertanto dovrebbe essere quello di eliminare le " importazioni non necessarie, specie, se si tratti di elementi complemen- " tari delle industrie nazionali già in esercizio. È stata un'arte riuscitissima " dei tedeschi quella di far sì che le industrie estere fossero tributarie, per " qualche elemento, dalla Germania. La quale, data la impossibilità di una " pronta sostituzione, o anche semplicemente la convenienza, finiva per tal " mezzo coll'avere in mano le sorti dell'intera industria.

" D'altra parte convien dar sviluppo alle nostre esportazioni, specie di " quei prodotti, che sono una nostra speciale prerogativa, riducendo al " massimo grado i costi; di guisa che i prodotti stessi divengano non sol- " tanto convenienti, ma necessari ai paesi importatori. Tra questi prodotti " occupano il primo posto i prodotti raffinati del suolo e cioè i prodotti " dell'orticoltura e della frutticoltura, dovuti a speciali condizioni di ter- " reno o di clima, e i prodotti delle industrie agrarie, in lato senso, e cioè " di tutte quelle industrie, che trasformano i prodotti agricoli, rendendoli " conservabili e commerciabili. Deve cessare quella perniciosa condizione, " per cui gli stranieri esercitano tali industrie, giovandosi di materie prime " agricole nostre, con che ci vien tolta la maggior parte di quei guadagni " che naturalmente ci spetterebbero.

" *In una parola bisogna importare, per quanto è possibile, di meno, ed " esportare, per quanto è possibile, di più* „.

scambio internazionale, non vuole ancora dire " aumentare il patrimonio ", occorrendo a tal uopo un atto volontario di risparmio e di capitalizzazione da parte di chi si è arricchito. La convenienza del commercio internazionale esisterebbe anche quando non conducesse all'aumento del patrimonio nazionale, ma solo all'aumento dei consumi dei nazionali. Si può tuttavia, come sopra osservai, ammettere che sia ragionevole prefiggere come mèta alla nazione, almeno per una parte dei lucri ritratti dal commercio internazionale, l'aumento del proprio patrimonio. È caratteristico delle nazioni progressive destinare a tal fine parte dei guadagni ottenuti colla produzione e la vendita, all'interno od all'estero, di beni e di servigi.

Fatta questa premessa, il problema che si deve risolvere non è più se convenga aumentare le esportazioni all'intento di crescere la ricchezza nazionale. Qui la risposta deve essere affermativa, perchè si suppone, tacitamente e necessariamente, che le industrie esportatrici lucrino di più, esportando, di quanto lucrerebbero le stesse od altre industrie se dedicassero il medesimo ammontare di fattori produttivi a fornire merci o servigi ai consumatori nazionali.

Il problema è invece: giova all'incremento della ricchezza nazionale dedicare il maggior provento ottenuto con le *cresciute* esportazioni ed *inoltre* l'ammontare dei crediti verso l'estero resi disponibili da una voluta diminuzione delle importazioni a fare acquisto all'estero di moneta?

IV.

Senza negare che in qualche caso siffatta soluzione data al problema del maggior incremento possibile del patrimonio nazionale sia preferibile, è dimostrabile come molte altre soluzioni possono più convenientemente darsi al problema posto; e come possa riuscire, in determinate contingenze, convenientissima principalmente anche quella soluzione che il Valenti giudica meno favorevole all'economia nazionale.

Fa d'uópo partire sempre — è quasi inutile avvertirlo — dalla legge, pacifica tra gli economisti, della *bilancia dei valori* od *uguaglianza dei debiti e crediti* nel commercio internazionale.

Se il debito dell'Italia verso l'estero è di 3000 milioni per merci importate, uopo è che il credito dell'Italia verso l'estero sia pure di 3000 milioni o per merci esportate o per rimesse di emigranti o per spese di viaggiatori forestieri o per guadagni della marina mercantile o per noli dei trasporti ferroviari di transito o per interessi di capitale impiegato all'estero o per altri servigi di banca, di intermediazione, ecc. ecc., resi dall'Italia all'estero. Se tutti questi mezzi insieme non bastano a coprire il debito dei 3000 milioni — il quale può derivare a sua volta, oltrecchè da merci importate, da altre cause, come da spese di viaggiatori italiani all'estero, interessi passivi di capitali forestieri, rimborsi di debiti contratti in passato verso l'estero, noli della marina mercantile e delle ferrovie estere, talvolta non ancora compresi nel prezzo delle merci importate, ecc. ecc. è giuocoforza diminuire il patrimonio nazionale, ossia vendere a stranieri le nostre terre o case o altri valori od indebitarci verso l'estero; il che equivale ad una *esportazione di titoli*, mediante la quale si ristabilisce il pareggio. Ma il pareggio conviene vi sia; altrimenti si cade nell'assurdo che gli stranieri ci diano qualche cosa, senza esigere nulla in cambio. Il che è impossibile.

Per semplicità, supporrò che le partite di dare ed avere della bilancia dei valori nel commercio internazionale si riducano a quattro elementi:

— *merci* materiali, importate od esportate, compresi i metalli preziosi non coniati per usi non monetari;

— *servigi*, importati od esportati, di emigranti (con conseguenti rimesse); servigi resi, anche sotto forma di merci, ai forestieri viaggianti in Italia od ai nazionali viaggianti all'estero; servigi della marina mercantile nazionale o di quella estera, delle ferrovie per le merci di transito, delle banche, od altri intermediari, dei capitali impiegati all'estero o dall'estero mutuati, onde i rispettivi interessi attivi e passivi, ecc. ecc.;

— *titoli*, i quali possono essere *esportati* dallo Stato (emissione di prestiti pubblici all'estero) o da privati (vendita di azioni od obbligazioni all'estero, interessamento di stranieri in imprese nazionali, vendita di terreni, case ed altri beni a stranieri); ovvero *importati* (come quando si riscattano titoli di debito pubblico, azioni od obbligazioni nazionali dall'estero, si rimborsano debiti verso gli stranieri, si acquistano titoli di debito

pubblico ed altri valori esteri od i nazionali si interessano in imprese o comprano terre e case straniere);

— *moneta metallica e metalli preziosi per usi monetari*, importata od esportata, sia mediante spedizione, sia a mano di stranieri o nazionali viaggianti od emigranti.

Qualsivoglia specie di ragioni di debito o di credito verso l'estero può essere fatta rientrare in una delle comprensive categorie: *merci*, *servigi, titoli, moneta metallica,* in cui si possono dividere i *beni economici*, i quali si devono necessariamente bilanciare nel loro valore totale all'importazione ed alla esportazione.

V.

Le combinazioni, le quali potrebbero istituirsi fra merci, servigi, titoli e moneta metallica subordinatamente alla condizione che il totale dei debiti sia uguale al totale dei crediti di una nazione verso l'estero sono numerosissime. Per semplificare l'esemplificazione, supporrò che i *totali* pareggiantisi siano di 3000 milioni di lire; che le *merci* non cadano, nè all'importazione nè all'esportazione al disotto di 2000 milioni, e che da ambe le parti della bilancia gli altri fattori *servigi, titoli* e *moneta* vengano introdotti ad uno ad uno, per cifre rotonde di 1000 milioni, affine di chiarirne separatamente l'influenza.

Fatte le quali avvertenze, io così riassumerei i principali gruppi di combinazioni che possono aversi tra merci, servigi, titoli e moneta metallica:

I Gruppo

nel quale la nazione esporta soltanto *merci*:

	Esportazioni o crediti	Importazioni o debiti
a) Merci	3000	2000
Servigi	—	1000
Titoli	—	—
Moneta	—	—
	3000	3000

	Esportazioni o crediti	Importazioni o debiti
b) Merci	3000	2000
Servigi	—	—
Titoli	—	1000
Moneta		
	3000	3000

	Esportazioni o crediti	Importazioni o debiti
c) Merci	3000	2000
Servigi	—	
Titoli	—	
Moneta		1000
	3000	3000

	Esportazioni o crediti	Importazioni o debiti
d) Merci	3000	3000
Servigi		—
Titoli	—	
Moneta	—	
	3000	3000

II Gruppo

nel quale la nazione esporta *merci* e *servigi* (di emigranti, a forestieri, di marina mercantile, di capitali, di banca, ecc., ecc.):

	Esportazioni o crediti	Importazioni o debiti
a) Merci	2000	2000
Servigi	1000	1000
Titoli		
Moneta	—	—
	3000	3000

	Esportazioni o crediti	Importazioni o debiti
b) Merci	2000	2000
Servigi	1000	—
Titoli	—	1000
Moneta	—	—
	3000	3000

	Esportazioni o crediti	Importazioni o debiti
c) Merci	2000	2000
Servigi	1000	-
Titoli	—	—
Moneta	—	1000
	3000	3000
d) Merci	2000	3000
Servigi	1000	-
Titoli		—
Moneta	—	—
	3000	3000

III Gruppo

nel quale la nazione esporta *merci* e *titoli*:

	Esportazioni o crediti	Importazioni o debiti
a) Merci	2000	2000
Servigi	—	1000
Titoli	1000	—
Moneta	—	—
	3000	3000
b) Merci	2000	2000
Servigi	—	—
Titoli	1000	1000
Moneta	—	—
	3000	3000
c) Merci	2000	2000
Servigi	—	—
Titoli	1000	—
Moneta	—	1000
	3000	3000

	Esportazioni o crediti	Importazioni o debiti
d) Merci	2000	3000
Servigi		
Titoli	1000	
Moneta	—	—
	3000	3000

IV Gruppo

nel quale la nazione esporta *merci* e *moneta*:

	Esportazioni o crediti	Importazioni o debiti
a) Merci	2000	2000
Servigi		1000
Titoli		
Moneta	1000	—
	3000	3000
b) Merci	2000	2000
Servigi	—	
Titoli		1000
Moneta	1000	—
	3000	3000
c) Merci	2000	2000
Servigi	—	—
Titoli		
Moneta	1000	1000
	3000	3000
d) Merci	2000	3000
Servigi	—	—
Titoli	—	
Moneta	1000	—
	3000	3000 .

Ritengo che le quattro combinazioni presentate per ogni gruppo rappresentino sufficientemente i principali casi tipici i quali si possono dare nella realtà. Questa, naturalmente, è più complessa, essendo raro il caso che un paese non esporti od importi nel tempo stesso merci, servigi, titoli e moneta. Ma fu giuocoforza semplificare le combinazioni, affine di apprezzare ad uno ad uno i varî fattori della bilancia internazionale. Chi voglia può, del resto, complicare a suo grado i fatti, senza che le conclusioni debbano variare. È agevole avvertire che i fattori i quali entrano al *passivo* della bilancia sono gli stessi nelle varie sezioni *orizzontali* dei diversi gruppi; mentre i fattori *attivi* rimangono uguali *verticalmente* nei limiti d'ogni gruppo.

Tutte le combinazioni addotte possono essere feconde di risultati utili per la nazione. La (I, *a*), perchè con essa il paese, vendendo 3000 milioni di lire di merci si procura 2000 milioni di altre merci ed inoltre 1000 milioni di servigi stranieri, come di capitali necessari a valorizzare il proprio territorio agricolo o dar impulso alle proprie industrie. La (I, *b*), con la quale il paese, dando 3000 milioni di merci, acquista, oltre a 2000 milioni di merci, 1000 milioni di titoli (titoli di debito pubblico esteri, azioni od obbligazioni, case o terreni esteri). La (I, *c*), grazie a cui il paese introita 1000 milioni di moneta; ed anche la (I, *d*), con cui si sostituiscono merci più utili a merci meno convenienti ai consumatori nazionali. Direi che la combinazione (I, *a*) raffigura il caso di un paese nuovo, il quale abbisogna pel suo sviluppo dei servigi del capitale e del lavoro esteri; la (I, *b*) il caso del paese industriale, che fa investimenti di capitale all'estero; la (I, *c*) il caso del paese, il quale passa dal regime di corso forzoso al regime aureo; mentre la combinazione (I, *d*) potrebbe rispondere alla situazione di un paese agricolo, il quale scambia le sue derrate agrarie sovrabbondanti con i prodotti industriali di paesi esteri. Le combinazioni che si leggono negli altri gruppi rispondono altresì alle varie situazioni in cui i varî paesi si possono trovare di tempo in tempo; ed il lettore può, senza che io mi dilunghi soverchiamente su ognuna di esse, vederne la ragion d'essere.

Forse è utile, però, di avvertire la ragionevolezza di talune soluzioni, *prima facie* non convenienti. Esportare, come nella combinazione (IV, *c*), 1000 milioni di moneta per importare altret-

tanta somma di ugual moneta sembra assurdo. Può non essere, quando si ammetta che il paese abbia convenienza ad esportare una specie di moneta (d'argento inviato alle colonie od ai paesi dell'Oriente), importando dai paesi minerari un'altra specie monetaria (d'oro, per la circolazione interna o per le riserve delle proprie banche di emissione).

A che prò, si può dire, esportare, come in (II, *a*), 1000 milioni di servigi per acquistare di nuovo 1000 milioni degli stessi servigi? Ma possono essere servigi di indole diversa, come accade all'Inghilterra, esportatrice di servigi della marina mercantile e di capitali impiegati all'estero ed importatrice di servigi resi a suoi nazionali viaggiatori per diporto in tutti i paesi del mondo. Od, anche quando trattasi di servigi della stessa categoria, lo scambio e quindi l'arricchimento possono essere utilissimi; come dimostra l'esempio della Germania, esportatrice dei servigi di capi-tecnici, impiegati e direttori di banca, commessi viaggiatori, rappresentanti ed importatrice di mano d'opera ordinaria e specificata dall'Italia, dalla Polonia, dalla Galizia.

Perchè, può altri soggiungere, fingere il caso (III, *b*) di una nazione, la quale esporti 1000 milioni di titoli per reimportare medesimamente 1000 milioni degli stessi titoli? Eppure, questo è il caso della Svizzera e dell'Olanda ed era il caso del Belgio; degli Stati-cuscinetto, i quali si arricchiscono o si arricchirono importando titoli esteri da paesi in cui il tasso di interesse o di rendimento era alto (Germania, Austria, Stati Uniti) ed esportando altri titoli nazionali nei paesi, in cui il risparmio si contentava di un più basso tasso di interesse (Francia). Vendere alla Francia 1000 milioni di titoli svizzeri al 4 % ed acquistare 1000 milioni di titoli tedeschi od austriaci o nord-americani al 6 % è, per la Svizzera, una operazione feconda di 20 milioni di lire di utile all'anno; feconda quindi di arricchimento. È prevedibile che, dopo la guerra, l'ufficio degli Stati-cuscinetto crescerà di importanza, perchè cresceranno gli ostacoli al passaggio diretto dei capitali da un gruppo all'altro dei paesi ora nemici: e crescerà il beneficio di intermediazione dei paesi-cuscinetto, i quali daranno opera ad agevolare il traffico dei capitali (1).

(1) Mi sia consentito di citare le *Prime linee di una teoria degli Stati-cuscinetto* contenute nella prova quattordicesima del capo nono della mia

VI.

Sebbene colla dimostrazione della *convenienza* delle combinazioni o situazioni ipotizzate sia dimostrata altresì la possibilità di ottenere, con ciascuna di esse, un aumento del patrimonio nazionale, è opportuno aggiungere su questo punto qualche ulteriore riflessione.

Certamente siffatta possibilità esiste nella combinazione (II, *c*), la quale corrisponde a quello schema di bilancia dei pagamenti, a cui il Valenti riconosce la virtù di arricchire il paese. Infatti, in essa, con i 2000 milioni di lire di merci esportate si compensano i 2000 milioni di merci importate: ed i 1000 milioni di servigi esportati (servigi di emigranti all'estero, che dànno origine a rimesse di denaro e prestazioni a forestieri viaggiatori di diporto in paese) procacciano 1000 milioni di moneta, i quali *potranno* in un successivo momento essere trasformati in un aumento di capitale. Non è *necessario* che ciò accada; potendo i 1000 milioni di moneta essere convertiti in beni di consumo; ma sarebbe irragionevole negare che essi *possano* essere risparmiati.

Ma non si vede perchè il Valenti neghi alla combinazione (II, *d*), la *capacità* di concorrere all'aumento del capitale nazionale. Non è forse vero che i 3000 milioni di lire di merci possono essere, fino a concorrenza di 1000 milioni, merci strumentali? Macchine, parti di macchine, aratri, concimi chimici, semenze, ecc. ecc., in cui si investono i 1000 milioni che il paese lucra mercè i servigi dei suoi emigranti o resi dai nazionali ai forestieri? O forse le statistiche commerciali non rivelano, in tutti i paesi rapidamente progressivi, una forte importazione di cotali prodotti istrumentali? L'Italia stessa non ha investito, negli anni migliori del nuovo secolo, notevole parte dei suoi risparmi nella propria industrializzazione, ottenuta mercè acquisto all'estero di macchinari, materie prime, concimi chimici? A

Memoria *Intorno al concetto di reddito imponibile*, pubblicata in " Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino ", serie II, tomo LXIII, pagina 307 (99 dell'estratto).

meno che il paese abbia precisamente bisogno di moneta metallica per il risanamento della sua circolazione, io non so vedere fra la combinazione (II d) e quella (II, c) altra differenza all'infuori di questa: che la (II, d) raffigura meglio la realtà, di quanto non faccia la (II, c), la quale rinvia ad un secondo momento il compimento delle operazioni economiche che stanno sotto le cifre contabili del dare e dell'avere. Salvo il caso citato che il paese abbia davvero bisogno di 1000 milioni di lire di moneta per il risanamento della sua circolazione monetaria, caso che noi possiamo trascurare, essendo ben lungi dall'essere frequente, la combinazione (II, c) non è definitiva. Ad un paese non importa nulla possedere 1000 milioni di lire di più di moneta *in specie,* perchè la moneta non ha alcuna utilità diretta. Importa invece assai ottenere, per mezzo dei 1000 milioni di moneta, 1000 milioni in merci, servigi o titoli esteri. Tenere in paese i 1000 milioni di lire in moneta sarebbe, normalmente e salvo il caso citato — il quale può manifestarsi per la cifra totale o parte di essa — un assurdo; poichè l'unico effetto sarebbe di fare aumentare i prezzi di tutte le cose, per la sovrabbondanza della moneta circolante: onde una restrizione nelle esportazioni ed un aumento nelle esportazioni, insino a che l'eccedenza di moneta se ne fosse ritornata all'estero. Il paese non ha bisogno, il più delle volte, di tenere la moneta in paese, per comprare beni nazionali, col solo risultato di farli aumentare inutilmente e provvisoriamente di prezzo e di provocare così delle crisi economiche. Ha bisogno, invece, di acquistare con quei 1000 milioni di moneta, 1000 milioni di merci, servigi o titoli *esteri.* Questa è la sola condotta per lo più ragionevole e pensabile. Il che opportunamente ricorda il Valenti, quando intende allontanare da sè la taccia di risuscitare gli errori dei mercantilisti. “ Imperocchè „ — egli dice — “ se nella teoria “ mercantilista si conteneva un grave errore, quello di non porre “ in bilancia se non i beni materiali, le merci, trascurando il “ valore dei servigi ed i crediti, è incontestabile che il loro “ pensiero, per quanto riguarda l'importazione della moneta “ come mezzo di accrescimento di capitale, aveva pieno fonda- “ mento di ragione. Certo l'importazione della moneta oltre il “ bisogno della circolazione determina un rinvilimento del suo “ valore — e ne sanno qualche cosa i tedeschi del 1870-71 per

" effetto del pagamento fatto loro dai francesi della indennità
" di guerra in oro — ma non è men vero che il capitale-mo-
" neta è capitale trasformabile in quei beni atti ad accrescere
" durabilmente la potenzialità economica del paese, venendo così
" naturalmente ad essere restituito a quegli altri paesi, che per
" una precedente sottrazione ne abbiano difetto. Ciò peraltro
" non toglie che l'incremento del capitale nel paese importatore
" di oro rimanga ".

Il Valenti dimostra così:

1) che, quando ciò non importi ai bisogni della circolazione, ossia ad uguagliare il livello dei prezzi all'interno ed all'estero, è inopportuno importare moneta solo per servirsene nell'acquisto di merci o servigi nazionali. L'importazione avrebbe per unico effetto quello puramente nominale di rialzare il livello interno dei prezzi. Effetto, come è noto, dannoso ai più e provvisorio;

2) che l'importazione della moneta si può ritenere vantaggiosa all'incremento del capitale nazionale solo perchè la moneta è una merce " trasformabile nei beni atti ad accrescere " durabilmente la potenzialità economica del paese ". La qual verità, quando i beni acquistati siano esteri, non comporta dubbi;

3) che allora l'incremento del capitale nazionale avrà avuto realmente luogo, quando la moneta si sarà trasformata nei beni esteri suddetti. Finchè il paese importatore conserva l'oro *importato*, l'arricchimento è registrato sulle statistiche; ma a stento lo si potrebbe dire acquisito, in atto, produttivo di nuove ricchezze. L'arricchimento fecondo si avrà quando di nuovo il paese avrà " restituito ", come bene dice il Valenti, la moneta " ai paesi che per una precedente sottrazione ne abbiano difetto ", ricevendone in cambio macchine, attrezzi, materie prime, ed anche, come si dirà poi, beni di consumo diretto;

4) dalla quale pacifica constatazione logicamente si deduce che se un paese al processo:

(1) *merci nazionali = moneta = merci estere*

sostituisce il processo:

(2) *merci nazionali = merci estere*

consegue medesimamente anzi più rapidamente il fine dell'incremento della ricchezza nazionale.

Sicchè resta dimostrato che la combinazione (II, *d*) è stabile, mentre la (II, *c*) è provvisoria; ed è altresì più economica.

Alla quale conclusione medesima si giunge, quando si accolga l'insegnamento del Valenti, per cui còmpito della nazione dovrebbe essere quello di importare, per quanto è possibile, *di meno*, ed esportare, per quanto è possibile, *di più*. Poichè il *meno* ed il *più* si riferiscono ad un tempo *ulteriore* in confronto ad un tempo *anteriore*; la massima significa che occorre, per arricchire un paese, aumentare le esportazioni e diminuire le importazioni passando dal tempo *A* al tempo *B*: secondo lo schema seguente, in cui si variano dinamicamente esempi già dati:

	Combinazione (II, *d*)		Combinazione (II, *c*)	
	Esportazioni o crediti	Importazioni o debiti	Esportazioni o crediti	Importazioni o debiti
		Tempo A		
Merci . . .	2000	3000	2000	2000
Servigi . .	1000	—	1000	—
Titoli . . .	—	—	—	—
Moneta . .	—	—	—	1000
	3000	3000	3000	3000
		Tempo B		
Merci . . .	2500	3500	2500	1500
Servigi . .	1000	—	1000	—
Titoli . . .	—	—	—	—
Moneta . .	—	—	—	2000
	3500	3500	3500	3500

Non si può negare che, sotto qualche rispetto, la variazione compiutasi nel tempo *B* sia vantaggiosa. La nazione esportando 500 milioni di lire di merci *di più*, ha aperta a sè medesima la possibilità di arricchire *maggiormente*. Ma l'arricchimento maggiore è più agevole nella combinazione (II, *d*) o

nella (II, *c*)? Di nuovo, l'unica differenza sta nel circolo vizioso attraverso la moneta che si compie nella (II, *c*), e si evita nella (II. *d*). Un paese, il quale non ha bisogno di importare moneta per innalzare il livello dei suoi prezzi interni al livello di quelli esteri, si sbarazzerà, quanto più presto gli sarà possibile, dei 2000 milioni di lire di moneta; ed acquisterà all'estero altrettanto valore di merci, servigi o titoli. Forse la soluzione più vantaggiosa che un paese industrialmente ed agrariamente progressivo può dare al problema è appunto di acquistare altri 2000 milioni di lire di merci istrumentali straniere, sì da portare l'importazione a 3500 milioni, così come si legge nella combinazione (II, *d*, *B*). Il che dimostra che la massima *importare di meno ed esportare di più* è possibile per quei paesi i quali hanno bisogno di attrarre l'immigrazione dei servigi di lavoratori e di capitali esteri o possono impiegare i loro risparmi nell'acquisto di titoli esteri. Entro i limiti in cui quelle due soluzioni non sono convenienti, la massima è assurda. Esportare merci in quantità maggiore è davvero impossibile senza importarne altresì in copia più grande. La quale verità, malgrado il diverso apparente suono delle parole, è nettamente ed esplicitamente riconosciuta dal Valenti, come del resto non poteva non essere.

VII.

Gli schemi di combinazioni sovra compilati hanno per iscopo di mettere in luce come varie siano le soluzioni che si possono dare al problema dell'arricchimento attraverso il commercio internazionale.

Nel gruppo (I) si raffigurano le varie maniere che possono essere accolte da un paese, il quale è esportatore di merci agricole ed industriali ed ha una trascurabile esportazione di servigi (pochi emigranti, pochi forestieri di passaggio, scarsi capitali impiegati all'estero e fruttiferi di interesse, ecc.) e di titoli (il che significa un paese che non si indebita verso l'estero). Questo paese può impiegare i 1000 milioni di lire di risparmî fatti, per ipotesi, sulla vendita dei 3000 milioni di merci all'estero:

a) acquistando servigi di stranieri; ossia importando mano d'opera estera, ordinaria o qualificata. È il caso dell'Argentina e degli Stati Uniti: ed è l'aspirazione del Brasile;

b) acquistando titoli di Stati e di imprese private estere, o titoli nazionali prima espatriati. Gli Stati Uniti nel momento attuale attuano siffatto metodo di investimento;

c) acquistando moneta. L'India e la Cina seppelliscono nei tesori privati masse cospicue di oro ed argento; ma non riscuotono molti applausi dagli economisti per tale loro condotta, in date contingenze non priva del resto di ragionevolezza. Gli Stati Europei e d'America andarono a gara, a tratti, durante gli ultimi 40 anni, ad impinguare le riserve metalliche delle Banche di emissione;

d) acquistando altre merci sino ad ottenere il pareggio con i 3000 milioni d'importazioni. Il che può avere parecchie significazioni. Il risparmio di 1000 milioni consentito o voluto compiere dalla nazione sul valsente di 3000 milioni di crediti per esportazioni, può invero prendere la forma già osservata di prodotti strumentali utili all'incremento delle industrie e dell'agricoltura. Fu metodo seguito, con fortuna, dall'Italia dopo il compimento dell'unità nazionale: e con fortuna somma dalla Germania. Essendosene già detto a bastanza, non fa d'uopo tornarci sopra.

Ma l'investimento del risparmio può avvenire anche in merci estere di consumo diretto. Per due vie: l'una delle quali si è di lasciar libere all'interno tante energie produttive, prima destinate alla produzione dei beni diretti di consumo, le quali ora più convenientemente possono consacrarsi alla produzione di beni strumentali, alla costruzione di case, edifici industriali, al prosciugamento di paludi, ecc., ecc. La ricchezza del paese cresce di 1000 milioni ugualmente e forse meglio se all'estero si acquistano a buon mercato merci di diretto consumo e si dedicano il capitale ed il lavoro così lasciati liberi dalla produzione di beni di uso diretto a compiere all'interno investimenti capitalistici. L'altra via è di acquistare all'estero merci di diretto consumo che possono giovare al perfezionamento fisico ed intellettuale dei nazionali. Il risparmio non si fa solo *in denaro*, bensì anche *in qualità personali*; e forse delle due specie di risparmio, capitalistico in senso stretto e personale, la più feconda è quest'ul-

tima. Od almeno è quella su cui gli economisti moderni fanno maggiormente a fidanza per crescere la ricchezza delle nazioni (1). Anche i libri, e gli oggetti d'arte e gli strumenti musicali possono essere un mezzo di risparmio, talora più fecondo e produttivo di un deposito di denaro sul libretto della cassa di risparmio. E quando siffatti beni di consumo diretto si possano acquistare, col ricavo della vendita di merci nazionali all'estero, con maggiore convenienza all'estero che all'interno, senza dubbio l'importazione loro dall'estero è un mezzo di arricchimento altrettanto, ed anzi " maggiormente „ secondo l'opinione dei nazionali, utile come l'importazione d'oro.

Le medesime quattro specie di investimento del risparmio in servigi, titoli, moneta e merci provenienti dall'estero possono essere scelte da nazioni le quali esportino merci e servigi (II gruppo), merci e titoli (III gruppo), merci e moneta (IV gruppo). La ragionevolezza dell'investimento scelto e la possibilità di arricchirsi con esso sono già dimostrate con le osservazioni fatte a proposito del primo gruppo di nazioni. Varia soltanto la maniera di pagare le cose comperate all'estero, che, invece di essere la vendita di merci, è in parte questa ed in parte l'esportazione di servigi, o di titoli o di moneta, a volta a volta o contemporaneamente, a seconda degli interessi variabili della nazione.

VIII.

" Noi dobbiamo nazionalizzare la produzione italiana „ — ripeterò anch'io col Valenti a conclusione della presente Nota. Ma esclusa, salvo casi rarissimi, la convenienza di importare moneta per conservarla, dimostrato che la convenienza di aumentare le esportazioni e di arricchire mercè l'incremento dato alle esportazioni si può logicamente e necessariamente immaginare solo attraverso ad un correlativo aumento di importazioni di merci o di titoli o di servigi, " nazionalizzare la produzione „ ha e non può non avere unicamente il significato di " dare il

(1) Cfr., sul concetto e sulle specie del " risparmio personale „, la citata mia Memoria, a pag. 235 del volume e 27 dell'estratto.

massimo sviluppo a tutte le riserve paesane „ che convenga di sfruttare per trarre dai proprî sforzi il maggiore risultato *comparativo* possibile. Rinunciare a produrre le merci ed i servigi che tecnicamente sarebbe pure possibile di produrre in paese, significa arricchire il paese, quando convenga maggiormente dedicare la limitata dote di capitale e di lavoro esistente tra noi, alla produzione di altre merci e di altri servigi a rendimento più elevato; coll'intento di esportare il sovrappiù eccedente i nostri bisogni per acquistare all'estero le merci ed i servigi, che noi dureremmo troppa fatica a produrre direttamente.

A buon diritto, da quel valoroso economista che egli è, il Valenti richiama l'attenzione dei teorici e dei pratici sulla convenienza di utilizzare fonti paesane di ricchezza finora forse troppo trascurate per imperizia tecnica, cattive consuetudini, ignoranza o timidezza di capitali. A buon diritto egli ammonisce gli italiani che essi potrebbero con vantaggio produrre direttamente cose prima acquistate all'estero. La ricchezza progredisce attraverso a continue sostituzioni di processi produttivi più perfetti a processi meno perfetti. E fra questi processi più perfetti può talvolta essere noverata la produzione e la elaborazione paesana di beni, che prima si acquistavano all'estero. Se vuolsi, noi possiamo dare a questi progressi economici e tecnici, il nome di " nazionalizzazione della produzione „. Ma forse il cambiamento di nome era inutile. Poichè, in quanto essa ha una significazione plausibile e razionale, quella teoria era nota nella scienza economica e dicevasi: *legge del minimo mezzo* o *del massimo tornaconto*.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI.

PREMI DI FONDAZIONE GAUTIERI

La Reale Accademia delle Scienze di Torino conferirà nel corrente anno un premio di fondazione Gautieri a quell'opera di Storia politica e civile in senso lato, che sarà giudicata migliore fra le pubblicate negli anni 1913-1915. Il premio di L. 1900 sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i Soci nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in lingua italiana.

Gli autori possono inviare all'Accademia le pubblicazioni sulle quali desiderano richiamarne l'attenzione, avvertendo che non saranno restituite le opere ad essa per tal fine pervenute.

Torino, 1° febbraio 1916.

L'Accademico Segretario
della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
ETTORE STAMPINI.

CLASSI UNITE

Adunanza del 20 Febbraio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali i Soci Camerano, Vice-Presidente dell'Accademia, D'Ovidio, Direttore della Classe, Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Panetti, e Segre, Segretario;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche i Soci Chironi, Direttore della Classe, Carle, Pizzi, De Sanctis, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Vidari, Prato.

Scusano l'assenza i Soci residenti Salvadori, D'Ercole ed Einaudi, e i non residenti Villari e Fraccaroli.

Letto ed approvato il verbale della precedente adunanza del 13 corrente, il Presidente commemora il Socio non residente Savio, colle seguenti parole:

" Cessò di vivere testè in Roma il Prof. Fedele Savio della Compagnia di Gesù. Egli era nato 68 anni or sono a Saluzzo e fu eletto Socio residente della nostra Accademia nel 1900. Successivamente essendosi trasferito ad insegnare in Roma nell'Università Gregoriana, passò fra i Soci Nazionali non residenti.

“ Uno dei suoi primi lavori, che fu intorno a Guglielmo III di Monferrato ed i suoi figli, valse a farlo segnalare fra i distinti cultori delle discipline storiche. Ma il campo nel quale il Savio provò massimamente il suo ingegno e procedette coi più fermi avvedimenti, fu quello della Storia Ecclesiastica, ricostruita con nuove ricerche e con larga e sicura erudizione.

“ L'opera sua principale è la Storia degli antichi Vescovi d'Italia dalle origini al 1300, della quale vennero in luce i volumi riguardanti il Piemonte e Milano. L'A. curava la stampa o già teneva come compiuta la preparazione di quelli concernenti tutta la Lombardia, l'Emilia, la Liguria e la Toscana.

“ Tratto tratto apparivano dottissime Monografie sopra argomenti particolari relativi a tali lavori.

“ L'opera del Savio deriva da ampli studi sopra i monumenti di ogni ordine e da esplorazioni assidue e diligenti negli archivi ed è condotta con critica penetrante e sincera: nelle molte parti in cui la Storia Ecclesiastica va collegandosi alla Storia Generale, l'A. si intrattiene con pienezza di opportune investigazioni; ed anche rispetto alle tradizioni e leggende religiose egli palesa, salvo le ragioni essenziali della fede, il suo giudizio storico secondo i fatti rintracciati con schiettezza e verità.

“ Il Savio contribuì con notevoli scritture a dar pregio alle nostre pubblicazioni. In tutte le sue scritture vi è densità di pensiero e di fatti e chiarezza di forma.

“ Egli fu Accademico zelante e sempre in mezzo a noi lo conoscemmo sereno nell'aspetto e nell'opinare, sobrio, ma preciso ed efficace nel discorso e, fra le amichevoli consuetudini, cordiale e cortese.

“ Qui dove Fedele Savio raccolse l'estimazione concorde dei Colleghi, esprimo il compianto dell'Accademia per la perdita del Socio preclaro „.

Si passa alla votazione secondo le norme regolamentari pel conferimento del XIX premio Bressa (Internazionale, quadriennio 1911-1914).

Il detto premio viene conferito al Prof. Antonio Berlese, Direttore della R. Stazione di Entomologia agraria di Firenze per i suoi studi sulla *Prospaltella Berlese*, con applicazione alla distruzione della *Diaspis pentagona*.

Indi l'Accademia procede alla votazione per il conferimento del premio Gautieri di Filosofia (triennio 1912-1914), che viene conferito al Dr. Aurelio Pelazza (morto combattendo da prode soldato volontario per la Patria e per la libertà dei Popoli) per la sua opera *Guglielmo Schuppe e la filosofia della immanenza*. Milano, Libreria editrice Milanese, 1914.

Infine il Socio Stampini legge la Relazione della Commissione per il premio Vallauri per la letteratura latina (quadriennio 1911-1914). La votazione per il conferimento del premio si farà nella prossima adunanza.

DE VALLAURIANO PRAEMIO ADIUDICANDO

LITTERIS LATINIS IN QUADRIENNIUM 1911-1914 PROPOSITO

(a. d. X. kal. Mart. an. MCMXVI)

Quamquam, Collegae doctissimi, eo temporis spatio, quod inter kalendas ianuarias anni MCMXI et exitum anni MCMXIV effluxit — id enim tempus praestitutum erat —, non ita exiguus librorum numerus litteras latinas illustrantium editus est, quorum scriptores de proposito praemio satis commode certare possent, unum tamen opus in hoc insigne latinorum studiorum certamen delatum est, idque a viro francogallo, qui se ad Vallaurianum praemium spectare aperte professus est. Pertinent haec verba ad Renatum Pichon, qui anno MCMXII librum foras dedit quem inscripsit *Les sources de Lucain* (Paris, Ernest Leroux). Ad id enim vir clarissimus animum intendit, ut tria fontium M. Annaei Lucani poesis genera persequeretur; quorum primum ad historiam, secundum ad philosophiam, tertium ad litteras rettulit, quo verbo epici carminis rationem scribendique artem complexus est.

Nam, ut res summas quam paucissimis absolvamus, Pichon in prima sui operis parte luculenter et copiose explicare aggressus est, quos scriptores, quos auctores Lucanus ad res gestas narrandas et loca describenda adhibuisset. Qua de re cum complures hominum doctorum sententiae iamdiu in medium prolatae sint, scriptor francogallus quae iure meritoque sequendae, quae contra labefactandae ac funditus tollendae sint diligentissime demonstrare studet, etiam minutas quasdam quaestiunculas expendens, quasi metuat, ne quid a se praetermissum esse videatur. Neque minorem operam, laborem, diligentiam contulit ad fontes scru-

tandos atque ex omnibus partibus perpendendos, qui ad philosophiam quodammodo attinent, si verbum cum apud veteres tum apud recentiores aliquanto latius patere consentiamus. His enim fontibus, ut rem paucis adumbremus, omnia quoque adscripsit, quae ad divinationem, ad artem magicam, quam appellant, ad vulgaria illa de manium vita opinionum commenta, ad alia denique revocari possunt, quae saepe apud philosophos in disceptatione versari consueverunt. Tertio autem loco omnes illos fontes investigare instituit, qui epici Lucani carminis compositionem et quasi structuram quandam propius attingunt, quo in genere quaesitum est, quos praecipue et poetas et solutae orationis scriptores Lucanus sibi ad imitandum proposuisset.

Si autem declarare volumus, ut nostrum est, quo in pretio id opus habeamus, cuius summam paucis complexi sumus, nobis sine ulla dubitatione affirmare posse videmur, librum Renati Pichon multis luminibus ingenii, magna doctrina, subtili enarrandi et disserendi ratione conspicuum ac plane dignum esse, qui laudibus exornetur. Verum haec tamen non ita dicta esse declaramus, quasi nulla alia opera superiore, quod definivimus, quadriennio, cum apud nos tum apud exteras gentes, exstitisse arbitremur, quae anteponenda esse censeamus. Neque enim desunt libri, quos quidem rerum novitate et pondere potiores existimemus. Sed antequam sententiam nostram aperiamus vobisque dicamus, qui nobis libri ceteris facile praestare videantur, pauca de iis scriptoribus explananda sunt, quorum operibus ratio certaminis nos locum praebere vetet, etsi in litteris latinis excellenter elaboraverint.

Ac primum omnium, ut temporum ordinem sequamur quibus opera litterarum formis exscripta sunt, maximi quidem librum illum facimus Aloisii Havet, qui inscribitur *Manuel de critique verbal appliquée aux textes latins* (Paris, 1911); nec minoris aestimamus editiones criticas Isidori Hispalensis Episcopi (*Etymologiarum sive Originum libri XX*) et Sexti Pompei Festi (*De verborum significatu quae supersunt cum Pauli epitome*), quarum primam Oxonii anno MCMXI, alteram autem Lipsiae anno MCMXIII W. M. Lindsay typis mandandas curavit. Eximiam praeterea multarum rerum cognitionem, miram ingenii aciem, summam diligentiam et industriam Theodori Birt admiramur, cuius est liber de re critica et interpretandi arte (*Kritik und Hermeneutik*

nebst Abriss des antiken Buchwesens. München, 1913). Sed haec Aloisii Havet, W. M. Lindsay, Theodori Birt opera, etiamsi praeclara et eximia et apud doctos permagni sunt momenti, tamen, si rem spectemus, manifestae clarissimi viri voluntati, cuius testamento praemium institutum est, minus respondere videntur quam alia nonnulla, quae cum critica litterarum latinarum historia artius coniuncta sint. Ex his vero pauca eligemus, de quibus quam brevissime dicamus.

Sine dubio magni aestimamus quartum volumen, anno MCMXII typis expressum, egregii illius operis, quod Paulus Monceaux inscripsit *Histoire littéraire de l'Afrique chrétienne* (Tome quatrième. *Le Donatismus*. Paris); magnoque in honore et pretio apud nos sunt doctissimae curae, quibus Martinus Schanz, annis MCMXI, MCMXIII, MCMXIV, tria suae litterarum latinarum historiae volumina, singulas quasque res paene retexens, recognovit, retractavit, amplificavit (*Geschichte der römischen Litteratur*. Zweiter Teil: Erste Hälfte, München, 1911. Zweiter Teil: Zweite Hälfte, 1913. Vierter Teil: Erste Hälfte, 1914): at vero Paulo Monceaux et Martino Schanz Academia nostra primum Vallaurianum praemium litteris latinis propositum ante hos octo annos aequabiliter dispertivit, neque ullam causam invenimus, quamobrem vestras mentes iterum ad eos praeter ceteros convertamus. Neque alia nobis sententia est, si librum Alfredi Gercke, qui inscriptus est *Die Entstehung der Aeneis* (Berlin), anno editum MCMXIII, attentissimis, ut par est, animis consideramus. Summam quidem doctrinam, acerrimum ingenium, praeclaram indolem ad res reconditas coniectura assequendas, subtilem rei criticae tractandae rationem non mediocri laude prosequimur; sed cum fere totus liber in coniecturis nitatur nimiaque subtilitate laboret, atque in tot rebus controversis difficillimum sit omnes omnium sententias convenire, ut non dicamus de Aeneidis compositione multis aliis neque ita audacibus coniecturis locum esse relictum, praestat ad scriptores animos traducere, qui certiora litteris prodiderunt.

Dolendum quidem est Fridericum Leo, virum memoria nostra de latinis litteris omnium optime meritum, immatura morte abreptum, opus sapienter inchoatum absolvere non potuisse; sed, ut Plautinas eius investigationes missas faciamus, quas anno MCMXII Berolini iterum edidit (*Plautinische For-*

schungen zur Kritik und Geschichte der Komödie), primum illud volumen de historia latinarum litterarum, quod Berolini anno MCMXIII typis exscriptum est (*Geschichte der römischen Literatur. Erster Band. Die archaische Literatur*), plurimum in hac litterarum contentione apud nos valeret, si ad Academiam nostram Vallauriani certaminis causa missum esset; quod quidem factum non est. Quamquam enim nonnulli satis firma argumenta sibi suppetere opinantur, quibus probetur in Friderici Leo libro multa desiderari, quae eruditi homines in huiuscemodi operibus requirant, quod illa scriptor germanus ad operis suscepti rationem minus apta existimaverit, tamquam si latinarum litterarum historiam potius ad commune popularium suorum iudicium et intellegentiam accommodare, quam in hominum doctorum usum redigere voluerit; tamen non est infitiandum, quod profecto nos de communi sententia atque omni asseveratione affirmamus, hunc librum cum eximia ac prope singulari ingenii doctrinaeque praestantia, tum lucido ordine accuratissimaque diligentia, tum magna et iudiciorum gravitate et mentis sagacitate, intellegenti denique et exquisita rerum aestimatione, postremo venusta quadam et ornata et iucunditatis plena orationis ubertate et copia, dignissimum esse, qui pleno ore laudetur. Quoniam vero vir doctissimus, quod ad hoc certamen attinet, nullo modo quid vellet significavit, atque intra fines terminosque certamini constitutos inopina morte interceptus est, nobis non licere arbitramur illorum,

morte obita quorum tellus amplectitur ossa,

voluntatem, quae conceptis verbis atque etiam per litteras prodita non sit, interpretari, ob eamque rem Fridericum Leo cum nullo alio comparabimus iudiciumque nostrum de eius scriptis in medio relinquemus.

At vero omnibus operibus, quae nobis praesto fuerint, sine ulla dubitatione libros anteferendos esse contendimus, quos Remigius Sabbadini, professor litterarum latinarum in Regia Academia philosophiae et litteris tradendis Mediolanensi, anno MCMXIV prelo commisit, quique inscribuntur *Le scoperte dei codici latini e greci ne' secoli XIV e XV. Nuove ricerche col riassunto filologico dei due volumi* (Firenze) et *Storia e critica di testi latini. Cicerone. Donato. Tacito. Celso. Plauto. Plinio. Quin-*

iliano. Livio e Sallustio. Commedia ignota (Catania). Libri sunt et summa doctrina et mirifica iudicandi sollertia et infinita illarum rerum copia insignes, quarum complures frustra aliunde petas, quasque Sabbadini strenua plurimorum annorum opera, assiduo animi labore, diuturna et alacri librorum manu scriptorum inquisitione et investigatione sapientissime congessit atque in unum quasi corpus redegit. Addite plurimam ac paene incredibilem omnis generis operum lectionem, quae ipsis viris doctis nonnumquam ignota sunt; neque enim semper hominibus doctrinarum studiosis eorum scripta in manibus esse possunt, qui una aliqua in re separatim elaborarint. Ex quo natura consequitur, ut quae singuli de singulis rebus litteris prodiderint, ut de libris manu scriptis, de publicis privatisque bibliothecis, de chartulariis, de operibus editis aut nondum vulgatis, de librorum indicibus, de aliis multis, in quibus Sabbadini versatur, ex his omnibus vir doctissimus utilitatem et quasi lucrum capiat, ingentemque rerum copiam, cum diligenter investigatam, tum accurate expensam, firmissime denique constitutam, postremo innumeris suis investigationibus auctam et confirmatam, nostris oculis sub unum adspectum subiciat.

Spectant nostra verba ad volumen praecipue, quod est de codicibus graecis et latinis, quo quidem magnum illud opus, iam pridem a doctis efflagitatum et a Sabbadini non paucis ante annis susceptum — primum enim volumen anno MCMV est pervulgatum —, nunc demum ad umbilicum, ut aiunt, adductum est; sed in altero item opere Sabbadini aliorum investigationes non solum acerrimo iudicio penitus inspexit et in disceptationem vocavit, verum etiam suas ipsius recognovit, additaque magna rerum copia, quas ipse novis studiis comparavit, summam omnem mirum in modum supplevit et amplificavit. Neque enim nos latet nonnullos in philologis commentariis iam animadvertisse, Sabbadini hac historia latinorum textuum, quos appellant, res a se abhinc multos annos pertractatas comprehendisse; verum illud quoque adiciendum est, quod nemo infitias ibit, Sabbadini tantam rerum copiam nunc denuo retractatam, multo maiorem factam, in novum ordinem digestam nobis praebuisse.

Duo igitur libri sunt vobis, Collegae humanissimi, ante oculos propositi, non qui tantummodo singulari doctrina, acri ac multiplici scientiae pervestigatione, subtili disserendi ratione

infinitam prope materiam explicent, sed etiam qui cum litterarum latinarum historia aptissime et necessario cohaereant. Pro certo enim habemus litterarum historias non iis terminis circumscribendas esse, quibus singulorum scriptorum tempora contineantur, sed et doctrinae subsidiis a praeteritorum temporum memoria repetitis illustrandas et omnibus rebus enucleandas esse, quae demonstrent, quantum illorum opera apud posteros ad mentes alendas animosque ad humanitatem informandos valuerint. Nam, quemadmodum quae cogitamus, quae sentimus, aliqua ex parte cogitaverunt et senserunt maiores nostri; sic omnibus manifestum esse debet, nihil vere, nihil certe, nihil absolute de scriptoribus, quorum opera ad nos quasi hereditate relicta pervenerint, existimari posse, nisi etiam consideres quae fata, quas fortunae vicissitudines labentibus aetatibus adierint. Hinc oritur recta illa et iusta operum et scriptorum aestimatio; hinc fit ut humanae litterae ad illarum disciplinarum et artium rationem revocari possint quae, perpetuis praeceptis ordinatae et conclusae, non modo diligenter fundatae, verum etiam accurate exstructae atque eleganter constitutae sint. Illud quoque accedit, quod scriptorum latinorum aeque atque graecorum opera lapsu temporis, ut satis superque constat, varia ratione in codicibus manu scriptis corrupta ac depravata sunt; quorum alii magni, alii minoris, alii minimi momenti et ponderis habentur ad vera, certa, germana scriptorum verba penitus cognoscenda, ad eorum auctoritatem aut pravitatem definiendam et declarandam. Ex quo apparet quam clarum lumen litteris latinis praetulerit librorum manu scriptorum investigatio atque inventio, quantopere denique assidua et diligens codicum collatio ad exemplaria latina a corruptelarum sordibus purganda atque in pristinam sinceritatem restituenda profuerit. Sed in re compertissima diutius commorari nolumus.

Eadem ratione cum disciplina, de qua nunc certatur, etiam historiam litterarum latinarum mediae, quae dicitur, aetatis prorsus coniunctam et propemodum contextam esse contendimus. Quod nisi eo libro, quo Maximilianus Manitius litteras latinas a Iustiniani temporibus usque ad saeculum X p. Chr. n. persecutus est (*Geschichte der lateinischen Literatur des Mittelalters*. Erster Teil. München, 1911), si rerum compositionem, ordinem, explanationem respicias, scriptor germanus non tam

historiam componere, quam materiam ad historiam condendam accommodatam colligere et aliis tradere voluisse videretur, esset non dubie cur nos, in certamine pro virili parte diiudicando, huius quoque operis rationem haberemus. Sed nos iam longius oratione progredimur, quam necesse est.

Ut igitur ad propositum revertamur, ex iis, quae ante dicta sunt, satis commode effici cogique posse pro certo putamus, duobus professoris mediolanensis libris, quorum res summas breviter perstrinximus, primas omnino esse deferendas, ob eamque causam vos, Collegae clarissimi, uno ore libentissimisque animis rogamus, ut Vallaurianum praemium Remigio SABBADINI adiudicetis.

Ad Sodales Academiae de praemio rettulit et scripsit Hector STAMPINI.

Subscripserunt:

Paulus BOSELLI, *Praeses Academiae*
Caietanus DE SANCTIS
Franciscus RUFFINI — *Sodales ordinarii Taurinenses*
Ernestus SCHIAPARELLI
Hector STAMPINI, *Sodalis ordinarius Taurinensis a commentariis.*

Gli Accademici Segretari
CORRADO SEGRE.
ETTORE STAMPINI.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 20 Febbraio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente CAMERANO, il Direttore della Classe D'OVIDIO, e i Soci NACCARI, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI, PANETTI, e SEGRE, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio SALVADORI.

È letto e approvato il verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio CAMERANO presenta, per la stampa negli *Atti*, una sua Nota, *Della posizione dei fori palatini nella partizione del genere "Capra" Linn.*

Vengono inoltre presentati, per gli *Atti*, questi altri lavori:

G. CHARRIER, *Idrolisi degli antrachinonarilidrazoni con acido solforico,* dal Socio GUARESCHI;

G. ISSOGLIO, *Sopra un nuovo metodo per l'analisi dei grassi irranciditi,* dallo stesso Socio GUARESCHI;

E. QUERCIGH, *Su un notevole cristallo di gesso di Bellisio (Pesaro),* dal Socio PARONA;

A. G. ROSSI, *Un trasformatore dinamico per correnti alternate,* Nota I, dal Socio GRASSI;

A. TERRACINI, *Sulla rappresentazione delle forme quaternarie mediante somme di potenze di forme lineari,* dal Socio SEGRE.

LETTURE

Della posizione dei " fori palatini " nella partizione del genere " Capra " Linn.

Nota del Socio Prof. LORENZO CAMERANO.

(CON UNA TAVOLA).

Vari Autori cercarono ripetutamente di dividere il numeroso gruppo degli Stambecchi e delle Capre in due generi, o in due sottogeneri, o in due sezioni del genere *Capra* Linn. partendo principalmente dalla forma e dall'andamento delle corna.

Gray nel 1852 (" Catal. Ungul. Brit. Mus. ", p. 153) ammette i generi *Hircus* e *Ibex*. Nel " Catal. Ungul. Brit. Mus. ", p. 52 (1872) ammette il genere *Aegoceros*. A questo proposito osserva R. Lydekker (*Wild, Oxen, Sheep and Goats*, ecc., London, R. Ward, 1898, p. 241): " By Dr. Gray the goats here included under the " heading *Capra* were divided into (1) *Aegoceros*, (2) *Capra*, " and (3) *Hircus*; the first division including the tur, the second " the ibex, and the third the common goat and markhor. This, " however, is obviously incorrect. If such divisions, whether " generic or subgeneric, are adopted at all, *Capra* obviously " belongs to the common goat. In Pallas's description of his genus " *Aegoceros* the species first mentioned is *Ae. ibex*, so that this " generic term must stand for the ibex group, thus superseding " the later Ibex of Hodgson, and leaving the tur without a se- " parate designation at all. Bearing in mind, therefore, that, if " subgeneric divisions of *Capra* are adopted, a new term would " be required for the tur group, and seeing that the various " groups of goat intergrade to a very great degree, I have con- " sidered it advisable to make no such divisions at all ".

C. G. Giebel nel 1855 (*Die Säugethiere*, p. 284) divide il genere *Capra* in due gruppi:

A) Ibex (" die Hörner vorn breit, dreikantig und stark " geknotet ") e vi comprende: *C. ibex* Linn., *C. hispanica* Schimp., *C. pyrenaica* Schinz., *C. Cebennarum* Gervais, *C. sibirica* Pall., *C. caucasica* Güld., *C. Beden* Wag., *C. Pallasi* Schinz.

B) Hircus (" die Hörner comprimirt, vorn gekeilt ") e vi comprende: *C. Falconeri* Hügel., *C. aegagrus* Gmel., *C. hircus* Linn., *C. ihazal* Hodgs.

Pure nel 1855 P. Gervais (*Histoire nat. des mammifères*, II, p. 188) divide le specie del genere *Capra* Linn. in due generi:

1° Gen. *Ibex* Pall. (" Les Bouquetins ont le museau entièrement vêtu. Leurs cornes, habituellement noueuses et peu " divergentes, sont soutenues par des axes osseux dont tout " l'intérieur est celluleux ") e vi comprende: *I. alpinus* Gerv., *I. pyrenaica*, *I. hispanicus*, *I. caucasica*, *I. sibiricus* = a *I. Pallasii*, *I. himalayanus*, *I. nubianus*, *I. Valie*.

2° Gen. *Capra* (" La Chèvre et son mâle, auquel on donne " le nom de Bouc, ont les cornes prismatiques à bord tranchant, " sans nodosités à leur face antérieure, et toujours plus ou " moins divergentes, surtout dans le sexe mâle; les éminences " osseuses qui en forment l'axe sont en grande partie pleines; " leur base seule est creusée par une grande cellule "). Vi comprende *C. aegagrus* e le capre domestiche.

La divisione proposta dal Gervais viene seguìta recentemente dal Menegaux (*La vie des animaux illustrée*, XVI, Baillière, Paris, senza data).

Trouessart nel suo *Catalogus mammalium*, II (Berlino, 1898-1899, p. 970) divide il genere *Capra* Linn. in due sottogeneri:

1° *Capra* (p. d.) Gervais, colle specie seguenti: *C. aegagrus* Gm., *C. cylindricornis* Blyth., *C. Rozeti* Pomel. fossile, *C. Cebennarum* Gerv. fossile, *C. corsica* F. Mayor foss., *C. pyrenaica* Schimp., *C. hispanica* Schimp., *C. Falconeri* Wagn.

2° *Ibex* Hodgs., colle specie: *I. sibirica* Meyer, *I. Dauvergnei* Sternd., *C. nubiana* F. Cuv., *C. Valie* Rüpp., *C. Mengesi* Noack., *C. caucasica* Güld., *C. Severtzowi* Menzb., *C. ibex* Linn.

Nel *Quinquennale supplementum* dello stesso lavoro il Trouessart, divide, nel 1904, il genere *Capra* Linn. in tre sottogeneri:

A) Capra Gervais, comprendendovi le specie: *C. Rozeti, Cebennarum, corsica, hircus* Linn., *aegagrus, cylindricornis, pyrenaica* e *caucasica.*

B) Ibex Frisch., colle specie: *I. nubiana, Vali, Severtzowi, ibex, priscus* Woldrich, *sibirica, Raddei* Matschie.

C) Orthaegoceros Trouess., colla sola specie: *O. Falconeri* Wagner, che nel catalogo precedente aveva incluso nel sottogenere *Capra* (p. d.).

Lo stesso Trouessart in un lavoro posteriore (*Faune des mammifères d'Europe*, Berlino, 1910) abbandona la divisione del genere *Capra* in sottogeneri e riunisce tutte le specie in un solo gruppo, aggiungendo: " On a essayé de subdiviser ce genre " en deux sous-genres (*Capra* propr. dit et *Ibex*), mais la limite " entre ces deux groupes semble difficile à fixer et nous lais- " serons ici toutes les espèces d'Europe réunies sous le nom de " *Capra* „.

Anche il Lydekker (op. cit., p. 268) dice: " all the members " of the genus are so closely connected that, as already men- " tioned, it appears impossible to divide them into sub-generic " groups distinguished by well-marked and shortly defined " characters „.

Questo concetto seguono il Miller (" Catal. of the Mammals of Western Europe „, Londra, 1912), il Lydekker (" Catal. of the Ungulate Mammals in the British Museum „, Londra, 1913) ed altri.

Senza dubbio la divisione delle specie del genere *Capra* Linn., in più generi, od anche in vari sottogeneri o sezioni si presenta non facile. Parecchi fra gli Autori più recenti hanno rinunziato a tentarla, non riuscendo soddisfacenti le divisioni proposte, di cui sopra ho detto. Io pure sono d'avviso che, se si tien conto soltanto dei caratteri usati per tale divisione, che sono essenzialmente quelli dedotti dalla forma delle corna, non si possa giungere ad una conveniente divisione in gruppi delle specie del genere *Capra*. Seguendo tali caratteri, secondo le diagnosi dei sottogeneri date dal Giebel (op. cit.), si ha un aggruppamento delle specie nei due sottogeneri *Ibex* e *Capra*, che apparentemente sembra buono, perchè al tempo del Giebel non erano state descritte le numerose forme moderne che rendono tale divisione, per quanto riguarda i caratteri delle corna, più incerta.

La stessa cosa si può dire per le diagnosi dei generi proposti dal Gervais. Meno accettabile ancora è l'aggruppamento delle specie nei due sottogeneri *Capra* e *Ibex* proposto dal Trouessart, in cui troviamo, ad esempio, la *C. aegagrus* e la *C. hircus* allontanate dalla *C. Falconeri*, e la *C. pyrenaica* allontanata dalla *C. ibex* e messa colla *C. aegagrus*, ecc.

Ho creduto utile di ristudiare la questione valendomi del numeroso materiale di cranii, di corna e di pelli di capre selvatiche delle collezioni dei Musei di Zoologia e di Anatomia comparata di Torino.

Il carattere, sopra citato, scelto dal Gervais, dell'essere l'asse osseo delle corna pieno e con una sola grande cavità alla base nelle Capre, o dell'essere invece scavato di numerose cavità per quasi tutta la loro lunghezza negli Stambecchi, non pare tale da servire per giudicare delle affinità fra le specie di capre selvatiche, perchè esso è in relazione colla forma e collo spessore del corno e trova la sua spiegazione in leggi meccaniche, come il Dürst ed altri hanno chiarito (confr. U. Dürst, *Les lois mécaniques dans le développement du crâne des cavicornes,* " C. R. Ac. Paris ", 137, p. 342 (1903)).

L'esame comparativo dei cranii delle forme selvatiche e domestiche del genere *Capra* ha fatto rivolgere la mia attenzione sopra i rapporti dei fori palatini colla sutura maxillo palatina.

Già il Forsyth Major nel suo lavoro: *Materiali per servire ad una storia degli Stambecchi* (" Atti Soc. Toscana di Sc. nat. ", vol. III, 1879) aveva accennato alle sopradette parti colle parole seguenti: " Mentre che nell'*Ibex* (delle Alpi), ciò è stato da me " verificato su tre cranii, i forami palatini sono situati dietro la " sutura maxillo palatina, nella *C. aegagrus, hircus* ed in quella " di Creta si trovano in questa sutura medesima, oppure un " poco davanti ad essa. Non ho fatto osservazioni a questo ri- " guardo su altre specie. Riguardo alla conformazione della " detta sutura, essa nel gruppo *Aegagrus* è più ad angolo acuto, " cioè si spinge maggiormente innanzi che nell'*Ibex* ".

L'esame da me fatto ha dato i risultati seguenti:

Capra ibex Linn. — I fori palatini sono relativamente grandi e sono spiccatamente collocati all'indietro della sutura maxillo palatina. Talvolta la distanza del foro palatino dalla

sutura è relativamente notevole, come mostrano le figure unite a questo lavoro e le figure 2, 3, 6, 20, 5 della tav. I del mio precedente lavoro: *Ricerche intorno allo Stambecco delle Alpi*, parte II, " Mem. R. Accademia delle Scienze di Torino „, ser. II, vol. LVI, 1906, e come mostrano pure le numerose figure dei palatini delle tavole I e II del mio lavoro intitolato: *Contributo allo studio dei Wormiani palato palatini e dei Wormiani medio palatini di Calori nei mammiferi*, " Boll. Mus. Zool. Anat. comp. Torino „, vol. XXX, n. 706 (1915).

Nel lavoro sullo Stambecco io dicevo in proposito: " La " forma della sutura dei palatini coi mascellari è alquanto va- " riabile, senza tuttavia raggiungere la forma che presenta nella " capra comune. È da osservare inoltre che i fori palatini sono " spiccatamente collocati all'indietro della sutura palatino-ma- " scellare e non sulla sutura stessa come ha luogo nella capra " comune. Nel numeroso materiale di cranii di stambecchi maschi " da me osservato, nessun esemplare ha presentato a questo " riguardo tendenza ad assumere caratteri caprini „.

La sutura maxillo palatina ha forma o diritta, o incurvata, od anche a punta, ma relativamente poco sporgente.

Capra pyrenaica Schinz. (*C. hispanica* Schimper, *C. cabrerae* Camer., *C. victoriae* Cabrer.). — In due cranii maschi, vecchi (uno della *Capra hispanica* Schimp. e l'altro della *C. cabrerae* Camer.) ho trovato i fori palatini collocati spiccatamente allo indietro della sutura maxillo palatina, come nella *Capra ibex*. Anche la sutura maxillo palatina è conformata come in questa ultima specie.

Capra nubiana F. Cuvier. — In tre cranii esaminati, i fori palatini sono, in uno di maschio della Nubia, spiccatamente allo indietro della sutura maxillo palatina, come nelle specie precedenti, e così pure in un cranio di femmina della Siria; nel terzo, che è di un maschio della Nubia, sono più avvicinati alla sutura maxillo palatina, senza che si possano tuttavia considerare come sulla sutura stessa.

La figura della parte palatina di un cranio di *Capra nubiana* (*sinaitica*) data dal Giebel (*Craniologischen Eigenthümlichkeiten einiger Steinböcke,* " Zeitsch. für die Gesammten Naturwiss. „, Berlino, 1879, tav. I, fig. 9), mostra i fori palatini spiccatamente allo indietro della sutura maxillo palatina.

Capra Walie Rüppell. — Da una fotografia di un cranio di questa rara specie, avuta per la cortesia di Olfield Thomas del British Museum, si vede che i fori palatini sono allo indietro della sutura maxillo palatina; ma vicini ad essa.

Capra caucasica Güldenst. (*C. cylindricornis* Blyth.). — I fori palatini sono non solo sulla sutura maxillo palatina, ma la volta superiore del canale palatino sporge alquanto al davanti della sutura stessa. Anche la figura di questa specie data dal Giebel (op. cit.) presenta la stessa conformazione della sutura maxillo palatina. Questa è quasi diritta, o poco sporgente a punta.

Capra sibirica Meyer (*C. s. merzbacheri* Lisewitz, *C. s. wardi*, *C. s. Filippii* Camer.). — Nei cranii delle sopradette sottospecie da me esaminati i fori palatini si presentano sempre o sulla sutura maxillo palatina, o non raramente col margine della volta del condotto palatino sporgente al davanti di essa. I palatini si protendono notevolmente allo innanzi fra i mascellari, ora essendo foggiati a punta, ora con margine estremo più o meno largo e rettilineo, come mostrano le figure unite a questo lavoro.

Capra aegagrus Erxleben. — I fori palatini sono sulla sutura maxillo palatina come nella specie precedente. I palatini ora si spingono in avanti notevolmente a punta fra i mascellari, ora no, e la sutura maxillo palatina risulta quasi rettilinea.

Nella *Capra domestica* i fori palatini e la forma della sutura maxillo palatina sono come nella *Capra aegagrus*.

Risulta da quanto precede che, secondo la posizione dei fori palatini rispetto alla sutura maxillo palatina, le specie del genere Capra si possono raggruppare nel modo seguente:

A) I fori palatini sono collocati spiccatamente all'indietro della sutura maxillo palatina. 1° *Capra pyrenaica* (*C. hispanica*): 2° *Capra ibex*; 3° *Capra nubiana*; 4° *Capra walie*.

B) I fori palatini sono collocati sulla sutura maxillo palatina e talvolta l'arcata superiore del canale palatino sporge al davanti di essa. 1° *Capra caucasica*; 2° *Capra sibirica*; 3° *Capra aegagrus*; 4° *Capra domestica*.

La notevole costanza del carattere in questione nei due gruppi di specie di Capre selvatiche lascia credere che esso valga ad indicare una stretta affinità fra esse, malgrado che il loro aspetto esterno, dato principalmente dalla forma e dallo sviluppo delle corna, non lo lasci supporre.

A mio avviso, le corna forniscono nelle Capre selvatiche caratteri non sufficientemente sicuri per riconoscere le affinità delle specie fra loro. Le corna di tutte le specie del genere Capra sono fondamentalmente foggiate sullo stesso piano e presentano, se esaminate in serie di individui un po' numerose, in tutte le specie un complesso di variazioni che si ripetono analogamente. Come ad esempio la maggiore o minore loro incurvatura, lo spessore maggiore o minore, il grado di divaricamento fra loro a partire dalla base, la tendenza maggiore o minore a piegarsi col loro apice verso l'esterno o verso l'interno od anche l'accenno a prendere la forma a spirale, forma che si rende specialmente spiccata nella *Capra falconeri*. Queste varie modalità di variazione si fanno più manifeste in una o nell'altra specie dei due gruppi sopradetti.

Nel 1° gruppo si osserva in prevalenza la forma del corno che si trova nella *Capra ibex* con nodosità molto spiccate, le quali tuttavia si riducono fin quasi a scomparire nella *C. pyrenaica*, nella *C. hispanica*, ecc., dove lo sviluppo laminare dello spigolo anteriore interno mostra quasi una tendenza ad assumere la forma di quello del corno della *Capra aegagrus* e della *Capra hircus*. La curvatura delle corna della *C. pyrenaica* ha fatto credere a parecchi Autori ad una affinità sua colla *Capra caucasica* e il Lydekker (op. cit.) nella tavola dicotoma delle specie del genere Capra le riunisce in un unico gruppo: " *A)* Horns „ perverted " homonymous, forming a double curve, " with the extreme tips turning upwards „. Ora la *Capra pyrenaica* (*C. hispanica*), per il carattere della posizione dei fori palatini, è quella che più si avvicina alla *Capra ibex*. Ad essa si mostra anche assai affine per il relativo minor sviluppo della barba dei maschi e per la non infrequente presenza dei Wormiani palato palatini (confr. L. Camerano, *Contributo allo studio dei Wormiani palato palatini e dei Wormiani medio palatini di Calori nei mammiferi*, " Boll. Mus. Zool. An. comp. Torino „, vol. XXX, n. 706 (1915)), mentre tali ossa non le ho osservate nei cranii di nessuna delle specie del secondo gruppo: nè altri, che io sappia, li ha trovati.

La *Capra sibirica* nella chiave dicotoma del Lydekker viene a trovarsi per la forma delle corna nello stesso gruppo della *C. ibex*: " *B)* Horns heteronymous, more or less scimitar-like,

" and knotted or knobbed in front, with the tips turning down-
" wards: beard long and restricted to chin ". Per la posizione dei fori palatini la *Capra sibirica* maggiormente si allontana dalla *C. ibex* per avvicinarsi spiccatamente alla *C. aegagrus*. La stessa cosa si dica per la *C. nubiana*, che per la posizione dei fori palatini deve entrare nello stesso gruppo della *C. ibex*, mentre la forma più compressa lateralmente delle corna la fanno simile alla *C. sibirica*.

I cranii delle varie specie di Capre selvatiche, confrontati fra loro, tenendo conto della divisione in due gruppi da me proposta, concedono le osservazioni seguenti:

Lacrimali. — Nella *Capra ibex* il margine del lacrimale, che è in rapporto colla fontanella " fronto-naso-maxillo-lacrimale ", è generalmente incavato nella sua metà posteriore per modo che la fontanella in questa regione riesce notevolmente larga e di forma grossolanamentre triangolare. Inoltre la parte anteriore del lacrimale si protende anteriormente a ricoprire, per un tratto più o meno lungo, il mascellare superiore nel suo margine in rapporto col nasale. Ciò si osserva pure nella *Capra pyrenaica* (*C. hispanica*), nella *Capra nubiana* e nella *Capra walie*, vale a dire in tutte le specie del 1° gruppo. Nella *C. sibirica* il margine sopradetto del lacrimale è spiccatamente convesso per modo che la fontanella " fronto-naso-maxillo-lacrimale " si trova ridotta a forma di fessura relativamente stretta coi margini quasi paralleli. La convessità del margine sopradetto del lacrimale si fa anche più spiccata nella *Capra caucasica*, dove la fontanella sopra nominata, sebbene un po' più larga che nella *C. sibirica*, tuttavia presenta in complesso lo stesso disegno. Nella *Capra aegagrus* e nelle Capre domestiche il margine del lacrimale in questione o è quasi rettilineo, o leggermente incavato per modo che la fontanella " fronto-naso-maxillo-lacrimale " è notevolmente più ampia e di forma grossolanamente rettangolare, allungata. A rendere più ampia la fontanella contribuisce anche il fatto che nella *C. aegagrus* e nelle *C.* domestiche il lacrimale non si estende nella sua parte anteriore a coprire il mascellare superiore, che rimane così direttamente a contatto per un tratto più o meno lungo colla fontanella stessa.

Da quanto si è detto segue che i rapporti reciproci del lacrimale e del mascellare superiore in riguardo alla fontanella

conferiscono alle specie dei due gruppi un *facies* particolare, che parla in favore del ravvicinamento delle diverse specie nei gruppi stessi, determinati dalla diversa posizione dei fori palatini rispetto alla sutura maxillo palatina.

Se ai due gruppi in questione si debba dare valore di generi, o di sottogeneri di un unico genere credo sia questione di minore importanza, poichè nell'accogliere l'uno o l'altro partito hanno larga parte i convincimenti personali del classificatore circa alla minore o maggiore larghezza da attribuirsi alle divisioni tassonomiche sopradette.

Pare a me che le specie selvatiche di stambecchi e di capre siano molto affini fra loro, come dimostrano anche i facili e fecondi incrocii che si possono ottenere fra alcune di esse, credo perciò di conservarle nell'unico genere *Capra* Linn., che potrebbe venir diviso in due gruppi: *A* e *B*, come sopra è già stato detto, col valore di sottogeneri. I caratteri deducibili dalla forma delle corna concorrono in seno a ciascun gruppo cogli altri caratteri a diagnosticare le varie specie, presentando nella loro forma dei probabili fenomeni di convergenza fra le specie dei due gruppi stessi.

Le specie ora ammesse nel genere *Capra* Linn. sono le seguenti: 1° *Capra caucasica* Güldenst.; 2° *Capra severtzowi* Menzb.; 3° *Capra pyrenaica* Schinz., *C. hispanica* Schimper; 4° *Capra ibex* Linn.; 5° *Capra sibirica* Meyer; 6° *Capra nubiana* F. Cuvier; 7° *Capra walie* Rüppel.; 8° *Capra hircus* Linn.; 9° *Capra Falconeri* Wagn.

Esse si possono dividere in due sottogeneri, caratterizzati, come sopra è stato detto, dalla posizione dei fori palatini:

A) **Euibex.** — 1° *ibex* Linn.; 2° *pyrenaica* Schinz., *hispanica* Schimper; 3° *nubiana* F. Cuvier; 4° *walie* Rüppel.

B) **Eucapra.** — 1° *sibirica* Meyer; 2° *caucasica* Güldst.; 3° *aegagrus* Gmel. (*C. hircus* Linn.) e Capre domestiche; 4° *Falconeri* Wagn.; 5° (?) *severtzowi* Menzb.

Sono da studiarsi meglio e da discutersi le numerose sottospecie che gli Autori moderni assegnano a varie di esse. Di ciò avrò occasione di occuparmi in un altro lavoro.

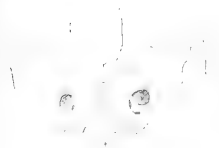



Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 11
Fig 12
Fig 13
Fig 14
Fig 20

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

(Le figure, salvo indicazioni in contrario, sono di grandezza naturale).

Fig. 1. Palatini di maschio adulto di *Capra ibex* Linn. — Alpi piemontesi.
„ 2. „ „ „ „ „
„ 3. „ „ „ „ „
„ 4. „ „ di *Capra pyrenaica* Schinz. (*C. p. hispanica* Schimp.). — Sierra Nevada.
„ 5. „ „ di *Capra pyrenaica* Schinz. (*C. cabrerae* Camer.). — Sierra Morena.
„ 6. „ „ di *Capra nubiana* F. Cuvier. — Nubia.
„ 7. „ femmina adulta di *Capra nubiana* F. Cuvier (*C. nubiana sinaitica* Hempr. e Ehrembg.). — Sinai.
„ 8. „ maschio adulto di *Capra sibirica* Meyer (*C. sibirica wardi* Lydek). — Ghiacciaio del Baltoro.
„ 9. „ „ di *Capra sibirica* Meyer (*C. sibirica filippii* Camer.). — Lahul.
„ 10. „ „ di *Capra sibirica* Meyer (*C. sibirica merzbacheri* Leisewt.).
„ 11. „ „ di Capra domestica. — Alpi piemontesi.
„ 12. „ „ di *Capra sibirica* Meyer (Loc.?).
„ 13. „ „ di *Capra aegagrus* Erxleben. — Persia.
„ 14. „ „ di *Capra aegagrus* Erxl. — Caucaso.
„ 15. „ „ di *Capra walie* Rüppell. — Simien - Abissinia (da una fotografia cortesemente avuta dal dott. Oldfield Thomas del Museo Britannico).
„ 16. „ „ di *Capra caucasica* Güldt. (*C. caucasica cylindricornis* Blyth.). — Caucaso.

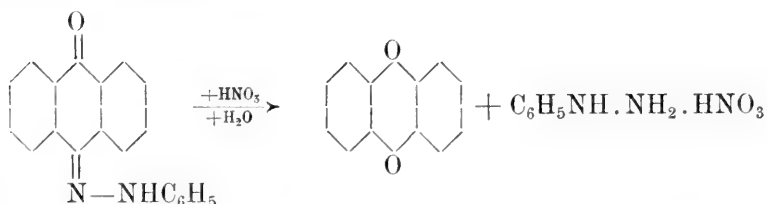
(Nelle figure seguenti: *l*, lacrimale — *m*, mascellare superiore *i*, intermascellare — *n*, nasale — *f*, frontale).

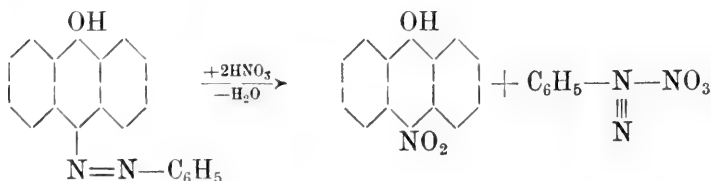
Fig. 17. Capra domestica. — Alpi piemontesi (femmina adulta).
„ 18. *Capra pyrenaica* (*C. cabrerae*). — Sierra Morena (maschio adulto).
„ 19. „ *ibex*. — Alpi piemontesi (maschio adulto).
„ 20. „ *sibirica*. — Norin (maschio adulto).
„ 21. „ *caucasica cylindricornis* (maschio adulto).
„ 22. „ *aegagrus*. — Persia (maschio adulto).
„ 23. „ *ibex*. — Alpi piemontesi (maschio vecchio).
„ 24. „ *aegagrus*. — Persia (maschio adulto).
„ 25. Capra domestica. — Eritrea (femmina).
„ 26. *Capra pyrenaica hispanica*. — Sierra Nevada (maschio adulto).
„ 27. „ *caucasica cylindricornis*. — Caucaso (maschio adulto).
„ 28. „ *nubiana*. — Nubia (maschio adulto).
„ 29. „ *sibirica*. — Naryn (maschio adulto).
„ 30. „ „ „ „
„ 31. „ *ibex*. — Alpi piemontesi (maschio vecchio).

Idrolisi degli antrachinonarilidrazoni con acido solforico.

Nota di G. CHARRIER

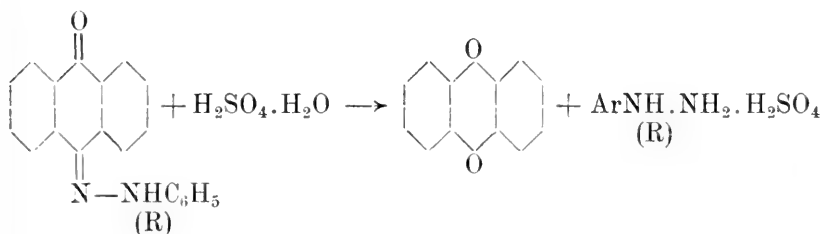
In una nota precedente [1] ho studiato l'azione della soluzione eterea di acido nitrico sul cosidetto benzolazoantranol, dimostrando come questo supposto ossiazocomposto debba venir considerato come antrachinonfenilidrazone, poichè viene idrolizzato dall'acido nitrico in nitrato di fenilidrazina e antrachinone secondo lo schema

$$C_{14}H_8(=O)(=N-NHC_6H_5) \xrightarrow[+H_2O]{+HNO_3} C_{14}H_8O_2 + C_6H_5NH.NH_2.HNO_3$$

Tale idrolisi prodotta dall'acido nitrico in soluzione eterea che caratterizza il benzolazoantranol come fenilidrazone, poichè un azocomposto avrebbe fornito per diazoscissione normale del suo nitrato, nitrato di fenildiazonio e nitroantranol (o il tautomero nitroantrone) secondo lo schema

$$C_{14}H_8(OH)(N=N-C_6H_5) \xrightarrow[-H_2O]{+2HNO_3} C_{14}H_8(OH)(NO_2) + C_6H_5-\underset{\underset{N}{|||}}{N}-NO_3$$

(1) G. *45*, I, 502 (1915).

mi fornì il mezzo di spiegare per analogia e in modo pienamente confermato dalle ricerche a cui sottoposi la reazione, il comportamento delle soluzioni dell'antrachinonfenilidrazone e in generale degli antrachinonarilidrazoni e dei loro eteri N-metilici (antrachinon-aril-metilidrazoni) in acido solforico concentrato.

Se si scioglie infatti una piccola quantità di questi corpi in alcuni grammi di acido solforico concentrato (si può impiegare l'acido di densità 1,84 sino a quello di densità 1,80), la soluzione che presenta un colore verde-azzurro cupo per gli idrazoni e verde smeraldo per i loro N-eteri metilici (antrachinonarilmetilidrazoni) si decolora dopo poco tempo; sono sufficienti pochi minuti per gli N-eteri, mentre occorre qualche giorno per gli arilidrazoni; esaminando a decolorazione avvenuta la soluzione solforica giallognola o rossiccia, si riconosce facilmente che essa contiene antrachinone e arilidrazina o asarilalchilidrazina, provenienti [1] da un'idrolisi analoga a quella prodotta dalla soluzione eterea di acido nitrico e rappresentata dallo schema

$$C_{14}H_8O{=}N{-}NHC_6H_5\ (R) + H_2SO_4.H_2O \longrightarrow C_{14}H_8O_2 + ArNH.NH_2.H_2SO_4\ (R)$$

Ora le soluzioni degli ossiazocomposti in acido solforico concentrato sono stabili (contengono i loro solfati) e mai si notò idrolisi di essi; per diluizione di queste soluzioni intensamente colorate si riottengono le sostanze inalterate. Gli eteri

[1] È noto che gli antrachinonarilidrazoni cogli acidi diluiti all'ebollizione vengono, per quanto difficilmente, idrolizzati in antrachinone e arilidrazine corrispondenti e come questa idrolisi avvenga molto più facilmente coi loro N-eteri: il fatto da me reso noto dell'analogo comportamento che questi corpi, di cui gli N-eteri sono certamente idrazoni, presentano colle soluzioni concentrate di acido solforico, è un nuovo argomento per sostenere l'analoga costituzione di entrambe le serie di corpi.

e gli acilderivati degli ossiazocomposti vengono semplicemente saponificati dall'acido solforico talora completamente e con cambiamento caratteristico della colorazione della soluzione.

Uno di questi casi molto interessante ho avuto occasione di descriverlo per il benzoilderivato del 4-o-anisilazo-1-naftol $C_{10}H_6\langle{}^{(1)OC_7H_5O}_{(4)N=N(1)C_6H_4(2)OCH_3}$, la cui soluzione in acido solforico concentrato di color rosso-violetto passa tosto al bleu-indaco per saponificazione in acido benzoico e in 4-o-anisilazo-1-naftol [1].

Mi pare perciò di poter conchiudere che questo comportamento delle soluzioni solforiche degli antrachinonarilidrazoni analogo a quello dei loro N-eteri, che sono senza alcun dubbio derivati dalla forma chinonica, presenti una notevole importanza come conferma della loro struttura idrazonica e per questo ho creduto interessante di renderlo noto.

Recentemente [2] L. Omarini, occupandosi in questo laboratorio dell'azione dei sali di diazonio sull'antranol, ebbe modo di confermare ampiamente su alcuni antrachinonarilidrazoni quanto io avevo trovato per l'antrachinonfenilidrazone [3].

Meyer e Zahn [4], che tentarono di trasformare in vari modi il cosidetto benzolazoantranol nella modificazione tautomera, non studiarono il comportamento della sostanza con acido solforico concentrato, reattivo pure in sommo grado efficace per produrre trasposizioni intramolecolari e modificazioni di forma. Se si trattano quantità più grandi di antrachinonfenilidrazone, di quelle impiegate nella prova già descritta, con acido solforico concentrato, si ottiene dopo poco tempo una soluzione colorata in rosso-vinoso cupo, la quale senza indugio versata sul ghiaccio fornisce, accanto a piccole quantità di antrachinone e fenilidrazina (solfato) prodotte dall'idrolisi sopradescritta, una sostanza quasi insolubile nell'acido solforico mediocremente diluito, solubile invece negli alcali acquosi con intensa colora-

---

[1] G. *44*, I, 616 (1914).
[2] G. *45*, II, 304 (1915).
[3] Loco citato.
[4] A. *396*, 152 (1913).

zione azzurra, sostanza che potrebbe avere importanza per la conoscenza delle modificazioni dell'antrachinonfenilidrazone e per la sua struttura e di cui proseguo lo studio.

Antrachinonfenilidrazone e acido solforico concentrato.

Se si scioglie dell'antrachinonfenilidrazone in piccola quantità (gr. 0,1 circa) in acido solforico concentrato (densità da 1,80 a 1,84), si nota dopo qualche giorno decolorazione quasi completa del liquido, e se si lascia esposto all'aria il saggio in modo che la soluzione solforica possa assorbire acqua e lentamente diluirsi, si vede a poco a poco cristallizzare una sostanza in aghi leggermente giallognoli, che facilmente si riconosce per antrachinone. Versando il contenuto della provetta, nella quale si trattò la sostanza con acido solforico, su ghiaccio si separa ancora dell'altro antrachinone, e il liquido filtrato dall'antrachinone separatosi dimostra di contenere un'idrazina, poichè riduce energicamente con sviluppo gassoso il liquido di Fehling e il nitrato d'argento ammoniacale.

Operando con quantità maggiori (qualche grammo) di antrachinonfenilidrazone sciolto nella quantità corrispondente di acido solforico in modo da avere soluzioni molto diluite, si ottiene versando dopo parecchi giorni (cioè quando la soluzione solforica è di color giallo-rossiccio) sul ghiaccio antrachinone insolubile e solfato di fenilidrazina nella soluzione solforica.

L'antrachinone raccolto e cristallizzato dall'acido acetico fuse a 284-285°.

La soluzione solforica alcalinizzata con soluzione di idrato potassico al 50 % e sbattuta con etere, cede a questo solvente la fenilidrazina, che venne ottenuta sotto forma di cloridrato aggiungendo alla soluzione eterea ben secca soluzione eterea di acido cloridrico.

Per caratterizzare la fenilidrazina si ottenne dal cloridrato con soluzione alcoolica di benzaldeide e un po' di acetato sodico il benzaldeidfenilidrazone, fusibile dopo cristallizzazione dall'alcool a 155-156°.

Se si trattano alcuni grammi di antrachinonfenilidrazone (gr. 7 di idrazone con gr. 150 di H_2SO_4, d = 1,84) con poco acido solforico concentrato e, appena la colorazione della soluzione azzurro-verdastra passa al rosso-vinoso, si versa questa sul ghiaccio, si ottiene, evitando assolutamente qualsiasi riscaldamento del liquido, un precipitato di color giallo-arancio, che si dimostra solubile per la massima parte in soluzione acquosa diluita di idrato sodico [1] con intensa colorazione azzurra.

Se si tratta la sostanza di color giallo-arancio con soluzione alcoolica di idrato potassico, si ottiene una soluzione colorata intensamente in azzurro, che filtrata e acidificata cautamente con acido acetico glaciale dà un liquido di color rosso intenso che per diluizione con qualche goccia di acqua lascia cristallizzare una sostanza in aghetti di color giallo-ranciato, con riflessi dorati, che si contraggono già a 120-125°, per decomporsi con vivo sviluppo gassoso a 221-222° e che all'analisi [2] diedero i numeri seguenti:

I. Gr. 0,1200 di sostanza diedero cc. 4,5 di azoto (H_0 = 741,678, t = 11°), ossia gr. 0,005 259.

II. Gr. 0,2454 di sostanza fornirono cc. 10 di azoto (H_0 = 740,806, t = 10°), ossia gr. 0,011 721.

Cioè su cento parti:

	I	II
Azoto	4,38	4,77.

La sostanza si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rosso-vinosa, nell'idrato sodico diluito con colorazione azzurra: tale soluzione però è poco stabile, perchè dopo poco tempo si scolora con separazione di fiocchi bianchi. L'acido acetico pare scomponga pure la sostanza all'ebollizione. L'acido

---

(1) Si distingue perciò nettamente dall'antrachinonfenilidrazone, il quale è insolubile nelle soluzioni acquose degli idrati alcalini e diventa solubile soltanto per l'aggiunta di alcool etilico o metilico e di acetone.

(2) La prima analisi venne eseguita sulla sostanza di prima cristallizzazione, la seconda su quella separatasi dalle acque madri.

nitrico ($d = 1{,}40$) all'ebollizione la attacca vivamente, dando probabilmente un nitroderivato giallo, che si separa per diluizione del liquido.

La sostanza di color giallo-arancio è solubile in acqua specialmente a caldo con colorazione gialla, molto solubile nell'alcool con colorazione rossa. È poco solubile in cloroformio, in benzolo, ed in etere etilico.

Nella cristallizzazione dell'antrachinone, ottenuto per azione dell'acido solforico sull'antrachinonfenilidrazone, dall'acido acetico glaciale, notai la presenza di una sostanza in quantità maggiori o minori, ma sempre molto piccole, insolubile in questo solvente e facilmente cristallizzabile dall'acqua, dalla quale si ottiene per aggiunta di un po' di carbone animale in splendidi aghi piatti incolori, fusibili con decomposizione e vivo sviluppo gassoso a 281-282°.

La sostanza diede all'analisi (dosamento di azoto) il risultato seguente:

Grammi 0,1432 di sostanza fornirono cc. 16,6 di azoto ($H_0 = 741{,}678$, $t = 11°$), ossia gr. 0,019 402.

Cioè su cento parti:

Azoto 13,54.

La sostanza è pochissimo solubile in alcool, etere e cloroformio, praticamente insolubile in acido acetico glaciale. Non pare dimostri comportamento basico e non potei ottenere da essa sali, per quanto le soluzioni acquose di acido solforico la sciolgano apparentemente di più dell'acqua pura. Le sue soluzioni acquose riducono fortemente il liquido di Fehling.

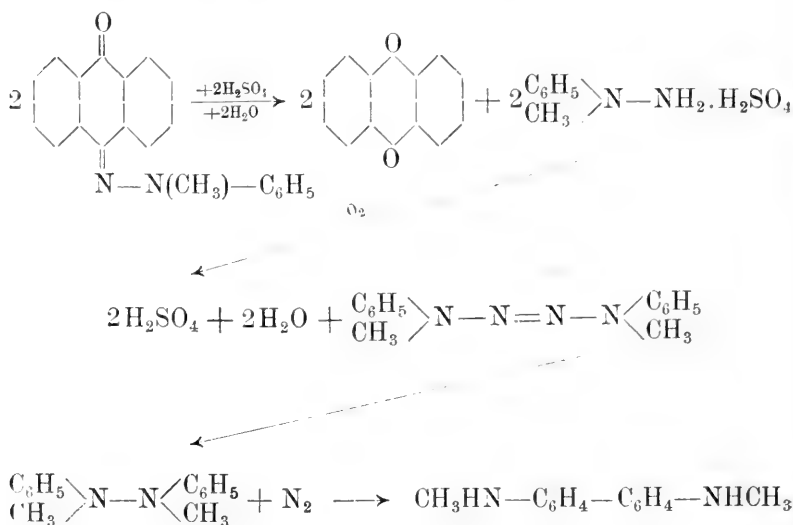
Non potei continuare lo studio di tale corpo per le piccole quantità che potevo avere a disposizione.

Antrachinonfenilmetilidrazone e acido solforico concentrato.

L'azione dell'acido solforico concentrato sull'antrachinonfenilmetilidrazone (N-etere metilico) porta ad antrachinone da un lato e dall'altro a solfato di as-metilfenilidrazina, mentre si sarebbe potuto prevedere in questo caso per azione dell'ossigeno dell'aria e per conseguente eliminazione di azoto dal tetrazone così ottenuto, per azione dell'acido solforico concentrato la formazione della N-N'-dialchilbenzidina, in questo caso della N-N'-dimetilbenzidina, secondo lo schema

$$2\ C_{14}H_8O{=}N{-}N(CH_3){-}C_6H_5 \xrightarrow[+2H_2O]{+2H_2SO_4} 2\ C_{14}H_8O_2 + 2\ {}^{C_6H_5}_{CH_3}{>}N{-}NH_2 . H_2SO_4$$

$$\xrightarrow{O_2}\ 2H_2SO_4 + 2H_2O + {}^{C_6H_5}_{CH_3}{>}N{-}N{=}N{-}N{<}^{C_6H_5}_{CH_3}$$

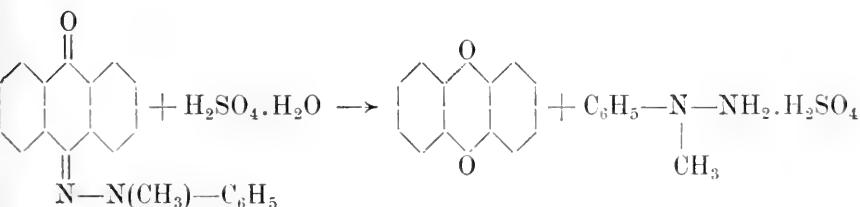
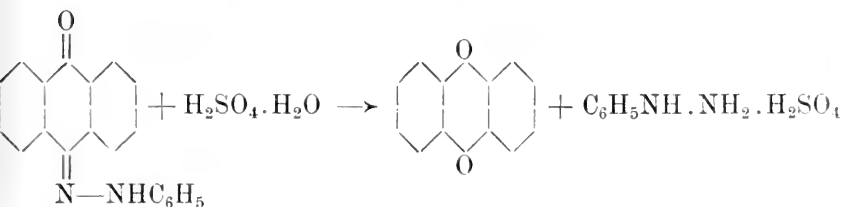
$$\longrightarrow\ {}^{C_6H_5}_{CH_3}{>}N{-}N{<}^{C_6H_5}_{CH_3} + N_2 \longrightarrow CH_3HN{-}C_6H_4{-}C_6H_4{-}NHCH_3$$

Si sa infatti che i tetrazoni, ottenuti facilmente per ossidazione dalle as-alchilaril- e as-diarilidrazine. per azione dell'acido solforico concentrato perdono azoto e si trasformano in idrazine tetrasostituite, che si traspongono a loro volta in s-N-di-alchil- o diaril-benzidine.

La soluzione solforica del solfato di as-metilfenilidrazina come delle altre as-metilarilidrazine ottenute per azione del-

l'acido solforico concentrato sugli antrachinonarilmetilidrazoni è stabile di fronte all'ossigeno molecolare, per cui la reazione si arresta al primo tempo indicato dallo schema soprascritto. Versando infatti sul ghiaccio la soluzione solforica si ottiene antrachinone insolubile e fusibile dopo cristallizzazione dall'acido acetico a 284-285°, mentre il solfato di as-metilfenilidrazina opportunamente decomposto con soluzione di idrato potassico fornisce la base, che con aldeide benzoica dà l'idrazone fusibile a 102-103°.

L'antrachinonfenilidrazone e l'antrachinonfenilmetilidrazone si decompongono perciò in soluzione solforica in modo perfettamente analogo secondo gli schemi seguenti:

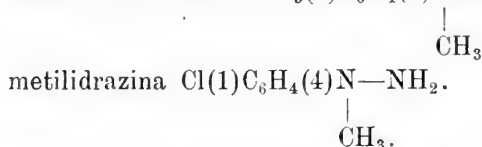
$$C_{14}H_8O(=N-NHC_6H_5) + H_2SO_4.H_2O \longrightarrow C_{14}H_8O_2 + C_6H_5NH.NH_2.H_2SO_4$$

$$C_{14}H_8O(=N-N(CH_3)-C_6H_5) + H_2SO_4.H_2O \longrightarrow C_{14}H_8O_2 + C_6H_5-N(CH_3)-NH_2.H_2SO_4$$

Azione dell'acido solforico su altri idrazoni dell'antrachinone.

Trattando, nel modo descritto a proposito dell'antrachinonfenilidrazone e del suo N-etere metilico, con acido solforico concentrato l'o-tolil- e il p-tolilidrazone, il p-clorofenilidrazone, e l'α-naftilidrazone ed i loro N-eteri metilici, cioè il metil-o-tolil- e il metil-p-tolilidrazone, il metil-p-clorofenilidrazone e il metil-α-naftilidrazone, si nota che le soluzioni molto diluite di questi corpi in acido solforico concentrato si decolorano più o meno

rapidamente a seconda che si tratta degli N-eteri o degli idrazoni e, analogamente a quanto fu reso noto per il fenilidrazone dell'antrachinone e per il suo N-etere metilico, si ottiene sempre diluendo la soluzione solforica antrachinone insolubile facilmente caratterizzato dal punto di fusione e dalla reazione colorata con idrossido di sodio (soluzione) e polvere di zinco, mentre nel liquido solforico diluito si trova il solfato della arilidrazina o della as-metilarilidrazina corrispondente.

Le idrazine, ottenute nell'idrolisi allo stato di solfato, vennero isolate dopo aver decomposto il solfato con eccesso di idrato potassico dibattendo il liquido alcalino con etere, seccando questo accuratamente con cloruro di calcio fuso, concentrando fortemente e aggiungendo soluzione eterea di acido cloridrico. Il cloridrato della base sciolto in acqua venne decomposto con ammoniaca e in alcuni casi si potè ottenere la base libera allo stato cristallizzato.

Alcune di queste idrazine non sono ancora note, come l'as-metil-o-tolilidrazina $CH_3(1)C_6H_4(2)N(CH_3)—NH_2$ e la as-p-clorofenil-metilidrazina $Cl(1)C_6H_4(4)N(CH_3)—NH_2$.

I cloridrati di queste basi sono abbastanza stabili e formano cristalli prismatici incolori, quando si separano dalla soluzione eterea della base con acido cloridrico sciolto in etere.

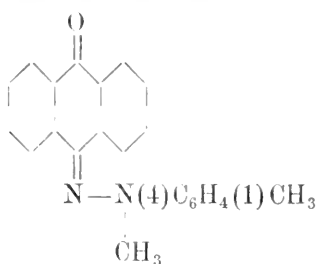
Le idrazine libere sono invece estremamente instabili e si colorano rapidamente in bruno: non potei perciò determinarne il punto di fusione, ma esse sono solide alla temperatura ordinaria.

L'as-metil-p-tolilidrazina $CH_3(1)C_6H_4(4)N(CH_3)—NH_2$ è costituita, secondo Labhardt e V. Zembruscki [1], da un olio poco stabile, che essi ottennero per riduzione della nitroso-metil-p-toluidina $CH_3(1)C_6H_4(4)N(CH_3)—NO$.

---

[1] B. *32*, 3062 (1899).

L'as-metil-p-tolilidrazina ottenuta da me per azione dell'acido solforico sull'antrachinon-metil-p-tolilidrazone

$$O$$
$$\|$$
$$C_{14}H_8$$
$$\|$$
$$N-N(4)C_6H_4(1)CH_3$$
$$\quad |$$
$$\quad CH_3$$

e messa in libertà dal suo cloridrato con ammoniaca è solida per quanto poco stabile e cristallizza anche dall'etere in fogliette giallognole, che tosto all'aria imbruniscono. Per la sua instabilità e per la poca quantità di sostanza che potei preparare, non ho potuto assoggettarla all'analisi, nè determinarne con esattezza il punto di fusione, e soltanto potei constatare che la sostanza leggermente resinificata si fondeva nell'acqua bollente.

Torino, Istituto Chimico della R. Università, Febbraio 1916.

Sopra un nuovo metodo per l'analisi dei grassi irranciditi.

Nota del Dr. GIOVANNI ISSOGLIO.

È noto che tutti i principii alimentari di natura organica che costituiscono nel loro insieme gli alimenti qual più, qual meno, sono suscettibili di alterazioni; così gli albuminoidi se si trovano in determinate condizioni di umidità e di temperatura, alla presenza di speciali microorganismi subiscono la fermentazione caratteristica detta putrefazione; i carboidrati a peso molecolare basso sono attaccati dai fermenti con formazioni di sostanze svariatissime; i grassi a loro volta pure vanno incontro a modificazioni profonde, le quali oltre a scinderne il complesso edificio molecolare, si riverberano molto sensibilmente sui caratteri organolettici dei grassi stessi.

Come per tutti gli altri principii organici alimentari così anche per i grassi, lo studio di queste modificazioni concorre in modo specialissimo all'apprezzamento del grado o della misura dell'alterazione, cui il grasso è andato incontro.

Da tempo immemorabile col nome generico di *irrancidimento* è compreso nel linguaggio tanto famigliare, quanto scientifico, tutto quel complesso di alterazioni che si succedono ed avvicendano nei grassi, in virtù delle quali, i medesimi vengono ad assumere colore odore sapore e consistenza notevolmente diversi da quelli dimostrati prima dell'inizio dell'alterazione. Tale trasformazione dal punto di vista alimentare si effettua sempre per lo più in senso peggiorativo, per cui mentre prima di irrancidirsi il grasso poteva costituire un alimento pregevole e delicato, ad irrancidimento iniziato o progredito lo stesso grasso diventa, per i pessimi caratteri organolettici di cui viene ad essere fornito, assolutamente inadatto ad uso alimentare.

Sino ad ora il miglior criterio per giudicare e concludere intorno alla rancidità dei grassi era quello fornito dai sensi.

Parè dimostrato infatti che il loro indice di acidità da molti proposto per tale scopo non sia sufficiente per distinguere quelli sani, da quelli irranciditi, poichè spesso molti grassi che al sapore sarebbero condannevoli, presentano ancora, ciò non ostante, un numero di acidità basso e pressochè normale.

L'acidità che accusano i grassi è dovuta infatti a due cause: nei grassi freschi agli acidi grassi liberi a peso molecolare alto, insolubili in acqua e quindi non avvertibili dai sensi; nei grassi irranciditi a questi stessi acidi grassi liberi di alto peso molecolare, cui si aggiungono inoltre gli acidi organici a peso molecolare basso sviluppatisi in seguito all'irrancidimento, i quali per essere solubili in acqua hanno la proprietà di essere avvertibili facilmente dalle papille gustatorie, anche quando si trovano in piccola quantità.

Ne viene che un grasso con elevato numero di acidità insolubile può non essere rancido, mentre un altro grasso con numero sensibilmente minore di acidità insolubile, ma nel quale già si svilupparono piccole quantità di acidi solubili, deve essere ritenuto rancido, per quanto il suo indice di acidità totale sia ancora inferiore a quello del grasso precedente.

Un criterio di apprezzamento che si fonda però esclusivamente sovra i caratteri organolettici di una sostanza alimentare appare fallace, perchè esso varia da individuo ad individuo ed è lasciato troppo all'arbitrio di chi deve esprimerlo, i sensi potendo anche trarci in inganno.

Inoltre se i sensi possono rendere manifesta l'alterazione, non potranno mai darcene l'esatta misura, appunto perchè questi, a seconda degli individui, presentano sempre maggiore o minor delicatezza.

Diventa perciò indispensabile che l'azione dei sensi, già di per sè utilissima, sia integrata con saggi destinati a porre in evidenza, oltre al predetto indice di acidità, quelle decomposizioni molecolari di cui sopra si è fatto cenno, che si verificano ed avvicendano nei grassi sin dall'inizio, per opera dell'alterazione che si vuol non soltanto rilevare, ma misurare.

È cosa nota infatti che l'irrancidimento non fa soltanto aumentare alquanto l'indice di acidità dei grassi, ma fa variare anche la composizione chimica di essi, perchè gli agenti fisici, chimici e biologici di distruzione attaccano in special modo i

doppi legami dei radicali acidi non saturi eterificati colla glicerina, facendo in tal modo diminuire il numero dello jodo. È risaputo altresì, secondo Lewkowitsch, che i grassi rancidi presentano un numero di acetile più elevato dei corrispondenti grassi freschi, sia che si formino dei mono- e digliceridi in relazione colla saponificazione trigrada delle sostanze grasse, sia che abbia luogo la trasformazione dell'acido oleico in acido ossistearico in seguito ad ossidazione. Questi dati analitici sono tutti utilissimi nei casi di contestazioni, però riescono meno utili nella pratica, perchè richiedono operazioni piuttosto lunghe, che non sono sempre applicabili in quei laboratorii in cui si devono giudicare campioni molteplici di grassi in breve volgere di tempo.

Questa è la ragione per la quale io ho cercato di ottenere un nuovo indice per i grassi sani ed alterati, col quale sia dato di mettere in evidenza anzitutto se un grasso ha subìto avarie ed in caso affermativo dare la misura dell'entità delle avarie stesse subìte da detto grasso in causa della cattiva conservazione.

Non è mio còmpito qui rifare la storia di tutti gli studi che si sono eseguiti intorno all'irrancidimento dei grassi, però non credo sia inutile riunire in un breve quadro le idee, che vennero emesse circa gli agenti di alterazione dei grassi, poichè si vedrà che questi agenti medesimi rappresentano un fattore importantissimo a seconda delle modalità, colle quali si svolge la loro azione, per le decomposizioni che avvengono in seno ai grassi stessi.

Molti autori preferiscono attribuire la causa di queste alterazioni ai microorganismi, che attaccano i grassi favorendo la loro saponificazione per opera delle lipasi contenute nelle loro cellule e la ossidazione in causa delle ossidasi secrete da questi stessi fermenti figurati. Di questa opinione sono Fermi (1), Wirchow (2), Amthor (3), Reinmann (4). Al contrario Späth (5), avendo osservato che i grassi sterilizzati a 150° subivano l'irrancidimento per azione della luce, del calore e dell'ossigeno dell'aria, mette

(1) " Archiv für Higiene ,, 1890, *10*, 1.
(2) " Repertorium der anal. Chemie ,, 1886, p. 489.
(3) " Z. für analyt. Chem. ,, 1899, *38*, 19.
(4) " Centralblatt für Bakter. ,, 1900, *6*, pp. 131, 166, 209.
(5) " Z. für analyt. Chem. ,, 1896, *35*, 471.

in dubbio che necessiti la presenza dei microorganismi, perchè avvenga la alterazione dei grassi. Di questa idea è anche Duclaux (1), il quale avrebbe obbiettato che i microorganismi non possono avere alcuna azione sopra i grassi, privi di sostanze albuminoidi e privi di acqua, perchè a questi esseri viventi viene a mancare il naturale nutrimento del protoplasma, onde soltanto all'ossigeno dell'aria, alla luce ed al calore devonsi attribuire le cause dell'irrancidimento. Del medesimo parere sarebbe ancora il Ritsert. D'altra parte si sa che la luce può produrre in presenza dell'ossigeno numerose ossidazioni, essendo note per le ricerche del Papasogli (2) le ossidazioni che in causa della luce subiscono gli olii vegetali ed animali e parimenti gli olii essenziali.

In questi ultimi anni le esperienze di D. Berthelot e Gaudechon (3) dimostrarono l'influenza grandissima che presentano le radiazioni ultraviolette nella decomposizione fotolitica delle sostanze organiche, specialmente di quelle non sature ricche di numerosi doppi legami.

Se però si pensa che le alterazioni dei grassi sempre si verificano quando la loro conservazione non fu accurata, cioè quando furono abbandonati alla mercè degli agenti fisici, chimici e biologici, si può ammettere che l'irrancidimento sia da attribuirsi a tutti questi fattori aventi azione comune o simultanea.

All'azione dei microorganismi infatti coadiuvati dall'aria, dall'umidità, dalla luce e dal calore si deve l'irrancidimento dei grassi, poichè queste sostanze in pratica mai si conservano sterilizzate, o fuori del contatto dell'aria in ambiente oscuro, secco e freddo, ma invece per lo più si tengono in recipienti comuni alla luce diffusa, a temperatura ordinaria in contatto coll'aria nella quale si trova l'ossigeno, il vapor acqueo ed il pulviscolo atmosferico.

Stando così le cose si capisce che non si può negare l'azione di uno piuttosto che l'altro agente a causare l'irrancidimento, ma tutti devono essere accettati.

---

(1) *Le lait*, Paris, 1887.

(2) " Stazioni sperim. Agrarie ", 1899, pp. 485-487.

(3) " Revue générale des sciences ", 1911, XXII, pp. 309, 322.

Alcuni di questi fattori possono bene, è vero, accelerare la velocità di reazione e di decomposizione dei grassi, come avviene specialmente in causa della luce e del calore, per cui è naturale che si abbiano grassi conservati da lungo tempo al riparo da questi agenti fisici, i quali presentano dei caratteri di conservazione migliore di quelli che, pur datando da un tempo minore, furono esposti ai raggi solari, i quali, come è noto, hanno una viva azione calorifica e fotochimica.

Studii interessanti dimostrano, come la presenza di metalli, di ossidi e sali metallici nei grassi possa accelerare la loro decomposizione.

Essendo però nel nostro caso di maggiore importanza esaminare quali solo le sostanze che si producono durante l'irrancidimento, perchè esse ci serviranno maggiormente per i loro caratteri chimici a decidere intorno all'entità di alterazione di un grasso, così ritengo sufficiente questo breve cenno delle cause che producono detta decomposizione e mi occuperò delle reazioni chimiche, che portano alla scissione dell'edificio molecolare dei gliceridi, che costituiscono le sostanze grasse.

Langbein e Stohmann (1) colle loro numerose ricerche calorimetriche stabilirono, che le sostanze grasse che subirono l'irrancidimento ebbero a soffrire una vera combustione lenta, poichè osservarono essi che il calorico di combustione nel calorimetro è sempre minore per i grassi rancidi che per i grassi freschi.

La differenza in calorie, dovuta alla ossidazione lenta che i grassi subiscono all'aria, è messa in chiaro da questi numeri, i quali esprimono le calorie sviluppate da 1 grammo di grasso:

Burro fresco	9215
„ rancido	8754
Grasso suino fresco . . .	9464
„ „ rancido . . .	8565.

Durante questa lenta ossidazione, come accade per le sostanze albuminoidi in putrefazione, si formano sostanze a peso

(1) " Journal für prakt. Chemie „, 1890, t. 41.

molecolare basso, le quali hanno dei caratteri chimici del tutto differenti dalle sostanze grasse che le originano.

Tutti i grassi contenendo numerosi radicali acidi a doppi legami (acido oleico, acido ricinoleico) sono suscettibili di decomporsi ed i prodotti che si formano in natura durante l'irrancidimento sono uguali a quelli che si ottengono ossidando violentemente *in vitro* detti acidi od i loro gliceridi.

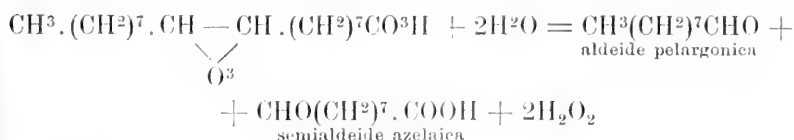
I processi disintegranti del laboratorio, benchè siano in contrasto evidente con quelli naturali per le modalità con cui avvengono (essendo noto che questi ultimi si svolgono con mezzi blandi, a temperatura ambiente senza l'intervento di agenti chimici energici, mentre nel laboratorio le disintegrazioni si producono per lo più a temperatura elevata con l'impiego di reattivi chimici potenti), tuttavia le sostanze chimiche che da queste reazioni si originano sono paragonabili.

Emded (1) infatti aveva notato, che facendo agire il permanganato di potassio in determinate condizioni sopra l'acido oleico si formavano gli acidi diossistearico, pelargonico, azelaico e formico.

Harries (2) ed i suoi allievi, Molinari (3) osservarono che trattando l'acido oleico in soluzione cloroformica o nel tetracloruro di carbonio coll'ozono vengono fissati quattro atomi di ossigeno, ossia una molecola di ozono si attacca al doppio legame ed il quarto atomo si collega al carbossile formando un *perossido ozonato*, il quale composto lavato con acqua contenente bicarbonato di sodio, perde un atomo di ossigeno trasformandosi nell'*ozonide normale*.

Il composto ozonato di cui sopra, fatto riscaldare a debole calore con acqua, si decompone in aldeide pelargonica e semialdeide azelaica, con parziale ossidazione dei due prodotti così ottenuti:

$$CH^3.(CH^2)^7.\underset{\diagdown\;\diagup \atop O^3}{CH - CH}.(CH^2)^7CO^3H + 2H^2O = \underset{\text{aldeide pelargonica}}{CH^3(CH^2)^7CHO} +$$

$$+ \underset{\text{semialdeide azelaica}}{CHO(CH^2)^7.COOH} + 2H_2O_2$$

(1) " J. chem. Society London ,, 1898, t. LXXIII, p. 627.

(2) Harries e Thieme, B., 1906, t. XXXIX, 2814; Harries, B., id. id., p. 3729; Harries e Türk, B., id. id., p. 3732.

(3) Molinari, B., id. id., p. 2737.

Queste sostanze medesime si formano in seguito all'irrancidimento dei grassi per ossidazione del radicale dell'acido oleico e degli acidi non saturi, che si trovano accanto a questo eterificati nella molecola della glicerina. Così lo Scala (1) in seguito alle sue pregevoli ricerche intorno all'irrancidimento dei grassi avrebbe riscontrato, che le sostanze le quali caratterizzano questa alterazione sono i prodotti aldeidici accanto ad acidi volatili liberi corrispondenti a queste aldeidi, come si vede chiaro nell'elenco comparativo dallo stesso autore istituito:

Acidi volatili liberi	Aldeidi
Formico	—
Butirrico	Butirrica
Caproico	Caproica
Enantilico	Enantilica
Pelargonico	Pelargonica.

Tutte queste sostanze che ho sovrascritto, all'opposto dei grassi, i quali sono molto stabili, insolubili in acqua e non trascinati dalla corrente di vapor acqueo se non in piccolissima quantità, tali sostanze, dico, sono, invece, solubili in acqua e facilmente trasportati dal vapor acqueo, per cui distillando i grassi rancidi in corrente di vapore si ritrovano le aldeidi e gli acidi sovrascritti nel distillato, come d'altronde aveva già dimostrato lo Scala predetto.

La presenza di questi composti aldeidici spiega perchè i grassi abbiano la proprietà di dare numerose reazioni colorate in presenza di fenoli e di sostanze condensanti, come l'acido cloridrico e l'acido solforico concentrato. Così si spiegherebbe la reazione del Kreis (2), secondo il quale i grassi rancidi sbattuti con una soluzione eterea di floroglucina ed acido cloridrico concentrato acquistano colorazione rossa vivace.

Barbet e Jandrier (3) avevano dimostrato come molti fenoli,

(1) " Staz. agr. sperim. italiane ,, 1897, vol. 30, p. 613; " Gazzetta chimica italiana ,, vol. 38 (1908), parte I, p. 307.

(2) " Chem. Ztg. ,, 1899, *23*, 802; 1902, *26*, 1014; 1904, *28*, 956.

(3) " Comptes Rendus du 2e Congrès de chimie appliquée ,, Paris, 1896; Girard et Cuniasse, *Analyse des alcools et des spiriteux*, p. 129.

in presenza di alcool contenente tracce di aldeidi, fossero capaci di dare per azione dell'acido solforico concentrato reazioni colorate, che variano a seconda della natura dell'aldeide. Istrati (1) ha osservato lo stesso fenomeno ed ha ampliato le stesse esperienze colle più svariate qualità di fenoli.

Io ho sperimentato coi grassi rancidi e diversi fenoli ed ho potuto assicurarmi, che a differenza dei grassi freschi, che presentano quasi sempre reazioni negative, quelli alterati dànno con questi composti chimici reazioni colorate vivaci ed evidentissime.

Le sostanze grasse da analizzare furono addizionate ad una soluzione satura benzolica dei seguenti fenoli o derivati fenolici: Vanillina, resorcina, timolo; ad un cm^3 della soluzione benzenica aggiunsi 10 gocce della sostanza grassa da saggiare e quindi un cm^3 di acido nitrico ad 1.38: dopo un po' di tempo agitando i liquidi si separano in due strati, che si presentano diversamente colorati a seconda che i grassi sono freschi oppure alterati. Queste reazioni colorate ben inteso valgono specialmente per gli olii di olivo genuini e per i grassi animali, che non siano stati addizionati di olii di semi, i quali, come è noto, colla reazione di Bellier (2) dànno colorazioni vivacissime:

	Reattivo sciolto nel benzene	Con acido nitrico D. 1.38	
		liquido acido	soluz. benzolica
Grassi rancidi	vanillina	coloraz. rosso vinosa	incoloro
	resorcina	„ violetta	violetto chiaro
	timolo	„ rosso arancio	giallo arancio
Grassi freschi	vanillina	„ rosea	incoloro
	resorcina	incoloro o legg.^{te} rosea	„
	timolo	coloraz. rosea	„

(1) “ Bulletin de la Société des sciences de Bucarest „, 1898.

(2) D. M. Malacarne, *Contributo allo studio delle reazioni colorate fornite dagli olii di semi con alcuni fenoli in presenza di acido nitrico,* “ Giornale di Farmacia e Chimica di Torino „, t. LXII, 1913.

Sostituendo all'acido nitrico ad 1.38 l'acido solforico all'80 °/₀ D. 1.73 ed agitando, dopo pochi minuti si separano anche in questo caso due strati differentemente colorati:

	Reattivo sciolto nel benzene	Acido solforico D. 1.73	
		liquido acido	soluz. benzolica
Grassi rancidi	vanillina	rosso vinoso	incoloro
	resorcina	„ cremisi	rosso bruno
	timolo	„ ranciato	ranciato
Grassi freschi	vanillina	roseo	giallo
	resorcina	incoloro	incoloro
	timolo	giallo	„

Adoperando altri fenoli si possono variare le colorazioni; tutto questo genere di esperienze è ancora totalmente inesplorato ed io credo che sia degno di studio. Per il caso mio sono sufficienti questi pochi saggi per dimostrare nei grassi rancidi la presenza di composti aldeidici.

La metafenilendiamina ha anche azione sopra le aldeidi, assumendo in presenza di queste una tinta gialla più o meno intensa. Sopra questo fenomeno è fondata appunto la reazione di Schmid (1), per distinguere i grassi rancidi da quelli non alterati; ecco come opera l'autore:

20 gr. del grasso da saggiare si trattano con 100 cm³ di acqua, in un matraccio a collo lungo collegato ad un generatore di vapore acqueo distillando in corrente di vapore. Si raccoglie il distillato in un matraccio da 100 cm³, nel quale si versarono, sino dall'inizio della distillazione, 5 grammi di una soluzione di fresco preparata all'1 °/₀ di cloridrato di metafenilendiamina. Mentre i grassi freschi dànno colorazione appena giallognola, i grassi rancidi presentano un distillato che si colora intensamente in giallo sino al giallo bruno.

Il reattivo può essere aggiunto dopo che il liquido è stato distillato ed allora la colorazione non avviene all'istante, ma dopo un po' di tempo.

(1) " Zeitsch. für analytische Chemie „, t. 73 (1898), p. 301.

La colorazione osservata dallo Schmid è data dalle aldeidi che si producono durante l'irrancidimento dei grassi, ma non è possibile di stabilire il quantitativo di aldeidi formatesi nel grasso in causa dell'alterazione, nè con questo saggio, nè colle proprietà caratteristiche del distillato, le quali si differenziano notevolmente, sia per i caratteri organolettici, avendo questo distillato proveniente dai grassi alterati sapore ed odore sgradevoli, mentre quello derivante dai grassi freschi presenta il sapore e l'odore gradevoli degli olii da cui ha avuto origine, sia per il modo di reagire sul nitrato di argento ammoniacale.

I grassi freschi invero, poche eccezioni fatte, di cui dirò in seguito, dànno un distillato, che non agisce menomamente sul nitrato di argento ammoniacale; invece il distillato ottenuto dai grassi rancidi riduce il nitrato di argento ammoniacale e la riduzione è tanto più intensa quanto maggiore è l'irrancidimento dei grassi sottoposti al saggio. La stessa proprietà riducente si osserva sopra altri reattivi, quali sono una soluzione diluita di bicromato di potassio in presenza di acido solforico, ed una soluzione diluita di permanganato di potassio in acido solforico diluito. Da quest'ultima soluzione per i grassi intensamente irranciditi si precipitano all'istante fiocchetti bruni insolubili, mentre per i grassi lievemente alterati il permanganato violetto prende colorazione rosso bruna.

Se pertanto si trasforma quest'ultima reazione qualitativa del distillato in una reazione quantitativa, si otterrà un numero od indice nuovo, che accanto all'indice di acidità od al numero di Hübl, ci servirà a giudicare della alterazione dei grassi, ciò che riuscirà utilissimo tutte le volte che si dovrà dare un giudizio intorno al loro uso sia nell'alimentazione, sia nell'industria, sia nella farmacia.

Attualmente mi occupo soltanto di applicare questo nuovo indice ai grassi adoperati nella alimentazione, riservandomi di trattare fra breve dei grassi adoperati nella farmacia e nelle preparazioni farmaceutiche.

Questo nuovo indice, che io chiamo *numero di ossidabilità* dei grassi, è la quantità espressa in milligrammi di ossigeno necessaria per ossidare i composti organici distillabili col vapor acqueo e contenuti in 100 grammi di grasso.

Determinazione del numero di ossidabilità dei grassi.

Per determinare il numero di ossidabilità dei grassi occorrono i seguenti reattivi:

1° Acqua distillata che non riduca il permanganato di potassio, preparata nel modo che è detto nel *Traité d'analyse chimique quantitative*, R. Fresenius, trad. francese Gautier (1900), p. 715.

2° Una soluzione di acido solforico al 20 %.

3° Una soluzione di acido ossalico $\frac{N}{100}$, la quale, come è noto, si ottiene sciogliendo in un litro di acqua distillata 0.63 di acido ossalico puro e cristallizzato, disseccato prima dell'uso a temperatura ordinaria fra carta da filtro. La soluzione di acido ossalico si conservi in boccia di vetro a smeriglio ed allo scuro.

4° Una soluzione di permanganato di potassio $\frac{N}{100}$ ottenuta disciogliendo gr. 0.3163 di sale puro in 1000 cm³ di acqua distillata pura; questa soluzione deve corrispondere cm³ a cm³ alla soluzione di acido ossalico sovraccennata. Gli apparecchi necessarii per eseguire il saggio sono i seguenti:

a) Un apparecchio a distillazione in corrente di vapore, costituito da una caldaia in rame stagnato della capacità di circa due litri munita di un imbuto a rubinetto, per il quale si introduce nella caldaia dell'acqua distillata, e di un tubo di sviluppo che sta in comunicazione per mezzo di un tubo di vetro piegato a squadra con un matraccio della capacità di circa 800 cm³ a collo lungo, munito di un tappo di sughero con due fori, per uno dei quali passa il predetto tubo di vetro, che pesca sino in fondo al matraccio, per l'altro foro passa un secondo tubo di vetro più corto piegato a squadra, che viene a comunicare con un refrigerante Liebig.

b) Una bevuta della capacità di circa 350 cm³, che si collega con una chiusura a smeriglio ad un refrigerante a bolle, che serve per riscaldare a ricadere.

c) Palloni tarati da 100 cm³, pipette tarate da 10-50 cm³, burette graduate da 50 cm³ divise in decimo di cm³.

Esecuzione del saggio. — Grammi 20-25 di grasso pesati esattamente si introducono nel matraccio a collo lungo predetto con cm³ 100 di acqua.

Il matraccio si collega alla caldaia generatrice del vapore da una parte ed al refrigerante dall'altra e si inizia la distillazione in corrente di vapore, procurando di condurre l'operazione con una certa energia. Si raccolgono 100 cm³ di distillato in 10′.

Il distillato si rende ben omogeneo agitando, indi se ne prelevano 10 cm³, che si versano nella bevuta con svasatura a smeriglio (*b*) insieme a 50 cm³ di acqua distillata, 10 cm³ di acido solforico al 20 % e 50 cm³ esattamente misurati di permanganato di potassio $\frac{N}{100}$. Si collega quindi la bevuta al refrigerante a bolle e si riscalda a ricadere la miscela sovradescritta; appena si inizia l'ebullizione del liquido, si continua a riscaldare ancora per 5′, dopo il qual tempo si smette il riscaldamento e si lascia raffreddare alquanto, staccando la bevuta dal refrigerante.

In detta bevuta si versano allora 50 cm³ della soluzione titolata di acido ossalico $\frac{N}{100}$ agitando.

Il liquido dopo alcuni secondi si fa limpido e perfettamente incoloro; allora si aggiunge a goccia a goccia agitando la soluzione di permanganato di potassio $\frac{N}{100}$ sino a colorazione rosea *debole* e permanente.

La quantità di permanganato di potassio adoperata in quest'ultimo caso corrisponde esattamente al permanganato occorso per ossidare le sostanze organiche distillabili in corrente di vapor acqueo dal grasso preso in esame e contenute nella decima parte del peso di grasso saggiato. Si deve ripetere il saggio che abbiamo descritto nuovamente per una prova in bianco operando con 10 cm³ di acqua distillata in luogo del liquido di distillazione ottenuto dai grassi colla corrente di vapor acqueo.

Siano N il numero di cm³ di permanganato di potassio centinormale, necessarii per ossidare le sostanze organiche contenute in 10 cm³ di distillato ottenuto colla corrente di vapor acqueo dal peso P di grasso.

Siano n il numero di cm³ di permanganato occorsi per la prova in bianco.

Il *numero di ossidabilità del grasso X*, che esprime i milligrammi di ossigeno necessarii per ossidare i composti organici distillabili col vapor acqueo e provenienti da 100 grammi di grasso, sarà dato dalla seguente espressione:

$$X = \frac{(N - n)\,80}{P}.$$

Avendo applicato ad un numero non indifferente di grassi il saggio descritto, son venuto nella convinzione che non tutte le sostanze esaminate si comportano alla stessa stregua, perchè ad esempio mentre per l'olio di oliva, di sesamo, di arachidi ed altri, il numero di ossidabilità, quando si tratta di prodotti sani, è molto piccolo, oscillando fra 6-7 e non arrivando mai a 10, per quei grassi, i quali contengono prodotti solforati e riducenti, come avviene per l'olio di cotone e per l'olio di semi di crucifere, il numero di ossidabilità è molto maggiore anche quando il grasso è sano e normale. Ecco perchè, avendo notate alcune divergenze alle regole costanti, che credo di aver osservato nei grassi esaminati, ritengo opportuno trattare separatamente di ognuno di essi, fermandomi in special modo sovra quegli olii di semi, che possono servire a sofisticare l'olio di oliva, facendone variare i caratteri abbastanza costanti.

Olio di oliva. — Gli olii di oliva esaminati sono di varia provenienza: quelli sani normali ed eccellenti per uso alimentare presentano un numero di ossidabilità molto basso, all'incontro quelli rancidi ed alterati dànno lo stesso indice piuttosto elevato, come è dimostrato dai seguenti numeri:

Olii di oliva sani.

Provenienza	Numero di ossidabilità	Indice di acidità	Numero dello jodo
1° Liguria (Bordighera) .	7.10	8.59	82.04
2° „ (Portomaurizio).	10.42	4.63	81.47
3° „ (Cervo) . . .	8.54	4.78	83.20
4° „ (Oneglia) . . .	6.30	3.84	82.20
5° Toscana	3.20	2.05	81.98

Segue *Olii di oliva sani.*

Provenienza	Numero di ossidabilità	Indice di acidità	Numero dello jodo
6° Sardegna	6.12	3.27	83.12
7° "	5.43	2.98	81.43
8° Puglie (Bari)	4.72	3.84	83.25
9° " "	4.58	4.72	81.28
10° Grecia	7.12	5.82	84.42
11° Spagna	5.30	4.73	81.23
12° "	6.30	1.88	80.45
13° Tunisia	5.40	5.37	80.88
14° Turchia (Ayvaly)	5.32	4.88	81.45
15° La Canea	7.80	2.77	83.48

Olii di oliva rancidi.

Provenienza	Numero di ossidabilità	Indice di acidità	Numero dello jodo
1° Ignota	28.43	18.56	76.42
2° Liguria	59.10	11.63	66.38
3° Ignota	43.86	15.09	71.40
4° "	65.07	17.49	62.74
5° Toscana	18.92	6.51	79.64
6° Liguria	14.62	7.32	79.80

Come ho detto, dai dati sovrascritti si deduce che gli olii di oliva freschi e sani presentano un numero di ossidabilità non superiore a 10; se invece il grasso presenta già ai caratteri organolettici qualche imperfezione, come la mancanza di colore accompagnata ad odore e sapore poco gradevoli, allora è facile trovare in esso un numero di ossidabilità superiore alla norma sovraccennata. Per dare dei limiti di tolleranza, qualora si dovesse giudicare se un grasso è alterato oppure sano, credo si debba accettare il numero di ossidabilità uguale a 15; oltre questo limite, secondo le mie esperienze, si deve affermare che l'olio di oliva esaminato non è più commestibile. Occorreranno però altre esperienze di altri autori, per rendere più probativa questa mia affermazione dedotta dall'esperienza. Inoltre, perchè quanto ho esposto sia vero, è necessario che l'olio di oliva sia genuino e non adulterato con altri olii. Specialmente da pren-

dersi in considerazione sono gli olii di oliva rancidi riportati ai n. 1 e 2 appunto per il diverso modo, secondo il quale è avvenuto l'irrancidimento, stando essi ad attestare che da questo dipende la quantità di composti aldeidici riduttori, che si possono formare nel grasso.

L'olio di oliva n. 1 mi venne favorito con altri campioni di grassi dal prof. Guareschi (della qual cosa lo ringrazio infinitamente). È un campione di olio rancido, pochissimo colorato e da più di trent'anni conservato allo scuro negli scaffali del laboratorio di chimica farmaceutica della R.ª Università. L'olio d'oliva n. 2 deriva invece da un campione di olio sano da me fatto irrancidire dopo averlo esposto per varii mesi tanto ai raggi diretti del sole quanto alle intemperie.

Nel primo caso si nota la formazione di un maggior quantitativo di acidi accanto ad una lieve quantità di aldeidi volatili; nel secondo caso invece, ad un minore indice di acidità corrisponde un maggior numero di ossidabilità, in correlazione con un più forte quantitativo di aldeidi.

La luce solare in comunione coll'umidità e coll'aria atmosferica, hanno in un paio di mesi accelerato pressochè del doppio l'irrancidimento del grasso, in confronto col campione che da trent'anni si conservava allo scuro in ambiente asciutto. Donde si scorge, come gli agenti fisici possono influenzare assai la decomposizione dei grassi, come hanno tentato di dimostrare i molti preclari chimici già ricordati.

Olii di semi. — Anche per molti olii di semi commerciali si può accettare come limite massimo di ossidabilità il numero di 15, oltre al quale si deve dichiarare il grasso alterato per irrancidimento, come vien dimostrato dalla seguente tabella:

	Numero di ossidabilità	Indice di acidità	Numero dello jodo
Olio di arachide Cambie (extra).	5.72	1.21	95.88
" " " Rufiske (extra).	2.97	3.12	96.42
" " " (legg.te rancido)	11.24	6.18	94.77
Olio di sesamo	5.72	2.09	106.20
" " "	4.84	3.27	108.32
" " " (legg.te rancido)	9.85	5.72	105.43
Olio di soja	4.84	3.14	121.74
" " " (legg.te rancido) . .	11.54	8.17	120.15

Olii di semi di Crucifere. — L'esperienza dimostra che gli olii ricavati dalle crucifere non seguono le regole che abbiamo accennato per il numero di ossidabilità in riguardo all'olio di oliva e gli altri olii sovrascritti. Eseguii alcuni saggi sovra gli olii di ravizzone e di colza, i quali se sono ben depurati, come è noto, possono anche servire all'alimentazione umana, ma se non sono ben depurati presentano un sapore ed un odore sgradevoli, che impedisce che i medesimi vengano utilizzati per tale scopo.

Gli olii sottoposti ad analisi erano di diverso valore commerciale, essendo più o meno ben depurati. Il loro distillato aveva odore che ricordava l'essenza di rafano e riduceva il nitrato di argento ammoniacale.

Avendo distillato 50 grammi di grasso col vapor acqueo, addizionai il distillato con una certa quantità di acido cloridrico, scaldando in presenza di clorato di potassio. Evaporai il liquido quasi a secco riprendendo il residuo con acqua distillata e trattandolo con cloruro di bario. Notai la formazione di un precipitato pulverulento di solfato di bario, il quale è dovuto senza dubbio alla presenza di prodotti solforati trasportabili col vapor acqueo.

Questi prodotti solforati che con tutta probabilità sono da assimilarsi all'isosolfocianato di allile del rafano e dell'essenza di senape od all'isosolfocianato di isobutile della coclearia, hanno, come dissi, azione riducente sul nitrato di argento, azione che si fa sentire anche sovra il permanganato di potassio. Si comprende quindi facilmente, come il distillato che proviene dai semi di crucifere presenti un numero di ossidabilità piuttosto elevato in relazione col quantitativo di prodotti solforati che essi contengono.

Stretta connessione esiste fra il numero di ossidabilità degli olii di semi di crucifere colla reazione di Schneider, la quale consiste, come è noto, nello sciogliere questi grassi nell'etere addizionando alcune goccie di una soluzione al 3 $^0/_0$ di nitrato di argento, e con quella di Bechis o di Milliau, poichè allorquando gli olii summentovati sono più raffinati, dànno queste reazioni assai debolmente e presentano in corrispondenza un numero di ossidabilità assai tenue. Onde si osserva che gli olii di semi di crucifere, che servono nell'industria oppure come

combustibili, essendo ricchi di prodotti solforati con sapore sgradevole, hanno un numero di ossidabilità assai rilevante. All'incontro gli olii raffinati con potere riducente debole, che servono per l'alimentazione umana, hanno un numero di ossidabilità che si avvicina a quello degli olii di oliva sani e commestibili. Ebbi gli olii analizzati dal Dott. S. Camilla, direttore del Laboratorio chimico delle gabelle, al quale porgo i miei vivi ringraziamenti.

Ecco pertanto i risultati analitici:

Semi da cui venne ricavato l'olio	Qualità dell'olio esaminata	Numero di ossidabilità	Indice di acidità	Numero dello jodo
Colza	per uso industriale	18.45	5.72	98.45
"	"	20.63	4.48	97.62
"	2ª qualità	17.72	3.83	101.44
"	"	12.80	4.63	103.28
"	depurato	11.33	5.42	97.98
"	"	10.80	4.97	99.42
"	commestibile	8.50	3.28	103.25
Ravizzone	industriale	15.27	5.47	102.44
"	commestibile	10.18	4.32	103.28

Benchè gli olii di semi di crucifere esaminati non debbano considerarsi alterati, perchè tutti presentano caratteri che non lasciano dubbio intorno alla loro buona conservazione, tuttavia quelli depurati presentano un numero di ossidabilità, che entra nei limiti ammessi per gli olii di oliva commestibili, mentre quelli adoperati per uso industriale il cui sapore ed odore non ne permetterebbero la commestibilità, hanno un numero di ossidabilità che supera 15 arrivando a 20 e più.

Olii di cotone. — Quanto ho affermato per gli olii di semi di crucifere è anche vero per gli olii di cotone, poichè anche questi, come è noto, contengono piccole quantità di principii solforati non ancora ben conosciuti, i quali producono le reazioni di Bechi, Milliau, Tortelli e Ruggeri, reazioni che si fondano tutte sul potere riducente esercitato da queste tracce di prodotti solforati; anche per gli olii di cotone possiamo trovare alcune qualità così perfettamente raffinate da non dare le reazioni suaccennate che in modo appena sensibile.

Gli olii che dànno visibili e ben nette le reazioni sovrascritte presentano anche un numero di ossidabilità piuttosto forte, quelli invece che dànno queste reazioni appena visibili o negative hanno un numero di ossidabilità basso che si avvicina a quello degli olii di oliva sani e ben conservati.

K. Fischer e Peyau (1) hanno studiato gli olii di cotone, e le cause che possono far variare le reazioni, cui ho accennato, come pure quella di Halphen, ed hanno osservato che distillando in corrente di vapore gli olii di cotone, si potevano trascinare col vapor acqueo piccole quantità di una sostanza gialla cristallizzata in aghetti e contenente circa il 10 % di zolfo. A questa sostanza solforata è dovuta l'azione riducente che il distillato acquoso ottenuto colla corrente di vapore sopra l'olio di cotone esercita sul nitrato di argento e sopra il permanganato di potassio in soluzione solforica. Si comprende quindi il perchè gli olii di cotone non raffinati presentano un numero di ossidabilità rilevante, mentre quelli che hanno subìto una buona raffinazione, essendo privi dei prodotti solforati descritti, abbiano un numero di ossidabilità molto basso.

Olii di cotone.

Contrassegno	Reazioni di Milliau, Bechi, Tortelli e Roggeri	Numero di ossidabilità	Indice di acidità	Numero dello jodo
Sommer-Oil 2ª qual.	intensamente positive	31.24	5.25	105.70
„ 1ª qual.	positive	14.58	4.72	106.82
Winter-Oil puro	debolissime	7.85	3.78	110.43

Grassi animali. — Anche per questi grassi vale ciò che si è detto per gli olii di oliva e gli altri grassi che allo stato fresco presentano negative le reazioni di Milliau e di Bechi, ossia il numero di ossidabilità è debolissimo per i grassi freschi, mentre è elevato quando essi hanno subìto l'irrancidimento. Si può anzi osservare che il numero di ossidabilità è proporzionale alla intensità dell'alterazione dei gliceridi, che si considerano, ed è anche proporzionale alla quantità di oleina ossia di doppi

(1) " Zeitsch. für Unters. der Nahrungsmittel „, 1905, t. IX, p. 81.

legami non saturi contenuti nei gliceridi medesimi, quando ben inteso si siano conservate costanti le condizioni di alterazione dei grassi esaminati. Quanto più il grasso fonde a temperatura bassa, tanto più profonda è la decomposizione del grasso.

	Numero di ossidabilità	Indice di acidità	Numero dello jodo
Grasso di bue fresco . . .	5.20	1.82	38.35
„ „ „ rancido . . .	50.85	13.40	20.85
„ „ „ „ . . .	39.27	6.85	28.42
„ „ „ „ . . .	27.72	5.74	30.30
Grasso di cavallo fresco . .	6.70	1.19	81.50
„ „ „ rancido. .	96.85	30.24	53.84
„ „ „ „ . .	78.15	24.72	76.45

I grassi di bue e di cavallo sovrascritti durante il tempo, in cui si è andata svolgendo l'alterazione, furono conservati nelle stesse condizioni di ambiente e temperatura e riesce evidente che quanto maggiore è il numero dello jodo del grasso preso in considerazione, tanto più profonda è l'alterazione che nel medesimo si è prodotta e tanto più elevato riesce il numero di ossidabilità.

Burro. — Il burro è una sostanza grassa, la quale, per quanto riguarda la sua alterabilità, si comporta in modo del tutto differente dai grassi sovraccennati, appunto perchè in questo troviamo una lieve proporzione di doppi legami ed il suo numero dello jodo oscilla fra 26-38, con una media di 33. Per questo indice si avvicina adunque al grasso di bue, perciò non può mai subire un irrancidimento con copiosa formazione di aldeidi riduttrici, laddove invece si formano una certa proporzione di acidi volatili liberi accanto ad eteri volatili a peso molecolare basso, ciò che è messo in chiaro dai lavori di Amthor (1) e di Henseval (2).

Mentre adunque nel burro rancido si eleva il numero di acidità, quello di ossidabilità si mantiene piuttosto basso; però anche per il burro questo indice ha una certa importanza.

(1) " Zeitsch. für anal. Chem. „, 1899, *38*, 19.
(2) " Revue gén. du Lait „, 1903, p. 535.

Di preferenza infatti il criterio, che ci guida a considerare il burro non vendibile per uso alimentare, come si legge nel regolamento di igiene di Torino, è appunto l'acidità: si ritiene irrancidito il burro che, avendo odore o sapore *forti*, abbia contemporaneamente un grado di acidità maggiore di 6.

Winckel (1) ha bensì istituito ricerche intorno alle alterazioni del burro applicando in numerosi saggi la reazione acido cloridrico-floroglucina del Kreis, ma venne alla conclusione che i burri, i quali hanno subìto l'azione della luce senza che perciò siano irranciditi, si colorano in rosso con detto reattivo.

Ecco perchè io credo riesca utile accanto all'indice di acidità del burro ammettere anche il numero di ossidabilità.

In questi ultimi tempi ha assunto importanza, secondo le ricerche di Fischer e Guenert (2), l'azoto amidico contenuto nel burro in rapporto all'azoto totale di questo alimento. L'azoto amidico va aumentando col crescere della alterazione del burro.

Nella determinazione della costante di ossidabilità del burro io ho potuto constatare che è meglio operare col burro quale viene in commercio, senza fonderlo prima, e poi filtrarlo per separare il grasso dalla parte acquosa, appunto perchè l'acqua che si separa durante la fusione trascina le sostanze riducenti e quindi si ha una diminuzione nel numero di ossidabilità.

Si determina dapprima nel burro la sostanza grassa e poi si riporta col calcolo il numero di ossidabilità al grasso privo degli altri costituenti. Un esempio servirà a chiarire il metodo da seguirsi.

Un burro della Valle di Lanzo presentava la seguente composizione:

Acqua	%	15.78
Grasso	„	83.39
Ceneri	„	0.15
Sostanza azotata	„	0.52
Lattosio	„	0.26
Indice burro refrattometrico a 35°		47
Numero Reichert Meissel . . .		28

(1) " Zeitsch. f. Unters. Nahrungs- und Genussmittel „, 1905, *9*, p. 90.
(2) Id., id., 1911, *22*, 553.

Vennero pesati gr. 25.637 di burro che furono sottoposti a distillazione con 100 cm^3 di acqua acidata con acido tartarico sino ad ottenere 100 cm^3 di distillato, come si è descritto avanti: prelevati 10 cm^3, si ossidarono colla soluzione $\frac{N}{100}$ di permanganato di potassio.

100 gr. di burro contengono 83,39 di grasso, quindi avendo pesato gr. 25.637 di burro, la quantità di grasso sottoposto al saggio per la determinazione del numero di ossidabilità sarà data dalla seguente proporzione:

$$100 : 83.39 = 25,637 : p = \text{gr. } 21.378.$$

Questo valore deve essere adoperato nella formula

$$X = \frac{(N - n)\, 80}{p}$$

che ci dà il numero di ossidabilità del grasso.

Ecco pertanto i risultati di alcuni prodotti naturali e freschi acquistati dal mercato:

Provenienza del burro	Numero di ossidabilità	Indice di acidità
Valle di Lanzo . . .	6.84	2.07
Aosta	4.62	1.84
Castellamonte . . .	3.54	1.72
Condove	5.45	1.90

Il burro della Valle di Lanzo del quale ho dato la composizione chimica, venne per parecchi mesi lasciato in una grossa capsula Petri a temperatura ordinaria ed alla luce diffusa. In esso si notavano via via i caratteri sempre più palesi dell'alterazione: di dieci in dieci giorni si prelevavano circa 25 gr. di burro esattamente pesati e sovra di essi si determinava il numero di ossidabilità accanto all'indice di acidità: i dati ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

	Numero di ossidabilità	Indice di acidità
10 Ottobre	6.84	2.07
20 „	10.45	1.25
30 „	14.57	5.10
10 Novembre . . .	15.80	5.65
20 „	17.00	8.43
30 „	17.22	9.12

Il numero di ossidabilità corre parallelo all'indice di acidità e quanto più aumenta quest'ultimo, tanto maggiore è il potere riducente del distillato; però il numero di ossidabilità non tende ad elevarsi in modo continuo, ma dopo un certo limite si mantiene quasi costante in relazione col basso numero dello jodo presentato dal burro e quindi col debole contenuto in esso dei radicali acidi a doppio legame. Resta però assodato doversi dichiarare rancido un burro quando il suo numero di ossidabilità supera 15.

Altri burri rancidi analizzati hanno dato i seguenti numeri:

Provenienza del burro	Numero di ossidabilità	Indice di acidità
Condove	14.07	8.92
Giaveno	17.14	9.47
Aosta	16.28	9.15
Milano.	19.23	11.07

Surrogati del burro. — Per i surrogati del burro, ossia per la margarina, l'oleomargarina, il burro di cocco e per la sugna valgono gli stessi criterii di analisi, che ho descritto per il burro.

Ecco pertanto i risultati ottenuti con alcune sostanze commerciali: quelle irrancidite presentavano tutti i caratteri dei grassi guasti, quindi colore sbiadito, odore e sapore sgradevoli:

	Numero di ossidablità	Indice di acidità
Oleo margarina fresca .	5.65	1.10
Kunerol (burro di cocco)	6.52	1.25
Burro di cocco . . .	7.62	3.25
Oleo margarina rancida	45.57	12.37
„ „ „	49.12	15.42
Burro di cocco rancido .	17.84	6.45
Sugna fresca	7.54	2.86

Anche per queste sostanze si può affermare che se il numero di ossidabilità supera 15 devesi considerare il grasso irrancidito, poichè i grassi che non presentano caratteri di alterazione così avanzati da farli ritenere non adatti alla alimentazione, presentano un numero di ossidabilità inferiore a 15.

Fra le sostanze che possono servire a sofisticare il burro allo scopo di aumentarne gli acidi volatili, havvi anche la triacetina sintetica, che in seguito a saponificazione produce acido acetico volatile.

Questa sostanza, a differenza dei gliceridi misti contenuti nel burro, è trascinabile in parte col vapor acqueo, onde un'oleomargarina addizionata del 4 % di triacetina presenta un numero di ossidabilità uguale a 53.2. Quindi la determinazione del numero di ossidabilità potrebbe anche servire a scoprire la sofisticazione del burro e surrogati colla triacetina, quantunque questo composto non sia stato adoperato molto al detto scopo, come ho già fatto osservare altra volta, appunto per il suo sapore ed il suo odore caratteristici.

I grassi di cui ho trattato spesso si trovano intimamente mescolati agli alimenti, onde occorre soventi di doverli estrarre ed analizzarli per poter accertare il loro buono o cattivo stato di conservazione.

Nel caso si volesse sopra questi grassi determinare il numero di ossidabilità si tratta l'alimento in questione col doppio del suo peso di etere di petrolio scaldando a ricadere, indi si filtra, riprendendo ancora con nuovo etere di petrolio.

Dal filtrato si distilla l'etere di petrolio e dal residuo evaporato a debole calore sino a scacciare tutto il solvente, si preleva un peso determinato P di grasso, sovra il quale si determina il numero di ossidabilità nel modo descritto.

Questo numero è alquanto superiore a quello trovato pei grassi freschi e genuini; se quindi il grasso è alterato si otterrà un numero di ossidabilità superiore a 20, per i gliceridi ben conservati invece questo indice è inferiore a detto numero.

	Numero di ossidabilità
Grasso estratto da alcuni dolci alterati e rancidi	28.87
" " " " non alterati . .	13.43

In conclusione i numerosi dati analitici che ho riportati, dimostrano l'opportunità di conoscere il *numero di ossidabilità* dei grassi per affidare ad espressione matematica il giudizio sull'entità delle alterazioni di queste sostanze, che sino ad ora si può dire erano quasi unicamente giudicate alla stregua delle impressioni che le medesime producono sopra i sensi, i quali naturalmente possono essere fallaci, mentre non è fallace il giudizio che si può trarre da una determinazione ben eseguita, coi metodi tecnici che ho descritto.

Chiamando *numero di ossidabilità* delle sostanze grasse la quantità in milligrammi di ossigeno necessaria per ossidare i prodotti volatili col vapor acqueo di 100 grammi di grasso, si osserva in generale, poche eccezioni fatte, che questo numero di ossidabilità pei grassi alimentari freschi e normali oscilla fra 3-10, mentre per i grassi rancidi il numero di ossidabilità è assai superiore ed in linea generale se questo indice è superiore a 15 si può affermare che il grasso, che lo accusa, è alterato e rancido.

Le esperienze eseguite credo siano sufficienti per far comprendere, come riesca utile, fra i criterii che ci servono per giudicare della buona conservazione dei grassi, includere anche il *numero di ossidabilità*.

Torino, Dal Laboratorio chimico municipale, Febbraio 1916.

Su un notevole cristallo di gesso di Bellisio (Pesaro) [1].

Nota di EMANUELE QUERCIGH.

(CON UNA TAVOLA)

Nel Museo di Mineralogia della R. Università di Torino si trova in un bel campione di gesso, proveniente da Bellisio presso Pergola in provincia di Pesaro, un cristallo che, oltre al possedere uno sviluppo ed un habitus notevoli, presenta delle bellissime figure di corrosione naturali su una faccia molto grande, che ad un esame preliminare sembra appartenere alla zona [010].

Uno studio di tali figure di corrosione mi parve interessante, poichè esse risultano nettamente asimmetriche rispetto al piano di simmetria generalmente ammesso per il minerale, piano la cui direzione è ben visibile nel campione per l'esistenza di alcune tracce di incipiente sfaldatura.

Si presentava in tal modo l'occasione di portare un contributo alla quistione del grado di simmetria posseduta dal gesso, quistione che dovrebbe, secondo il Viola [2], considerarsi come già risolta nel senso di escludere questo minerale dalla classe prismatica del sistema monoclino, per l'assenza in esso di un piano di simmetria, mentre, al contrario, altri mineralisti non riconoscono alcun motivo per mettere in dubbio l'oloedria del

---

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal Prof. Ferruccio Zambonini.

[2] C. Viola, *Beitrag zur Symmetrie des Gypses*, " Zeitschr. f. Kryst. " 35 (1902), pag. 220; Id., *Appunti su minerali italiani*, " Rendic. R. Accademia Lincei " *17* (1908), I, pag. 504.

gesso. Fra questi ultimi si trova il Groth [1], il quale, anche recentemente, portò addirittura detto minerale come esempio della classe monoclina prismatica.

Siccome del gesso di Bellisio non furono, finora, descritti che due cristalli, dal Cesaro [2], e quello da me studiato presenta un habitus tutt'altro che comune, reputo anzitutto conveniente di esporre le osservazioni cristallografiche che su di esso e su qualche altro individuo della stessa provenienza, ho potuto eseguire, osservazioni che hanno messo in evidenza varie forme nuove per il giacimento, e due nuove anche per la specie.

Darò, per ultimo, un elenco riassuntivo delle forme che per il gesso risultano stabilite, come pure delle forme vicinali e di quelle che, pur essendo state ammesse da qualche autore per questo minerale, sono suffragate da misure poco soddisfacenti, per cui è lecito attendere una nuova conferma sperimentale prima di poterle definitivamente considerare come accertate.

***

Il cristallo in parola si presenta impiantato, assieme ad altri individui molto più piccoli, sullo zolfo di cui il gesso, qui come altrove, rappresenta un minerale di formazione posteriore.

La tavola lo riproduce in modo da lasciar chiaramente scorgere le figure di corrosione naturali sulla faccia (104) secondo cui è tabulare.

La limpidezza di questo cristallo, perfettamente incoloro, è straordinaria, le sue facce sono belle e dànno buonissime misure, ad eccezione della (104), che per la corrosione non risulta perfettamente piana, e dà un fascio d'immagini, e della sua parallela (104) che, quantunque abbastanza liscia, si presenta ondulata e rotta in parte per azione meccanica. Anche la }111{ è rappresentata da due facce poco belle.

---

[1] P. Groth, *Physikalische Krystallographie* (1905), pag. 372; Id., *Chemische Krystallographie* (1908), vol. II, pag. 407.

[2] C. Cesaro, *Contribution à l'étude de quelques minéraux*, “Bull. Ac. de Belgique Cl. d. Sc.„ (1905), pag. 140. Cfr. “Zeitschr. f. Kryst.„ *43* (1907), pag. 501.

La sua lunghezza è di mm. 35, la larghezza di mm. 33 e lo spessore di circa 10 mm., misurando, la prima, la distanza fra le facce (010) e (0$\bar{1}$0), la seconda, quella di massima estensione del cristallo nella direzione normale alla precedente, e la terza la distanza fra le due facce di $\{\bar{1}04\}$.

Le forme presentate dal cristallo sono le seguenti:

a {100};	*b* {010};	*m* {110};	*α* {210}
z {310};	*h* {120};	*k* {130};	* {$\bar{1}$04}
l {111};	*n* {111};	**f* {147}.	

Fra queste la {$\bar{1}$04} e la {147} sono nuove per il gesso.

La forma {147} si presenta con una sola faccetta (147), la quale, però, è molto bella e fornisce buone misure, dimodochè il suo simbolo rimane ben stabilito, come si può vedere dalle seguenti misure:

Angoli	Valori ottenuti	Valori calcolati (Cost. di Des Cloizeaux)
(147) : (010)	77°10′	77°4′
(147) : (110)	71°11′	71°13 ¼′.

Nella fig. 1 questa forma è indicata colla lettera *f* che, impiegata anticamente da Haüy per la {110}, è rimasta senza

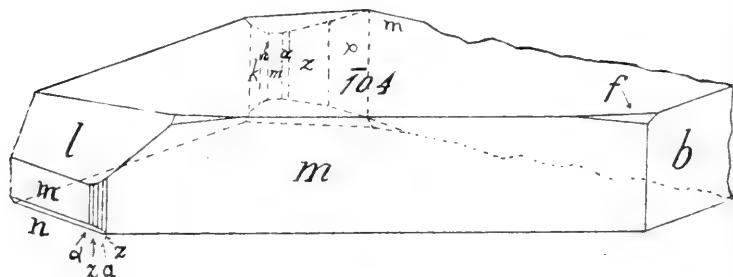



Fig. 1.

assegnazione, dopo che universalmente fu adottata per tale prisma la lettera *m*.

La forma {$\bar{1}$04} si presenta in questo cristallo con due facce

molto estese, di cui una sola, la $(\bar{1}04)$, si presta a dare delle misure, le quali, però, per la forte corrosione ed una leggera incurvatura sono anche poco soddisfacenti. Ottenni infatti i seguenti valori:

$$\left.\begin{array}{l}(\bar{1}04):(110) = 89^\circ 40' \\ (\bar{1}04):(1\bar{1}0) = 88^\circ 30'\end{array}\right\} \text{media } 89^\circ 5'.$$

Siccome per la faccia $(\bar{1}04)$ il calcolo darebbe (partendo dalle costanti di Des Cloizeaux):

$$(\bar{1}04):(110) = (\bar{1}04):(1\bar{1}0) = 89^\circ 25'$$

l'accordo ottenuto colla media delle misure sarebbe soddisfacente solo nel caso che le misure fossero molto sicure e concordanti, mentre, invece, il limite di circa un grado entro cui oscillano le due misure prese consiglierebbe senz'altro di considerare come dubbia questa forma, senza permettere nemmeno di calcolare con buon fondamento il simbolo delle forme vicinali corrispondenti.

Però, misure ottenute su un altro cristallino della stessa provenienza permisero di accertare la forma $\{\bar{1}04\}$ per il giacimento ed autorizzano a dedurre che a tale forma appartenga anche la faccia corrosa in quistione. Ottenni, infatti:

angoli	misurati	calcolati
$(\bar{1}04):(010)$	$90^\circ 7'$	90°
$(\bar{1}04):(100)$	$89^\circ 6'$	$89^\circ 17\ ^3/_4{}'$.

Va notato, però, che la $\{\bar{1}04\}$ ha la tendenza a presentarsi con facce un po' curve.

Delle altre forme osservate si può dire, come del resto si vede in parte dalla fotografia stessa del cristallo a Tav. 1 o meglio dalla sua proiezione rappresentata nella fig. 1, che la $\{100\}$ si presenta con una facciuzza esilissima (100), mentre, al contrario, la $\{010\}$ ha faccie molto grandi.

La }110{ si presenta con facce molto belle, che dànno immagini splendide: notevole è il loro sviluppo ineguale dalle due parti del piano di simmetria: infatti, mentre la (110) è assai sviluppata, molto più limitate sono le dimensioni della $(1\bar{1}0)$ e della $(\bar{1}\bar{1}0)$.

La }310{ presenta due facce esilissime (310) e $(3\bar{1}0)$, ed una, la $3\bar{1}\bar{0}$, più appariscente.

La }210{ compare con due faccette esilissime per quanto ben nette ed identificabili con esattezza, ed una grande.

La }130{ è presente con una sola faccetta esilissima: $(\bar{1}\bar{3}0)$.

La }120{ è rappresentata da una faccia, la $(\bar{1}\bar{2}0)$, esilissima, ma che dà buona immagine.

La }111{ ha faccie molto belle che dànno immagini splendide; è notevole che mentre la $(1\bar{1}1)$, l'unica indicata con lettera nella fig. 1, è molto grande, la (111) è esilissima; lo stesso accade per la $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ ben sviluppata, contrariamente alla $(\bar{1}1\bar{1})$ ridottissima.

Della *n* }$\bar{1}$11{ sono presenti le due sole facce che incontrano *y* nella sua parte negativa.

Questi fatti che conferiscono un carattere spiccatamente emimorfo all'individuo studiato e che sembra essere in relazione e confermare per così dire l'asimmetria delle figure di corrosione sulla $(\bar{1}04)$ non è un caso isolato, ma si presenta evidente anche in qualche altro individuo. La fig. 2 ne dà un esempio:

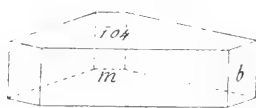
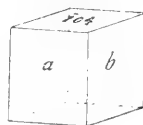



Fig. 2. Fig. 3.

essa rappresenta la combinazione delle forme }010{, }110{ e }$\bar{1}$04{ sviluppata in modo simile al precedente cristallo della fig. 1, confermante questo **habitus** singolare e assai interessante per il nostro minerale.

Un altro abito notevole fu da me osservato nel gesso di Bellisio: quello pseudocubico, rappresentato dalla fig. 3, prodotto dalla combinazione semplicissima delle tre forme: }100{ }010{ }$\bar{1}$04{.

Nella seguente tabella sono raccolte le misure che hanno servito all'identificazione delle forme precedentemente menzionate:

Angoli	Limiti delle misure	Media	Valori calcolati	Differenza
010 : 110	55°40' - 55°43'	55°41'	55°45'	— 4'
010 : 310	77 13 - 77 17	77 15	77 13	— 2
010 : 100	89 58 - 90 06	90 02	90 00	+ 2
010 : 210	71 11 - 71 19	71 15	71 12	+ 3
010 : 130	—	26 07	26 05	+ 2
010 : 120	—	36 15	36 17 1/2	— 2 1/2
110 : 111	49 15 - 49 10	49 12 1/2	49 09 1/2	+ 3
111 : $1\bar{1}1$	36 17 - 36 18	36 17 1/2	36 18	— 0 1/2
010 : 111	71 52 - 71 54	71 53	71 54	— 1
$1\bar{1}0$: $11\bar{1}$	—	59 01	59 15	— 14
$0\bar{1}0$: $11\bar{1}$	—	69 25	69 20	+ 5
010 : 147	—	77 10	77 04	+ 6
110 : 147	—	71 11	71 13 1/4	— 2 1/4
$\bar{1}04$: 010	90 18 - 89 50	90 05	90 00	+ 5
$\bar{1}04$: 100	—	89 06	89 17 1/2	— 11 1/2

*
* *

Risulta a prima vista evidente la grande importanza che devono avere le figure di corrosione eseguite sulle faccie della zona parallela all'asse y per stabilire l'esistenza o meno del piano di simmetria ad esso normale.

È noto che ricerche a tale proposito furono condotte, principalmente, già dal Baumhauer [1], che osservò come sulla

[1] H. Baumhauer, *Ueber die Aetzfiguren des Apatits und des Gypses.* " Sitz.-Ber. d. b. Akad. d. Wiss. ", München 5 (1875), 169.

faccia (100) si possano ottenere, per l'azione della potassa caustica, dei solchi esilissimi, perfettamente paralleli tra loro e all'asse della zona [001].

Questo risultato fu confermato poco dopo da Klien [1], il quale ottenne su tale faccia le stesse leggere striature parallele a [001], quantunque la natura dell'agente intaccante fosse alquanto diversa, avendo egli impiegato il carbonato potassico.

In seguito, il Viola [2] studiò pure le figure di corrosione del gesso, ottenendole per l'azione di soluzioni di cloruro di bario. Queste provocano sul minerale delle striature sottili parallele, come quelle ottenute dai precedenti sperimentatori, alla zona [001] e nel caso considerato tali leggeri solchi si presentano, dopo l'azione del reattivo, ripieni di solfato di bario che conviene allontanare opportunamente con getto d'acqua per mettere in evidenza la corrosione avvenuta.

Nuovo contributo sperimentale fu poi portato su questo argomento dal Wiegers [3], che però non fu più fortunato dei suoi predecessori nel portare delle conclusioni decisive.

Uguale esito avevano avuto le esperienze eseguite sulle figure di sfiorimento che il gesso, come in generale tutti i minerali idrati, presentano quando vengono messi in condizione di perdere tutta o solo parte della loro acqua di cristallizzazione. Infatti, tanto le antiche ricerche di Frankenheim [4] come le più recenti di Weiss [5], di Hammerschmied [6], di Blasius [7] non chiariscono per nulla la nostra quistione, e non portano alcun argomento decisivo per escludere l'esistenza del piano di sim-

---

[1] P. Klien, *Beiträge zur Kenntniss des Gypses,* " Pogg. Annalen „ *17* (1876), 611.

[2] C. Viola, *Ueber Aetzfiguren am Gyps,* " Zeitschr. f. Kryst. „ (1897), *28*, 573.

[3] F. Wiegers, *Ueber Aetzungserscheinungen am Gyps,* " Zeitschr. f. Naturwissenschaften „ *73* (1900), 267.

[4] Frankenheim, *Lehre von der Cohäsion* (1835), pag. 326.

[5] E. Weiss, *Ueber Aetzfiguren bei Gyps und Schlagfiguren bei Beiglanz.,* " Zeitschr. d. d. geol. Gesell. „ *19* (1877), 208.

[6] F. Hammerschmied, *Beiträge zur Kenntniss des Gypses und Anhydritgesteines,* " Tschermak Mitt. „ (1882) *5*, 245.

[7] E. Blasius, *Zersetzungsfiguren an Krystallen,* " Zeitschr. f. Kryst. „ *10* (1885), 221.

metria, alla cui ammissione concorrono l'habitus ordinario e lo sviluppo che generalmente si osserva nei cristalli del minerale.

Nè miglior sorte ebbero in questo senso ricerche di altro genere, come quelle di Maschke [1] sulla cristallizzazione del gesso e quelle sulla velocità di soluzione della faccia (010) in confronto colla $(0\bar{1}0)$.

Le prime osservazioni particolareggiate e veramente interessanti su figure naturali ed artificiali di corrosione, asimmetriche rispetto al piano di simmetria che generalmente si suppone esistente nel gesso, furono pubblicate dal Viola nel 1902 e riguardano alcuni cristalli della Romagna e delle Cetine di Cotorniano.

Egli ebbe ad osservare, specialmente sulle facce di $\{\bar{1}03\}$, delle figure di corrosione, che non si possono assolutamente conciliare coll'esistenza del piano di simmetria.

Qualche anno dopo, il Viola ribadì la sua tesi, che, cioè, l'unico elemento di simmetria esistente nel gesso dev'essere l'asse binario, osservando le figure di corrosione naturali formatesi su cristalli provenienti dalle Cetine. Sulla faccia (001) il Viola distinse assai bene tre direzioni di striature, che potè fissare discretamente per mezzo dei loro riflessi; due di esse coincidono sufficientemente coi riflessi dati dalle facce (111) e (111), mentre la terza direzione, quella delle striature dominanti, fa un angolo di circa 6° collo spigolo: $(1\bar{1}1):(001)$.

Nel cristallo di Bellisio che ho descritto, le figure di corrosione si presentano, come ben si vede dalla Tavola, nettamente asimmetriche rispetto alla direzione di $\{010\}$; infatti esse risultano determinate da una serie di solchi paralleli A (fig. 4), che formano colla direzione [(104):(010)] angoli di 106° e 74° circa, e da due altre serie, B e C, inclinati rispettivamente di 13° e di 42° sulla stessa direzione D.

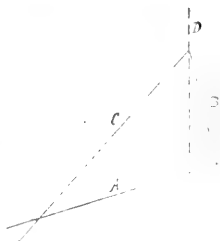



Fig. 4.

---

[1] O. Maschke u. H. Vater, *Mikroscopische Studien über die Krystallisation des Gypses*, "Zeitschr. f. Kryst.", 33 (1900), pag. 57.

Queste figure di corrosione naturali, così nettamente asimmetriche, collegate col carattere spiccatamente emimorfo dei cristalli studiati, dovrebbero portare logicamente a concludere, come per il primo in base a ricerche sperimentali ha sostenuto il Viola, che il gesso appartiene alla classe sfenoidica e non alla prismatica del sistema monoclino.

Pur non negando alle mie osservazioni l'importanza che esse indubbiamente hanno, non mi credo, però, autorizzato a trarne fin d'ora una conclusione definitiva intorno alla vera simmetria del gesso, perchè ritengo che un problema di tanta importanza ha bisogno di essere trattato in base ad un materiale sperimentale assai più ampio di quello che io ho avuto a mia disposizione, e ciò forse mi sarà possibile fra non molto.

Tanto più mi sembra opportuna una riserva, poichè è noto che in qualche caso si sono ottenute delle figure di corrosione che sono in contrasto non solo colle conclusioni che intorno alla simmetria si possono ricavare dallo studio di altri fenomeni, ma anche colle stesse figure di corrosione ottenute con metodi diversi.

Mi limiterò a ricordare il caso notissimo della colemanite, nella quale il Baumhauer ha osservato su (010) alle volte delle figure irregolari in contrasto con quelle che più spesso si ottengono e che per questo minerale concordano colla classe monoclina prismatica a cui fu ascritto. Sono, poi, note le interessanti esperienze eseguite dal Baumhauer stesso sull'apatite; come pure quelle del Vernadsky [1] sul nitrato di potassio, le quali ultime porterebbero a concludere che questo sale cristallizzi nella classe rombica piramidale, mentre è generalmente considerato tuttavia bipiramidale.

Mi è sembrato, ad ogni modo, opportuno render noti i risultati delle mie osservazioni, perchè essi dànno un valido appoggio alle conclusioni del Viola e, mentre possono invogliare anche altri ad approfondire con nuove ricerche questa quistione, portano comunque a questa, in attesa di meglio, un modesto contributo.

[1] Vernadsky, " Bull. Soc. Imp. Nat. Moscou „ (1897), N° 2, pag. 292.

* * *

Notizie riassuntive sulle forme riscontrate nel gesso furono esposte da varî autori: infatti, per parlare solo dei meno antichi, possediamo i riassunti pubblicati quasi contemporaneamente da Brezina (1) e da Hessenberg (2) nel 1872, a cui seguì quello di Des Cloizeaux (3), che comparve nel 1886; venne, a breve distanza, quello di V. Goldschmidt (4), e, subito dopo, quello di Dana (5); per ultimo il Cesaro (6), nel 1895, discutendo alcune forme ad indici complicati, date per questo minerale da alcuni mineralisti, compilò, come conclusione al suo lavoro, un elenco delle forme che si potevano a quell'epoca, secondo il suo avviso, considerare come sufficientemente stabilite.

Nei vent'anni successivi non comparve, a quanto mi risulta, alcun riassunto al riguardo, mentre è avvenuto per il gesso, come per molti altri minerali, che parecchie forme nuove furono riscontrate dagli studiosi e che, inoltre, alcune delle vecchie misure furono interpretate in modo più razionale, sì da condurre ad ammettere simboli diversi da quelli prima dedotti e da tutti adottati.

Accadde inoltre che qualche forma considerata un tempo, con ragione, come dubbia perchè stabilita in base a misure poco soddisfacenti, fu, in seguito, con nuove ricerche sugli stessi o su diversi giacimenti, stabilita definitivamente.

---

(1) A. Brezina, *Krystallographische Studien an Wiserin, Xenotim, Mejonit, Gyps, Erythrin und Simonyit*, " Mineralogische Mittheilungen ", II (1872), pag. 18.

(2) Hessenberg, " Abhandl. Senckenberg'schen Naturf. Ges. in Frankf. a. M. ", VIII (1872), 30.

(3) A. Des Cloizeaux, *Note sur la détermination des paramètres du gypse et sur les incidences des formes observées dans ce minéral*, " Bull. Soc. fr. de min. " *9* (1886), pag. 175.

(4) V. Goldschmidt, *Index d. Krystallformen d. Mineralien*, II (1890), pag. 121.

(5) E. S. Dana, *Syst. of Mineralogy*, VI ed. (1892), pag. 933.

(6) Cesàro, *Sur la notation à assigner à certaines formes à indices compliqués, dans le gypse*, " Bull. Soc. Roy. d. Belg. " *29* (1895), pag. 385.

Occupandomi di questo argomento, ebbi, inoltre, occasione di osservare che, qui più che altrove, in seguito a ripetute sviste di varî mineralisti, si è venuta generando una certa confusione nell'assegnare alle varie forme le lettere che, per consuetudine antica e talvolta utile, si sogliono adottare come simbolo più breve, specialmente comodo nelle figure.

In conseguenza di ciò, ho sentito il bisogno di compilarmi un elenco delle varie forme che per il nostro minerale risultano stabilite con certezza, come pure di quelle che è più esatto accettare con riserve; riportando qui ora tale elenco credo, per le ragioni prima esposte, di non fare cosa superflua.

Anzichè separarle in due gruppi distinti, cioè delle forme ben stabilite e di quelle incerte, ho preferito ordinarle tutte assieme, ricordando in apposite note le ragioni per cui, caso per caso, i varî simboli debbansi ritenere accettabili solo con riserva; ciò feci perchè in molti casi la scarsità e poca precisione di dati da cui essi furono ricavati tolgono ogni fondamento concreto alla discussione.

Simbolo		Autore	Osservazioni
a	100	Haüy	3
b	010	"	"
c	001	Quenstedt	9 ; 32
p	510	Luedecke	22 ; 33
z	310	Brezina	12
	11.5.0	Des Cloizeaux	49
α	210	Greg & Lettsom	8
	13.7.0	Rogers	52
ψ	320	Brezina	12
	430	Viola	28 ; 50
m	110	Haüy	3
	450	A. S. Moses	19 ; 51

	Simbolo	Autore	Osservazioni
	340	G. O. Smith	20 ; 51
g	230	Soret	1
φ	350	Luedecke	22 ; 34
η	470	Soret	1 ; 35
	13.23 0	„	1 ; 17
h	120	„	1
	490	„	1 ; 17 ; 53
	11.25.0	„	1 ; 17
i	250	„	1
k	130	„	„
	270	„	1 ; 17 ; 54
	7.25.0	„	1 ; 17
r	140	„	1
	5.23.0	„	1 ; 17
	290	„	„ „
	703	Kenngott	56
	302	Laspeyres	14 ; 55
d	101	Weiss	2
	102	Cesaro	21
λ	103	Schrauf, Hessenberg	10 ; 11 ; 36
	$\bar{1}04$	Quercigh	presente lavoro
e	$\bar{1}03$	Soret	1
β	$\bar{5}09$	Hessenberg	11
	7.0.11	Dana	13 ; 17
χ	203	Reusch	37
t	$\bar{1}01$	Haüy	3

Simbolo		Autore	Osservazioni
v	011	Soret	1
	0.11.16	Viola	30 ; 41
γ	023	Hessenberg	11 ; 21
	013	Moses	19
μ	553	Perrier	31 ; 38
l	111	Haüy	3
π	113	Perrier	31 ; 39
	$\bar{1}14$	Kraatz	23
w	$\bar{1}13$	Neumann	5
	$\bar{2}25$	Des Cloizeaux, Lacroix	25 ; 40
	7.7.18	Des Cloizeaux	40 ; 41
	$\bar{3}38$	Des Cloizeaux, Cesaro	15 ; 21 ; 40
	$\bar{4}49$	Lacroix	25
	$\bar{2}23$	Cesaro	15 ; 42
n	$\bar{1}11$	Haüy	3
	221	Kraatz	23
y	131	Neumann	5
	$\bar{1}31$	Soret	1
s	$\bar{3}83$	Viola	28 ; 50
x	$\bar{1}21$	Soret	1
	212	Artini	27 ; 43
	$\bar{3}13$	"	" "
u	133	Haüy	3
	155	Viola	30 ; 41
θ	477	Cesaro	44 ; 21
	577	H. Smith	45
	11.7.7	Cesaro	57

	Simbolo	Autore	Osservazioni
ζ	211	Schrauf? Perrier	10 ; 31 ; 46
	$\bar{1}98$	Viola	30 ; 41
σ	234	Hessenberg	11 ; 21
	$\bar{3}14$	Cesaro	29 ; 47
	$\bar{4}79$	Hessenberg, Cesaro	11 ; 21 ; 48
	7.4.10	Viola	30 ; 41
	9.13.16	„	„ „
	$\overline{10}.13.17$	„	„ „
	$\bar{2}45$	Des Cloizeaux	59
	5.10.12	Hessenberg	„
	$\overline{11}.21.26$	„	„
	$\bar{5}.4.20$	Leuze	60
	147	Quercigh	presente lavoro
	165	Viola	30 ; 41
	3.12.26	„	„ „
	15.12.20	„	„ „
	432	„	28 ; 50
	697	Laspeyres	14 ; 58

NOTE

1. Soret, “ Annales des Mines „, II (1817), pag. 435 e III (1817), pag. 487.
2. Weiss, “ Berl. Ak. Abh. „ (1820-1821), pag. 195.
3. Haüy, *Traité de minéralogie*. II ed., I (1822), pag. 527.
4. Hessel, “ Leonh. Zeitschr. f. Min. „ (1826), pag. 222.
5. Neumann, “ Poggend. Annalen „ *27* (1828), pag. 240.
6. Des Cloizeaux, “ Ann. chimie phys. „ *10* (1844), pag. 53.
7. Miller, *Mineralogy* (1852), pag. 536.
8. Greg & Lettsom, *Mineralogy* (1858), pag. 72.
9. Quenstedt, *Minéralogie* (1863), pag. 440.
10. Schrauf, “ Sitzb. Wiener Ak. „ *63* (1871), pag. 152.

11. Hessenberg, " Senckenberg'schen Naturf. Ges. in Frankfurt a. M. „ *2* (1858), pag. 252; *4* (1861) pag. 2; *8* (1872), pag. 30.
12. Brezina, " Min. Mittheilungen „ *2* (1872), pag. 18.
13. Dana *Syst. of. Mineralogy* (1873), pag. 637.
14. Laspeyres, " Min. Mitt. „ *5* (1875), pag. 113.
15. Cesaro, " Bull. soc. min. „ *10* (1887), pag. 315.
16. Des Cloizeaux, " Bull. soc. min. „ *9* (1886), pag. 175.
17. V. Goldschmidt, *Index d. Krystallformen der Mineralien* II (1890), pag. 123.
18. E. S. Dana, *Syst. of Min.*, VI ed. (1892), pag. 933.
19. A. S. Moses, " School of Mines Quart. N. Y. „ *14* (1894), pag. 223. Cfr. " Zeitschr. f. Krist. „ *26* (1896), pag. 603.
20. G. O. Smith, " Johns Hopkins Univ. Circ. „ (1894), Nr. 112, pag. 31. Cfr. " Zeitschr. f. Kryst. „ 28 (1897), pag. 336.
21. G. Cesaro, " Bull. Ac. roy. d. Belg. „ *29* (1895), 385.
22. O. Luedecke, *Die Minerale des Harzes*, Berlin (1896). Cfr. " Zeitschr. f. Kryst. „ 29 (1898), pag. 185.
23. K. von Kraatz, " Mittheil. a. d. Roemer-Museum „, Hildesheim (1896), Nr. 4. Cfr. " Zeitschr. f. Kryst. „ *30* (1899), p. 662.
24. K. v. Kraatz, " Zeitschr. f. Kryst. „ 27 (1897), pag. 604.
25. Lacroix, " Nouv. Arch. du Muséum „, Paris (3) *9* (1897), pag. 201. Cfr. " Zeitschr. f. Kryst. „ *31* (1899), pag. 82.
26. Rogers " Am. Journ. of Sc. „ *2* (1900), pag. 364.
27. E. Artini, " Rend. Ist. Lomb. „ *33* (1900), pag. 1177. Cfr. " Riv. di min. e crist. ital. „ *26* (1901), pag. 63.
28. C. Viola, " Zeitschr. f. Kryst. „ *35* (1902), pag. 220.
29. Cesaro, " Bull. Ac. roy. d. Belg. „ (1905), pag. 140.
30. C. Viola, " Rend. Acc. Lincei „ *17* (1908), I, pag. 496.
31. C. Perrier, " Rend. Acc. Lincei „ 24 (1915), I, pag. 159.

32. La forma }001{ indicata già da Quenstedt colla lettera *q* fu considerata fra le accertate da V. Goldschmidt (17), mentre il Cesaro nella sua *Revisione delle forme del gesso* (21) espresse l'opinione che essa non si presenti in natura e dichiarò di comprenderla nel suo elenco solo perchè serve di base al prisma di Miller. Essa risulta invece indiscutibilmente accertata per il gesso; in Italia, ad esempio, ricorderò che fu trovata dall'Artini nei cristalli di Sotto Cavallo in territorio di Ballabio (27) e dal Viola in quelli di Romagna (28).

33. La forma *p* }510{ fu rinvenuta con una faccia stretta nel gesso dei dintorni di Ilsenburg nell'Harz. L'angolo misurato di 82°46′ = (010) : (510), quantunque non sia in soddisfacente accordo col calcolato = 82°14,6′ non ne dista però più di quanto, nel gesso, sia dato osservare talvolta per forme più sicuramente stabilite.

34. La forma *φ* }350{ menzionata da O. Luedecke, per i cristalli dell'Harz, fu confermata, poco dopo, in quelli di Girgenti da K. von Kraatz (24), il quale, non conoscendo il lavoro precedente, la credette nuova e l'indicò con *δ*. Non è forma rarissima, poichè fu rinvenuta in seguito dall' Artini nel gesso di Sotto Cavallo (27), da

G. D'Achiardi in quello del marmo di Carrara (" Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. ", Pisa, 1905), poi da C. Anderson in quello del Queensland (cfr " Zeitschr. f. Kryst. " *50* (1912), pag. 276 e *53* (1914), pag. 578). Anderson l'indicò ancora con δ.

35. La forma η $\{470\}$ dedotta, da misure non pienamente soddisfacenti, dal Soret, fu elencata, perciò, fra quelle dubbie dal Goldschmidt; essa fu poi rinvenuta da Moses nei cristalli della Wayne County (Utah) e confermata per la stessa località da G. C. Smith (19 e 20); anche O. Luedecke la menziona per i cristalli dell'Harz in base all'angolo misurato $(010):(470) = 40°18'$ (calc. $39°59,8'$) (XXII).
36. La forma λ $\{103\}$ fu trovata quasi contemporaneamente da Hessenberg che l'indicò con ε e da Schrauf, la cui designazione colla lettera λ è stata da tutti adottata.
37. La forma $\{\bar{2}03\}$ fu osservata già da Reusch (" Pogg. Ann. " *136*, pag. 136), come direzione di fenditura originatasi per percussione. Des Cloizeaux (15) la riportò nel suo elenco. Goldschmidt la mise fra le incerte (17), ma non si può più considerarla come tale dopo che Lacroix la riscontrò nel gesso dei dintorni di Parigi (25), Rogers in quello di Lebo nel Kansas (26) e Cesaro in quello di Bellisio (29). Fu Rogers che nel 1900 le assegnò la lettera χ che per ragioni di priorità deve essere adottata a preferenza della lettera *s* datale da Cesaro, la quale non si potrebbe conservare anche perchè già impiegata ad indicare la $\{\bar{1}31\}$ dal Soret.
38. La forma $\{553\}$ fu trovata in cristalli artificiali da Perrier (31), il quale osservò anche come con tale forma si identifichi la μ $\{995\}$ dedotta dallo Schrauf (10) nel 1871 per il gesso dell'Harz. Il simbolo $\{995\}$ era stato accettato dal Brezina (12) e da Goldschmidt (17), mentre Cesaro aveva dimostrato, in seguito (21), che il simbolo $\{774\}$ sarebbe stato più concordante colle misure di Schrauf, misure che del resto furono prese col goniometro d'applicazione. Perciò, mentre la forma $\{553\}$ rimane stabilita dalle misure di Perrier, le forme $\{995\}$ di Schrauf o quella $\{774\}$ corretta da Cesaro rimangono completamente ipotetiche, tanto più che i cristalli di Schrauf possedevano faccie un po' curve.
39. Cristalli artificiali.
40. Il simbolo $\{\bar{2}25\}$ era stato proposto, assieme a quello meno semplice $\{\bar{7}.7.18\}$, dal Des Cloizeaux per una faccia che diede colle (010), $(1\bar{1}0)$ e $(\bar{1}01)$ rispettivamente gli angoli di 81°, 82° e 22°; a tali valori però il Cesaro (21) dimostrò col calcolo che corrisponde molto più soddisfacentemente il simbolo $\{\bar{5}38\}$. Il Lacroix menziona la $\{\bar{2}25\}$ per il gesso dei dintorni di Parigi (25). La lettera *w* assegnata a questa forma dal Des Cloizeaux e conservata dal Cesaro per la $\{\bar{5}38\}$ era già stata impiegata dal Neumann per la $\{\bar{1}13\}$.
41. Questa forma, come altre menzionate in questi cristalli dall'Autore, sono, secondo la descrizione che egli ne fece, rappresentate da facce vicinali leggermente ricurve, i cui simboli corrispondono alle posi-

zioni di altrettanti riflessi che gli fu possibile individuare col goniometro a due cerchi.

42. La forma $\{\bar{2}23\}$ rinvenuta dal Cesaro sul gesso di Carlamofka (Ekaterinoslaw) ricevette dall'Autore per simbolo la lettera *α* che non si può adottare, poichè essa fu assegnata già da Greg & Lettsom alla $\{210\}$ (8).

43. La forma $\{\bar{3}13\}$ trovata per la prima volta assieme alla $\{\bar{2}12\}$ nel gesso di Ballabio dall'Artini, fu rinvenuta poi anche in quello del Queensland esaminato da Anderson (cfr. " Zeitschr. f. Kryst. „ *53* (1914), pag. 578). Fu riscontrata poi assieme alla $\{\bar{2}12\}$ da H. P. Whitlock (" N. Y. State Museum Bulletin „ *140* (1910), 197, cfr. " Zeitschr. f. Kryst. „ *52* (1913), pag. 77) nel gesso di Garbutt, Monroe County, N. Y.

44. La forma $\{477\}$ fu segnalata dal Cesaro fin dal 1885 (" Bull. soc. min. d. Fr. „ *8*, pag. 317) in un geminato proveniente dal Tirolo; il Groth la mise però in dubbio (" Zeitschr. f. Kryst. „ *12* (1887), pag. 656), ed il Goldschmidt la collocò fra le incerte (17); ma il Cesaro la confermò (21), affermando che si presenta frequente nei cristalli di Salzburg e del Tirolo.

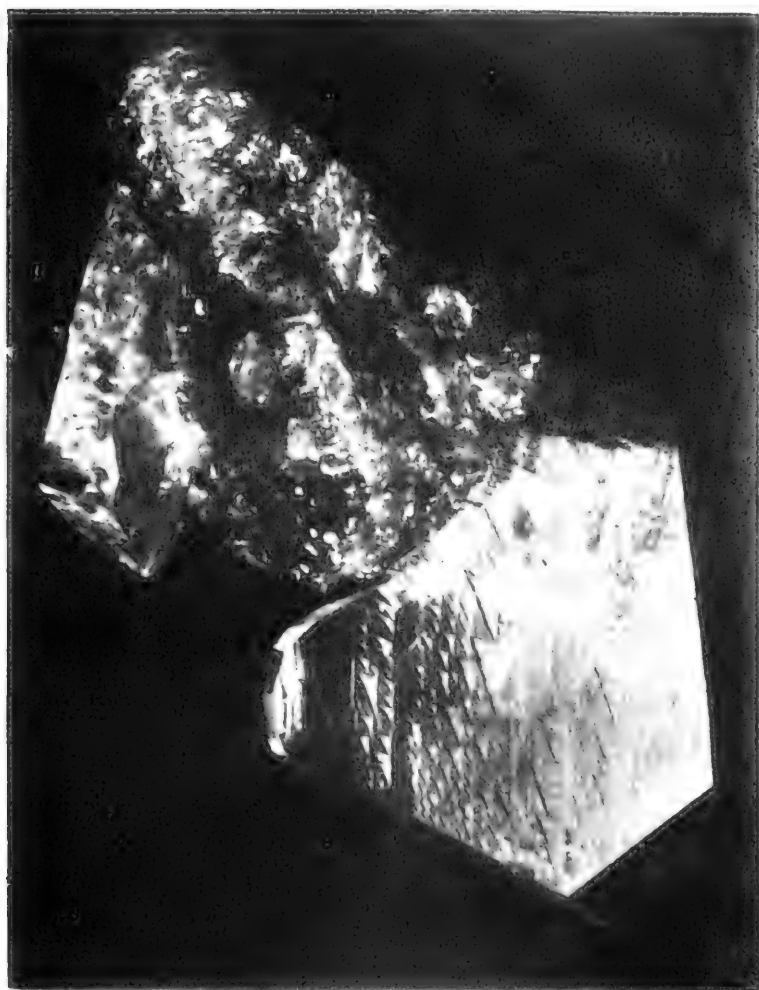
45. H. Smith, per incarico del Groth (" Zeitschr. f. Kryst. „ *28* (1897), pag. 106), trovò la forma $\{577\}$ esaminando alcuni cristalli del Tirolo allo scopo di confermare o meno la dibattuta forma $\{477\}$ di Cesaro. Il risultato fu che entrambe furono ben stabilite per il minerale (44).

46. Schrauf, in base ad una misura approssimativa, adottò il simbolo $\{733\}$ per la forma *ζ*, solo perchè avendo erroneamente attribuito alla *μ* $\{553\}$ il simbolo $\{995\}$ veniva per la tautozonalità con *μ* e con *y* $\{131\}$ necessariamente escluso per *ζ* il simbolo $\{211\}$. Perrier (31) dimostrò, come conseguenza dell'assegnazione del simbolo $\{553\}$ alla *μ*, la necessità di adottare quello $\{211\}$ per la *ζ* di Schrauf. Perciò la $\{733\}$, che era già stata posta tra le incerte da Goldschmidt (17), diventa sempre più ipotetica.

47. La forma $\{\bar{3}14\}$, trovata in un cristallo di Bellisio (Pesaro) dal Cesaro, fu da questo indicata colla lettera *i*, che non si può adottare perchè già universalmente accettata per la $\{250\}$.

48. Hessenberg, da misure prese su cristalli di Sicilia, dedusse l'esistenza della forma $\{\bar{5}.10.12\}$, oppure $\{\overline{11}.21.26\}$, che indicò con *δ*. Il Cesaro trovò su cristalli di Girgenti una forma molto vicina a queste dedotte da Hessenberg e cioè la $\{\bar{4}79\}$, alla quale si avvicinano moltissimo le misure, del resto solo approssimate, di Hessenberg.

49. Il simbolo $\{11.5.0\}$ adottato da Des Cloizeaux per una forma molto vicina a $\{13.6.0\}$, osservata da Grey & Lettsom, fu messo fra quelli incerti da Goldschmidt (17) e da Dana (18), mentre Cesaro (21) l'accetta senza restrizioni. Non sembra però una forma da ammettersi senza nuove basi sperimentali.

50. In un cristallo di gesso di Romagna il Viola riferisce (28) che " auf (001) sind zwei polyëdrische Einschnitte der Eindrücke zu

" beobachten, deren gemessene Kantenwinkel auf folgende Flächen " hindeuten: (4$\bar{3}$2), ($\bar{3}$83), (111), ($\bar{1}\bar{1}$1), (430) und (001) „. Nè la }430{, nè la }432{ e }$\bar{3}$83{ furono ancora dunque trovate con vere facce nel gesso.

51. La forma }340{, ammessa da G. O. Smith (20) per il gesso di South Wash., Utah, vi fu da lui trovata con una sola faccia che al goniometro d'applicazione diede colla (470) un angolo medio di 87°13′, mentre il calcolo darebbe (470) : (340) = 87°46′. Siccome per lo stesso giacimento il Moses (19) senza dare le misure su cui basò le sue deduzioni ammette la presenza della forma }450{, ne consegue che entrambi i due simboli }340{ e }450{ rimangono dubbii e meritevoli di conferma prima di adottarli definitivamente.
52. Data per incerta dall'autore (" School of Mines Quart. „ *23* (1902), pag. 133. Cfr. " Zeitschr. f. Kryst. „ *38* (1904), pag. 692).
53. La }490{, indicata con ε da Soret, fu ritenuta incerta da Goldschmidt; il Cesaro la dà fra le forme sicure, ma non essendo mai intervenuta la prova sperimentale a sostegno di tale ammissione, questo simbolo attende conferma.
54. La forma }270{, indicata con *q* dal Soret, posta in dubbio da Goldschmidt, richiede conferma sperimentale come quelle elencate in seguito.
55. La }302{, indicata con ϑ da Laspeyres, fu messa in dubbio da Goldschmidt ed in seguito alcuna conferma sperimentale venne ad avvalorarla.
56. La forma }703{ è data come incerta dallo stesso Kenngott (" Neues Jahrb. f. Min. Geol. u. Pal. „ (1887), II, pag. 83) e non fu ancora confermata.
57. La }11.7.7{ di Cesaro (" Bull. Soc. min. d. Fr. „ *8* (1885), pag. 317) fu considerata inaccettabile dal Groth (" Zeitschr. f. Kryst. „ *12* (1887), pag. 656), e messa fra le dubbie dal Goldschmidt (17).
58. La forma }697{, indicata con ξ da Laspeyres, fu posta fra le incerte da Goldschmidt (17).
59. La }$\bar{2}$45{, indicata con τ da Des Cloizeaux, è, secondo lo stesso autore, incerta e forse identica alla δ }$\bar{5}$.10.12{ o }$\overline{11}$.21.26{ di Hessenberg. Il Cesaro (21) trovò su cristalli di Girgenti la forma }479{, che potrebbe corrispondere alla stessa forma osservata da Hessenberg, le cui misure però essendo poco sicure, non dànno base ad alcuna discussione.
60. Leuze, nel gesso di Iselhausen (Württemberg), osservò come piano di geminazione, in un cristallo, la direzione corrispondente a }$\bar{5}$.4.20{ (" Ber. d. XXIV Vers. oberrh. geol. Ver. „ (1891), 21. Cfr. " Zeitschr. f. Kryst. „ *23* (1894), pag. 294).

Un trasformatore dinamico per correnti alternate.

Nota I del Dr. A. G. ROSSI.

1. — Oggetto di questa Nota è di mostrare come una macchina composta di uno statore bifase ove si sconnettano l'uno dall'altro i due avvolgimenti destinandoli a due circuiti distinti, e di un rotore " chiuso ", può funzionare come un particolare *trasformatore dinamico*, allorchè ad uno degli avvolgimenti si applichi una tensione alternata, l'altro facendo parte di un circuito secondario, e si faccia girare il rotore in un verso qualunque con una forza motrice esterna.

A rotore immobile, non esiste induzione mutua definita fra i due avvolgimenti di statore. L'effetto della rotazione, come verrà dimostrato, è di far nascere fra essi una induzione mutua, funzione crescente della velocità di rotore.

Questo apparecchio fu immaginato dall'autore per uno scopo speciale e costruito nella forma di una *macchina a disco*: il rotore è un vero disco di rame di alta conduttività, pieno e continuo; la parte fissa comprende due statori identici, portanti avvolgimenti multipolari con gli assi magnetici paralleli all'asse del disco, sfalsati l'uno rispetto all'altro di un quarto di passo e fronteggianti con le loro estremità polari le due faccie del disco rotante. Ciascuno dei due avvolgimenti statori può, indifferentemente, far la parte di primario o di secondario.

I due statori possono essere convenientemente nucleati di ferro laminato; ma per l'oggetto della teoria di prima approssimazione che qui si accenna, considereremo lo schema dell'apparecchio senza ferro (fig. 1), composto di un nastro di rame Δ, rappresentante la corona circolare periferica del rotore, mobile con la velocità u fra due uguali avvolgimenti a spirali alterne, I e II, che lo fronteggiano con le loro faccie polari.

A rotore immobile, supposto il primario (I) percorso da corrente alternata, nascono sul Δ delle correnti, indotte staticamente, sopra dei circuiti fissi di forma indeterminata intorno alle proiezioni delle estremità polari induttrici, dei quali si potrà però assumere un profilo medio o equivalente, attribuendogli una resistenza r ed una reattanza λ, costanti.

Quando il rotore si muova con la velocità lineare u, persisterà fisso nello spazio il sistema delle correnti indotte staticamente nella rete di circuiti (r, λ) congruente con le spire

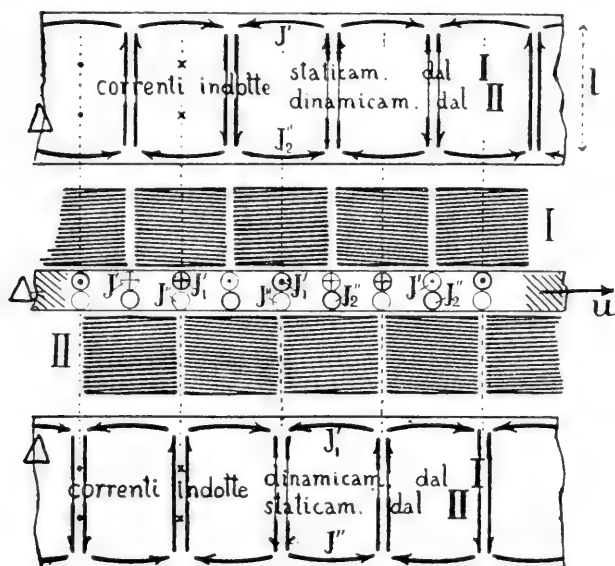



Fig. 1.

primarie, e nascerà un secondo sistema di correnti, indotte dinamicamente, dovute a forze elettro-motrici della forma $B_1 l u$, risiedenti sulle proiezioni delle estremità polari primarie. Tali correnti si distribuiranno sul Δ secondo certe linee chiuse, di forma stazionaria e fissa nello spazio, mentre l'indotto si muove, costituendo sul Δ una nuova rete di circuiti analoga alla precedente, ma su quella spostata di un quarto di passo.

Una ipotesi semplificatrice che si può ammettere senza difficoltà è questa, che i circuiti indotti dinamici sul rotore abbiano l'identica forma dei circuiti indotti statici e quindi le stesse

loro caratteristiche r, λ; il che equivale ad assumere per entrambe le specie di correnti indotte sul rotore, due reti di circuiti fittizi identici (r, λ) tali che, percorsi dalle rispettive correnti, dieno effetti termici e magnetici come quelli reali.

Di queste due reti di circuiti indotti (fig. 1), definite dalla grandezza del passo e dalla ampiezza radiale l delle estremità polari di statore, la prima rete è conassiale e congruente con le spirali primarie, la seconda con le spirali secondarie.

Sieno allora: r_1, λ_1 rispettivamente la resistenza e la reattanza interne dei due identici avvolgimenti statori; saranno r_1, λ_1 le caratteristiche di quello che farà ufficio di primario, ed $r_2 = r_1 + r_e$, $\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_e$, le caratteristiche del secondario, ove r_e e λ_e spettino alla parte esterna. Sia inoltre μ il fattore di induzione mutua fra ciascuno degli avvolgimenti statori e i corrispondenti circuiti indotti sul rotore, il quale è ugualmente disposto rispetto ad entrambi ed omogeneo.

Supponendo dapprima il rotore immobile ed il secondario (II) assente o aperto, le equazioni del sistema (I, Δ) sono quelle di un trasformatore statico senza ferro:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= (r_1 - j\lambda_1)\, J_1 - j\mu J' \\ 0 &= (r - j\lambda)\, J' - j\mu J_1 , \end{aligned}$$

ove $\mathcal{E}_1$ sia la tensione sinoidale applicata al primario, J_1 la corrente primaria, J' la corrente indotta nella rete (r, λ) corrispondente sul Δ.

Per la presenza del Δ, che fa da secondario, la resistenza e la reattanza primarie ne risultano apparentemente modificate, acquistando i nuovi valori costanti

$$r_1' = r_1 + \mu^2 \frac{r}{z^2}, \qquad \lambda_1' = \lambda_1 - \mu^2 \frac{\lambda}{z^2}, \qquad \text{ove} \qquad z^2 = r^2 + \lambda^2.$$

cosicchè il ritardo, $\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_1'}{r_1'}$, della corrente I_1 sulla tensione applicata E_1, risulta minore di $\operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_1}{r_1}$ quale sarebbe in assenza del Δ. Vedremo che la rotazione di quest' ultimo farà ulteriormente diminuire questo ritardo.

Si imprima dunque al rotore Δ la velocità u; nascerà in esso, di fronte ad ogni estremità polare primaria, una forza elettromotrice indotta, diretta secondo il raggio, $\mathcal{E}_1' = \mathcal{B}_1 l u$, e si produrrà una corrente indotta dinamica

$$J_1' = \frac{\mathcal{B}_1 l u}{r - j\lambda} = \mathcal{B}_1 l u \,(g + jb)\,,$$

distribuita su una rete di circuiti (r, λ) spostata di un quarto di passo sull'altra rete (r, λ) percorsa dalla corrente J' indotta staticamente, la quale d'altra parte persiste insieme.

Assumendo, astrazion fatta da nuclei di ferro, $\mathcal{B}_1$ proporzionale al campo risultante dalle ampère-spire di J_1 e di $J' = j\mu J_1 (g + jb)$, possiamo scrivere

$$\mathcal{E}_1' = ku\,(J_1 + J') = ku\,[1 + j\mu\,(g + jb)]\,J_1\,,$$

ove con k si indichi un coefficiente costante, dipendente dai caratteri costruttivi dell'apparecchio. La corrente sarà quindi:

$$(2)\qquad J_1' = \mathcal{E}_1'\,(g + jb) = kuJ_1\,[\,g + jb - \mu\,(2bg + j\,(b^2 - g^2))\,].$$

L'avvolgimento secondario è concatenato col campo di questa corrente indotta dinamicamente J_1', è dunque sede della forza elettromotrice indotta $j\mu J_1'$ e se lo si chiuda col circuito (r_2, λ_2), vi nascerà la corrente secondaria J_2.

Il flusso magnetico di questa corrente e di quella da essa indotta staticamente sul rotore, che diremo J'', tagliato dal rotore in moto, dà luogo sul medesimo ad un nuovo sistema di correnti indotte dinamiche, J_2'', che risulteranno distribuite su una rete di circuiti (r, λ) spostata di un quarto di passo sulla prima rete indotta dinamicamente dal primario e quindi coincidente con la rete della corrente J'. I campi di questa seconda serie di correnti indotte dinamiche sono però concatenati con le spire primarie e vi inducono forze elettromotrici $j\mu J_2''$, le quali creano la reazione della corrente secondaria sulla primaria.

Le equazioni del sistema si riducono a due coppie, la prima riguardante il trasformatore dinamico (I, Δ), la seconda quello (Δ, II).

La rete di circuiti (r, λ) sul rotore, la quale fronteggia l'avvolgimento primario, è percorsa dalla corrente

$$(a) \quad J' + J_2'' = j\mu J_1 (g + jb) + kuJ_2 [g + jb - \mu(2bg + j(b^2 - g^2))],$$

e reagisce su detto primario con la forza elettromotrice

$$j\mu (J' + J_2'').$$

La seconda rete di circuiti (r, λ) sul rotore, a un quarto di passo dalla precedente e che fronteggia l'avvolgimento secondario, è percorsa dalla corrente

$$(b) \quad J'' + J_1' = j\mu J_2 (g + jb) + kuJ_1 [g + jb - \mu(2bg + j(b^2 - g^2))],$$

e reagisce sul secondario con la forza elettromotrice

$$j\mu (J'' + J_1').$$

Le due coppie di equazioni fondamentali sono dunque:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (I, \Delta) \left\{ \begin{array}{r} \mathcal{E}_1 = (r_1 - j\lambda_1) J_1 - j\mu (J' + J_2'') \\ kuJ_2 [1 + j\mu (g + jb)] = (r - j\lambda)(J' + J_2'') - j\mu J_1 \end{array} \right. \\ (\Delta, II) \left\{ \begin{array}{r} kuJ_1 [1 + j\mu (g + jb)] = (r - j\lambda)(J'' + J_1') - j\mu J_2 \\ 0 = (r_2 - j\lambda_2) J_2 - j\mu (J'' + J_1'). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Con le due equazioni centrali, che sono le (a), (b), si eliminano le *correnti di rotore* (che utilizzeremo più innanzi)

$$J_{R_1} = J' + J_2'', \qquad J_{R_2} = J'' + J_1'.$$

Rimangono la prima e la quarta, *equazioni delle correnti di statore*, primaria e secondaria:

$$(4) \quad \begin{array}{l} \mathcal{E}_1 = J_1 \left[r_1 - j\lambda_1 + \mu^2 (g + jb) \right] - j\mu J_2 ku \left[g + jb - \mu (2bg + j(b^2 - g^2)) \right] \\ 0 = J_2 \left[r_2 - j\lambda_2 + \mu^2 (g + jb) \right] - j\mu J_1 ku \left[g + jb - \mu (2bg + j(b^2 - g^2)) \right]. \end{array}$$

Quivi porremo in seguito, per abbreviare,

$$K = k\mu u,$$

grandezza omogenea con $[r]^2$ e sempre positiva, poichè rappresenta il coefficiente di forze elettromotrici indotte dinamiche che si invertono insieme ad u; e cioè, μ ha nel prodotto $\mu . u$ sempre lo stesso segno di u, velocità di rotore.

Sostituiremo inoltre: le resistenze e reattanze, le conduttanze e suscettanze, *apparenti*, del *primario* e del *secondario* (modificate dalla mutua induzione statica del rotore), con i simboli

$$r_1' = r_1 + \mu^2 g, \qquad r_2'; \qquad g_1' = r_1' y_1'^2, \qquad g_2';$$
$$\lambda_1' = \lambda_1 - \mu^2 b, \qquad \lambda_2'; \qquad b_1' = \lambda_1' y_1'^2, \qquad b_2'.$$

E finalmente, notando che il fattore comune di jKJ_2 e di jKJ_1, cioè

$$[g - \mu . 2bg + j(b - \mu(b^2 - g^2))],$$

rappresenta *una ammettenza apparente del rotore* (modificata, cioè, da una mutua induzione *sui generis*), porremo:

$$g' = g - \mu . 2bg \quad ; \qquad r' = \left(r - \mu \frac{2\lambda r}{z^2}\right) \frac{r^2 + \lambda^2}{r^2 + (\mu - \lambda)^2};$$
$$b' = b - \mu(b^2 - g^2); \qquad \lambda' = \left(\lambda - \mu \frac{\lambda^2 - r^2}{z^2}\right) \frac{r^2 + \lambda^2}{r^2 + (\mu - \lambda)^2};$$

cosicchè:

$$y'^2 = g'^2 + b'^2 = (g^2 + b^2)[(1 - \mu b)^2 + \mu^2 g^2];$$
$$y'z' = 1; \qquad z'^2 = r'^2 + \lambda'^2 = z^2 \frac{z^2}{z^2 + \mu(\mu - 2\lambda)} = z^2 \frac{r^2 + \lambda^2}{r^2 + (\mu - \lambda)^2}.$$

Poichè si ha sempre $\lambda^2 - r^2 < 2\lambda r < \lambda^2 + r^2$, e, presumibilmente, è: $\mu > \lambda > r$; sarà:

$$z' \lesseqgtr z \quad \text{se} \quad \mu \gtreqless 2\lambda;$$
$$r' \gtreqless 0 \quad \text{se} \quad 2\lambda\mu \lesseqgtr z^2;$$
$$\lambda' \gtreqless 0 \quad \text{se} \quad \mu(\lambda^2 - r^2) \lesseqgtr \lambda(\lambda^2 + r^2);$$

tutti casi possibili, a seconda dei valori relativi di μ, λ, r, costanti dell'apparecchio. Il fattore d'induzione μ dipende (oltre che da λ_1) dalla grandezza del *passo* e dalla distanza fra le estremità polari degli statori e il piano medio del rotore. Il rapporto $\frac{\lambda}{r}$ sarà generalmente di grandezza notevole, specie con frequenze elevate; sarà però tanto minore, per un dato rotore e a una data frequenza, per quanto più piccolo sia il passo, assegnato dal numero delle coppie di poli dello statore. Col diminuire del passo, difatti, λ diminuisce più rapidamente di r (a parità di ampiezza polare radiale), poichè λ può considerarsi proporzionale all'area, mentre r è proporzionale al perimetro dei circuiti indotti di rotore e inoltre col diminuire del passo diminuisce anche la sezione ohmica dei circuiti stessi.

Con le dette sostituzioni, le (4) divengono:

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= J_1 (r_1' - j\lambda_1') - jKJ_2 (g' + jb') \\ 0 &= J_2 (r_2' - j\lambda_2') - jKJ_1 (g' + jb'), \end{aligned}$$

ossia:

$$(6) \quad \begin{aligned} J_2 &= jKJ_1 (g' + jb') (g_2' + jb_2') \\ \mathcal{E}_1 (g_1' + jb_1') &= J_1 [1 + K^2 (g' + jb')^2 (g_1' + jb_1') (g_2' + jb_2')]. \end{aligned}$$

Le (6) ci serviranno a dedurre le espressioni delle due correnti e le fasi relative.

2. — Le (5) ci autorizzano a conchiudere senz'altro che: *L'apparecchio si comporta come un trasformatore di caratteristiche* (r_1', λ_1'), (r_2', λ_2') *privo di mutua induzione statica, nel quale il movimento del rotore faccia nascere un fattore d'induzione complesso* $K (g' + jb')$, *di cui tanto la parte reale come la parte immaginaria crescono proporzionalmente con la velocità:*

$$\mu (g' k u + j b' k u) = \mu (\gamma + j\beta).$$

Questo fattore d'induzione *complesso*, subentrante fra gli statori primario e secondario col movimento del rotore, porta di conseguenza che, oltre alla analogia formale di funzionamento

con un ordinario trasformatore statico, il nostro trasformatore dinamico possiederà nuove e particolari proprietà, in quanto questo fattore fornirà delle *componenti modificatrici* tanto alla reattanza apparente quanto alla resistenza apparente primarie, *crescenti con la velocità.*

Sostituendo difatti nella prima delle (5) ciò che si ricava dalla seconda, la si può ridurre alla forma normale

$$\mathcal{E}_1 = J_1 \left[R_K - j \Lambda_K \right], \tag{7}$$

che è: $\mathcal{E}_1 =$

$$J_1 \left[r_1' - K^2 ((b'^2 - g'^2) g_2' + 2b'g'b_2') - j(\lambda_1' + K^2 ((b'^2 - g'^2) b_2' - 2b'g'g_2')) \right].$$

Donde, *la resistenza e la reattanza apparenti primarie, modificate dall'effetto dinamico*:

$$\begin{aligned} R_K &= r_1' - \frac{K^2}{z'^2 z_2'^2} \left[r_2' \frac{\lambda'^2 - r'^2}{z'^2} + \lambda_2' \frac{2\lambda' r'}{z'^2} \right], \\ \Lambda_K &= \lambda_1' + \frac{K^2}{z'^2 z_2'^2} \left[\lambda_2' \frac{\lambda'^2 - r'^2}{z'^2} - r_2' \frac{2\lambda' r'}{z'^2} \right], \end{aligned} \tag{8}$$

ove si noterà che la somma dei quadrati dei due fattori fra parentesi in K^2, vale $r_2'^2 + \lambda_2'^2 = z_2'^2$.

Il primo di tali fattori, quello in R_K, è positivo finchè la linea secondaria *non* contenga tanta capacità da rendere

$$\frac{\lambda_2'}{r_2'} < - \frac{\lambda'^2 - r'^2}{2\lambda' r'}.$$

Il fattore corrispondente che è in Λ_K sarà negativo per poco che la resistenza del circuito secondario sia grande a fronte della reattanza (*cavo non caricato*), o non appena abbiasi

$$\frac{\lambda_2'}{r_2'} < \frac{2\lambda' r'}{\lambda'^2 - r'^2}.$$

E cioè, in costrutto, ove le condizioni della linea secondaria si mantengano entro i limiti espressi dalla relazione

$$- \frac{\lambda'^2 - r'^2}{2\lambda' r'} < \frac{\lambda_2'}{r_2'} < \frac{2\lambda' r'}{\lambda'^2 - r'^2}, \tag{9}$$

possiamo ritenere che: *tanto la resistenza apparente come la reattanza apparente primarie saranno funzioni decrescenti della velocità del rotore.*

Ciascuna potrà annullarsi a una determinata velocità e poi cambiar di segno. Precisamente, ciò avverrà per le corrispondenti componenti della tensione primaria.

La relazione condizionale (9) offrirà alla realizzazione pratica tanto maggior larghezza, quanto meno si discosti dall'*unità* il valore della costante

$$\frac{\lambda'}{r'} = \text{tg}\,\alpha',$$

che definisce l'angolo di ritardo delle correnti di rotore sulle rispettive forze elettromotrici dinamiche.

Si trova ora

$$\alpha' = \text{arc tg}\,\frac{\lambda}{r} + \text{arc tg}\,\frac{\mu r}{r^2 - \lambda(\mu - \lambda)} = \alpha_0 + \alpha\,. \tag{10}$$

Certamente, $\alpha_0 = \text{arc tg}\,\frac{\lambda}{r}$ è più prossimo a 90° che a 45°; ma $\text{tg}\,\alpha$ può essere negativo se, oltre ad aversi $\mu > \lambda > r$, abbiasi anche $\mu \gtrsim 2\lambda$, ciò che non esce dalla cerchia delle possibilità pratiche. Vale a dire che potrà ottenersi, per costruzione, la costante $\text{tg}\,\alpha'$ non molto discosta dal valore *uno*; basterà a questo scopo rendere notevole la reattanza λ_1 degli avvolgimenti di statore, grande il numero delle coppie di poli su l'arco unitario di rotore e piccola quanto possibile la distanza fra le estremità polari induttrici e il rame rotante.

Secondo le (8), si calcolano: il ritardo della corrente primaria I_1 sulla tensione applicata E_1

$$\text{tg}\,\varphi_1 = \frac{\Lambda_K}{R_K}, \tag{11}$$

e l'*impedenza primaria*: $Z_K =$ (12)

$$\sqrt{z_1'^2 + \frac{K^4}{z'^4 z_2'^2} - \frac{2K^2}{z'^2 z_2'^2}\left[\frac{2\lambda' r'}{z'^2}(r_1'\lambda_2' + r_2'\lambda_1') + \frac{\lambda'^2 - r'^2}{z'^2}(r_1' r_2' - \lambda_1'\lambda_2')\right]}\,.$$

3. — Potremmo subito, con la (12), scrivere l'espressione della corrente primaria. Ma preferiamo servirci metodicamente delle (6) per ricavare *le due correnti* e *le fasi relative*, eseguendo i calcoli ivi indicati con l'aiuto delle seguenti sostituzioni abbreviative:

$$G_1^2 = g'g_1' - b'b_1', \qquad B_1^2 = g'b_1' + g_1'b'; \qquad G_2^2, \qquad B_2^2;$$
$$R_1^2 = r'r_1' - \lambda'\lambda_1', \qquad \Lambda_1^2 = r'\lambda_1' + r_1'\lambda'; \qquad R_2^2, \qquad \Lambda_2^2;$$

$$G_{12}^4 = G_1^2 G_2^2 - B_1^2 B_2^2, \qquad B_{12}^4 = G_1^2 B_2^2 + G_2^2 B_1^2;$$
$$R_{12}^4 = R_1^2 R_2^2 - \Lambda_1^2 \Lambda_2^2, \qquad \Lambda_{12}^4 = R_1^2 \Lambda_2^2 + R_2^2 \Lambda_1^2;$$

per le quali si può scrivere:

$$(g' + jb')(g_1' + jb_1') \times (g' + jb')(g_2' + jb_2') =$$
$$= (G_1^2 + jB_1^2)(G_2^2 + jB_2^2) = G_{12}^4 + jB_{12}^4;$$

$$(r' - j\lambda')(r_1' - j\lambda_1') \times (r' - j\lambda')(r_2' - j\lambda_2') =$$
$$= (R_1^2 - j\Lambda_1^2)(R_2^2 - j\Lambda_2^2) = R_{12}^4 - j\Lambda_{12}^4;$$

$$\frac{1}{y'y_1'} = z'z_1' = \sqrt{R_1^4 + \Lambda_1^4}; \qquad \frac{1}{y'y_2'} = z'z_2' = \sqrt{R_2^4 + \Lambda_2^4};$$

$$z'^2 z_1'^2 \,.\, z'^2 z_2'^2 = (R_1^4 + \Lambda_1^4)(R_2^4 + \Lambda_2^4) = R_{12}^8 + \Lambda_{12}^8 =$$
$$= (R_1^2 R_2^2 - \Lambda_1^2 \Lambda_2^2)^2 + (R_1^2 \Lambda_2^2 + R_2^2 \Lambda_1^2)^2.$$

Si ottiene così, in termini ammettenze:

$$(13) \qquad \begin{aligned} J_1 &= \frac{\mathcal{E}_1}{g' + jb'} \, \frac{G_1^2 + jB_1^2}{1 + K^2(G_{12}^4 + jB_{12}^4)}, \\ J_2 &= \frac{\mathcal{E}_1}{g' + jb'} \, \frac{(G_1^2 + jB_1^2)\, jK(G_2^2 + jB_2^2)}{1 + K^2(G_{12}^4 + jB_{12}^4)}, \end{aligned}$$

e in termini impedenze:

$$(14) \qquad \begin{aligned} J_1 &= \mathcal{E}_1 \, \frac{(r' - j\lambda')(R_2^2 - j\Lambda_2^2)}{R_{12}^4 + K^2 - j\Lambda_{12}^4}, \\ J_2 &= \mathcal{E}_1 \, \frac{jK(r' - j\lambda')}{R_{12}^4 + K^2 - j\Lambda_{12}^4} = J_1 \, \frac{jK}{R_2^2 - j\Lambda_2^2}. \end{aligned}$$

Le (14) ci dànno le *ampiezze* e le *fasi*:

$$
(15)\quad \begin{cases} \mathsf{I}_1 = \mathsf{E}_1 \dfrac{z'\sqrt{R_2^4+\Lambda_2^4}}{\sqrt{(R_{12}^4+K^2)^2+\Lambda_{12}^8}}\,; & \varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\Lambda_{12}^4}{R_{12}^4+K^2} + \\ & \quad - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\Lambda_2^2}{R_2} - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\lambda'}{r'}\,. \\ \mathsf{I}_2 = \mathsf{E}_1 \dfrac{z' K}{\sqrt{(R_{12}^4+K^2)^2+\Lambda_{12}^8}}\,; & \varphi_2 = \varphi_1 + \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\Lambda_2^2}{R_2^2}\,. \end{cases}
$$

Ciò che può chiamarsi il *rapporto di trasformazione delle correnti* è:

$$
(16)\qquad \rho = \frac{\mathsf{I}_2}{\mathsf{I}_1} = \frac{K}{\sqrt{R_2^4+\Lambda_2^4}} = \frac{K}{z' z_2'}\,.
$$

Si noterà l'analogia formale di queste espressioni con le corrispondenti per un trasformatore statico.

4. — A tensione primaria E_1 costante e circuito secondario aperto ($\mathsf{I}_2 = 0$), la *tensione secondaria* è la forza elettromotrice indotta dinamica

$$
(17)\qquad \begin{aligned} &\mathcal{E}_2 = jK(g'+jb')(g_1'+jb_1')\,\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 \frac{K}{R_1^2 - j\Lambda_1^2}\,; \\ &\mathsf{E}_2 = \mathsf{E}_1 \frac{K}{\sqrt{R_1^4+\Lambda_1^4}} = \mathsf{E}_1 \frac{K}{z' z_1'}\,; \qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{r'\lambda_1' + r_1'\lambda'}{r' r_1' - \lambda'\lambda_1'} + \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}
$$

A tensione primaria costante, la tensione secondaria a vuoto cresce proporzionalmente alla velocità del rotore.

L'espressione (16) della corrente secondaria mostra che *se si alimentasse il primario a corrente costante, la macchina fornirebbe una corrente secondaria crescente proporzionalmente con la velocità del rotore.*

La differenza di fase fra le due correnti ($\varphi_2 - \varphi_1$), *e la differenza di fase fra le due tensioni* (17), *sono indipendenti dalla velocità.*

Supporremo in quanto segue di alimentare il primario a tensione costante.

Le espressioni (15) delle ampiezze massime, introducendovi

come coefficiente il valore (costante) della corrente primaria a rotore immobile, $I_{01} = E_1/z_1'$, possono scriversi:

$$(15') \qquad \begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 z'}{z' z_1'} \sqrt{\dfrac{(R_1^4 + \Lambda_1^4)(R_2^4 + \Lambda_2^4)}{(R_1^4 + \Lambda_1^4)(R_2^4 + \Lambda_2^4) - K^2 [2(\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - R_1^2 R_2^2) - K^2]}} , \\ I_2 = I_{01} \sqrt{\dfrac{(R_1^4 + \Lambda_1^4) K^2}{z'^4 z_1'^2 z_2'^2 + K^4 - 2 K^2 (\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - R_1^2 R_2^2)}} , \end{cases}$$

ove i due denominatori sono, ovviamente, identici (cfr. (12)).

Sotto tal forma, le due espressioni sono quelle stesse che varrebbero per un trasformatore statico, di caratteristiche $(R_1^2, \Lambda_1^2)\, K\, (R_2^2, \Lambda_2^2)$, ed offrono alla discussione i casi che si otterrebbero avendo in potere di variare il " fattore d'induzione " K da 0 a ∞.

Per $K = 0$: $I_1 = I_{01}$, $I_2 = 0$, [1].

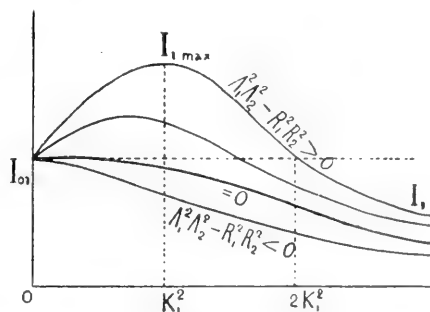
Per K crescente da zero, allorchè si imprima al rotore una velocità crescente in una direzione qualunque:

I) L'impedenza primaria comincia o col diminuire verso un minimo per poi tornare a crescere, oppure aumenta fin dapprincipio indefinitamente, a seconda che si abbia

$$\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - R_1^2 R_2^2 \gtreqless 0 ,$$

e di conseguenza, la *corrente primaria* si avvia ad un massimo, oppure diminuisce indefinitamente, col crescere della velocità (cfr. (12)).

Fig. 2.

Raggiunge il massimo

$$(18) \qquad I_{1\,max} = I_{01} \sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - R_1^2 R_2^2}{R_1^2 \Lambda_2^2 + R_2^2 \Lambda_1^2} \right)^2} = \frac{E_1}{z_1'} \, \frac{z'^2 z_1' z_2'}{R_1^2 \Lambda_2^2 + R_2^2 \Lambda_1^2} ,$$

[1] La corrente I_{01} corrisponderebbe, per un trasformatore ordinario, alla corrente primaria *a vuoto*.

per la velocità corrispondente a

$$(18') \qquad K^2 = \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - R_1^2 R_2^2 = K_1^2;$$

poi diminuisce indefinitamente, ripassando per il valore iniziale I_{01} con $K^2 = 2 K_1^2$.

II) La *corrente secondaria* nasce insieme alla velocità, con gradiente infinito, sale verso un massimo, che raggiunge per

$$(19) \qquad K^2 = \sqrt{R_1^4 + \Lambda_1^4} \sqrt{R_2^4 + \Lambda_2^4} = K_2^2,$$

poi lentamente diminuisce, sorpassando però il valore della corrente primaria per $K^2 = R_2^4 + \Lambda_2^4 = K_{12}^2$.

Il massimo della corrente secondaria

$$(20) \qquad I_{2\,max} = I_{01} \sqrt{\frac{z'^2 z_1'^2}{2\,[z'^2 z_1' z_2' - (\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - R_1^2 R_2^2)]}}$$

è sempre inferiore al massimo della corrente primaria e corrisponde ad una velocità maggiore ($K_2^2 > K_1^2$).

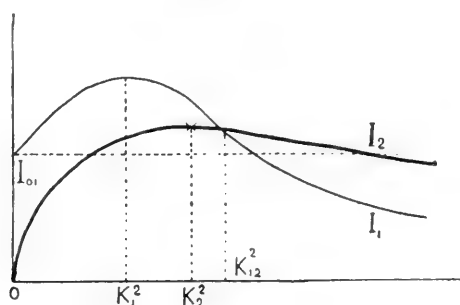



Fig. 3.

Ma i due massimi tendono a coincidere per una stessa velocità e con un valore grandissimo (finchè la sorgente che alimenta il primario sopperisce a mantenere la tensione costante), allorchè diminuisca verso zero la grandezza $(R_1^2 \Lambda_2^2 + R_2^2 \Lambda_1^2)$ a vantaggio della grandezza $(\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - R_1^2 R_2^2)$, — la somma dei quadrati dalle quali vale $(R_1^4 + \Lambda_1^4)(R_2^4 + \Lambda_2^4) = z'^4 z_1'^2 z_2'^2$;

o, in altri termini, quando tenda ad un valore assai grande il loro rapporto, che è sotto radicale nella (18). Nel quale rapporto, le grandezze relative dei due termini dipendono dalle condizioni esterne del circuito secondario in riguardo alle caratteristiche interne dell'apparecchio, e variano con quelle in sensi inversi.

Detto rapporto vale, termine a termine:

$$(21)\qquad \frac{\Lambda_1^2\Lambda_2^2 - R_1^2 R_2^2}{R_1^2\Lambda_2^2 + R_2^2\Lambda_1^2} = \frac{(\lambda'^2 - r'^2)(r_1' r_2' - \lambda_1'\lambda_2') + 2\lambda' r'(r_1'\lambda_2' + r_2'\lambda_1')}{2\lambda' r'(r_1' r_2' - \lambda_1'\lambda_2') - (\lambda'^2 - r'^2)(r_1'\lambda_2' + r_2'\lambda_1')}\,.$$

Il numeratore è sempre positivo. Il denominatore si annulla per la condizione:

$$\frac{2\lambda' r'}{\lambda'^2 - r'^2} = \frac{r_1'\lambda_2' + r_2'\lambda_1'}{r_1' r_2' - \lambda_1'\lambda_2'}\,,$$

che significa (cfr. (10)):

$$(22)\qquad \pi - 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\lambda'}{r'} = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\lambda_1'}{r_1'} + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\lambda_2'}{r_2'}\,.$$

A rendere quel rapporto assai grande, occorre, cioè, che *il complemento dell'angolo di ritardo delle correnti di rotore non si discosti molto dalla media degli angoli di ritardo dei due circuiti fissi, a rotore immobile*; una relazione critica fra le costanti di tempo dei tre indotti-induttori in presenza, la quale stabilisce le condizioni ottime della linea alimentata da un apparecchio di date caratteristiche interne (o viceversa), quando lo scopo da raggiungere sia l'ottenere una grande corrente secondaria.

5. — *Il rapporto della energia elettrica resa disponibile nel circuito secondario alla energia elettrica spesa nel primario,*

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{I_2^2 r_2'}{E_1 I_1 \cos\varphi_1}\,,$$

rappresenta una specie di " rendimento elettrico " della macchina, ove non si tien conto però del lavoro meccanico speso sul rotore.

Con l'impiego delle (7) e conseguenti, si trova:

$$(23) \quad \eta = \frac{I_2^2 r_2'}{I_1^2 r_1' + I_2^2 r_2' - 2 I_2^2 \Lambda_2^2 b'} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho^2} \frac{r_1'}{r_2'} - 2 \frac{\Lambda_2^2}{r_2'} b'} .$$

Il " rendimento elettrico „ è nullo per $\rho^2 = 0$, ossia $K^2 = 0$. *Per* K^2 *crescente da zero,* η *aumenta verso valori maggiori dell'unità*, sorpassandola con

$$\rho^2 \gtreqless \frac{r_1' z'^2}{2 \lambda' (\lambda' r_2' + \lambda_2' r')} .$$

Per ρ^2 grandissimo, ($K^2 \simeq \infty$), il " rendimento elettrico „ tende al valor limite

$$\eta_\infty = \frac{1}{1 - 2 \frac{\Lambda_2^2 b'}{r_2'}} = \frac{z'^2 r_2'}{- r_2' (\lambda'^2 - r'^2) - \lambda_2' . 2 \lambda' r'}$$

che è negativo. Vuol dire che η raggiunge un massimo per una velocità finita. Ora, questo massimo di η è *infinito.*

Difatti, il

$$(11') \quad \cos \varphi_1 = \frac{(\Lambda_1^2 \lambda' + R_1^2 r') - \rho^2 (\Lambda_2^2 \lambda' - R_2^2 r')}{z' \sqrt{(R_1^4 + \Lambda_1^4) + \rho^4 (R_2^4 + \Lambda_2^4) - 2 \rho^2 (\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - R_1^2 R_2^2)}} ,$$

che è al denominatore di η, si annulla per un determinato valore di ρ^2, ossia per una certa velocità.

A tale velocità, la corrente primaria si riduce alla sola componente oziosa. Per velocità maggiori, la componente attiva della I_1 *diviene negativa*; e cioè, la macchina comincia a versare energia anche nel circuito primario.

Ma prima di questa velocità che annulla $\cos \varphi_1$, se ne incontra un'altra *per la quale si annulla invece la componente oziosa della* I_1, *e la corrente primaria si riduce alla sola componente attiva*: per velocità maggiori, la I_1 è in avanzo di fase su E_1 e la macchina fornisce corrente reattiva al circuito primario.

Indicando con ρ_* e ρ_{**} i valori del rapporto di trasformazione corrispondenti a queste velocità singolari, si trova, dalle (8):

per $\cos \varphi_1 = 1$:

$$(24) \qquad \rho_*^2 = \frac{\Lambda_1^2 r' - R_1^2 \lambda'}{\Lambda_2^2 r' + R_2^2 \lambda'} = \frac{z'^2 \lambda_1'}{2 \lambda' r' . r_2' - (\lambda'^2 - r'^2) \lambda_2'} ;$$

la corrente primaria consta della sola componente attiva:

$$(24') \qquad I^* = E_1 \frac{\Lambda_2^2 r' + R_2^2 \lambda'}{R_1^2 \Lambda_2^2 + R_2^2 \Lambda_1^2} =$$

$$= E_1 \frac{2 \lambda' r' . r_2' - (\lambda'^2 - r'^2) \lambda_2'}{2 \lambda' r' (r_1' r_2' - \lambda_1' \lambda_2') - (\lambda'^2 - r'^2)(r_1' \lambda_2' + r_2' \lambda_1')} ;$$

per $\cos \varphi_1 = 0$:

$$(25) \qquad \rho_{**}^2 = \frac{\Lambda_1^2 \lambda' + R_1^2 r'}{\Lambda_2^2 \lambda' - R_2^2 r'} = \frac{z'^2 r_1'}{2 \lambda' r' . \lambda_2' + (\lambda'^2 - r'^2) r_2'} ;$$

la corrente primaria consta della sola componente reattiva:

$$(25') \qquad I^{**} = E_1 \frac{\Lambda_2^2 \lambda' - R_2^2 r'}{R_1^2 \Lambda_2^2 + R_2^2 \Lambda_1^2} =$$

$$= E_1 \frac{2 \lambda' r' . \lambda_2' + (\lambda'^2 - r'^2) r_2'}{2 \lambda' r' (r_1' r_2' - \lambda_1' \lambda_2') - (\lambda'^2 - r'^2)(r_1' \lambda_2' + r_2' \lambda_1')} .$$

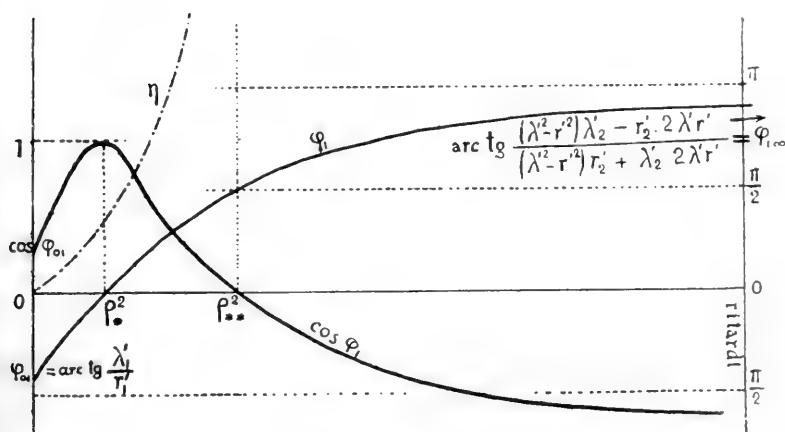



Fig. 4.

Nella fig. 4 sono le curve d'andamento di φ_1 e di $\cos \varphi_1$ in funzione di ρ^2, e il ramo positivo della curva di η, assintotico, come il ramo negativo, all'ordinata in ρ_{**}^2.

Noteremo finalmente che per la velocità corrispondente a $I_{1\,max}$, (18′), si trova:

$$(26) \qquad \varphi_1' = -\,\text{arc tg}\,\frac{\Lambda_2^2\lambda' - R_2^2 r'}{\Lambda_2^2 r' + R_2^2 \lambda'} = \text{arc tg}\,\frac{(\lambda'^2 - r'^2)\,r_2' + 2\lambda' r'.\lambda_2'}{(\lambda'^2 - r'^2)\,\lambda_2' - 2\lambda' r'.r_2'},$$

e cioè, $I_{1\,max}$ *è in avanzo di fase su* E_1, poichè $\rho_*^2 < \rho_1^2 < \rho_{**}^2$. In ($\rho_*^2$) la corrente primaria si riduce alla sola componente attiva; in (ρ_{**}^2) la corrente primaria, di nuovo minore a $I_{1\,max}$, si riduce alla sola componente reattiva: intermediariamente, I_1 ha entrambe le componenti diverse da zero. Ora, confrontando le (24′), (25′), (18), con la (26), si scorge che è:

$$(27) \qquad I_{1\,max} = \sqrt{I_1^{*2} + I_1^{**2}}, \qquad \frac{I_2^{**}}{I_1^*} = \text{tg}\,\varphi_1' = -\,\text{cotg}\,\varphi_{1\infty}.$$

6. — In costrutto: fra (ρ_*^2) e (ρ_{**}^2), la macchina fornisce al circuito primario o d'alimentazione una componente reattiva della corrente, che va variando da zero a I_1^{**}, mentre assorbe una componente attiva che va variando da I_1^* a zero: comportamento analogo a quello di un motore sincrono sovraeccitato.

Da (ρ_{**}^2) in avanti, la macchina offre al circuito primario anche una componente attiva, come farebbe un " generatore asincrono " nel senso ordinario, cioè trascinato oltre sincronismo.

Contemporaneamente però, il trasformatore dinamico fornisce energia al circuito secondario, generandovi una corrente I_2, la quale nasce insieme alla velocità del rotore con gradiente elevatissimo, salendo verso un massimo per poi diminuire indefinitamente ma lentamente.

Rispetto al circuito secondario, che per noi è quello di utilizzazione, la macchina fa dunque le funzioni di un particolare generatore asincrono, se si dà alla parola " asincrono " il suo più ampio significato, poichè *a qualunque velocità si genera in questo circuito una energia elettrica alternata sintonica con quella d'eccitazione, spendendosi energia meccanica.*

Questa energia meccanica va impiegata a vincere una coppia resistente, funzione crescente della velocità, creata dalla esistenza di due campi giranti, in senso inverso alla velocità impressa

al rotore, i quali nascono, spariscono e si invertono insieme alla velocità del rotore. L'uno di questi giranti risulta dalla composizione dei campi delle correnti di statore, l'altro dalla composizione dei campi delle correnti di rotore; il secondo girante rimane spostato *indietro* sul primo.

La velocità di loro rotazione è determinata dal periodo della corrente eccitatrice. Le loro grandezze e l'angolo di spostamento (o scorrimento) dipendono dalla velocità impressa al rotore, oltre che dalla intensità delle eccitazioni primaria e secondaria. Per riguardo alla coppia resistente elettromagnetica, si hanno insomma condizioni dinamiche affatto consimili a quelle che *nascono* in un ordinario motore asincrono polifase, quando, fattagli sorpassare la velocità di sincronismo, la coppia motrice si cambia in resistente e la macchina diviene generatrice.

Il bilancio energetico del trasformatore dinamico è rappresentato dalla equazione:

$$(28)\quad W_2 - W_1 + W_R = \text{Energia meccan. spesa} - \text{Lavoro d'attrito};$$

ove $W_2 - W_1$ è l'energia elettrica guadagnata, (23),

$$(29)\qquad W_2 - W_1 = I_1^2\left[\frac{k^2\mu^2u^2}{z'^2 z_2'^2}\ \frac{2\lambda'(r'\lambda_2' + \lambda' r_2')}{z'^2} - r_1'\right],$$

e W_R è l'energia joule spesa nel rotore.

Per calcolare quest'ultima, partendo dalle (*a*), (*b*) fondamentali e con l'aiuto della seconda (13), si ricavano *le correnti di rotore:*

$$(30)\quad \begin{aligned} J_{R_1} &= j\mu J_1\left\{g - k^2u^2(g_2'(b'^2 - g'^2) + b_2'2b'g') + j\left[\overset{(sic)}{b} - k^2u^2(b_2'(b'^2 - g'^2) - g_2'2b'g')\right]\right\}. \\ J_{R_2} &= k u J_1\left\{g' + \mu^2(bB_2^2 - gG_2^2) + j\left[b' - \mu^2(bG_2^2 - gB_2^2)\right]\right\}. \end{aligned}$$

La corrente J_{R_1}, che percorre la rete (r, λ) fronteggiante il primario, può considerarsi come dovuta alla forza elettromotrice indotta staticamente $j\mu J_1$ *nell'ammettenza di rotore modificata per effetto dinamico* (cfr. (7)).

La corrente J_{R_2}, che percorre la rete (r, λ) fronteggiante l'avvolgimento secondario, può considerarsi come dovuta alla forza elettromotrice indotta dinamicamente kuJ_1 *nell'ammettenza di rotore modificata dalla reazione induttiva del secondario.*

Abbreviando:

$$(30') \qquad \begin{aligned} J_{R_1} &= j\mu J_1 \{ g_u + jb_u \} = \mathcal{E}' \mathcal{Y}_u \\ J_{R_2} &= kuJ_1 \{ g'' + jb'' \} = \mathcal{E}_1' \mathcal{Y}''. \end{aligned}$$

L'espressione del *calore joule speso nel rotore* si otterrà calcolando

$$W_R = W_{R_1} + W_{R_2} = \mathsf{E}'^2 g_u + \mathsf{E}_1'^2 g''.$$

Si ricava, separatamente:

$$(31) \qquad \begin{aligned} W_{R_1} &= \left(\frac{\mu I_1}{z} \right)^2 \left[r - k^2 u^2 \frac{z^2}{z'^2} \frac{r_2'(\lambda'^2 - r'^2) + \lambda_2' . 2\lambda' r'}{z'^2 z_2'^2} \right], \\ W_{R_2} &= \left(\frac{kuI_1}{z'} \right)^2 \left[r' + \mu^2 \frac{z'^2}{z^2} \frac{r_2'(\lambda\lambda' - rr') + \lambda_2'(\lambda r' + r\lambda')}{z'^2 z_2'^2} \right]. \end{aligned}$$

La somma della (29) con le (31) dà quindi il *lavoro meccanico trasformato in energia elettrica*, il quale, diviso per la velocità, fornirebbe la coppia resistente elettromagnetica.

L'espressione si riduce a:

$$(32) \qquad W_2 - W_1 + W_R = I_2^2 r_2' - I_1^2 r_1 + W_{R_2},$$

come se nel primario si spendesse la sola energia joule interessante la pura resistenza ohmica r_1 e nel rotore esistesse la sola corrente indotta dinamicamente dal campo primario, (2), $I_1' = \frac{kuI_1}{z'}$, la quale è concatenata con il circuito secondario inducendovi la forza elettromotrice E_2, (17).

Risultati di esperienze, eseguite con il tipo speciale di questa macchina *a disco* costruito dall'autore, nonchè mediante un ordinario motore bifase, le quali confermano i punti essenziali della teoria svolta, verranno comunicati ulteriormente allo studio dell'apparecchio come autotrasformatore.

Sulla rappresentazione delle forme quaternarie mediante somme di potenze di forme lineari.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI.

La forma ternaria generica di grado n si può rappresentare mediante la somma delle potenze n^{esime} di $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6}$ forme lineari, essendo $\epsilon=0$, oppure $\epsilon=1$, secondochè n non è, oppure è multiplo di tre, eccetto che per $n=2$ e $n=4$; ossia, eccetto che per $n=2$ e $n=4$, nel problema di determinare il minimo numero p_n tale che la forma ternaria generica di grado n si possa esprimere come somma delle potenze n^{esime} di p_n forme lineari, è esatto il risultato fornito dall'immediata applicazione del còmputo delle costanti. Questa proposizione fu dimostrata per la prima volta, in modo completo, dal Palatini [1]: ma già l'aveva enunciata parecchi anni prima J. E. Campbell [2] deducendola però con considerazioni poco rigorose, considerazioni che divengono anche meno soddisfacenti quando il Campbell passa ad estendere la sua ricerca alle forme quaternarie. Tuttavia, anche per queste forme, la conclusione a cui giunge il Campbell, che cioè sussiste per esse un risultato analogo a quello valido per le forme ternarie, è ancora esatta, come mi

(1) *Sulla rappresentazione delle forme ternarie mediante la somma di potenze di forme lineari*, “Rendic. Lincei„ (V) t. 12 (1903), p. 378-384. Vedi un'altra dimostrazione nella mia Nota: *Sulla rappresentazione delle coppie di forme ternarie mediante somme di potenze di forme lineari*, “Annali di Matematica„, serie III, tomo XXIV (1915), p. 1-10; v. la fine del n° 1.

(2) *Note on the maximum number of arbitrary points which can be double points on a curve, or surface, of any degree*, “The Messenger of Mathematics„, vol. XXI (1891-92), p. 158-164.

propongo di dimostrare in questa Nota. Precisamente dimostrerò il seguente

TEOREMA. — *Eccetto che per* $\mathrm{n} = 2$ *e* $\mathrm{n} = 4$, *la forma quaternaria generica di grado* n *si può rappresentare mediante la somma delle potenze* $\mathrm{n}^{\text{esime}}$ *di* $\mathrm{p}_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)+6\eta}{24}$ *forme lineari, dove* η *è il minimo numero intero, positivo o nullo, che fa assumere a* p_n *un valore intero.*

Per $n = 2$, $n = 4$ si ha invece rispettivamente, come è ben noto, $p_2 = 4$, $p_4 = 10$.

Poniamo, essendo n un intero positivo,

$$q_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)+6\eta}{24},$$

dove η è il minimo numero intero positivo o nullo, che fa assumere a q_n un valore intero; cosicchè si ha $\eta = 0$, se n è dispari, o è $\equiv 6 \pmod{8}$, mentre per $n \equiv 4$, $n \equiv 2$, $n \equiv 0 \pmod{8}$ si ha rispettivamente $\eta = 1$, $\eta = 2$, $\eta = 3$. Se p_n è il minimo intero tale che la forma quaternaria generica di grado n si possa esprimere come somma di p_n n^{esime} potenze di forme lineari, si dovrà avere

$$p_n \geqq q_n,$$

e p_n si può anche considerare [3], come si riconosce facilmente (cfr. p. es. il n. 1 della mia Nota citata in [1]), quale il minimo intero che soddisfa a questa disuguaglianza ed è inoltre tale che, presi p_n punti generici dello spazio ordinario, non esista nessuna superficie d'ordine n avente in ciascuno di quei punti un punto (almeno) doppio [4]. Noi tratteremo precisamente il

---

[3] Così, anche la proposizione relativa alle forme ternarie che ho ricordato in principio è equivalente a quest'altra, di cui avremo a servirci ripetutamente: eccetto che per $n = 2$, $n = 4$, non esiste nessuna curva piana d'ordine n avente $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6}$ punti doppi in altrettanti punti fissati in modo generico, dove ϵ è la stessa quantità che compare nell'enunciato primitivo.

[4] Parlando in seguito di punti doppi di superficie o di curve, sottintenderemo sempre che non è escluso che quei punti abbiano moltiplicità maggiore.

problema così trasformato, e avremo assolto il nostro còmpito quando avremo mostrato che, salvo che per $n=2$ e $n=4$, non esiste nessuna superficie d'ordine n avente q_n punti doppi in altrettanti punti generici dello spazio. Lascieremo poi da parte i casi, notissimi, di $n=2$, $n=3$, $n=4$ (che si potrebbero del resto trattare, con qualche piccola modificazione, collo stesso metodo che seguiremo in generale) e supporremo senza altro $n \geq 5$; procederemo per induzione, mostrando che, se per $n \geq 5$ si ha $p_n = q_n$, si ha anche $p_{n+1} = q_{n+1}$.

LEMMA I. — *Se in un sistema lineare ∞^3 di superficie, Σ, avente la jacobiana indeterminata vi è un piano π che appartiene a ∞^2, ma non a tutte le superficie di Σ, le parti residue delle ∞^2 superficie contenenti π staccano su questo piano un sistema lineare di curve di dimensione < 2, oppure una rete colla jacobiana indeterminata.*

Assumiamo infatti un sistema di coordinate proiettive omogenee x_0, x_1, x_2, x_3, e sia $x_0 = 0$ l'equazione di π; potremo supporre il sistema lineare ∞^3 definito dalle quattro superficie di equazioni $x_0 P = 0$, $x_0 Q = 0$, $x_0 R = 0$, $F = 0$, dove P, Q, R sono forme di grado $n-1$ nelle x, F è una forma di grado n nelle stesse variabili, non contenente come fattore x_0. Per ipotesi sarà identicamente

$$\frac{\partial(x_0 P, x_0 Q, x_0 R, F)}{\partial(x_0, x_1, x_2, x_3)} = 0,$$

cioè

$$\begin{vmatrix} P + x_0 P_0 & Q + x_0 Q_0 & R + x_0 R_0 & F_0 \\ x_0 P_1 & x_0 Q_1 & x_0 R_1 & F_1 \\ x_0 P_2 & x_0 Q_2 & x_0 R_2 & F_2 \\ x_0 P_3 & x_0 Q_3 & x_0 R_3 & F_3 \end{vmatrix} = 0,$$

dove si è posto $P_0 = \frac{\partial P}{\partial x_0}$, ecc. Sviluppando il primo membro secondo le potenze di x_0, il termine contenente x_0^2 risulta

$$\begin{vmatrix} P' & Q' & R' & 0 \\ x_0 P_1' & x_0 Q_1' & x_0 R_1' & F_1' \\ x_0 P_2' & x_0 Q_2' & x_0 R_2' & F_2' \\ x_0 P_3' & x_0 Q_3' & x_0 R_3' & F_3' \end{vmatrix}$$

dove $P' = P(0, x_1, x_2, x_3)$, ecc. Avremo dunque identicamente

$$\begin{vmatrix} P' & Q' & R' & 0 \\ P_1' & Q_1' & R_1' & F_1' \\ P_2' & Q_2' & R_2' & F_2' \\ P_3' & Q_3' & R_3' & F_3' \end{vmatrix} = 0,$$

ossia, poichè $(n-1) P' = x_1 P_1' + x_2 P_2' + x_3 P_3'$, ecc., e $n F' = x_1 F_1' + x_2 F_2' + x_3 F_3'$,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -nF' \\ P_1' & Q_1' & R_1' & F_1' \\ P_2' & Q_2' & R_2' & F_2' \\ P_3' & Q_3' & R_3' & F_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Nelle ipotesi fatte non è identicamente $F' = 0$, cosicchè rimane:

$$\frac{\partial (P', Q', R')}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = 0,$$

e perciò P', Q', R' sono linearmente dipendenti, oppure la rete rappresentata su π da $P' = 0$, $Q' = 0$, $R' = 0$ ha la jacobiana indeterminata.

LEMMA II. — *Se in una rete di superficie avente la jacobiana indeterminata vi è un piano π che appartiene a ∞^1, ma non a tutta la superficie della rete, le parti residue delle ∞^1 superficie contenenti π contengono ancora questo piano, oppure segano su di esso una medesima curva.*

Infatti, colle stesse notazioni della dimostrazione precedente, avremo identicamente

$$\begin{vmatrix} P + x_0 P_0 & Q + x_0 Q_0 & F_0 \\ x_0 P_1 & x_0 Q_1 & F_1 \\ x_0 P_2 & x_0 Q_2 & F_2 \\ x_0 P_3 & x_0 Q_3 & F_3 \end{vmatrix} = 0,$$

da cui

$$\frac{\partial (P', Q', F')}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = 0,$$

e

$$\begin{vmatrix} P' & Q' & 0 \\ P_1' & Q_1' & F_1' \\ P_2' & Q_2' & F_2' \end{vmatrix} = 0, \text{ ecc.}$$

ossia

$$\begin{vmatrix} x_3 P_3' & x_3 Q_3' & -n F' + x_3 F_3' \\ P_1' & Q_1' & F_1' \\ P_2' & Q_2' & F_2' \end{vmatrix} = -n F' \begin{vmatrix} P_1' & Q_1' \\ P_2' & Q_2' \end{vmatrix} = 0, \text{ ecc.}$$

Non essendo identicamente $F' = 0$, si avrà dunque identicamente

$$\begin{Vmatrix} P_1' & P_2' & P_3' \\ Q_1' & Q_2' & Q_3' \end{Vmatrix} = 0,$$

ecc.

Lemma III. — *Se* n *è divisibile per tre, esiste una sola curva piana d'ordine* n *avente* $\frac{n(n+3)}{6}$ *punti doppi in altrettanti punti generici del piano.*

Supponiamo che, in un piano, $s \leq \frac{n(n+3)}{6} - 2$ punti doppi in posizione generica impongano alle curve C^n d'ordine n, multiplo di tre, $3s$ condizioni linearmente indipendenti: segue allora che $s+1$ punti doppi in posizione generica impongono alle C^n $3s+3$ condizioni linearmente indipendenti. Se infatti tali condizioni fossero $3s+3-u$, con $u \geq 1$, presi $k = \frac{n(n+3)}{6} + 1$ punti generici $A_1, A_2, \ldots, A_s, A_{s+1}, \ldots, A_k$, gli $\frac{n(n+3)}{6} + 1 - s$ sistemi lineari di C^n determinati rispettivamente dai sistemi di $s+1$ punti doppi $A_1, A_2, \ldots, A_s, A_i$ $(i = s+1, s+2, \ldots, k)$ [sistemi lineari ciascuno dei quali ha dimensione $\frac{n(n+3)}{2} - 3s -$ $- 3 + u$, ed appartiene al sistema di dimensione $\frac{n(n+3)}{2} - 3s$

determinato dagli s punti doppi $A_1, A_2, \ldots, A_s$] dovrebbero contenere uno stesso sistema lineare di dimensione

$$\geq \left[\frac{n(n+3)}{6}+1-s\right]\left[\frac{n(n+3)}{2}-3s-3+u\right]-$$
$$-\left[\frac{n(n+3)}{6}-s\right]\left[\frac{n(n+3)}{2}-3s\right]=\left[\frac{n(n+3)}{6}+1-s\right]u-3$$

(cfr. p. es. BERTINI, op. cit. sotto n. (5), pag. 11), dimensione che risulta ≥ 0 in virtù della disuguaglianza cui soddisfa s. Esisterebbero dunque delle C^n aventi punti doppi in $\frac{n(n+3)}{6}+1$ punti generici del piano, ciò che non è (V. la nota (3)).

In questo modo, per induzione, si trova che, se n è multiplo di tre, $\frac{n(n+3)}{6}-1$ punti doppi in posizione generica impongono alle C^n $\frac{n(n+3)}{2}-3$ condizioni linearmente indipendenti. Ora, fissati $\frac{n(n+3)}{6}-1$ punti doppi P in posizione generica, qualora avvenisse che nel sistema ∞^3 di C^n da essi determinato vi fosse più di una C^n avente un ulteriore punto doppio in un punto fissato in modo generico, quel sistema ∞^3 dovrebbe avere la jacobiana indeterminata, e perciò essere costituito da un'involuzione in un fascio F, a meno di eventuali componenti fisse (5). Se non vi fossero componenti fisse passanti pei punti P, le componenti (variabili) delle singole C^n del sistema ∞^3 dovrebbero essere di ordine $\leq \frac{n}{3}$, e passare pei punti P (che non possono essere situati su tutte le curve del sistema ∞^3 senza cadere nei punti base del fascio F), ciò che non può avvenire, perchè $\frac{n(n+3)}{6} > \frac{\frac{n}{3}\left(\frac{n}{3}+3\right)}{2}$. Se vi fosse una

(5) Cfr. p. es. BERTINI: *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi,* Pisa, 1907: v. la seconda proposizione in corsivo a p. 235, proposizione che sussiste anche quando, anzichè un sistema lineare ∞^r di ipersuperficie di S_r, si consideri un sistema più ampio avente jacobiana indeterminata (tale cioè che un punto doppio in posizione generica imponga alle ipersuperficie del sistema meno di $r+1$ condizioni linearmente indipendenti).

componente fissa passante pei punti P, questi sarebbero semplici per tale componente (giacchè non esiste nessuna curva di ordine $< n$ per cui i punti P siano doppi), e *a fortiori* vale ancora lo stesso ragionamento.

LEMMA IV. — *Se* $p_n = q_n$, $s \leq q_n - \eta$ *punti doppi in posizione generica impongono alle superficie d'ordine* n 4s *condizioni linearmente indipendenti.*

Si dimostra, per induzione, in modo perfettamente analogo a quello che abbiamo tenuto nella prima parte della dimostrazione precedente.

TEOREMA I. — *Per le forme quaternarie del* 5° *ordine si ha* $p_5 = q_5 = 14$.

Essendo $q_5 = 14$, basterà provare che non esiste nessuna superficie F^5 del 5° ordine avente 14 punti doppi in altrettanti punti *generici* dello spazio. Se una tale superficie esistesse, dovrebbe esistere almeno una F^5 avente 14 punti doppi in altrettanti punti *arbitrari*, p. es. in 7 punti generici $A_1, A_2, \ldots, A_7$ dello spazio, e in 7 punti generici $B_1, B_2, \ldots, B_7$ di un piano generico π. Una tal superficie F^5 dovrebbe contenere il piano π, perchè nell'ipotesi contraria la sua sezione con π sarebbe una curva piana del 5° ordine avente 7 punti doppi in posizione generica, e una tal curva non esiste (cfr. la nota (3)). La F^5, supposta esistente, si comporrebbe dunque del piano π e di una residua F^4 avente 7 punti doppi in $A_1, A_2, \ldots, A_7$, e passante per $B_1, B_2, \ldots, B_7$. I 7 punti doppi in posizione generica $A_1, A_2, \ldots, A_7$ impongono, come è noto, alle superficie del 4° ordine 28 condizioni *linearmente indipendenti* (6), ossia le F^4 che hanno

---

(6) Ciò si può verificare direttamente in questo modo: anzitutto vi è una sola F^4 con 9 punti doppi in posizione generica, la quadrica Q per quei punti contata due volte; giacchè, se ve ne fosse un'altra, Φ, questa non potrebbe contenere come parte Q; si dovrebbe pertanto concludere l'esistenza di una C^8 piana con due punti quadrupli e nove punti doppi in posizione arbitraria (proiezione stereografica della C^8 intersezione di Φ e di Q), e quindi anche l'esistenza di una C^6 piana con 10 punti doppi in posizione arbitraria (che si potrebbe dedurre da quella C^8 con una opportuna trasformazione quadratica), esistenza che viene esclusa dalla nota (3). Basta allora ragionare come nella prima parte del lemma III per concludere la proprietà enunciata.

quei 7 punti doppi costituiscono un sistema lineare ∞^6, che sega su π un sistema lineare di quartiche piane pure ∞^6; cosicchè ([7]), per 7 punti generici del piano $B_1, B_2, \ldots, B_7$ non passa nessuna quartica del sistema, e perciò anche nessuna F^4 avente punti doppi in $A_1, A_2, \ldots, A_7$.

Teorema II. — *Se* $n > 5$ *non è multiplo di tre, e se* $p_{n-1} = q_{n-1}$, *si ha anche* $p_n = q_n$.

Consideriamo un sistema G di q_n punti, formato da due gruppi A e B, dove il gruppo A è costituito da $q_n - \frac{(n+1)(n+2)}{6}$ punti generici dello spazio, e il gruppo B da $\frac{(n+1)(n+2)}{6}$ punti generici di un piano π; e cerchiamo se, nelle ipotesi fatte, esiste una superficie F^n avente come doppi tutti i q_n punti di G. Se una tal superficie esiste, si prova, come nella dimostrazione del teorema precedente, che essa deve contenere il piano π: il resto sarà dunque una superficie d'ordine $n-1$, F^{n-1}, passante pei punti B e contenente come doppi i punti A. Se $q_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)+6\eta'}{24}$, i punti A sono in numero di $q_{n-1} - \left[\frac{(n+1)(n+2)}{24} - \frac{\eta-\eta'}{4}\right]$; e pei valori di n considerati la quantità sottratta da q_{n-1} è ≥ 3. Perciò (lemma IV) quei punti, come doppi, impongono $4\left[q_n - \frac{(n+1)(n+2)}{6}\right]$ condizioni linearmente indipendenti alle F^{n-1}. Le F^{n-1} che hanno punti doppi nei punti A segano dunque il piano π in un sistema lineare di dimensione $\leq \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \eta - 1$: per gli $\frac{(n+1)(n+2)}{6}$ punti B, che sono generici sopra π, non passa (v. la nota ([7])) nessuna curva di questo sistema, e perciò anche nessuna superficie F^{n-1} contenente, come doppi, i punti A.

Teorema III. — *Se* $n > 5$ *è divisibile per tre, e se* $p_{n-2} = q_{n-2}$, $p_{n-1} = q_{n-1}$, *è anche* $p_n = q_n$. *Inoltre, si ha* $p_6 = q_6$.

Consideriamo un sistema G di $q_n - 1$ punti, formato da due gruppi A e B: il gruppo A sia costituito da $q_n - \frac{n(n+3)}{6} - 1$

([7]) Cfr. p. es. Bertini, op. cit. ([5]), v. la p. 222.

punti generici dello spazio, e il gruppo B da $\frac{n(n+3)}{6}$ punti generici di un piano π. Se $q_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)+6\eta'}{24}$, i punti A sono in numero di

$$q_{n-1} - \left[\frac{n(n+3)}{24} + \frac{3+\eta'-\eta}{4}\right],$$

dove la quantità sottratta da q_{n-1}, per $n > 5$, è ≥ 3; possiamo, poichè per ipotesi $p_{n-1} = q_{n-1}$, applicare ancora il lemma IV, e dedurre che i punti A impongono $4\left(q_n - \frac{n(n+3)}{6} - 1\right)$ condizioni linearmente indipendenti alle superficie F^{n-1} d'ordine $n-1$: le F^{n-1} che hanno punti doppi nei punti A costituiscono dunque un sistema lineare Σ_1 di dimensione $\frac{n(n+3)}{6} + 2 - \eta$. D'altra parte non esiste nessuna superficie d'ordine $n-2$ contenente, come doppi, i punti A, giacchè questi, come subito si verifica, sono in numero $> q_{n-2} + \frac{n^2}{12} - 2$, mentre abbiamo supposto $p_{n-2} = q_{n-2}$. Se poi $n = 6$, i punti A sono in numero di 11, e quindi anche in questo caso non vi sono F^4 per cui essi siano doppi. Il sistema Σ_1 sega dunque il piano π in un sistema Σ_1' di curve d'ordine $n-1$, avente pure dimensione $\frac{n(n+3)}{6} + 2 - \eta$: pei punti B che sono in posizione generica passano (cfr. la nota (7)) $\infty^{2-\eta}$ curve di Σ_1', cioè altrettante superficie di Σ_1. Perciò, osservando che esiste in π una sola C^n piana per cui i punti B sono doppi (lemma III), e che d'altra parte vi è certo qualche F^n per cui tutti i punti G sono doppi, senza che essa contenga il piano π (poichè quei punti doppi impongono alle F^n non più di $4(q_n - 1)$ condizioni linearmente indipendenti, ossia determinano un sistema di F^n di dimensione $\geq 3 - \eta$), troviamo intanto che le F^n aventi punti doppi nei punti G costituiscono precisamente un sistema lineare Σ di dimensione $3 - \eta$. Avremo dimostrato che $p_n = q_n$, quando ci saremo accertati che in questo sistema lineare non esistono superficie aventi un ulteriore punto doppio in posizione arbitraria, cioè che il sistema Σ non ha jacobiana indeterminata. Ora ciò è chiaro, quando η vale 3,

oppure 2, perchè allora Σ è costituito da una sola superficie, oppure è un fascio. Quando $\eta = 1$, se la jacobiana del sistema Σ fosse indeterminata, le F^{n-1} di Σ_1 passanti pei punti B dovrebbero segare in π una medesima curva (lemma II), mentre esse segano un sistema ∞^1, o dovrebbero contenere π, ciò che abbiamo già escluso. Finalmente quando $\eta = 0$, poichè π è segato dalle F^{n-1} di Σ_1 passanti pei punti B in una rete R di curve, e non in un sistema meno ampio, se la jacobiana di Σ fosse indeterminata dovrebbe la rete R avere a sua volta la jacobiana indeterminata (lemma I). Si presenterebbe dunque questo fatto: le F^{n-1} del sistema Σ_1 $\left(\text{cioè le } F^{n-1} \text{ aventi i } q_n - \frac{n(n+3)}{6} - 1\right.$ punti doppi A in posizione $\left.\text{generica}\right)$ segano ogni piano generico π in un sistema lineare Σ_1' di dimensione $\frac{n(n+3)}{6} + 2$, tale che tutte le reti determinate in esso da $\frac{n(n+3)}{6}$ punti base in posizione generica hanno la jacobiana indeterminata. Di qui seguirebbe intanto che in uno generico di quei sistemi Σ_1', la C^{n-1} determinata da $\frac{n(n+3)}{6} + 2$ punti generici sarebbe riducibile (come appartenente ad una rete di C^{n-1} avente la jacobiana indeterminata), e sarebbe quindi riducibile la C^{n-1} generica di Σ_1' [8]. Le F^{n-1} del sistema Σ_1 sarebbero dunque tutte a sezioni piane riducibili, e sarebbero perciò esse stesse riducibili. Ora, non esiste nessuna superficie d'ordine $< n-1$ su cui i punti A siano doppi; se quindi vi fosse una componente fissa (eventualmente anche riducibile) di tutte le F^{n-1} di Σ_1 contenente i punti A, sia F^d, i punti A sarebbero semplici su tale componente, e dovrebbero perciò appartenere ancora al resto,

---

[8] Osservando che su ogni curva irriducibile di un sistema lineare ∞^h si possono trovare h punti per cui non passano altre curve del sistema, si ha che su una C^{n-1} di Σ_1' supposta irriducibile, si potrebbero fissare $\frac{n(n+3)}{6} + 2$ punti per cui non passerebbero altre C^{n-1} di Σ_1': $\frac{n(n+3)}{6}$ fra essi individuerebbero dunque, come punti base, entro Σ_1', un sistema lineare ∞^2 e non più ampio, e si potrebbero perciò assumere come punti B. Si giungerebbe allora alla conclusione che la C^{n-1} considerata sarebbe riducibile.

d'ordine $n-d-1$. Per la genericità dei punti A dovrebbe dunque essere contemporaneamente

$$\frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{6}-1 \geq q_n - \frac{n(n+3)}{6} - 1\,,$$

$$\frac{(n-d)(n-d+1)(n-d+2)}{6}-1 \geq q_n - \frac{n(n+3)}{6} - 1 + \frac{n(n+3)}{6} + 2 = q_n + 1\,,$$

mentre si verifica facilmente che queste due disuguaglianze sono incompatibili ([9]). Nel caso che esistesse qualche componente fissa delle F^{n-1} di Σ_1' non contenente i punti A, si giungerebbe anche ad un assurdo, perchè i punti A dovrebbero essere doppi sulle parti residue, d'ordine $< n-1$, il che abbiamo già escluso. Resterebbe l'ipotesi che Σ_1 fosse un'involuzione in un fascio; ma allora Σ_1 avrebbe jacobiana indeterminata, e perciò

$$s = q_{n-1} - \left[\frac{n(n+3)}{24} + \frac{3+\eta'}{4} - 1\right]$$

punti doppi in posizione generica imporrebbero alle F^{n-1} meno di $4s$ condizioni linearmente indipendenti. La quantità sottratta da q_{n-1} è ora ≥ 2, ed essendo $\eta = 0$ il lemma IV prova che tale risultato sarebbe impossibile. In ogni caso dunque, nelle ipotesi fatte, è $p_n = q_n$.

I teoremi I-III dimostrano il teorema enunciato in principio.

([9]) P. es. osservando che quelle due disuguaglianze implicano rispettivamente $d > \frac{n}{\sqrt[3]{4}} - 2$, $n - d > \frac{n}{\sqrt[3]{4}}$, da cui risulterebbe, eliminando d, $n < \frac{2}{\sqrt[3]{2}-1} < 10$: d'altra parte per $n = 6$, $n = 9$, l'incompatibilità delle disuguaglianze scritte si verifica subito direttamente.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSI UNITE

Adunanza del 27 Febbraio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, i Soci: Camerano, Vice-Presidente dell'Accademia, D'Ovidio, Direttore della Classe, Salvadori, Naccari, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari, Balbiano, Panetti, Segre Segretario;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, i Soci: Chironi, Direttore della Classe, De Sanctis, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato.

Scusano l'assenza i Soci Carle e Somigliana.

Letto e approvato il verbale della precedente adunanza 20 febbraio 1916, il Presidente comunica i ringraziamenti del Prof. Antonio Berlese, a cui in quella adunanza fu conferito il premio Bressa, e quelli della signora vedova Pelazza per l'annunzio datole che al defunto suo figlio Aurelio Pelazza è stato assegnato il premio Gautieri per la Filosofia. Il Socio Vidari aggiunge che, anche per suo mezzo, la signora Pelazza invia vivissimi ringraziamenti all'Accademia.

Si passa, poscia, alla votazione per il conferimento del premio Vallauri per la Letteratura latina (quadriennio 1911-1914). A unanimità di voti è conferito il premio Vallauri al Prof. Remigio Sabbadini della R. Accademia Scientifico-Letteraria di Milano.

Si dovrebbe procedere alla nomina della 1ª Giunta per il XXº premio Bressa (nazionale, quadriennio 1913-1916). Ma il Socio Stampini propone e l'Assemblea accetta che sia prima messo in votazione un suo ordine del giorno così concepito:

" Nell'intento di studiare, formulare e redigere accura-
" tamente le eventuali riforme ai vari Regolamenti interni per
" il conferimento dei premi, e anche di dare una certa unifor-
" mità alle norme, ora assai diverse, che regolano le votazioni,
" e, in fine, di presentare riforme concrete all'Accademia, sia
" nominata una Commissione di tre Soci per ciascuna Classe,
" la quale, sotto la presidenza del Presidente, o, per delegazione,
" del Vice-Presidente, raccolga entro il mese di marzo, e non
" oltre, le proposte che i Soci intendano presentare *per iscritto*,
" e riferisca, a tempo debito, all'Accademia i risultati dei proprii
" studi in proposito „.

Quest'ordine del giorno è approvato. Si procede quindi alla nomina della Commissione su indicata; per la Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali sono nominati i Soci D'Ovidio, Naccari e Segre, e per la Classe di Scienze morali, storiche e filologiche i Soci Stampini, De Sanctis e Chironi. La Commissione risulta quindi composta nel modo seguente:

Presidente o *Vice Presidente*, D'Ovidio, Naccari, Segre, Stampini, De Sanctis, Chironi.

Per tale deliberazione la nomina della 1ª Giunta per il XXº premio Bressa è rimandata fino a quando siano state deliberate le eventuali riforme alle norme per il conferimento dei premii.

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre.
Ettore Stampini.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 27 Febbraio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Direttore della Classe, De Sanctis, Ruffini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

Scusa l'assenza il Socio Carle.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza del 13 febbraio corr.

Il Presidente, ricordando le parole da lui pronunciate nell'adunanza a Classi unite del 20 corr., allorchè dette comunicazione della morte del nostro illustre Socio nazionale Fedele Savio, invita la Classe a provvedere perchè una speciale commemorazione sia tenuta da un Socio. È designato a farla il Socio Ruffini, il quale accetta di buon grado. Dopo di che il Presidente presenta alla Classe un opuscolo del Prof. Giacomo Rodolfo (Estratto dalla *Rivista Italiana di Numismatica e Scienze affini*, anno XXVIII, fasc. III-IV; Milano, 1915) intitolato *Fiorini d'oro del secolo XIV trovati a Carignano.*

A proposito di questa pubblicazione il Socio Patetta, rilevandone la notevole importanza, osserva che la più preziosa

delle monete costituenti il ripostiglio di Carignano, cioè il più antico fiorino d'oro battuto dall'Ordine di Rodi, di cui finora non si conosceva alcun esemplare, è divenuta proprietà dello Stato e si trova oggi presso la Soprintendenza alle Gallerie del Piemonte, a cui è preposto il Socio Vesme. E il Socio Vesme, per invito fattogli dal Presidente, fornisce alcuni particolari sul fatto, confermando che la moneta indicata dal Socio Patetta, nella quale è raffigurato in ginocchio Deodato de Gozono, gran maestro dell'Ordine, non solamente è rarissima, ma con molta probabilità è unica, poichè non consta che alcuna collezione pubblica o privata ne possegga un altro esemplare, come, del resto, ha egregiamente avvertito il collega Patetta. Il Socio Vesme soggiunge che egli aveva scritto al Ministero dell'Istruzione Pubblica proponendo che, trattandosi di moneta trovata in Piemonte e precisamente nell'antica casa dei Provana, dei quali parecchi furono Cavalieri di Rodi, la preziosa moneta fosse data in deposito a qualche pubblico medagliere della nostra città; ma il Ministero rispose che, dovendosi formare nel Museo Nazionale Romano una sezione coloniale, non si potrebbe rinunciare alla moneta di Rodi, alla quale si darebbe posto in tale sezione, tanto più che la moneta è, per la sua origine, affatto estranea alla regione piemontese. Prende allora la parola il Socio Stampini, il quale crede che si possa ancora ottenere dal Ministero che la moneta sia conservata in un medagliere pubblico del Piemonte, appunto perchè rinvenuta in Piemonte e per giunta in un'antica casa di famiglia piemontese cui appartennero parecchi membri dell'Ordine di Rodi, e fa formale proposta che sia espresso al Ministero il voto che la moneta rimanga in Piemonte. E la Classe approva alla unanimità la proposta che la moneta di Deodato de Gozono, gran maestro dell'Ordine di Rodi, sia conservata al Piemonte. Il Presidente dichiara che trasmetterà al Ministero questo voto, aggiungendo la sua viva raccomandazione perchè sia favorevolmente accolto.

Il Socio Prato presenta, anche a nome del Socio Einaudi, il volume che ha recentemente pubblicato col titolo: *Problemi monetari e bancari nei secoli XVII e XVIII* (volume III, serie I dei *Documenti finanziari degli Stati della Monarchia piemontese pubblicati a cura del Laboratorio di Economia Politica " S. Cognetti De Martiis „ della R. Università di Torino*). Dopo un breve riassunto dell'opera, fatto dal Socio Prato, parlano i Soci Chironi ed Einaudi mettendo in rilievo la novità e l'alta importanza scientifica delle ricerche del Socio Prato, col quale il Presidente e la Classe vivamente si rallegrano.

In fine il Socio Vidari presenta per la inserzione negli *Atti* una *Nota* del Prof. Pietro Menzio, intitolata *Cenni sulle carte e sui manoscritti Giobertiani,* e ne espone brevemente il contenuto.

LETTURE

Cenni sulle Carte e sui Manoscritti Giobertiani [1].

Nota I del Prof. PIER ANGELO MENZIO.

a) Introduzione.

Morto improvvisamente il Gioberti nella notte dal 25 al 26 ottobre 1852, tutto il Piemonte fu in lutto e molti giornali uscirono listati a nero, con cenni necrologici pieni di dolore e di rimpianto. Il " Risorgimento „ (n° 1498 del 30 ottobre) pubblicava un articoletto, che finiva con un periodo di colore oscuro: " Mentre Vincenzo Gioberti muore nell'isolamento a Parigi, " Massimo D'Azeglio rassegna, a fronte della reazione, il potere " in Piemonte, e Cesare Balbo è incaricato di fare il Ministero " delle concessioni „; Ministero che, com'è noto, non fu potuto comporre. L'" Opinione „, fedelissima al filosofo negli ultimi tempi, assicurava che la notizia della morte di lui aveva afflitta tutta Torino (n° 298); la " Gazzetta del Popolo „ (n° 258) stampava che l'opera di lui si era chiusa luminosamente e che essa era monumento di gloria immortale all'Italia; espressioni poco diverse adoperava la " Gazzetta Piemontese „. In generale, poi, tutti i giornali chiedevano che le ossa del grande patriota fossero trasportate a Torino, e che senza indugio si aprisse una pubblica sottoscrizione per l'erezione di un monumento. Di fronte

---

(1) Per questi cenni ho consultato: la " Gazzetta Piemontese „ del 1853; la " Gazzetta del Popolo „ del 1852 e 1853; l'" Opinione „ del 1853-56; il " Risorgimento „ del 1852; il " Parlamento „ del 1853; il " Fischietto „ del 1853, ecc. ecc.; la pubblicazione di V. E. Dabormida, *Vincenzo Gioberti e il generale Dabormida*, Torino, Bocca, 1876, ecc. Ho anche esaminato con diligenza e collazionato colle stampe i mss. giobertiani della Biblioteca civica di Torino.

a tanto unanime compianto, i giornali gesuitanti non s'astenevano dal lanciare qualche velenosa frecciata, e la " Campana „ scriveva (nel n° 653): " Noi siamo ancora tremanti per la no-
" tizia venutaci or ora da Parigi. L'abate Vincenzo Gioberti la
" sera del 25 ottobre coricavasi a letto sano e benissimo stante
" di salute. Un momento dopo non era più. Un colpo fulminante
" d'apoplessia lo rendeva freddo cadavere..... Un colpo di apo-
" plessia che non gli lasciò tempo da pensare a se stesso, e da
" prepararsi alla fatale dipartita..... Oh il Signor gli abbia usato
" misericordia... Ma valga l'avviso a tanti altri che non avendo
" il suo ingegno, lo seguono nella trista carriera di denigrare
" gli ordini religiosi e il Romano Pontefice! Noi ci permettiamo
" con santa libertà di strascinare sul cadavere di Gioberti i
" Siccardi e i Boncompagni. Veggano e riflettano... È per tutti
" che il Signore dà di tratto in tratto esempi così severi della
" sua giustizia... „. Ma la parte migliore dei Torinesi (non ultimi, moltissimi sacerdoti rimasti — non ostante le condanne della sacra Congregazione dell'Indice — ammiratori e seguaci del Gioberti) e gli stessi avversari politici, maltrattati nel *Rinnovamento*, nella *Rattazziana*, nella *Dabormidiana* e nel *Preambolo dell'Ultima Replica ai Municipali*, accorsero in folla ai solenni funerali (23 novembre) e trovarono nel sindaco della città, Bellono, un degno interprete dell'angoscia dell'animo loro. La sottoscrizione per il monumento, aperta presso il Municipio, raccoglieva subito molte firme; aprivano sottoscrizioni i comandi delle guardie nazionali; i municipi andavano a gara a parteciparvi od a favorirle (fra i primi, quelli di Pianezza, Trino, Montechiaro d'Asti, Venaria Reale, Vigevano, Govone, Cambiano, Saluzzo, Ivrea, Cremolino, S. Salvatore, Novara, Dronero, Vercelli, Genova, Ciriè, Mongardino — patria del chimico Gioberti e del padre del filosofo — Cherasco, Chieri, Riva di Chieri, Pecetto Torinese, ecc., ecc.), e in molte cittadine, coll'intervento delle autorità e di molti preti, si pregava pace all'anima del grande.

Intanto, correvano voci di varia natura sulle carte e sui manoscritti lasciati dal Gioberti, e queste voci trovavano eco nei giornali di Torino. Il " Risorgimento „ (n° 1522, 27/11 '52) segnalava, tra i mss., la *Protologia*, con queste parole: " Ci è ri-
" ferito che fra le carte trovate nell'eredità dell'illustre Vin-

" cenzo Gioberti vi è pure il manoscritto pressochè compiuto
" della *Protologia*. Quest'opera, come ognuno sa, doveva essere
" il peristilio del grande edificio filosofico che l'autore stava
" maturando; e noi siamo debitori del vantaggio di veder quasi
" compiuto questo nobile lavoro alle indefesse fatiche dell'il-
" lustre scrittore, il quale, appena quietate le controversie poli-
" tiche, non tralasciò più di un punto i suoi studi filosofici.
" Speriamo che gli editori italiani a questo annunzio andranno
" a gara per far sì che quest'ultimo legato del nostro grande
" concittadino non cada nelle mani di speculatori forestieri ".
Ahimè! la *Protologia* era tutt'altro che compiuta..... Lo stesso giornale tornava a parlare dei mss. del Gioberti nel n° 1525 del 1°/12, dando la notizia — non so quanto fondata — che un editore di Torino aveva offerto per essi la somma di lire diecimila.

Da un giorno all'altro dovevano giungere a Torino le carte dell'abate Gioberti (sigillate per cura della R.le Legazione Sarda e della Erede), dirette al sig. Ponsati (1) (" Risorgimento ", n° 1545 del 24/12 '52); e le preoccupazioni sulla sorte di quelle carte erano grandi. " Speriamo — scriveva la " Gazzetta del
" Popolo " il 23/12, n° 304 — che le carte e la corrispondenza
" trovate presso l'illustre filosofo saranno *conscienziosamente* ri-
" spettate. Possiamo assicurare che esiste presso di noi una
" copia della transazione tra il Governo e la signora Gioberti.
" Transazione che fu fatta sottoscrivere da quest'ultima, e contro
" la quale la signora Teresa Gioberti avrebbe già protestato ".
La transazione era stata fatta effettivamente; e la Gazzetta la pubblicava nel n° 13 del 15/1 '53 (2), facendola precedere da

(1) È il teologo Ponsati, parroco di S. Agostino, di cui è cenno nella scrittura o transazione del 28 novembre 1852 tra il Ministero degli esteri e la Erede.

(2) La scrittura fu ripubblicata varie volte, ed anche dal Solmi nel *Costituto di Vincenzo Gioberti* (estratto dalla rivista " Il Risorgimento italiano ", p. 84-5 in nota); le parti più notevoli sono queste: " La signora
" Erede è disposta a consegnare al Ministero quelle carte che concernono
" affari di Stato e che come tali devono tornare in sua proprietà. In ordine
" a quelle che potessero riferirsi ad affari politici, Essa è altresì disposta
" a consegnarle al Governo, mediante però, quanto a queste ultime, quella

un aspro commento: “ ..... Ad edificazione di tutti pubblichiamo “ questa scandalosa convenzione, e lo facciamo perchè gl'incaricati di metter mano in quelle carte e di distruggerle pensino due volte alla grave responsabilità che stanno per incontrare davanti alla pubblica opinione... „. Anche il “ Parlamento „, nel nº 14 del 16/1 '53, esprimeva l'augurio che nessuna carta del Gioberti fosse bruciata, ma che tutte fossero conservate preziosamente; e poi più chiaramente il 21/1 scriveva: “ Ci riesce “ grato di conoscere che le carte contenenti le scritture e documenti dell'illustre Gioberti, di che si è con ragione occupata “ da qualche giorno la stampa periodica, sono nelle mani del “ cav. teologo Monti, grande amico del defunto; e confidiamo “ che non avrà esecuzione il progetto di dare alle fiamme alcuna “ carta edita o inedita dello insigne scrittore „, ed assicurava che il contenuto delle casse, descritto in inventario, verrebbe a cognizione di tutti. Ma non era di questo parere la signora Erede: la quale anzitutto protestava contro la pubblicazione della transazione, aggiugnendo però di voler tutelare i propri diritti, anche contro il Governo (Gazzetta del Popolo, nel nº 16 del 19/1). — La signora Teresa, del resto, dichiarava di aver fiducia ne' suoi tre rappresentanti, incaricati dello spoglio delle carte: Cesare Spalla, avvocato Carlo Trombetta ed avvocato Lorenzo Muratori; quand'ecco Cesare Spalla, che — come intimo del Gioberti — dava la migliore garanzia che nulla, nulla sarebbe stato distrutto delle carte giobertiane, si dimetteva, perchè — com'egli riteneva necessario, e come la voce pubblica altamente chiedeva — non si voleva fare dagli altri commissari un *esatto inventario* di tutti i documenti (cfr. la lettera dello Spalla nel nº 47 del 20/2 del “ Parlamento „; e la “ Gazzetta del Popolo „, nº 45 del 22/2, la quale consigliava i signori commissari a mettere l'inventario come condizione *sine qua non* per l'accettazione del delicato incarico, ovvero “ rinunziare al loro mandato, per non esporsi poi

---

“ retribuzione che sarà fissata di buon accordo..... Ove si trovino tuttora “ presso il defunto autore alcune copie dell'opuscolo *Ultima replica ai Municipali*, esse dovranno essere scrupolosamente raccolte e quindi rinchiuse “ nella cassa dei manoscritti, all'apertura della quale intende l'Erede che “ siano immediatamente consegnate al fuoco in conformità delle intenzioni “ manifestate dall'illustre trapassato. . „.

" all'eventuale dispiacere di non potere un giorno o l'altro di-
" fendere con *prove e date certe* la riputazione di Vincenzo Gio-
" berti „). Il sig. Cesare Spalla credeva di chiarire meglio le ragioni della sua dimissione, in una sua lettera del 23 febbraio, pubblicata il 24 nella " Gazzetta del Popolo „ e nell' " Opinione „, nella quale insisteva sull'idea che " tutte le *carte* appartenenti
" al filosofo e cittadino illustre venivano dalla pubblica opinione
" considerate *patrimonio della nazione intiera* „, e che " standosi
" la signora Erede irremovibile nel suo proposito „ di non permettere l'*inventario completo*, egli, anche per sentimento della sua dignità personale, rinunziava all'incarico. Allora entrò in campo l'avv. Muratori con una lunga lettera in data 27/2, che fu pubblicata per disteso nel n. 61 (2 marzo) dell' " Opinione „: in essa egli illuminava il pubblico su tutto quanto riguardava la delicata questione: che i manoscritti occupavano due non ristrette casse che erano giunte incolumi, chiuse a doppia chiave ed a doppio sigillo, in Torino, ed erano presso l'ab. Monti, intimo del grande defunto; che il Ministero non insisteva nella scrittura del 28/11 '52; che l'Erede, invitata dal Governo a consegnare le carte di spettanza dello Stato, in forza di un regolamento per le segreterie del 1742, sebbene tale atto non si fosse praticato nelle eredità dei ministri Santa Rosa, Merlo, Pinelli, annuiva; poi egli osservava: " In oggi i segreti di Gioberti devono
" essere segreti della sua Erede: lo vogliono il buon senso, le
" norme lasciate scritte da Gioberti, e la di lei coscienza per
" non rendersi indegna del titolo di Erede „; quindi il Muratori combatteva la proposta dell'*inventario* voluto da Cesare Spalla, e conchiudeva: " Sappiano dunque tutti quei molti che amano
" la gloria del gran filosofo e scrittore che, eccettuati i veri e
" più intimi segreti di Gioberti, che non devono confondersi
" colle sue opere, perchè mai da esso destinati a pubblicità, e
" che la sua Erede non potrebbe palesare senza rendere se stessa
" rea di delazione e forse l'anima di Gioberti spergiura, tutto
" sarà fatto di pubblica ragione... Quando sarà al possesso delle
" sue carte, la signora Gioberti intende di valersi dei sommi
" amici dell'illustre trapassato e di tutti quelli che per lealtà,
" pacatezza di mente e per cognizione siano capaci a presen-
" tare al pubblico ben ogni opera o scrittura possibilmente ma-
" nifestanda „. Allo Spalla, intanto, dimissionario, venne so-ti-

tuito il teol. avv. Baracco, altro sviscerato amico del Gioberti, che poi assunse anche il deposito delle casse.

Alla " Gazzetta del Popolo „ non piaceva questa soluzione, e nel n° 55 del 3/3 si scagliava contro Muratori e Baracco, deputati a *rimescolare*, com'essa diceva, le carte del Gioberti! Il sig. Cesare Spalla, poi, chiamato in causa dal Muratori, comunicava alla stampa: 1° una lettera a lui indirizzata dalla Teresa Gioberti in data 21/2, nella quale la signora, fra l'altro, diceva: " È precisa mia volontà di non dare pubblicità ai privati affari " del mio illustre autore se non per quanto esso stesso avrebbe " operato... Io sono disposta di proporre al Ministero di restrin- " gere la nomina dei delegati ad uno solo, ovvero, quando lo " voglia il Ministero, di surrogarvi un altro di conforme parere " agli altri due „; 2° la risposta sua del 22/2, nella quale insisteva nell'*inventario di tutte le carte*: " Non è forse l'*inventario* " un titolo per constatare in ogni caso ed in ogni tempo l'au- " tenticità degli scritti tutti, che formano la preziosa parte del " suo retaggio?... Quest'*inventario non deve certamente esser fatto* " *di pubblica ragione*, se non nel caso, in cui la riputazione del- " l'uomo grande venisse assalita „; 3° il parere dell'avv. Villanis, che consigliava i *delegati* della signora a non accettare che *un mandato di fiducia illimitata.* E siccome poi la signora Gioberti nella sua lettera si riferiva alla consulenza dell'avv. Galvagno, lo Spalla osservava: " L'on. sig. avv. comm. Galvagno, nella sua " conferenza del 20 scorso febbraio, non conchiuse punto essere " l'*inventario pericoloso, imprudente ed impolitico,* come asserisce " l'avv. Muratori; ma propose una via di mezzo: cioè di fare " l'inventario di tutti gli scritti, *tranne le corrispondenze parti-* " *colari.* A questa proposizione aderiva l'on. avv. Trombetta, ed " io pure assentiva; ma gli ulteriori consulti da me presi, e la " grave responsabilità che la stampa, sotto gentile forma d'en- " comio, giustamente mi addossava, mi fecero persuaso di un *in-* " *ventario integrale ed esattissimo*, e d'*un mandato senza riserva* „ (v. il " Parlamento „, n° 57 del giorno 8/3).

Così, fra pettegolezzi e ciance, le cose si trascinavano in lungo; e le casse dei manoscritti rimanevano chiuse a doppia chiave ed a doppio sigillo, ed il Ministero degli esteri tenevale sotto sequestro, con grave noia dell'avv. Muratori. Si andò per

le vie giudiziarie (1), e il giorno 4 di giugno (copio dall' " Opinione „ del 21 giugno, n° 168) " fu dibattuta dinanzi al tribu-
" nale di prima cognizione la causa della signora Teresa Gio-
" berti, erede di Vincenzo Gioberti, contro il Ministero per gli
" affari esteri, il quale pretende di rivedere tutti i manoscritti
" dell'illustre filosofo, appoggiandosi al regolamento del 29 gen-
" naio 1742. Sostenne i diritti della signora Gioberti l'avv. Mu-
" ratori, il quale osservò come tale regolamento non fu eseguito
" nè per il Perrone, nè per Santa Rosa, nè per Merlo, nè per
" Pinelli, sebbene in loro favore non militassero le due rilevan-
" tissime circostanze del loro decesso in luogo e tempo remoti
" dalle esercìte cariche; come quand'anche si volesse osservare
" il regolamento, le pretese del Ministero siano eccessive ed in-
" sussistenti, non potendo quelle prescrizioni degenerare in atti
" onerosi, in un sequestro, in una perquisizione lesiva dei di-
" ritti ereditari e contraria alla memoria dell'illustre trapassato.
" Fra le cause di protrazione di questa sentenza si annovera pur
" quella d'una signora Pittaluga, le cui istanze, scrive l'avv. Mu-
" ratori, non potevano menomamente paralizzare agli occhi della
" legge la stabilita e riconosciuta qualità ereditaria della si-
" gnora Gioberti. Conchiude egli quindi chiedendo che l'erede
" sia reintegrata nel possesso di ogni sua sostanza ereditaria;
" e che il Ministero mandi, se vuole, l'archivista a fare la visita.
" Il tribunale non ha peranco pronunziata la sentenza, ma spe-
" riamo non ritarderà: sono già trascorsi otto mesi dalla morte
" di Vincenzo Gioberti e le sue preziose carte rimangono tut-
" tavia sotto sigillo. Le difficoltà suscitate dal Ministero degli
" affari esteri sono affatto inesplicabili, dacchè l'Erede accon-
" sente all'esecuzione del regolamento 1742, quantunque non ap-
" plicata agli altri ministri. Non v'ha dubbio che anche per parte
" della signora Teresa Gioberti è necessaria grande cautela nella
" scelta delle persone incaricate di ordinare e classificare i ma-
" noscritti, ma anche il Ministero debbe riconoscere non fare
" buona impressione l'opposizione che si muove al dissuggella-

(1) Nuova luce porteranno, ne sono sicuro, le carte testè regalate dalla signora Vincenza Gioberti, vedova Lamarchia, alla Biblioteca civica di Torino (v.: Deliberazione della Giunta municipale di Torino, 1° marzo 1916).

" mento delle casse in cui quelli sono rinchiusi, poichè si dan-
" neggia agl'interessi dell'erede, e si defrauda il paese, più di
" quanto conviensi, degli scritti di un illustre ingegno, di cui le
" parole sono sempre state ascoltate con riverenza. Questa qui-
" stione doveva essere risolta amichevolmente, e non dubitiamo che
" per questa via si sarebbe venuto più facilmente ad un compo-
" nimento tanto soddisfacente pel Ministero degli affari esteri
" quanto per l'Erede e pel Paese „.

La notizia dell' " Opinione „ era, in parte, insussistente: perchè il magistrato aveva già, fin dal giorno 7, proferita la sentenza del seguente tenore: " Reietto l'intervento della Ca-
" milla Rivotti-Pittaluga; non ostare alla domanda della Teresa
" Gioberti le opposizioni della Pittaluga notificate al Ministero
" degli esteri, e conseguentemente salvo fra giorni 20 dal Mi-
" nistero si acconsenta alla cerna delle carte cadute nell'eredità
" dell'abate Vincenzo Gioberti di cui si tratta, ed alla dismis-
" sione delle restanti a favore della Teresa Gioberti, si dichiara
" lecito a questa di ritirare le carte e manoscritti tutti esistenti
" attualmente in deposito presso il sig. avv. sacerd. Baracco e
" di cui si tratta, reietta ogni eccezione in contrario; spese
" compensate, salvo quelle della Pittaluga, che si dichiarano a
" di lei precipuo carico „ (" Opinione „, nº 171 del 24/6). Questa rettifica fu mandata da L. Lamarque, procuratore della Teresa Gioberti. Ora, siccome la sentenza del tribunale non fu dal procuratore giudicata soddisfacente, perchè — osservava il La-
" marque — quel termine concesso al Ministero, quantunque
" breve, almeno in modo implicito approvava la legittimità del
" sigillamento e deposito delle carte, ciò che la Erede sosteneva
" insussistente „, ed in secondo luogo, perchè " se pure entro
" quel termine erasi riconosciuto dovere il Ministero procedere
" alla cerna delle carte, ciò fosse perchè si consideravano defi-
" nitivamente reiette con varie già emanate provvidenze le in-
" stanze della signora Pittaluga, e non solo perchè, come soste-
" neva la Erede, quelle istanze, anche vertenti, fossero incapaci
" a remorare la cerna „. Per queste ragioni la signora Teresa Gioberti ricorreva in appello, e in data 15 luglio otteneva un'altra più favorevole sentenza: " Salva al Ministero per gli
" affari esteri ogni ragione che gli possa competere a termini
" del regolamento 29 gennaio 1742, ed in conformità dell'ade-

" sione negli atti prestata dalla Teresa Gioberti, lecita intanto
" alla medesima di liberamente ritirare dall'attuale depositario
" avv. e sac. Baracco tutte le carte cadute nell'eredità dell'abate
" Vincenzo Gioberti, previa però sua sottomissione di rappre-
" sentare al Ministero quelle che fra dette carte possano ritro-
" varsi di spettanza del Governo. Spese compensate „ (nel n° 198 del 21/7 dell' " Opinione „). Così il magistrato d'appello; e l' " Opinione „, pubblicando la 2ª comunicazione del sig. Lamarque, aggiungeva qualche considerazione per conto suo e chiedeva, non senza una punta di ironia, se il regolamento del 1742 fosse stato applicato per quello che riguardava l'eredità di Cesare Balbo!

Perchè tanta insistenza, da parte del Ministero degli esteri, nell'applicazione del regolamento del 1742? Il velo è così sottile ch'è facile trapassarlo: era ministro degli esteri quel Dabormida, contro cui aveva nel *Rinnovamento* e nella *Dabormidiana* avventato de' dardi non certo *sine ictu* il glorioso defunto; e si temeva, fors'anco, che qualche copia della *Ultima replica ai Municipali* (che l'ab. Monti ed il Massari avevano visto distruggere dal libraio Bocca la sera del 7 giugno '52) pur si trovasse fra le carte o, almeno, il manoscritto (1); e si voleva evitare che andassero in mano del pubblico degli *sfoghi* contro eminenti personaggi, ecc. ecc. Non so se sia censurabile la condotta del Ministero in tutta questa faccenda; ma l'opinione pubblica aveva ragione di pensare che per il solo Gioberti era stato esumato un vieto regolamento, che non si era applicato nè al Perrone, nè al Santa Rosa, nè al Merlo, nè al Pinelli, nè al Balbo (2).

---

(1) Una copia dell'*Ultima replica ai Municipali* fu trovata dal prof. Gustavo Balsamo-Crivelli nella Biblioteca Nazionale V. E. di Roma (v. il giornale *La Tribuna*, 31.10.1915) e sarà da lui edita con un'ampia introduzione.

(2) Sentiamo anche l'altra campana! Il Dabormida, rispondendo ad una lettera del Massari del 22 luglio '53, affermava che il suo intervento, come ministro degli esteri, fu dovuto al fatto di trovarsi le carte all'estero; e che egli agiva per incarico del Governo: " La pubblicazione nel " Rinnova-
" mento d'Italia „ di dispacci ministeriali, fece supporre al Ministero che
" si trovassero nelle carte dell'illustre defunto documenti appartenenti al
" Governo, ed esso stimò suo dovere il rivendicarli. Nè mal si appose il
" Ministero, poichè già dall'Erede vennero lealmente restituiti gli originali

Finalmente! Il 20 luglio " venne fatta in casa della signora " Teresa Gioberti l'apertura delle casse contenenti i manoscritti " e le carte di Vincenzo Gioberti. Assistevano a quest'opera- " zione il sig. Luigi Lamarque, procuratore, l'avv. Lorenzo Mu- " ratori e l'avv. Carlo Trombetta, persone di fiducia della Erede, " ed i signori avv. e teologo Giovanni Baracco e Giuseppe Mas- " sari, antichi ed intimi amici dell'illustre estinto, accorsi volen- " tieri per invito della Erede a rendere questo nuovo e solenne " attestato di devozione alla santa memoria del loro compianto " e dilettissimo amico. Fu rinvenuto un voluminoso carteggio " epistolare, svariati estratti di libri d'ogni argomento letterario " e scientifico, e manoscritti di opere incominciate ed interrotte " dalla funesta catastrofe che tolse alla civiltà ed all'Italia tanto " lume. I predetti signori procederanno all'esame minuto e rag- " guagliato di tutte quelle carte con quella scrupolosa religione " ed accuratezza che son dovute alla memoria dell'insigne de- " funto ed agli interessi della patria e della scienza " (" Gazzetta Piemontese ", nº 172 del 22/7, riprod. nel nº 200, 23/7 dell' " Opinione ").

Il pubblico, dopo questa comunicazione, era ansioso di conoscere più esattamente il contenuto dei manoscritti giobertiani (per il carteggio, sebbene non risulti dai giornali del tempo, pare che non si sia eseguita la volontà della Teresa o che questa mutasse parere: ossia, le lettere — i cui autori erano viventi — non furono tutte consegnate; le altre, non furono

" dei due dispacci confidenziali pubblicati dal Gioberti, i quali apparten- " gono agli archivi della legazione di Parigi, da cui non avrebbero dovuto " essere distratti " (ivi). Per la scrittura coll'Erede (28 novembre '52) il Ministero delegò il cav. Bertinatti; per la cerna delle carte, il Direttore dei Regi Archivi ed il cav. Bertinatti. Il Ministero, in seguito al clamore dei giornali, non insistette sulla scrittura del 28 novembre. Sulla proposta della signora Teresa Gioberti, fu poi aggiunto come terzo delegato per la cerna il signor Giuseppe Massari; ma, dopo il processo, i delegati ministeriali si ritirarono: e, all'ultima ora, il Massari ed il Baracco si aggiunsero, per invito della Erede (ivi, cfr. p. 50-3 del libro di V. E. DABORMIDA, *Vincenzo Gioberti e il generale Dabormida*). Il Dabormida avrebbe dato ordine ai tre delegati di pubblicare qualunque carta lo riguardasse direttamente o indirettamente, come uomo *pubblico* o *privato* (ivi).

distrutte (1) ed al Ministero passarono probabilmente le carte che furono giudicate di spettanza dello Stato), e cominciarono a leggersi nei giornali delle *indiscrezioni*. Il " Parlamento „ nel nº 183 del 4 agosto, pubblicava, togliendolo dall' " Espero „, il seguente comunicato: " Fra le carte del Gioberti trovaronsi due " manoscritti di grandissima importanza. Uno è un lavoro com- " piuto sull'*Ontologia*; l'altro è intitolato *Della riforma cattolica*. " Già nel *Primato*, poi nel *Gesuita moderno* Gioberti toccava la " necessità di sterpare quanto vi ha di esteriore nella Chiesa, " che non è più in accordo colla civiltà del secolo. I fatti del 1849 " lo confermarono in tale opinione, di cui spesso parlò all'arci- " vescovo Sibour. Specialmente all'epoca dell'ultimo Sinodo dio- " cesano di Parigi ne aveva fatto argomento di lunghe e serie " conversazioni co' suoi più famigliari, fra i quali erano La- " mennais, Montanelli e l'arcivescovo parigino. Una volta anzi, " che fu a visitarlo l'ex-gesuita abate Léon, il quale in questa " materia è radicalissimo, entrato in tale questione, dichiarò " apertamente essere suo pensiero, che se non si ha il coraggio " di por mano ad una larga riforma della Chiesa, vi sarebbe a " temere in una prossima rivoluzione per lo stesso dogma. Il " saggio, del resto, che Gioberti ci diede di queste sue idee nel- " l'eloquentissimo capitolo del *Rinnovamento* intitolato a Pio IX, " può farci comprendere quale sia l'indirizzo dato a questo nuovo " libro. A quest'ora la sua pubblicazione sarebbe opportunis- " sima... Se si eviteranno certi intrighi di cui si teme, hassi " motivo di credere che il Massari sarà incaricato della stampa " di queste nuove opere dell'illustre filosofo... „. Qui si fa certo confusione fra " Ontologia „ e " Protologia „, e vi sono altre inesattezze evidenti. Non solo giornali torinesi, ma di provincia e dell'estero seguitarono a fare delle supposizioni sulle carte giobertiane, e non sempre esatte e fondate: onde il Massari, in una lettera del 9 agosto, riaffermando che la verità relativa a quelle carte era quella enunciata nella nota inserita nella " Gazzetta Piemontese „, aggiungeva: " Siccome si sta procedendo con la

(1) Anche per questa parte attendiamo che il prof. Balsamo-Crivelli classifichi, selezioni ed ordini le numerose carte testè regalate alla Biblioteca civica dalla signora Gioberti vedova Lamarchia.

" massima accuratezza all'esame di cui si parla in quella nota
" (la quale operazione richiede tempo non breve), così quando
" quell'esame sarà finito, e *soltanto allora*, il pubblico verrà
" informato di tutto, e tutto quanto potrà dirsi o stamparsi
" fino a quel momento non ha *fondamento di sorta*. Questa di-
" chiarazione è necessaria per premunire il pubblico contro le
" false dicerie, per evitare una pubblicità dannosa e per lo meno
" intempestiva, e per mettere al coperto la responsabilità mia
" e quella delle altre onorevoli persone, a cui l'Erede ha affidato
" il geloso e sacro incarico „, ed assicurava il pubblico che
tanto lui quanto gli altri commissari " sentono abbastanza —
" cito ancora le sue parole — l'immenso peso della responsa-
" bilità che hanno assunto al cospetto d'Italia e del mondo civile.
" e verso la memoria del carissimo estinto „ (" Opinione „, 15/8,
n° 223; cfr. " Parlamento „, 16/8, n° 193).

Qualche mese dopo, e precisamente il 13 marzo del '54,
Giuseppe Massari scriveva al direttore della " Gazzetta del Po-
polo „: " Nel numero del suo giornale in data di sabbato 11 cor-
" rente si leggono le seguenti parole: *Ci si invita a chieder conto*
" *delle carte di Vincenzo Gioberti. È inutile: esse hanno presa la*
" *stessa via delle carte di Pellico.* Avendo io, per incarico della
" Erede, assunto l'impegno di esaminare quelle carte, mi credo
" in debito di pregarla a voler acchetare i timori di chi l'abbia
" esortata a chiederne contezza, e che quando ne sarà compiuto
" l'esame il pubblico verrà informato esattamente di tutto quanto
" ad esse si riferisce... Le carte di Gioberti sono nelle mani
" della sua Erede, la quale non poteva dare attestato più solenne
" della sua lealtà e della sua riverenza verso la memoria del
" diletto estinto se non affidando l'esame delle di lei carte a
" chi gli fu per tanto tempo discepolo fedele ed amico svi-
" scerato... „ (" Opinione „, n° 73, del 14.3.'54).

L'anno successivo, il 6 gennaio, compariva nel giornale il
" Piemonte „ una nota, nella quale si manifestava il timore che
i manoscritti del Gioberti andassero perduti o fossero per ca-
dere in cattive mani; ed il Massari scriveva il giorno 8: " ... Es-
" sendo io uno dei componenti la commissione di fiducia scelta
" dall'Erede per esaminare quei manoscritti, e da questa com-
" missione... essendo stato specialmente delegato all'esame di
" quelle carte, sono in grado di dare ragguagli positivi. Dopo

“ aver compiuto l'esame dei manoscritti del Gioberti, dichiaro
“ che pur troppo non ho rinvenuto fra essi verun lavoro com-
“ piuto, ma soltanto abbozzi, brani e indicazioni più o meno dif-
“ fuse delle opere che il sommo filosofo intendeva dettare, ed i
“ cui titoli sono i seguenti: *Della riforma cattolica*; *Filosofia*
“ *della rivelazione*; *Protologia*. Il resto delle carte contiene copiosi
“ e voluminosi estratti delle letture che tuttodì l'uomo grande
“ faceva. Vi è pure un lavoro filologico importante intitolato:
“ *Correzioni ed aggiunte nuove al Vocabolario della Crusca*. È
“ sacro debito non defraudare l'Italia e la scienza dei pensieri
“ di Vincenzo Gioberti, ed a questo debito non mancherò di
“ adempire religiosamente, rendendo di pubblica ragione i fram-
“ menti di quelle opere, che la morte ha così crudelmente in-
“ terrotte. Ben comprendo quanto sia ardua e delicata l'impresa
“ a cui mi accingo, e veggo tutte le amarezze e le ingiustizie
“ che mi travaglieranno: ma la coscienza di fornire un dovere
“ verso quella diletta memoria mi fa pronto a qualsivoglia sa-
“ crifizio „. Il Massari finiva protestando di essere convinto pro-
fondamente che il filosofo “ avrebbe potuto trovare un più in-
“ telligente interprete delle sue volontà; ma non certamente un
“ interprete più zelante e più affettuoso „ (“ Opinione „, 1855,
11/1, n° 11). — Solo il giorno 8 luglio '56 (a quanto scriveva la
“ Gazzetta Piemontese „) venne firmato un contratto tra la Erede
di Vincenzo Gioberti e gli Eredi Botta per la pubblicazione delle
opere postume del sommo filosofo. La pubblicazione cominciò
coi frammenti dell'opera *Della riforma cattolica*, che fu messa
in vendita nel giorno di martedì 9 settembre, ed ebbe spaccio
abbondante, tanto che il 23 settembre erano già stati venduti
805 esemplari. Seguirono le altre: *Filosofia della rivelazione* ('56)
e *Protologia* ('57). Più tardi, 2 volumi di *Miscellanee*; più tardi
ancora, per opera dell'avv. Domenico Fissore, gli *Studi filolo-*
gici (1867). In questi ultimi anni, Edmondo Solmi pubblicò le
Meditazioni filosofiche (1909), poi il vol. *La teorica della mente*
umana, Rosmini e i Rosminiani, La libertà cattolica (1910). Altri
passi dei manoscritti giobertiani furono pubblicati dal Solmi negli
svariati suoi studi sul filosofo torinese. Attualmente, la maggior
parte dei mss. sono nella Biblioteca municipale di Torino, rega-
lati dalla signora Lamarchia (con lettera 31 marzo 1903), e sono

stati ordinati e classificati dal direttore, dott. Mussa (1). Ma il discorrere partitamente di loro mi porterebbe troppo lontano: mi basti per ora di parlare del ms. n° 31, che contiene l'opera frammentaria *Della riforma cattolica*, la quale fu pubblicata per la prima.

β) Il Manoscritto N° 31 (Della riforma cattolica).

È, fra i mss. giobertiani, uno dei meglio conservati. Il 1° foglio, non numerato, reca scritto di pugno del Gioberti: *Della riforma cattolica*. Seguono 396 fogli (v'è il 239 e 239*bis*; manca però il 254): i fogli sono scritti sul *retto* e sul *verso*, o sul solo *retto* o solo su una parte del *retto*; la maggior parte, di color bianco e del formato 20 × 32,5, con fogli intercalati di dimensioni minori e altro colore. Sono numerati — pare — di pugno dello stesso Gioberti sul *retto*; prima in *matita*, poi (non sempre) a penna: ad ogni numero è premessa in stampatello la lettera A. Quattro fogli sono vergati su carta intestata *Légation de Sardaigne*, ossia i fogli: 249 (Massari, p. 196, § CXXX); 253 (Massari, p. 198: " Obbiettasi contro il Cristianesimo "); 258 (Massari, p. 201: " Cristo in tutti quelli che l'accostano "); e 338 (Massari, p. 254: " Il Cristianesimo non è un semplice pensiero ").

Il ms. pervenne alla *Biblioteca civica* di Torino già legato ed ordinato, come ora si trova: pare che l'ordinamento si debba allo stesso Gioberti. Riguardo al tempo in cui i fogli furono scritti, non si può stabilire il termine *a quo*; nondimeno è facile accorgersi che alcuni furono composti prima del '49. Il termine ultimo può farsi arrivare al 1851-2; giacchè v'è traccia della scrittura *nervosa*, tanto facilmente riconoscibile. del Gioberti negli ultimi anni di vita.

Il Massari ha con ragione notato (p. 277) che il § CXCVIII fu dal Gioberti scritto prima del 1849, giacchè in quell'anno o, peggio, dopo di quell'anno egli non avrebbe detto che il tempo è propizio all'unione religiosa, perchè — tra l'altro — *abbiamo Pio e Roma s'incivilisce* (p. 277, l. 2: vedi le mie correzioni). Per

(1) Cfr. le note a p. 665 e 669.

conto mio, osservo che anche il § II fu scritto prima del fatale '49; perchè, parlando del governo temporale, dice: " *Ha difetti, è capace di miglioramento* „. Dicasi lo stesso di altri passi, come il seguente: " Siccome le mutazioni provano quandò si " passa per la via di mezzo, il transito alla spiritualizzazione " del dominio pontificale, mediante l'abolizione del temporale, " si può fare colla secolarizzazione di questo „ (§ LXXV, p. 125).

Quale eresia! avrebbe esclamato il Gioberti del 1849, del 1850, del 1851 e 1852! Apriamo i frammenti della *Riforma*, scritti evidentemente dopo del '48 e leggiamo: " Tre innesti mimetici " rovinarono il Cattolicismo: 1° La potenza temporale del Papa; " 2° l'Inquisizione; 3° il Gesuitismo „ (§ XIII, p. 22); " Il go- " verno temporale del Papa, e il potere dittatorio del Papa sul " temporale dei principi... appartengono allo stato mimetico e " non metessico della Chiesa... Assurda cosa è, che la Chiesa " costi la felicità d'una nazione. Il dominio temporale del Papa " fu utile nel passato, cioè durante il regno della forza. Nuoce " al presente, perchè comincia l'epoca del vero diritto franna- " zionale... „ (§ XX, p. 28, 30); " Gli ostacoli principali della " riforma sono: 1° il governo temporale... „ (§ XXIII, p. 38); " La potestà temporale del papa; inutile, dannosa „ (§ XXXVIII, p. 62). Che più? si legge in un frammento (§ CXXII, p. 186): " Ma il Papa è inutile. Sia pure, se così vi piace, come opera- " tore; ma non come memoria. Serbatelo come un monumento „.

Senza entrare a discutere delle teorie di questi frammenti, credo nondimeno opportuno di riportare qui il § XC (p. 142-3), come quello che compendia brevemente i *desiderata* più miti del Gioberti.

" Condizioni necessarie al ristauro del cattolicismo: 1° Sot- " trazione del governo temporale al Papa, ovvero secolarizzazione " di esso governo con istatuto rappresentativo (1). Finchè dura " il governo attuale, il temporale rende odioso e contennendo " lo spirituale all'Italia; e quindi al resto del mondo; 2° Mo- " dificazione del celibato dei chierici; 3° Abolizione dell'Ordine " dei Gesuiti; 4° Inamovibilità del clero inferiore; 5° Soppres-

(1) Qui, come nel § LXXV, p. 125 e altrove, il Gioberti vorrebbe che si arrivasse all'abolizione del dominio temporale PER GRADI. Anche questo passo potrebbe essere anteriore al '49.

" sione dei voti monastici in età immatura; 6° Istruzione emi-
" nente in una parte del clero. Riforma radicale dei seminarii,
" dell'educazione ecclesiastica. Usufrutto del tempo in tutto il
" clero. Abolizione del coro universalmente; 7° Modificazione o
" abolizione della Congregazione dell'Indice. Larghezza teologica.
" Misurare la determinazione del dogma col possibile, e propor-
" zionare il peso di questo alla forza degli argomenti di credi-
" bilità. Se gli inquisitori romani avessero ciò fatto, non avreb-
" bero condannato Galileo. Evitar le nuove definizioni. Non aver
" paura e non badare ai piccoli errori; 8° Le altre mutazioni
" disciplinarie seguiranno di mano in mano all'istruzione del
" clero e saranno effetti della *civiltà della Chiesa* „. Notevolis-
simi sono anche i *Sommarii della Riforma Cattolica* (in Massari, XXXIX-XL), dove insiste sulla *prima causa del male* ch'è, da una parte, *il governo temporale del papa*, e d'altra parte, *l'ignoranza del clero*, ed il § CLXXV, ch'è una diatriba contro la Roma dei Papi, che " è ricorsa per difendersi alle armi del
" mondo e delle passioni. Ricorse a Satana invece di sperare in
" Cristo... Cristo si è ritirato e l'ha lasciata a se stessa „ (p. 256).

Due scopi si prefiggeva il Gioberti: " l'uno di rendere al
" clero nella società, l'altro alla teologia nella enciclopedia, il
" grado che loro compete „ (p. 8, § VI). Bisognava, soprattutto, mettere il Cristianesimo d'accordo col secolo, svolgendone l'elemento terreno e facendone una civiltà (p. 37, § XXIII); bisognava " applicare la religione alla civiltà, farla servire di stru-
" mento alla propagazione della civiltà medesima „ (p. 15, § X). Era egli persuaso che " i nemici più grandi della religione sono
" quelli della scienza e dell'incivilimento „ (p. 108; § LXII), e che " la religione giunta nella sua maturezza dee, senza lasciar
" di essere religione, trasformarsi in civiltà „ (p. 145, § XCII). Egli vagheggiava *la riforma*, per opera di *un uomo o dittatore ideale*, che poteva essere prete o laico; meglio se di professione univa i due caratteri del sacerdozio e del laicato; se era prete, ma non dipendeva da una special giurisdizione, non aveva diocesi, non aveva patria, se era cristiano e cittadino del mondo (p 153, § XCIX). Questo ingegno estragerarchico, per poter operare colla Chiesa, doveva guardarsi dal diventare antigerarchico, come Lutero, Lamennais, e tutti gli eretici: doveva restare nella Chiesa a costo di qualunque scomodo; doveva rassegnarsi a

soffrir fortemente in vista del bene futuro! (p. 32, § XXI). Non v'ha dubbio che il Gioberti, scrivendo quelle espressioni, pensava a se stesso, sacerdote, esule, perseguitato dai Gesuiti e gesuitanti, proscritto dall'Indice... che s'ostinava a rimaner nella Chiesa per il bene di essa e della civiltà! E aveva, perciò, d'uopo della più ampia libertà di stampa, ch'egli invocava con ottimi argomenti: tutt'al più avrebbe ammesso la censura *consecutiva*, ma non mai quella *anticipativa*: " Chi non vuole la libertà della " stampa, per esser logico dovrebbe impedire la libertà di par- " lare, di camminare, ecc. Ma ciò è impossibile e assurdo. Così è " impossibile l'impedire la libertà della stampa „ (p. 26, § XVIII).

Il Massari comincia coi frammenti della *Riforma cattolica* la pubblicazione delle opere postume del Gioberti: la prefazione è datata da Torino, 1° settembre 1856. Egli ha seguìto la numerazione del manoscritto, attenendosi scrupolosamente all'originale: ma ha voluto, troppo spesso, riunire sotto lo stesso paragrafo dei frammenti che — pur seguendosi nella numerazione — non hanno tra di loro stretta relazione d'idee; donde ne viene confusione e peggio. Penso pertanto di reintegrare i frammenti, come sono nel manoscritto giobertiano (il che formerà oggetto di una seconda Nota), indicando dove furono raggruppati e come; ed avvertendo le maggiori *incongruenze* di tali arbitrari aggruppamenti. Seguirà un'*errata-corrige* alla stampa del Massari, nella quale pubblicherò qualche passo omesso da lui, o per semplice svista (come nel foglio 148°, dove non fu pubblicato il *verso*), o per ragioni speciali (come il passo del *celibato* nel foglio 95°), o forse perchè depennato in parte (foglio 382°). Le correzioni non sono tutte, com'è naturale, d'ugual peso: ma ve ne sono di quelle *noterolissime* e d'*importanza capitale* per l'intelligenza del testo.

Se questa mia qualunque fatica sarà ritenuta non inutile, farò seguire a questa collazione quella degli altri mss. giobertiani, stampati postumi, con molte *inevitabili sviste*, dai benemeriti editori, nella speranza di cooperare alla migliore e più esatta intelligenza del pensiero del nostro maggiore filosofo del secolo 19°.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI.

PREMIO DI FONDAZIONE GAUTIERI

La Reale Accademia delle Scienze di Torino conferirà nell'anno 1917 un premio di fondazione Gautieri a quell'opera di Letteratura, Storia letteraria, Critica letteraria, che sarà giudicata migliore fra le pubblicate negli anni 1914-1916, non escluse quelle che riguardino le letterature classiche e straniere. Il premio di L. 1900 sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i Soci nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in lingua italiana.

Gli autori possono inviare all'Accademia le pubblicazioni sulle quali desiderano richiamarne l'attenzione, avvertendo che non saranno restituite le opere ad essa per tal fine pervenute.

Torino, 15 febbraio 1916.

L'Accademico Segretario
della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
ETTORE STAMPINI.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 5 Marzo 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Salvadori, Naccari, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Fusari, Balbiano, Panetti e Segre, Segretario.

Letto e approvato il verbale della precedente adunanza, il Presidente comunica un telegramma del Prof. Remigio Sabbadini che ringrazia pel premio Vallauri a lui conferito, ed una circolare della Stazione Zoologica di Napoli relativa alla gestione temporanea e straordinaria della Stazione stessa.

Vengono poi presentate dai Soci Guareschi e Segre, rispettivamente, le seguenti Note per la stampa negli *Atti*:

G. Charrier, *Reazioni di nitrati di ossiazocomposti*;

A. Terracini, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*. Nota II.

LETTURE

Reazioni di nitrati di ossiazocomposti.

Nota di G. CHARRIER.

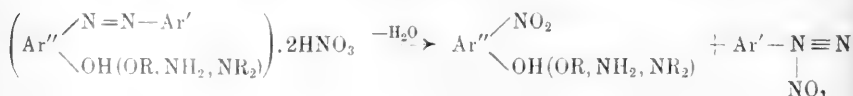
I. — Azione degli alcooli sui nitrati degli eteri degli 1-arilazo-2naftoli (arilazoβnaftoli).

Esaurito in gran parte per mie precedenti ricerche [1] lo studio delle reazioni dei nitrati degli azocomposti (ossi- e amino-azocomposti), nelle quali si ottengono nitrati di diazonio (reazioni che ho complessivamente indicato col nome di " diazoscissione „ [2] dei nitrati degli azocomposti), incomincio ora lo

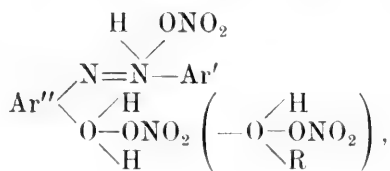
[1] G. *43*, II, 148, 211, 227 (1913); *44*, I, 120, 165, 405; II, 228, 503.

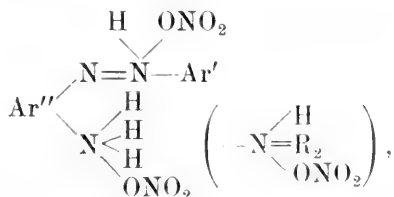
[2] La diazoscissione dei nitrati degli ossi- e amino-azocomposti non è che un caso speciale della diazoscissione degli azocomposti, la quale comprende tutte quelle reazioni per le quali dagli azocomposti (ossi- e amino-derivati) si ottengono sali di diazonio. Colla conoscenza del meccanismo della diazoscissione dei nitrati, che fui il primo a mettere in evidenza e che è generale per gli azocomposti ossi- e amino-sostituiti, noi possiamo chiarire in modo indubbio tutte le reazioni, nelle quali si passa dagli ossi- e amino-azocomposti ai sali di diazonio: dalla diazoscissione può inoltre acquistare salde basi sperimentali un meccanismo della copulazione, che per quanto non nuovo non aveva ancora sino a questi ultimi anni in suo favore alcuna dimostrazione sperimentale [G. *43*, II, 148 (1913); *44*, II, 503 (1914)].

La diazoscissione dei nitrati degli ossi- e amino-azocomposti è caratterizzata dallo spostamento dell'azogruppo per mezzo del nitrogruppo e porta sempre e quantitativamente quando viene eseguita nelle opportune condizioni a un nitroderivato contenente il nitrogruppo nella posizione in cui l'azoderivato conteneva l'azogruppo e a un nitrato di diazonio secondo lo schema generale:

$$\left(Ar''\begin{matrix}\diagup N{=}N{-}Ar' \\ \diagdown OH(OR,NH_2,NR_2)\end{matrix}\right).2HNO_3 \xrightarrow{-H_2O} Ar''\begin{matrix}\diagup NO_2 \\ \diagdown OH(OR,NH_2,NR_2)\end{matrix} + Ar'-\underset{\displaystyle NO_3}{\underset{|}{N}}{\equiv}N$$

studio di altre interessanti reazioni di questi importanti sali, occupandomi nella presente dell'azione degli alcooli sui nitrati degli eteri degli arilazoβnaftoli $C_{10}H_6\begin{cases}(1)N{=}N-Ar\\(2)OR\end{cases}.2HNO_3$.

Ho attribuito [1] ai nitrati degli ossiazocomposti e dei loro eteri la struttura

$$\begin{array}{l}\quad\;\; H\;\;ONO_2\\ \qquad\diagdown\diagup\\ \;\;\diagup N{=}N-Ar'\\ Ar''\quad\;\diagup H\\ \;\;\diagdown O-ONO_2\\ \qquad\;\diagdown H\end{array}\left(-O\begin{array}{l}\diagup H\\ -ONO_2\\ \diagdown R\end{array}\right),$$

considerandoli cioè come sali di ammonio e di ossonio sostituiti, e per analogia ho esteso tale formola ai nitrati degli aminoazocomposti contenenti due molecole di acido nitrico data la loro tendenza alla diazoscissione, rappresentandoli collo schema seguente:

$$\begin{array}{l}\quad\;\; H\;\;ONO_2\\ \qquad\diagdown\diagup\\ \;\;\diagup N{=}N-Ar'\\ Ar''\quad\;\diagup H\\ \;\;\diagdown N\begin{array}{l}<H\\ \;\; H\end{array}\\ \qquad\;\diagdown ONO_2\end{array}\left(-N\begin{array}{l}\diagup H\\ =R_2\\ \diagdown ONO_2\end{array}\right),$$

sia per spiegarmi da una parte la minor resistenza che il gruppo $-\overset{H\;\;ONO_2}{N{=}\overset{\diagdown\diagup}{N}}-Ar'$ coll'azoto pentavalente oppone alla sostituzione col gruppo $-NO_2$ del gruppo $-N{=}N-Ar'$ coll'azoto trivalente e la formazione nella diazoscissione dei nitrati del nitrato di diazonio $\underset{ONO_2}{N}{\equiv}N-Ar'$, che contiene il residuo dell'acido nitrico attaccato all'azoto pentavalente, sia per analogia dall'altra parte dei nitrati coi cloridrati (e cogli alogenuri in generale)

---

[1] G. *43*, II, 213 (1913).

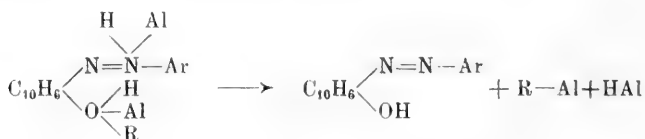
degli eteri degli o-ossiazocomposti derivanti dal β-naftolo (arilazoβnaftoli) che si scindono già a 100° in cloruro alchilico, acido cloridrico e ossiazocomposto [1], per cui è logico ammettere che l'alogeno eliminandosi unito all'alchile, si trovi legato nella molecola del sale dell'etere dell'ossiazocomposto all'atomo di ossigeno a cui aderisce l'alchile [2].

Nella molecola dei nitrati la forza di affinità che tiene legato l'atomo di azoto dell'azogruppo al nucleo aromatico bivalente risulta più debole che non sia nell'azocomposto non salificato, poichè il gruppo NO_2 sposta facilmente l'azogruppo, il quale per parte sua ha tendenza a trasformarsi nell'aggruppamento più stabile del nitrato dell'arildiazonio. In altre parole il sistema costituito dal nitrato dell'azocomposto è poco stabile, poichè ha grande tendenza a trasformarsi nel sistema più stabile costituito dal nitroderivato (nitro-ossi- e nitro-amino-derivato), dal nitrato di diazonio corrispondente e dall'acqua. Lo stato più stabile viene raggiunto più velocemente quando si scaldi il sistema, ma anche spontaneamente per quanto più lentamente si arriva al nitroderivato, al nitrato di diazonio e all'acqua a temperatura ordinaria; l'azione del calore non fa che accelerare la reazione.

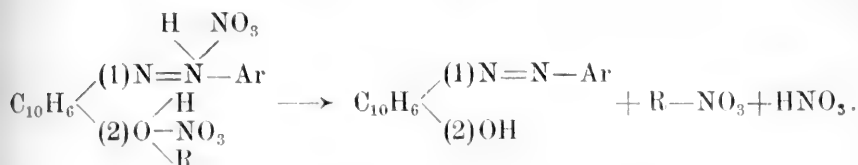
Benchè fosse stata già da me osservata per i nitrati una scissione analoga a quella degli alogenuri degli eteri degli arilazoβnaftoli, che conduceva al p-nitro-ossiazocomposto non ete-

(1) G. *43*, I, 543 (1913).

(2) Questa scissione degli alogenuri degli eteri degli arilazoβnaftoli che ho rappresentato collo schema seguente

$$C_{10}H_6\left\langle\begin{matrix} N{=}\overset{H\ \ Al}{\overset{\diagdown\ \diagup}{N}}{-}Ar \\ O\overset{H}{\underset{R}{\lt}}Al \end{matrix}\right. \longrightarrow C_{10}H_6\left\langle\begin{matrix} N{=}N{-}Ar \\ OH \end{matrix}\right. + R{-}Al + HAl$$

avviene spontaneamente per quanto più lentamente alla temperatura ordinaria: per es. i cloridrati degli eteri dopo un certo tempo si trovano completamente trasformati negli ossiazocomposti non eterificati corrispondenti; deve quindi anche in questo caso essere avvenuta lentamente eliminazione di acido cloridrico e di cloruro alchilico.

rificato [1], però non ero ancora riuscito ad ottenere la scissione rappresentata dallo schema seguente:

$$C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l}(1)N{=}\overset{H\ \ NO_3}{\underset{}{N}}{-}Ar \\ \qquad\quad /H \\ (2)O{-}NO_3 \\ \qquad \backslash R\end{array}\right. \longrightarrow C_{10}H_6\left\langle\begin{array}{l}(1)N{=}N{-}Ar \\ (2)OH\end{array}\right. + R{-}NO_3 + HNO_3 .$$

perfettamente analoga a quella sopraricordata che presentano gli alogenuri per azione del calore e anche spontaneamente.

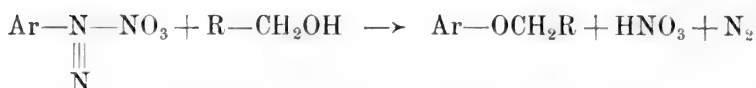
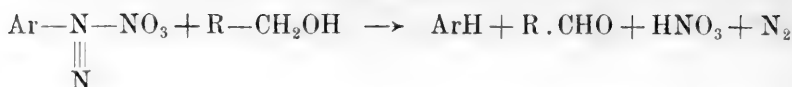
La diazoscissione dei nitrati degli eteri degli arilazoβnaftoli venne appunto osservata nello studio dell'azione del calore sui nitrati stessi, onde verificare se il loro comportamento al riscaldamento era analogo a quello degli alogenuri.

La scissione soprascritta avviene in modo completo ed è perfettamente identica a quella degli alogenuri, quando semplicemente si sciolga il nitrato dell'etere in un alcool qualsiasi e si lasci a sè la soluzione per qualche tempo. Infatti dalla soluzione incomincia dopo poco tempo a cristallizzare l'ossiazocomposto, e quando dopo qualche giorno la cristallizzazione è finita, si ritrova nella soluzione alcoolica il nitrato alchilico e l'acido nitrico.

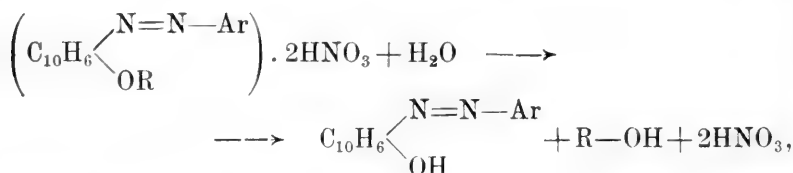
Dunque per trattamento cogli alcooli a freddo o a caldo non si nota affatto diazoscissione dei nitrati neppure in traccia: questa avviene soltanto scaldando i nitrati sospesi in quei liquidi, che non sciolgono l'acido nitrico e che quindi non possono dissociare i nitrati (ad es., colla ligroina), come ebbi già a far notare altrove [2]. Se la diazoscissione avvenisse per riscaldamento cogli alcooli sarebbe da prevedersi dai nitrati degli ossiazocomposti la formazione, secondo le reazioni generali dei sali di diazonio cogli alcooli, da una parte del nitrofenol e dall'altra dell'idro-carburo aromatico e dell'etere del fenolo, che avrebbero dovuto formarsi per azione dell'alcool sul sale di diazonio risultante dalla diazoscissione secondo gli schemi:

[1] G. *43*, II, 160 (1913); *44*, I, 124, 127 (1914).
[2] G. *44*, I, 406 (1914).

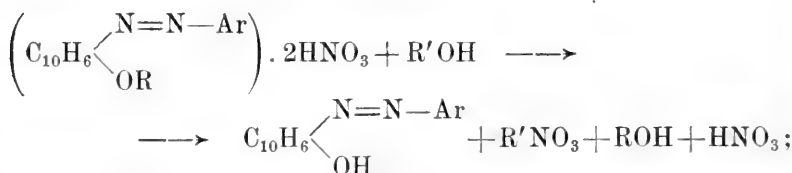
$$\underset{\underset{N}{|||}}{Ar-N}-NO_3 + R-CH_2OH \longrightarrow ArH + R.CHO + HNO_3 + N_2$$

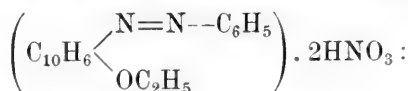
$$\underset{\underset{N}{|||}}{Ar-N}-NO_3 + R-CH_2OH \longrightarrow Ar-OCH_2R + HNO_3 + N_2$$

Poichè l'azione degli alcooli sui nitrati degli eteri degli arilazoβnaftoli poteva venire interpretata in modo diverso, cioè si poteva anche prevedere coll'alcool acquoso una semplice idrolisi secondo lo schema:

$$\left(C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-Ar\\ \diagdown OR\end{matrix}\right).2HNO_3 + H_2O \longrightarrow$$

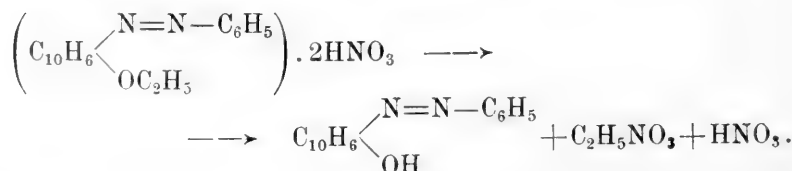
$$\longrightarrow C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-Ar\\ \diagdown OH\end{matrix} + R-OH + 2HNO_3,$$

oppure coll'alcool anidro un'alcoolisi

$$\left(C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-Ar\\ \diagdown OR\end{matrix}\right).2HNO_3 + R'OH \longrightarrow$$

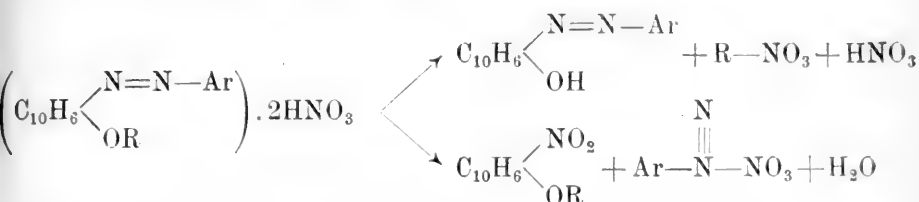
$$\longrightarrow C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-Ar\\ \diagdown OH\end{matrix} + R'NO_3 + ROH + HNO_3;$$

per eliminare ogni dubbio si studiò l'azione dell'alcool metilico assoluto sul nitrato dell'etere etilico dell'1-fenilazo-2naftol

$$\left(C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-C_6H_5\\ \diagdown OC_2H_5\end{matrix}\right).2HNO_3:$$

se in questo caso si formava nitrato di etile non poteva essere dubbio trattarsi di una vera scissione caratteristica del nitrato studiato procedente secondo lo schema

$$\left(C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-C_6H_5\\ \diagdown OC_2H_5\end{matrix}\right).2HNO_3 \longrightarrow$$

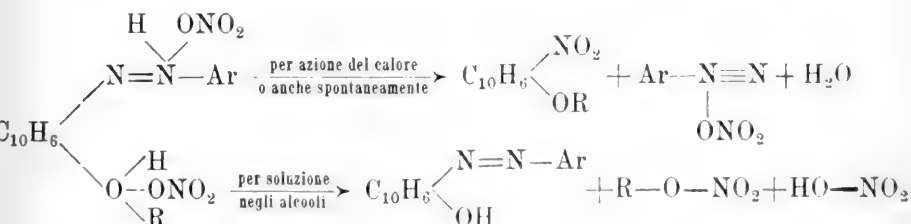
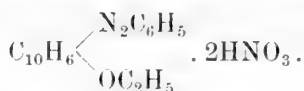
$$\longrightarrow C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-C_6H_5\\ \diagdown OH\end{matrix} + C_2H_5NO_3 + HNO_3.$$

L'esperienza dimostrò che si otteneva, accanto all'1-fenilazo-2naftol, soltanto nitrato di etile e acido nitrico, non nitrato di metile, e che quindi non poteva trattarsi affatto di alcoolisi.

Se si confronta quest'ultimo modo di scissione dei nitrati degli eteri degli arilazoβnaftoli testè studiato colla diazoscissione degli stessi nitrati usando lo schema seguente:

$$\left(C_{10}H_6\begin{cases}N=N-Ar\\ OR\end{cases}\right).2HNO_3 \begin{cases}\nearrow C_{10}H_6\begin{cases}N=N-Ar\\ OH\end{cases} + R-NO_3 + HNO_3\\ \searrow C_{10}H_6\begin{cases}NO_2\\ OR\end{cases} + Ar-\overset{\overset{\displaystyle N}{|||}}{N}-NO_3 + H_2O\end{cases}$$

non si può negare che la struttura che da qualche anno io ho attribuito a tali sali degli azocomposti non acquisti una nuova base sperimentale, poichè mentre da un lato tale nuova scissione ci permette di considerare assai probabile la presenza di uno dei residui nitrici aderente all'atomo di ossigeno a cui aderisce l'alchile, dall'altro lato la diazoscissione, come già feci osservare in principio di questa Nota, ci spinge ad ammettere che l'altro residuo nitrico si trovi legato all'atomo di azoto col quale si elimina sotto forma di nitrato di diazonio. Dobbiamo perciò molto verosimilmente rappresentare la struttura dei nitrati degli arilazo-βnaftoli e insieme il meccanismo delle due scissioni sopra accennate collo schema seguente:

$$C_{10}H_6\begin{cases}N=\overset{H\quad ONO_2}{\overset{\diagdown\ \diagup}{N}}-Ar \xrightarrow[\text{o anche spontaneamente}]{\text{per azione del calore}} C_{10}H_6\begin{cases}NO_2\\ OR\end{cases} + Ar-\underset{\underset{\displaystyle ONO_2}{|}}{N}\equiv N + H_2O\\ O\begin{cases}H\\ ONO_2\\ R\end{cases} \xrightarrow[\text{negli alcooli}]{\text{per soluzione}} C_{10}H_6\begin{cases}N=N-Ar\\ OH\end{cases} + R-O-NO_2 + HO-NO_2\end{cases}$$

Nitrato dell'etere etilico dell'1-fenilazo-2naftol

$$C_{10}H_6\langle{}^{N_2C_6H_5}_{OC_2H_5} \cdot 2HNO_3.$$

Azione dell'alcool metilico. — Gr. 45 di nitrato si trattarono con 350 cc. di alcool metilico, disseccato accuratamente e distillato su ossido di calcio: dopo qualche ora incominciarono a separarsi cristalli di 1-fenilazo-2naftol, fusibili a 133°, che andarono man mano aumentando per qualche giorno. Quando il liquido non lasciò più cristallizzare sostanza e assunse un color rosso-chiaro, si filtrarono i cristalli, si neutralizzò con carbonato di calcio l'acido nitrico e quindi si sottopose il liquido nuovamente filtrato a distillazione frazionata, impiegando un tubo Henninger-Le Bel: eliminato l'alcool metilico al disotto di 66°, la temperatura di distillazione sale rapidamente a 86°; passa il nitrato di etile, che si riconosce, oltrechè per il punto di ebollizione, per le proprietà e per la reazione con solfato ferroso e acido solforico concentrato.

Una seconda prova eseguita con 12 gr. di nitrato e colla sola variante che venne portata all'ebollizione la soluzione del nitrato nell'alcool metilico anidro diede gli stessi risultati.

Azione di altri alcooli. — Coll'alcool propilico si ottenne una soluzione intensamente colorata in rosso-vinoso, che dopo qualche giorno incominciò a separare cristalli aghiformi ben sviluppati a riflesso verde-metallico intenso. Ricristallizzati dall'alcool, si separano in fogliette dorate fusibili a 133° (1-fenilazo-2naftol).

Prove di mescolanza con 1-fenilazo-2 naftol puro non dànno abbassamento sensibile del punto di fusione. Coll'alcool isopropilico si osservarono gli stessi fenomeni: gli aghi separatisi cristallizzati dall'alcool si mostrarono all'apparenza e al punto di fusione costituiti da 1-fenilazo-2naftol.

Coll'alcool isobutilico avvenne come coll'alcool propilico e isopropilico: i cristalli aghiformi a riflesso verde-metallico separatisi fondono senza ricristallizzazione dall'alcool etilico a 131°, dopo cristallizzazione a 133° e si dimostrano alla prova di mescolanza con 1-fenilazo-2naftol puro come identici con questa sostanza.

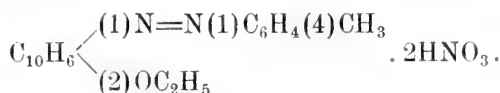
Coll'alcool amilico di fermentazione si ha cristallizzazione di 1-fenilazo-2naftol impuro in aggregati a forma di rosetta costituiti da aghi piatti e corti a riflesso metallico-verde.

P. F. 128-129°. Dopo cristallizzazione dell'alcool presentano il punto di fusione 133°.

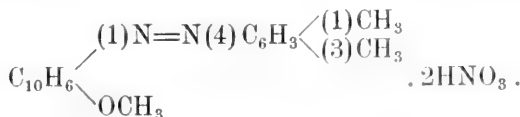
Infine coll'alcool benzilico il nitrato dell'etere etilico dà una soluzione intensamente colorata in rosso-violetto, che dopo parecchi giorni non separa nulla, ma prende un colore rosso-ranciato: aggiungendo alcool etilico si ottiene cristallizzazione di 1-fenilazo-2naftol in aghetti rosso-ciliegia, fusibili subito a 133°.

Azione degli alcooli metilico ed etilico a freddo e all'ebollizione su altri nitrati.

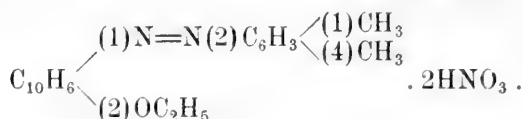
Nitrato dell'etere etilico dell'1-ptolilazo-2naftol

$$C_{10}H_6\left<\begin{matrix}(1)N{=}N(1)C_6H_4(4)CH_3\\(2)OC_2H_5\end{matrix}\right. . 2HNO_3 .$$

Se si scioglie del nitrato in alcool assoluto o in alcool metilico anidro dopo poco tempo cristallizza una sostanza molto meno solubile del nitrato dell'etere, costituita da aghi rossi, che si fonde senz'altro a 135° e viene riconosciuta per 1-ptolilazo-2naftol $C_{10}H_6\left<\begin{matrix}N{=}N(1)C_6H_4(4)CH_3\\OH\end{matrix}\right.$. Anche all'ebollizione coi due solventi anidri o con alcool a 95° avviene la stessa reazione.

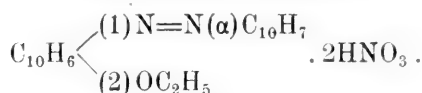
Nitrato dell'etere metilico dell'1-as-m-xilil-azo-2naftol

$$C_{10}H_6\left<\begin{matrix}(1)N{=}N(4)C_6H_3\left<\begin{matrix}(1)CH_3\\(3)CH_3\end{matrix}\right.\\OCH_3\end{matrix}\right. . 2HNO_3 .$$

Cogli alcooli metilico ed etilico tanto a freddo che all'ebollizione dà facilmente dopo poco tempo dell'1-as-m-xilil-azo-2naftol che fonde a 163-164°.

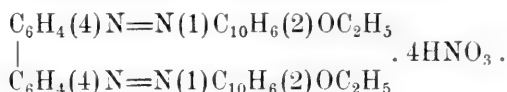
Nitrato dell'etere etilico dell'1-p-xililazo-2naftol

$$C_{10}H_6\begin{cases}(1)N{=}N(2)C_6H_3\begin{cases}(1)CH_3\\(4)CH_3\end{cases}\\(2)OC_2H_5\end{cases}.2HNO_3\,.$$

Coll'alcool metilico all'ebollizione fornisce 1-p-xililazo-2naftol, fusibile a 150°.

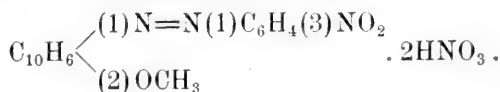
Nitrato dell'etere etilico dell'1-α-naftilazo-2naftol

$$C_{10}H_6\begin{cases}(1)N{=}N(\alpha)C_{10}H_7\\(2)OC_2H_5\end{cases}.2HNO_3\,.$$

Coll'alcool etilico all'ebollizione si ottiene cristallizzato in lunghi aghi prismatici, di splendore verde metallico, l'1-α-naftilazo--2naftol, fusibile a 230°.

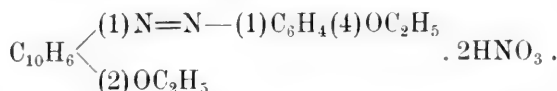
Nitrato dell'etere etilico dell'1-benzidilazo-2naftol

$$\begin{array}{l}C_6H_4(4)N{=}N(1)C_{10}H_6(2)OC_2H_5\\|\\C_6H_4(4)N{=}N(1)C_{10}H_6(2)OC_2H_5\end{array}.4HNO_3\,.$$

Trattando del nitrato con alcool etilico all'ebollizione si separa dell'1-benzidil-azo-2naftol (difenil-p2-disazoβnaftol), fusibile a 275°.

Nitrato dell'etere metilico dell'1-m-nitro-fenilazo-2naftol

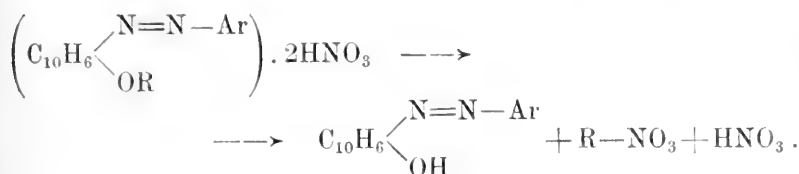
$$C_{10}H_6\begin{cases}(1)N{=}N(1)C_6H_4(3)NO_2\\(2)OCH_3\end{cases}.2HNO_3\,.$$

L'azione dell'alcool etilico su questo nitrato fornisce dell'1-m-nitrofenil-azo-2naftol, fusibile a 193-194°.

Nitrato dell'etere etilico dell'1-p-fenetilazo-2naftol

$$C_{10}H_6\begin{cases}(1)N{=}N-(1)C_6H_4(4)OC_2H_5\\(2)OC_2H_5\end{cases}.2HNO_3\,.$$

Sciogliendo del nitrato in alcool etilico o metilico molto rapidamente questo si trasforma in 1-p-fenetilazo-2naftol, cristallizzato in aghetti setacei rossi, fusibili a 132°.

Riassumendo l'azione degli alcooli etilico e metilico sia a freddo che all'ebollizione ha trasformato completamente i nitrati studiati negli ossiazocomposti non eterificati corrispondenti. Si deve ammettere per analogia col caso studiato accuratamente su grande quantità di sostanza del nitrato dell'etere etilico dell'1-fenilazo-2naftol, che anche in questi casi accanto agli ossiazocomposti si formi il nitrato alchilico e acido nitrico secondo lo schema generale seguente:

$$\left(C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-Ar\\ \diagdown OR\end{matrix}\right).2HNO_3 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N-Ar\\ \diagdown OH\end{matrix} + R{-}NO_3 + HNO_3 .$$

II. — Azione degli acidi alogenici concentrati sui nitrati degli eteri degli 1-arilazo-2naftoli (arilazo-βnaftoli).

Come già ebbi occasione di far notare [1], si poteva prevedere per i nitrati degli ossiazocomposti, i quali facilmente per diazoscissione forniscono nitrati di diazonio, la grande facilità di entrare in reazione che caratterizza i sali di diazonio.

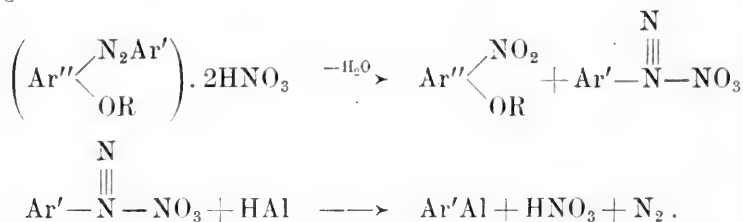
Poichè dai nitrati degli ossiazocomposti si ottengono i nitrati di diazonio, i quali all'atto della loro formazione possono evidentemente entrare più agevolmente in reazione, si verifica un caso analogo a quello dei diazoaminocomposti (arildiazoanilidi), ai quali per la facilità con cui si scindono in sali di diazonio si potrebbe attribuire la formola $Ar{-}HN{-}\overset{\overset{N}{|||}}{N}{-}Ar'$ e delle diazopiperidine (arildiazopiperididi) che si potrebbero analogamente formulare nel modo seguente $C_5H_{10}N{-}\overset{\overset{N}{|||}}{N}{-}Ar'$ appunto per spiegare la loro scissione cogli acidi in sali di diazonio e sali di piperidina.

(1) G. *43*, II, 228 (1913).

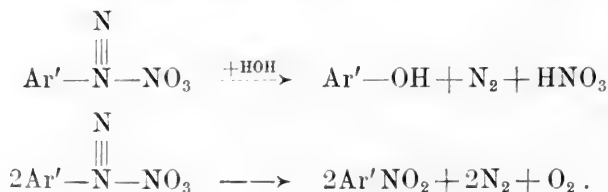
I nitrati degli ossiazocomposti, come i diazo-amino-composti e i diazopiperididi, reagiscono cogli acidi alogenici concentrati molto più agevolmente che non i sali di diazonio, la cui reattività in quanto concerne la sostituzione del diazogruppo coll'atomo di alogeno è soddisfacente soltanto coll'acido iodidrico.

Ho sottoposto per ora soltanto i nitrati degli eteri degli arilazo-βnaftoli all'azione degli acidi alogenici concentrati e ho potuto constatare che ad una primaria diazoscissione quasi completa di essi fa seguito una decomposizione del nitrato di diazonio originatosi nel primo tempo, che in presenza di soluzione di acido alogenico bollente si trasforma, sviluppando azoto, nell'alogenoderivato corrispondente contenente l'atomo di alogeno al posto del diazogruppo. Si deve quindi ammettere nell'azione delle soluzioni concentrate e bollenti degli acidi alogenici sui nitrati studiati come prevalente la reazione indicata dagli schemi seguenti:

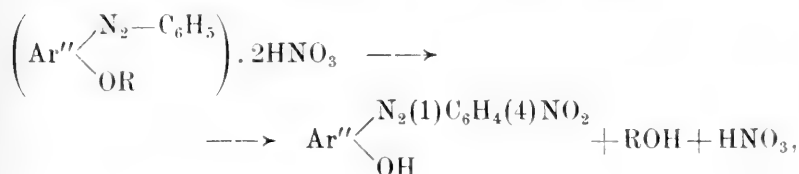
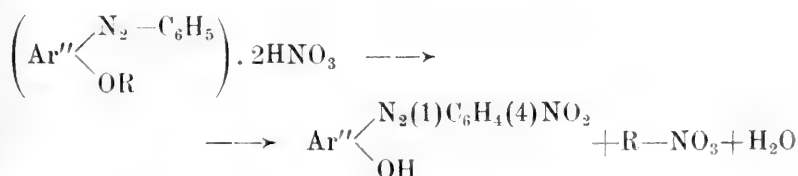
$$\left(Ar''\begin{matrix} \diagup N_2Ar' \\ \diagdown OR \end{matrix}\right) . 2HNO_3 \xrightarrow{-H_2O} Ar''\begin{matrix} \diagup NO_2 \\ \diagdown OR \end{matrix} + Ar'-\overset{\overset{\displaystyle N}{|||}}{N}-NO_3$$

$$Ar'-\overset{\overset{\displaystyle N}{|||}}{N}-NO_3 + HAl \longrightarrow Ar'Al + HNO_3 + N_2 .$$

Poichè però, oltre all'alogenoderivato Ar'Al, si riscontrarono in quantità molto minore anche l'idrossiderivato Ar'OH e il nitroderivato $Ar'NO_2$, si deve ammettere che la decomposizione del nitrato di diazonio in presenza della soluzione concentrata dell'acido alogenico caratterizzata dalla sostituzione del diazogruppo coll'atomo di alogeno, di gran lunga prevalente, sia accompagnata dalle decomposizioni secondarie del nitrato di diazonio con sostituzione del diazogruppo coll'ossidrile o col nitrogruppo, rappresentate dagli schemi seguenti:

$$Ar'-\overset{\overset{\displaystyle N}{|||}}{N}-NO_3 \xrightarrow{+HOH} Ar'-OH + N_2 + HNO_3$$

$$2Ar'-\overset{\overset{\displaystyle N}{|||}}{N}-NO_3 \longrightarrow 2Ar'NO_2 + 2N_2 + O_2 .$$

Inoltre venne pure notata una nitrazione dell'ossiazocomposto con formazione di un p-nitro-ossiazocomposto della formola generale $Ar''\langle{}^{N_2(1)Ar'(4)NO_2}_{OH}$ nei nitrati sottoposti a reazione nei quali la posizione para del nucleo non ossidrilato era libera, nitrazione la cui entità era più o meno grande a seconda della concentrazione della soluzione del nitrato dell'ossiazocomposto eterificato nell'acido alogenico. Per soluzioni diluite la quantità di p-nitro-ossiazocomposto ottenuta era minore. Questa nitrazione può venir rappresentata collo schema seguente:

$$\left(Ar''\langle{}^{N_2-C_6H_5}_{OR}\right).2HNO_3 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow Ar''\langle{}^{N_2(1)C_6H_4(4)NO_2}_{OH} + ROH + HNO_3,$$

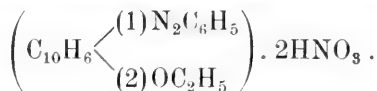
oppure con quest'altro:

$$\left(Ar''\langle{}^{N_2-C_6H_5}_{OR}\right).2HNO_3 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow Ar''\langle{}^{N_2(1)C_6H_4(4)NO_2}_{OH} + R-NO_3 + H_2O$$

poichè si ottiene sempre il nitroderivato dell'ossiazocomposto non eterificato [1].

La formazione dai nitrati degli eteri degli ossiazocomposti studiati degli alogenoderivati aromatici Ar'—Al, contenenti l'atomo

[1] Gli eteri degli 1-arilazo-2naftoli vengono facilmente saponificati dagli acidi, mentre sono molto resistenti cogli alcali anche concentrati: ciò è dovuto alla capacità dell'atomo di ossigeno legato all'alchile di addizionare una molecola di acido HAc formando un sale di ossonio poco stabile coll'aggruppamento $-O\langle{}^{R}_{H}{-Ac}$ che ha grande tendenza a decomporsi così: $-O\langle{}^{R}_{H}{-Ac} \longrightarrow O-H+RAc$. Potrebbe quindi avvenire qui anche una semplice saponificazione accompagnata da nitrazione.

di alogeno al posto dell'azogruppo, che è, come è noto, caratteristica dei sali di diazonio, nei quali l'alogeno prende il posto del diazogruppo e pei quali avviene bene soltanto coll'acido iodidrico, mentre cogli acidi cloridrico e bromidrico richiede la presenza dei corrispondenti alogenuri ramosi (reazioni di Sandmeyer), non si può spiegare, e lo stesso si può dire delle reazioni secondarie che conducono all'idrossi- e al nitroderivato, se non ammettendo una primaria diazoscissione di essi nitrati.

Nitrato dell'etere etilico dell'1-fenilazo-2naftol

$$\left(C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup(1)N_2C_6H_5\\ \diagdown(2)OC_2H_5\end{matrix}\right).2HNO_3.$$

Azione dell'acido cloridrico fumante ($D = 1,19$). — Se si trattano 25 gr. di nitrato con circa mezzo litro di acido cloridrico fumante, si ottiene una soluzione colorata intensamente in rosso, che scaldata all'ebollizione per qualche tempo sviluppa azoto e acido cloridrico: se poi tale soluzione si diluisce fortemente e si sottopone a distillazione in corrente di vapor d'acqua, passa col vapore un olio leggermente giallognolo che si mostra costituito in massima parte da clorobenzolo C_6H_5Cl con piccola quantità di nitrobenzolo.

Se si estrae infatti con etere il distillato, dopo averlo alcalinizzato con soluzione di idrossido di sodio, si ottiene dopo distillazione del solvente un liquido rossiccio, che sottoposto a distillazione passa per la maggior parte tra 130° e 135°; quindi il termometro sale sino a 209° e a questa temperatura passa una piccola quantità di nitrobenzolo. La frazione bollente tra 130° e 135° ridistillata fornisce del monoclorobenzolo puro bollente esattamente a 132°.

Le acque alcaline, residue dell'estrazione con etere, contengono un po' di fenolo che si riconosce colle note reazioni.

Proseguendo la prima distillazione con vapor d'acqua passa una sostanza poco volatile, che tosto solidifica e che si riconosce agevolmente per 1-nitro-2naftol $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup(1)NO_2\\ \diagdown(2)OH\end{matrix}$, poichè cristallizza dall'alcool in aghi prismatici gialli, fusibili a 103°.

Il residuo non volatile con vapor d'acqua venne trattato dopo filtrazione con alcool, nel quale si sciolse una parte, la quale conteneva, assieme a un po' di 1-fenilazo-2naftol inalterato, l'etere etilico dell'1-nitro-2naftol, fusibile a 104-105°.

Il residuo insolubile in alcool era costituito da 1-p-nitrofenilazo-2naftol, fusibile dopo cristallizzazione dal toluene a 251°.

Per azione della soluzione di acido cloridrico sul nitrato dell'etere etilico dell'1-fenilazo-2naftol debbono perciò essere avvenute le reazioni seguenti:

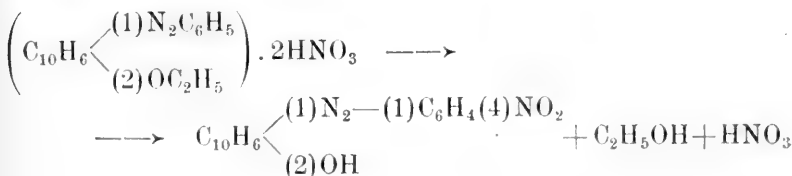
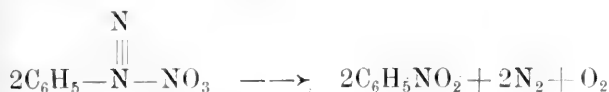
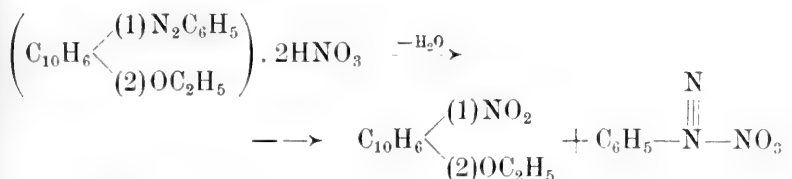
$$\left(C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup(1)N_2C_6H_5\\ \diagdown(2)OC_2H_5\end{matrix}\right).2HNO_3 \xrightarrow{-H_2O} C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup(1)NO_2\\ \diagdown(2)OC_2H_5\end{matrix} + C_6H_5-\overset{\overset{\displaystyle N}{|||}}{N}-NO_3$$

$$C_6H_5-\overset{\overset{\displaystyle N}{|||}}{N}-NO_3 + HCl \longrightarrow C_6H_5Cl + HNO_3 + N_2$$

$$C_6H_5-\overset{\overset{\displaystyle N}{|||}}{N}-NO_3 + HOH \longrightarrow C_6H_5OH + HNO_3 + N_2$$

$$2C_6H_5-\overset{\overset{\displaystyle N}{|||}}{N}-NO_3 \longrightarrow 2C_6H_5NO_2 + 2N_2 + O_2$$

$$\left(C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup(1)N_2C_6H_5\\ \diagdown(2)OC_2H_5\end{matrix}\right).2HNO_3 \longrightarrow C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup(1)N_2-(1)C_6H_4(4)NO_2\\ \diagdown(2)OH\end{matrix} + C_2H_5OH + HNO_3$$

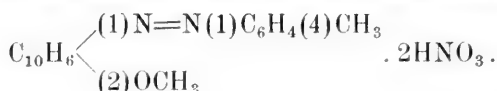
$$C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup(1)NO_2\\ \diagdown(2)OC_2H_5\end{matrix} + HOH \longrightarrow C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup(1)NO_2\\ \diagdown(2)OH\end{matrix} + C_2H_5OH\,.$$

Azione dell'acido bromidrico al 46 % ($D = 1,49$). — Se si tratta del nitrato dell'etere etilico dell'1-fenilazo-2naftol con circa venti volte il suo peso di soluzione di acido bromidrico al 48 % nelle stesse condizioni descritte precedentemente a pro-

posito dell'azione dell'acido cloridrico, avviene una reazione analoga e si riesce collo stesso procedimento seguito prima a isolare del monobromobenzolo C_6H_5Br bollente a 155-156°. Anche in questo caso si notano piccole quantità di fenolo e di nitrobenzolo e si forma dell'1-p-nitrofenilazo-2-naftol, che cristallizzato dal toluene fuse a 251°.

Che il monobromobenzolo, il nitrobenzolo e il fenolo siano prodotti provenienti dal nitrato di diazonio originatosi in un primo tempo per diazoscissione del nitrato dell'etere etilico dell'1-fenilazo-2-naftol è dimostrato dalla formazione dell'etere etilico dell'1-nitro-2-naftol $C_{10}H_6\langle^{(1)NO_2}_{(2)OC_2H_5}$. (P. F. 104-105°), che assieme al nitrato di fenil-diazonio è il prodotto normale della diazoscissione del nitrato studiato.

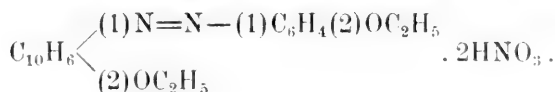
Azione dell'acido iodidrico. — Scaldando a bagnomaria nell'acqua bollente del nitrato con soluzione al 40 % di acido solforico satura di ioduro potassico si svolge azoto e si ottiene con buon rendimento del monoiodobenzolo, che bolle dopo distillazione con vapor d'acqua e rettificazione a 188°. Anche in questo caso si formano i prodotti secondari isolati nei casi precedenti.

Nitrato dell'etere metilico dell'1-p-tolilazo-2naftol

$$C_{10}H_6\langle^{(1)N=N(1)C_6H_4(4)CH_3}_{(2)OCH_3} . 2HNO_3 .$$

Scaldando all'ebollizione del nitrato dell'etere metilico di questo ossiazocomposto con circa venti volte il suo peso di acido cloridrico si ha sviluppo di azoto ed assieme un po' di p-cresolo $C_6H_4\langle^{(1)OH}_{(4)CH_3}$, si forma in quantità preponderante del p-clorotoluene $C_6H_4\langle^{Cl(1)}_{CH_3(4)}$, che venne ottenuto distillando con vapor d'acqua il liquido della reazione reso alcalino con soluzione di idrato potassico: l'olio ottenuto venne sottoposto a distillazione, e la frazione bollente a 162-163° si potè solidificare in miscuglio frigorifero. Anche il punto di fusione dei cristalli verso + 7° confermò trattarsi di p-clorotoluene.

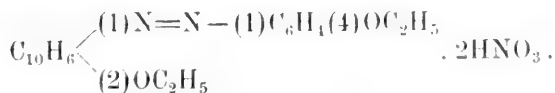
Colla soluzione al 48 % di acido bromidrico si ottenne nelle stesse condizioni il p-bromotoluene, $C_6H_4\langle^{(1)Br}_{(4)CH_3}$, fusibile a 28° e bollente a 183-184°.

Nitrato dell'etere etilico dell'1-ofenetilazo-2naftol

$$C_{10}H_6\langle^{(1)N=N-(1)C_6H_4(2)OC_2H_5}_{(2)OC_2H_5} . 2HNO_3 .$$

Per ebollizione con circa venti volte il suo peso di soluzione di acido cloridrico fumante questo nitrato reagisce facilmente svolgendo azoto e dando, assieme all'etere etilico dell'1-nitro-2naftol $C_{10}H_6\langle^{(1)NO_2}_{(2)OC_2H_5}$, fusibile a 104-105°, che venne isolato e caratterizzato nel modo sopra indicato (a proposito dell'azione dell'acido cloridrico sul nitrato dell'etere etilico dell'1-fenilazo-2naftol), o-clorofenetol $C_6H_4\langle^{(1)Cl}_{(2)OC_2H_5}$ che venne ottenuto distillando il liquido della reazione reso alcalino con idrato potassico: ridistillato bolliva a 208° secondo i dati di Beilsten e Kurbatow [1].

Il liquido alcalino, privato dell'o-clorofenetol, acidificato con acido solforico e ridistillato in corrente di vapore forniva dell'etere monoetilico della pirocatechima $C_6H_4\langle^{OH(1)}_{OC_2H_5(2)}$, bollente tra 214-216° e facilmente solidificabile in ghiaccio fondente. Il residuo della distillazione conteneva anche un po' di 1-o-fenetilazo-2naftol.

Nitrato dell'etere etilico dell'1-p-fenetilazo-2naftol

$$C_{10}H_6\langle^{(1)N=N-(1)C_6H_4(4)OC_2H_5}_{(2)OC_2H_5} . 2HNO_3 .$$

Gr. 25 di nitrato vennero trattati con circa 500 gr. di acido cloridrico (D = 1,19) e riscaldati all'ebollizione. La reazione accompagnata da sviluppo di azoto si compie rapidamente:

[1] A. *176*, 39 (1875).

dopo mezz'ora di riscaldamento si neutralizza con soluzione di idrato sodico buona parte dell'acido cloridrico e la soluzione leggermente acida si distilla in corrente di vapor d'acqua. Passa un olio che non solidifica per raffreddamento e che è costituito da una miscela di p-clorofenetol $C_6H_4<\begin{matrix}OC_2H_5(1)\\Cl(4)\end{matrix}$ e di monoetiletere dell'idrochinone $C_6H_4<\begin{matrix}OC_2H_5(1)\\OH(4)\end{matrix}$, contenente traccie di 1-nitro-2naftol.

Per separare e caratterizzare tali sostanze si tratta con idrossido di potassio sino a reazione marcatamente alcalina il primo distillato e si distilla nuovamente con vapore che trasporta in soluzione alcalina soltanto il p-clorofenetol, che raffreddato a 0° si rapprende in cristalli fusibili a 20-21°: tale dato, come il punto di ebollizione 211-212°, concorda perfettamente coi numeri dati dai chimici che descrissero tale sostanza [1].

La soluzione alcalina viene acidificata con acido solforico e distillata nuovamente in corrente di vapore: passa dell'etere monoetilico dell'idrochinone, che cristallizzato dall'acqua è costituito da pagliette bianche fusibili a 66°, secondo i dati di Hantzsch (" Journ. für prakt. Chem. „ [2], *22*, 463 [1880]).

Il residuo della prima distillazione con vapore contiene oltre a piccole quantità di 1-p-fenetilazo-2naftol formatosi dall'etere per idrolisi, e a poche resine, dell'etere etilico dell'1-nitro-2naftol $C_{10}H_6<\begin{matrix}(1)NO_2\\(2)OC_2H_5\end{matrix}$, fusibile a 104-105°.

Torino, Istituto Chimico della R. Università, Marzo 1916.

[1] Beilstein e Kurbatow, A. *176*, 31 (1875); Peratoner e Ortoleva, G. *28*, I, 226 (1898).

Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà [1].

Nota II di ALESSANDRO TERRACINI

Determinazione delle V_4 rappresentanti non più di sei equazioni di Laplace linearmente indipendenti, i cui S_4 tangenti ricoprono una varietà di dimensione < 8.

1. — Come è stato detto nella introduzione della Nota I, il problema della determinazione delle V_k rappresentanti meno di $\frac{k(k-1)}{2}+l$ equazioni di Lap. lin. ind. e tuttavia tali che la varietà ricoperta dai loro S_k tangenti abbia dimensione $2k-l\,(0<l<k-1)$ è già stato risolto per $k<4$ (del resto questa soluzione è contenuta, come caso particolare, nei nn[i] 3-5 di questa Nota).

Ci proponiamo ora di risolvere questo problema per $k=4$, osservando che potremo limitarci a supporre $l=1$, poichè nel solo altro caso che è attualmente possibile, cioè per $l=2$, la soluzione è fornita dalle V_4 formate dagli ∞^2 piani che da una retta proiettano i singoli punti di una superficie non rappresentante nessuna equazione di Laplace (nn[i] 4 e 9 della Nota I).

Ora, se ci riportiamo all'enunciato che chiude il n° 3 della Nota I, dovremo cominciare col prendere in considerazione i vari tipi possibili di sistemi lineari ∞^3, ∞^4, ∞^5 di forme qua-

[1] Questa Nota fa seguito alla Nota I apparsa collo stesso titolo, in questi Atti (vol. XLIX, pp. 214-247, adunanza del 14 dicembre 1913). Il Cap. II di questa Nota II, a cui accennavo nella Nota I, p. 217, sarà invece pubblicato in seguito come Nota III.

dratiche quaternarie, la cui matrice jacobiana è identicamente nulla: i quali tipi si rappresentano geometricamente in uno S_3 in uno dei seguenti modi [2]:

a_1) sistema ∞^5 di coni quadrici col vertice in comune; a_2) sistema lineare ∞^4; a_3) sistema lineare ∞^3 in esso contenuti;

b) sistema ∞^3 formato dalle quadriche che passano per due rette sghembe;

c) sistema ∞^3 di quadriche (che si possono supporre non tutte coni) contenente un sistema ∞^2 formato dalle coppie di piani per una retta r. Questo caso dà luogo a tre sottocasi, che indicheremo rispettivamente con c_1), c_2), c_3), secondochè una quadrica generica del sistema ha due punti distinti in comune colla retta r, o uno solo, o la contiene per intero.

2. — Nei casi a_1) e a_2) il teorema del n° 7 della Nota I ci permette di conchiudere che la V_4 è rispettivamente un cono proiettante da un punto una V_3 generica, o una V_3 rappresentante un'equazione di Laplace. Per quello che riguarda il caso a_3), proponiamoci più in generale il problema di determinare tutte le V_k ($k \geq 4$) che rappresentano un sistema Σ di d eq. di Laplace lin. ind., in cui sia contenuto un sistema Σ' di k equazioni lin. ind. le cui forme associate ammettano uno stesso fattore lineare, essendo $d = 6$, per $k = 4$, e $2k - 2 \leq d \leq 3k - 7$, per $k > 4$.

L'esistenza del sistema parziale Σ', pur prescindendo dalla dimensione del sistema totale di equazioni di Laplace rappresentate dalle V_k, è già sufficiente ad accertarci che la V_k è sviluppabile (∞^{k-1} di rette con S_k tangente fisso lungo ogni retta). Basta, per convincersene, riprendere per un momento le notazioni del n° 5 della Nota I; allora la V_k verificherà, tra altre le equazioni (3) che ivi compaiono, e dall'esame di quelle equazioni si rileva che la V_k ha meno di $\infty^k S_k$ tangenti, ed è perciò

[2] Cfr. la Dissertazione di O. Toeplitz, *Ueber Systeme von Formen deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet*, Breslau, 1905; e Bonferroni, *Sui sistemi lineari di quadriche la cui jacobiana ha dimensione irregolare*, in questi Atti, vol. L (1915), pp. 423-438.

sviluppabile (cfr. il ragionamento fatto, per $k = 3$, nella nota [12]) della mia Memoria citata in Nota I [4] b)).

Se riferiamo ora la V_k sviluppabile a un opportuno sistema di parametri $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, il sistema Σ' assumerà la forma:

$$(1) \quad \begin{cases} x^{(ik)} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}\, x^{(r)} + a_i\, x & (i = 1, 2, \ldots, k-1) \\ x^{(kk)} = 0 \end{cases}$$

cosicchè la V_k verificherà altresì le equazioni:

$$(2) \quad \sum_{r=1}^{k-1} (a_{ir}\, x^{(jr)} - a_{jr}\, x^{(ir)}) \sim 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k-1;\ i \neq j)$$

che si deducono dalle (1) uguagliando i risultati che si ottengono formando in due modi diversi le derivate terze $x^{(ijk)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k-1;\ i \neq j)$, e tenendo conto delle stesse (1), dove, come nella Nota I, il segno $\sim$ sta ad indicare che il primo membro di questa relazione differisce da zero per una espressione lineare omogenea nella x e nelle sue derivate prime. Le forme:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \theta_i & \theta_j \\ \sum_{r=1}^{k-1} a_{ir}\, \theta_r & \sum_{r=1}^{k-1} a_{jr}\, \theta_r \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k-1;\ i \neq j)$$

associate alle (2) devono stare, per ipotesi, entro un sistema lineare di dimensione $\leq 3k - 8$ (≤ 5 per $k = 4$) insieme colle forme associate alle (1), cioè insieme colla totalità delle forme contenenti il fattore θ_k; e quindi le (3), che non dipendono da θ_k, devono stare in un sistema lineare di dimensione $\leq 2k - 8$ (≤ 1 per $k = 4$). Ora, se s'interpretano $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k-1}$ come coordinate proiettive omogenee in uno S_{k-2}, e se l'omografia dello S_{k-2} in sè definita dalle:

$$\theta_i' = \sum_{r=1}^{k-1} a_{ir}\, \theta_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

non è degenere, segue [3] che questa omografia è identica, oppure omologica; in entrambi i casi si potrà porre:

$$(4)\quad \begin{aligned} a_{ij} &= u_i v_j && (i, j = 1, 2, \ldots, k-1;\ i \neq j); \\ a_{ii} &= u_i v_i + c && (i = 1, 2, \ldots, k-1). \end{aligned}$$

Se invece quella omografia è degenere, consideriamo, invece di essa, quella definita dalle:

$$(5)\quad \theta_i' = \sum_{r=1}^{k-1} a_{ir}\,\theta_r + \alpha\theta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

dove α è una quantità qualunque, soggetta alla sola condizione che l'omografia considerata non degeneri [4]; le forme quadratiche:

$$\left| \begin{matrix} \theta_i & \theta_j \\ \sum_{r=1}^{k-1} a_{ir}\,\theta_r + \alpha\theta_i & \sum_{r=1}^{k-1} a_{jr}\,\theta_r + \alpha\theta_j \end{matrix} \right| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k-1;\ i \neq j),$$

che coincidono ovviamente colle corrispondenti (3), staranno ancora in un sistema di dimensione $2k-8$ (≤ 1 per $k=4$), e possiamo perciò applicare il risultato prima ricordato alla nuova omografia: sarà pertanto:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= u_i v_j && (i, j = 1, 2, \ldots, k-1;\ i \neq j); \\ a_{ii} &= u_i v_i + c - \alpha && (i = 1, 2, \ldots, k-1); \end{aligned}$$

ossia, mutando $c - \alpha$ in c, sussistono ancora le (4). In ogni caso dunque, posto:

$$(6)\quad \sum_{r=1}^{k-1} v_r\, x^{(r)} = Vx$$

il sistema (1) assume la forma:

$$(1')\quad \begin{cases} x^{(ik)} = u_i Vx + c\,x^{(i)} + a_{ik}\,x^{(k)} + a_i\,x & (i = 1, 2, \ldots, k-1), \\ x^{(kk)} = 0. \end{cases}$$

---

[3] Cfr. la mia Nota: *Su una questione che si presenta nello studio delle omografie tra spazii sovrapposti*, " Giornale di Matematiche ", vol. LIII (1915), pp. 178-185: v. p. 179.

[4] Una tale quantità esiste certo, poichè il determinante della sostituzione (5) non è identicamente nullo rispetto ad α.

Facciamo ancora, prima di procedere, le seguenti osservazioni:

a) Se sono nulle tutte le u, o tutte le v, la V_k è un cono. Infatti in tal caso il sistema (1') assume la forma:

$$(1'')\quad \begin{cases} x^{(ik)} = c\,x^{(i)} + a_{ik}\,x^{(k)} + a_i\,x & (i = 1, 2, ..., k-1), \\ x^{(kk)} = 0. \end{cases}$$

Ora, se $k \geq 3$, una V_k che rappresenti un sistema di equazioni di Laplace, di dimensione qualunque, contenente il sistema (1'') è un cono, come si scorge dividendo anzitutto le x per una stessa soluzione del sistema (1'') e introducendo poi, come nuovi parametri $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$, altrettante soluzioni indipendenti del sistema trasformato, scelte solo in modo che nessuna delle loro derivate prime rispetto a τ_k sia identicamente nulla, cosicchè il sistema (1'') diviene:

$$\sum_{r=1}^{k} \sigma_r^{(k)} \frac{\partial^2 x}{\partial\sigma_r\,\partial\sigma_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., k).$$

E poichè, come risulta da un facile calcolo:

$$\begin{vmatrix} \sigma_m^{(1)} & \sigma_m^{(2)} & ..... & \sigma_m^{(k)} \\ \sigma_n^{(1)} & \sigma_n^{(2)} & ..... & \sigma_n^{(k)} \\ \left(\dfrac{\sigma_m^{(k)}}{\sigma_n^{(k)}}\right)^{(1)} & \left(\dfrac{\sigma_m^{(k)}}{\sigma_n^{(k)}}\right)^{(2)} & ..... & \left(\dfrac{\sigma_m^{(k)}}{\sigma_n^{(k)}}\right)^{(k)} \end{vmatrix} = 0 \quad (m, n = 1, 2, ..., k;\ m \neq n),$$

segue che $\dfrac{\sigma_m^{(k)}}{\sigma_n^{(k)}}$ $(m, n = 1, 2, ..., k)$ è funzione delle sole σ_m, σ_n, e quindi anche (cfr. il n° 5 della Nota I) che la V_k è un cono ([5]).

([5]) Si giunge allo stesso risultato anche col seguente procedimento, dovuto in sostanza al BOMPIANI (*Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*, in questi Atti, vol. XLIX (1913-14), pp. 83-131: v. il n° 10). Si faccia il cambiamento di variabili

$$\sigma_i = \varphi_i(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{k-1}) \ (i = 1, 2, ... k-2); \ \sigma_{k-1} = \tau_{k-1}; \ \sigma_k = \tau_k;$$

dove le φ sono funzioni soggette alla sola limitazione $\dfrac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, ... \varphi_{k-2})}{\partial(\sigma_1, \sigma_2, ... \sigma_{k-2})} \neq 0$; allora il sistema (1'') trasformato mostra che $\dfrac{\partial^2 x}{\partial\sigma_{k-1}\,\partial\sigma_k}$ si esprime linearmente per mezzo di $\dfrac{\partial x}{\partial\sigma_{k-1}}$, $\dfrac{\partial x}{\partial\sigma_k}$, x, mentre $\dfrac{\partial^2 x}{\partial\sigma_k^2} = 0$: la rigata $\sigma_1 = \text{cost.}$, $\sigma_2 = \text{cost.}, ..., \sigma_{k-2} = \text{cost.}$, ossia una generica ∞^1 di rette della V_k è sviluppabile, e perciò la V_k è un cono.

Ora le V_k coni che soddisfanno alle condizioni enunciate sono ovviamente coni proiettanti da un punto una V_{k-1} rappresentante $d-k$ equazioni di Lap. lin. ind.; escluse queste varietà dalle nostre ulteriori considerazioni, possiamo supporre non tutte nulle nè le u, nè le v.

b) I rapporti tra le u e i rapporti tra le v non dipendono da τ_k. Infatti, derivando rispetto a τ_k i due membri delle prime $k-1$ fra le (1'), si ricava, con facili riduzioni:

$$(c^2 + c^{(k)})\, x^{(i)} + \sum_{r=1}^{k-1} (2 c u_i v_r + u_i^{(k)} v_r + u_i v_r^{(k)} + u_i v_r \sum_{s=1}^{k-1} u_s v_s)\, x^{(r)} + \\ + (\ldots)\, x^{(k)} + (\ldots)\, x = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

dove i coefficienti di $x^{(k)}$ e di x sono delle funzioni delle τ, la cui forma effettiva non c'interessa: quindi, poichè la V_k non può rappresentare delle equazioni del primo ordine, si ha:

$$(7) \qquad u_i (2 c v_r + v_r^{(k)} + v_r \sum_{s=1}^{k-1} u_s v_s) + u_i^{(k)} v_r = 0 \\ (i, r = 1, 2, \ldots, k-1 ; i \neq r).$$

$$(8) \qquad c^2 + c^{(k)} + u_i (2 c v_i + v_i^{(k)} + v_i \sum_{s=1}^{k-1} u_s v_s) + u_i^{(k)} v_i = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Perciò, se i, j sono due indici $\leq k-1$, tali che esista un indice r pure $\leq k-1$, diverso da essi, con $v_r \neq 0$, dalle (7) segue:

$$\begin{vmatrix} u_i & u_j \\ u_i^{(k)} & u_j^{(k)} \end{vmatrix} = 0,$$

cosicchè, se vi sono almeno tre v non nulle, sarà identicamente:

$$(9) \qquad \begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots\ldots & u_{k-1} \\ u_1^{(k)} & u_2^{(k)} & \ldots\ldots & u_{k-1}^{(k)} \end{Vmatrix} = 0,$$

e perciò i rapporti tra le u non dipendono da τ_k. Se no, vi è almeno una v non identicamente nulla, sia, p. es., v_1, e almeno una nulla, sia, p. es., v_2: la (8), scritta per $i=2$, mostra che $c^2 + c^{(k)} = 0$; e quindi, scritta ora per $i=1$, e paragonata colle (7) in cui si faccia $r=1$, permette ancora di concludere la (9). Analogamente si prova che i rapporti tra le v non dipendono da τ_k.

Ciò posto, confrontando le due espressioni che dalle (1′) si ricavano per $x^{(ijk)}$ $(i, j = 1, 2, ..., k-1 ; i \neq j)$, si ricava:

$$u_i (Vx)^{(j)} - u_j (Vx)^{(i)} + (u_i^{(j)} - u_j^{(i)} + a_{ik} u_j - a_{jk} u_i) Vx +$$
$$+ (c^{(j)} - a_{jk} c - a_j) x^{(i)} - (c^{(i)} - a_{ik} c - a_i) x^{(j)} + (...) x^{(k)} + (...) x = 0$$
$$(i, j = 1, 2, ..., k-1 ; i \neq j).$$

Si moltiplichi il primo membro di quest'equazione per u_l $(l = 1, 2, ..., k-1 ; l \neq i, l \neq j)$, poi si permutino circolarmente gli indici i, j, l, e si sommi: si ottiene che le soluzioni del sistema (1′) soddisfanno alla:

$$\Delta_{ijl} Vx + \begin{vmatrix} x^{(i)} & x^{(j)} & x^{(l)} \\ c^{(i)} - a_{ik} c - a_i & c^{(j)} - a_{jk} c - a_j & c^{(l)} - a_{lk} c - a_l \\ u_i & u_j & u_l \end{vmatrix} + (...) x^{(k)} + (...) x = 0,$$
$$(i, j, l = 1, 2, ..., k-1 ; i \neq j \neq l),$$

dove si è posto per brevità:

$$(10) \qquad \Delta_{ijl} = u_i (u_j^{(l)} - u_l^{(j)}) + u_j (u_l^{(i)} - u_i^{(l)}) + u_l (u_i^{(j)} - u_j^{(i)})$$
$$(i, j, l = 1, 2, ..., k-1 ; i \neq j \neq l).$$

Ora, poichè nella relazione ottenuta non compaiono più derivate del second'ordine delle x, applicando ancora l'osservazione che la V_k non può verificare equazioni del 1° ordine, si conclude che quella relazione deve essere identicamente soddisfatta. Sarà pertanto:

$$(11) \qquad \Delta_{ijl} v_i + (c^{(j)} - a_{jk} c - a_j) u_l - (c^{(l)} - a_{lk} c - a_l) u_j = 0$$
$$(i, j, l = 1, 2, ..., k-1 ; i \neq j \neq l),$$

$$(12) \qquad \Delta_{ijl} v_m = 0 \qquad (i, j, l, m = 1, 2, ..., k-1 ; i \neq j \neq l \neq m).$$

Tratteremo distintamente nei nn[i] 3-4 i due casi in cui le quantità Δ definite dalle (10) sono tutte nulle, oppure no: nel primo caso, come è noto, si potrà porre:

$$(13) \qquad u_i = \rho f^{(i)} \qquad (i = 1, 2, ..., k-1),$$

ρ e f essendo funzioni rispettivamente di $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}, \tau_k$ e di $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}$.

In quanto al secondo caso, osserviamo subito che esso non si può presentare per $k > 4$: in tale ipotesi infatti, se p. es. v_{k-1} non è identicamente nulla, segue dalla (12):

$$\Delta_{ijl} = 0 \ (i, j, l = 1, 2, \dots, k-2):$$

e quindi dalla (11):

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & \dots\dots & u_{k-2} \\ c^{(1)} - a_{1k} c - a_1 & c^{(2)} - a_{2k} c - a_2 & \dots\dots & c^{(k-2)} - a_{k-2,k} c - a_{k-2} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Perciò, facendo nella (11) $i = k-1$, risulta:

$$\Delta_{k-1,j,l} = 0 \qquad (j, l = 1, 2, \dots, k-2);$$

cioè per $k > 4$ le Δ sono certamente tutte nulle.

3. — Supposte nulle tutte le Δ, abbiamo già osservato che sussistono le (13): facciamo ora, nell'ipotesi che, p. es. u_{k-1} non sia identicamente nullo, il che non diminuisce la generalità, il cambiamento di parametri (il cui determinante jacobiano risulta non identicamente nullo):

$$\sigma_i = \tau_i \quad (i = 1, 2, \dots, k-2, k), \qquad \sigma_{k-1} = f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}),$$

dove f è la funzione che compare nella (13). Le (1') divengono:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 x}{\partial\sigma_i \partial\sigma_k} + f^{(i)} \frac{\partial^2 x}{\partial\sigma_{k-1} \partial\sigma_k} = \rho f^{(i)} \sum_{r=1}^{k-2} v_r \frac{\partial x}{\partial\sigma_r} + \rho f^{(i)} Vf \frac{\partial x}{\partial\sigma_{k-1}} + \\ & \qquad + c \frac{\partial x}{\partial\sigma_i} + c f^{(i)} \frac{\partial x}{\partial\sigma_{k-1}} + a_{ik} \frac{\partial x}{\partial\sigma_k} + a_i x \quad (i = 1, 2, \dots, k-2), \\ & \frac{\partial^2 x}{\partial\sigma_{k-1} \partial\sigma_k} + f^{(k-1)} = \rho f^{(k-1)} \sum_{r=1}^{k-2} v_r \frac{\partial x}{\partial\sigma_r} + \rho f^{(k-1)} Vf \frac{\partial x}{\partial\sigma_{k-1}} + \\ & \qquad + c f^{(k-1)} \frac{\partial x}{\partial\sigma_{k-1}} + a_{k-1,k} \frac{\partial x}{\partial\sigma_k} + a_{k-1} x, \\ & \frac{\partial^2 x}{\partial\sigma_k^2} = 0, \end{aligned} \right.$$

da cui segue:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 x}{\partial \sigma_i \partial \sigma_k} = c \frac{\partial x}{\partial \sigma_i} + (...) \frac{\partial x}{\partial \sigma_k} + (...) x & (i = 1, 2, ..., k-2), \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \sigma_k^2} = 0. \end{array}\right.$$

Quindi, poichè in queste ultime equazioni non compaiono più derivate fatte rispetto a σ_{k-1}, ciascuna delle varietà di $k-1$ dimensioni rappresentata sulla V_k dall'equazione $\sigma_{k-1} =$ costante verifica quelle $k-1$ equazioni di Laplace, e la forma di tali equazioni (cfr. l'osservazione a) del n° 2) è sufficiente ad assicurarci che le $\tau_{k-1} =$ cost. sono coni. La V_k è dunque una ∞^1 di coni col vertice variabile, se, come abbiamo supposto, la V_k non è essa stessa un cono: la V_k sviluppabile ha perciò una curva direttrice.

Viceversa ogni V_k sviluppabile, con curva direttrice, verifica un sistema di almeno $2k-2$, e, naturalmente se è immersa in uno spazio abbastanza ampio, in generale proprio di $2k-2$ eq. di Lap. lin. ind., k delle quali sono riducibili alla forma (1'). Infatti, o la V_k contiene, oltre alla curva, una V_{k-2} direttrice, e questo caso fu già considerato nella nota ([21]) della Nota I, dove le prime k equazioni costituiscono precisamente un sistema della forma (1') (in cui sono scambiati τ_1 e τ_k, τ_2 e τ_{k-1}); oppure le generatrici della V_k sviluppabile sono tangenti a una V_{k-1}. In tal caso, assunto sulla V_{k-1} un sistema di parametri $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{k-1}$, tale che i punti della curva direttrice dipendano solo da τ_{k-1}, e che le linee della V_{k-1} su cui varia solo τ_{k-1} risultino inviluppate dalle tangenti che si appoggiano alla curva direttrice, i punti y della V_{k-1} si possono rappresentare parametricamente mediante le:

$$(14) \quad y = a(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{k-2}) + \int \varphi(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{k-2}, \tau_{k-1})\, b(\tau_{k-1})\, d\tau_{k-1}$$

dove la funzione $\varphi(\tau)$ è la stessa per tutte le coordinate del punto y. Quindi il punto generico x della V_k si può assumere sotto la forma:

$$x = a(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{k-2}) + \int \varphi(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{k-1})\, b(\tau_{k-1})\, d\tau_{k-1} + \\ + \tau_k \varphi(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{k-1})\, b(\tau_{k-1}),$$

e la V_k verifica il sistema della forma (1'):

$$\begin{cases} x^{(ik)} = \dfrac{\varphi^{(i)}}{\varphi} x^{(k)} & (i = 1, 2, \dots, k-2), \\ x^{(k-1,k)} = \dfrac{x^{(k-1)}}{\tau_k} - \dfrac{1}{\tau_k} x^{(k)}, \\ x^{(k,k)} = 0 \end{cases}$$

da cui discende $x^{(i,k-1)} \sim 0$ $(i = 1, 2, \dots k-2)$. Nè, in generale, la V_k rappresenta equazioni di Laplace che non siano combinazioni lineari di queste, come si scorge formando le ulteriori derivate seconde di x.

4. — Se invece non tutte le Δ sono nulle, cosicchè sarà certo $k = 4$, con $\Delta_{123} \neq 0$, sommando le tre equazioni che si ottengono scrivendo la (11) per $i = 1, j = 2, l = 3$, e permutando circolarmente, moltiplicate rispettivamente per u_1, u_2, u_3, si ottiene:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0. \tag{15}$$

Ora, poichè i rapporti tra le v non dipendono da τ_4 (oss. b) del n° 2), esistono delle coppie di funzioni tra loro indipendenti, delle sole τ_1, τ_2, τ_3, e sia σ_1, σ_2 una di esse, tali che $V\sigma_1 = V\sigma_2 = 0$. Eseguita allora la trasformazione di parametri:

$$\sigma_1 = \sigma_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \qquad \sigma_2 = \sigma_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \qquad \sigma_3 = \tau_3, \qquad \sigma_4 = \tau_4,$$

(il cui determinante jacobiano non è certo identicamente nullo, almeno per una conveniente permutazione degli indici 1, 2, 3), il sistema (1') prende la forma:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{3} \sigma_r^{(i)} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial\sigma_r \, \partial\sigma_4} - c \frac{\partial x}{\partial\sigma_r} \right) = u_i \sum_{r=1}^{3} V\sigma_r \frac{\partial x}{\partial\sigma_r} + a_{i4} \frac{\partial x}{\partial\sigma_4} + a_4 x = \\ \qquad\qquad = u_i v_3 \dfrac{\partial x}{\partial\sigma_3} + a_{i4} \dfrac{\partial x}{\partial\sigma_4} + a_4 x \qquad (i = 1, 2, 3), \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial\sigma_4^2} = 0. \end{cases}$$

Dalle prime tre equazioni si ricavano per $\dfrac{\partial^2 x}{\partial\sigma_i \, \partial\sigma_4} - c \dfrac{\partial x}{\partial\sigma_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ delle espressioni lineari omogenee in $\dfrac{\partial x}{\partial\sigma_3}$, $\dfrac{\partial x}{\partial\sigma_4}$, x,

cosicchè:

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial\sigma_i\,\partial\sigma_4} = c\,\frac{\partial x}{\partial\sigma_i} + \bar{u}_i\,\frac{\partial x}{\partial\sigma_3} + \bar{a}_{i4}\,\frac{\partial x}{\partial\sigma_4} + \bar{a}_i\,x \qquad (i=1,2,3).$$

Precisamente per $i=3$, quest'equazione è:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^{(1)} & \sigma_2^{(1)} \\ \sigma_1^{(2)} & \sigma_2^{(2)} \end{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial\sigma_3\,\partial\sigma_4} - c\,\frac{\partial x}{\partial\sigma_3}\right) = \begin{vmatrix} \sigma_1^{(1)} & \sigma_2^{(1)} & u_1 v_3\,\frac{\partial x}{\partial\sigma_3} + a_{14}\,\frac{\partial x}{\partial\sigma_4} + a_1 x \\ \sigma_1^{(2)} & \sigma_2^{(2)} & u_2 v_3\,\frac{\partial x}{\partial\sigma_3} + a_{24}\,\frac{\partial x}{\partial\sigma_4} + a_2 x \\ \sigma_1^{(3)} & \sigma_2^{(3)} & u_3 v_3\,\frac{\partial x}{\partial\sigma_3} + a_{34}\,\frac{\partial x}{\partial\sigma_4} + a_3 x \end{vmatrix},$$

quindi il coefficiente $\bar{u}_3$ di $\frac{\partial x}{\partial\sigma_3}$ nella (16) contiene come fattore il determinante:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^{(1)} & \sigma_2^{(1)} & u_1 \\ \sigma_1^{(2)} & \sigma_2^{(2)} & u_2 \\ \sigma_1^{(3)} & \sigma_2^{(3)} & u_3 \end{vmatrix},$$

che è identicamente nullo, in virtù della (15) confrontata colle $V\sigma_1 = V\sigma_2 = 0$. Supposto dunque di aver scelto il primitivo sistema di parametri τ coincidente con quello poi introdotto, possiamo supporre il sistema (1′) della forma:

$$\begin{cases} x^{(14)} = c\,x^{(1)} + u_1\,x^{(3)} + a_{14}\,x^{(4)} + a_1\,x\,, \\ x^{(24)} = c\,x^{(2)} + u_2\,x^{(3)} + a_{24}\,x^{(4)} + a_2\,x\,, \\ x^{(34)} = c\,x^{(3)} + a_{34}\,x^{(4)} + a_3\,x\,, \\ x^{(44)} = 0\,. \end{cases}$$

Formando, come già si è fatto sopra, in due modi diversi le due derivate terze $x^{(134)}$, $x^{(234)}$, si ricava $u_1\,x^{(33)} \sim 0$, $u_2\,x^{(33)} \sim 0$, ove una almeno tra le funzioni u_1, u_2 non è identicamente nulla, poichè tale è già attualmente u_3 (oss. a) del n° 2): e quindi $x^{(33)} \sim 0$. Questa equazione, nel cui secondo membro non compaiono le derivate prime $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ (si tenga presente la relazione $c^{(3)} - a_{34}\,c - a_3 = 0$, a cui si riduce ora la (11)), insieme alle due ultime fra le quattro sopra scritte, mostra che le su-

perficie $\tau_1 = \text{cost.}$, $\tau_2 = \text{cost.}$ rappresentano tre eq. di Lap. lin. ind. e sono pertanto piani: la V_4 è dunque una ∞^2 di piani. Di più, uno di questi piani corrispondente a certi valori fissati di τ_1, τ_2 è incontrato, in uno stesso punto, da un qualsiasi piano, infinitamente vicino, corrispondente a $\tau_1 + d\tau_1, \tau_2 + d\tau_2$: infatti quel piano, e quello infinitamente vicino considerato sono definiti rispettivamente dai punti:

$$x \quad , \quad x^{(3)} \quad , \quad x^{(4)}$$
$$x + x^{(1)} d\tau_1 + x^{(2)} d\tau_2 , \quad x^{(3)} + x^{(31)} d\tau_1 + x^{(32)} d\tau_2 , \quad x^{(4)} + x^{(41)} d\tau_1 + x^{(42)} d\tau_2 .$$

Il secondo piano contiene perciò il punto:

$$x^{(4)} + x^{(41)} d\tau_1 + x^{(42)} d\tau_2 - c\,(x + x^{(1)} d\tau_1 + x^{(2)} d\tau_2),$$

cioè il punto:

$$x^{(4)} - cx + x^{(3)} (u_1\, d\tau_1 + u_2\, d\tau_2) + x^{(4)} (a_{14}\, d\tau_1 + a_{24}\, d\tau_2) + \\ + x\,(a_1\, d\tau_1 + a_2\, d\tau_2),$$

che appartiene al piano di x, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, e tende col tendere a zero di $d\tau_1$, $d\tau_2$, al punto fisso $x^{(4)} - cx$. Tanto basta per conchiudere [6], poichè gli ∞^2 piani della V_4 che abbiamo supposto non essere un cono, non possono passare per un punto, che la V_4 è costituita dai piani tangenti di una superficie, o da ∞^2 piani tangenti a una stessa curva. E si verifica subito che le V_4 di tal tipo rappresentano sei eq. di Lap. lin. ind. tra cui quattro della forma (1'), e (se le V_4 sono immerse almeno in S_8) in generale [7] non altre se non le loro combinazioni lineari.

(6) Cfr. Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, " Rend. Circ. mat. di Palermo ", t. XXX (1910), pp. 87-121: v. il n° 32.

(7) Mantengo anche qui questa locuzione generica che ho adoperato in casi consimili per non addentrarmi in troppe ricerche di carattere minuto. Ma qui sarebbe facile precisare maggiormente: p. es., affinchè una V_4 costituita dai piani tangenti di una superficie rappresenti sei sole eq. di Lap. lin. ind. è necessario e sufficiente che la superficie rappresenti non più di una equazione lineare omogenea alle derivate parziali del terz'ordine (cosicchè, in particolare, non deve la superficie rappresentare nessuna equazione di Laplace).

Come risultato delle ricerche contenute nei nn[i] 2-4 troviamo dunque:

Le V_k $(k \geq 4)$ *che rappresentano un sistema di* d *eq. di Lap. lin. ind. in cui è contenuto un sistema di* k *eq. lin. ind. le cui forme associate ammettono uno stesso fattore lineare (cioè le* V_k $(k \geq 4)$ *sviluppabili che rappresentano un sistema di* d *eq. di Lap. lin. ind.), dove* $d = 6$ *per* $k = 4$, *e* $2k - 2 \leq d \leq 3k - 4$ *per* $k > 4$, *sono coni proiettanti da un punto una* V_{k-1} *rappresentante* $d - k$ *eq. di Lap. lin. ind., o sono sviluppabili con una curva direttrice, oppure anche sono, se* $k = 4$, *costituite dai piani tangenti di una superficie, o da* ∞^2 *piani tangenti a una curva* (8).

Per $k = 4$ le varietà enumerate in questo enunciato, in quanto stiano in S_r con $r \geq 8$ e siano varietà generiche entro ciascuno dei tipi indicati, forniscono tutte le V_4 che risolvono, nel caso a_3), il problema che è oggetto di questo capitolo.

5. — Poichè il caso *b*), tra quelli distinti nel n° 1, si trova già trattato come caso particolare nel n° 11 della Nota I, prendiamo a considerare i casi c_1), c_2).

Nel caso c_1) si tratta di determinare le V_4 che soddisfanno a tutte e sole le equazioni del sistema (9):

$$(17)\quad \begin{cases} A_l A_l x + \sum_r g_{llr}\, x^{(r)} + g_{ll}\, x = 0\,, & (l = 1, 2), \\ A_m A_l x + \sum_r g_{lmr}\, x^{(r)} + g_{lm}\, x = 0\,, & (l = 1, 2;\ m = 3, 4), \end{cases}$$

(8) Se ricordiamo (SEGRE, loco cit. (6), nn[i] 22 e 29), che le generatrici di una V_k sviluppabile toccano in generale $k - 1$ V_{k-1}, ciascuna delle quali può essere sostituita da una varietà di minor dimensione, incontrata dalle generatrici, vediamo che il risultato del testo, insieme con quello (Nota I, n° 7) che le V_k $(k \geq 3)$ sviluppabili rappresentanti $d \leq 2k - 3$ eq. di Lap. lin. ind. sono coni, mette precisamente in relazione la dimensione del sistema di eq. di Lap. rappresentate da una V_k sviluppabile, almeno quando questa dimensione è sufficientemente bassa, colla minima dimensione delle direttrici esistenti sulla V_k. Sarebbe interessante indagare se, e come, tale relazione continui a sussistere quando la dimensione del sistema di eq. di Lap. rappresentata dalla sviluppabile cresce oltre il limite che noi abbiamo considerato.

(9) D'ora in poi s'intenderà che gli indici variabili, senza ulteriori indicazioni, dei segni di sommatoria prendano i valori da 1 a 4.

dove le A sono simboli di operatori differenziali:

$$A_l = \sum_r a_{lr} \frac{\partial}{\partial \tau_r} \qquad (l = 1, 2, 3, 4).$$

simboli che adopreremo, collo stesso significato, anche nel seguito di questo lavoro. Avvertiamo una volta per tutte che tali operatori differenziali si intenderanno sempre tra loro linearmente indipendenti. Porremo poi:

$$\varphi_{lms} = \sum_l (a_{ml} a_{ls}^{(l)} - a_{ll} a_{ms}^{(l)}) \qquad (l, m, s = 1, 2, 3, 4 ; l \neq m),$$

e inoltre:

$$\sum_r a_{lr} \theta_r = \alpha_l , \qquad \sum_r g_{lmr} \theta_r = \gamma_{lm} , \qquad \sum_r \varphi_{lmr} \theta_r = \varphi_{lm} , \text{ ecc.}$$

Osserviamo ancora (e una tale osservazione applicheremo anche in seguito in casi analoghi) che le ultime quattro equazioni (17) si possono anche scrivere sotto la forma:

$$A_m A_l x + \sum_r g_{lmr} x^{(r)} + g_{lm} x = 0 \qquad (l = 3, 4 ; m = 1, 2).$$

Da queste ultime equazioni possiamo dedurre, procedendo come al n° 10 della Nota I (v. la formola (10) di quel n°), le ulteriori equazioni di Laplace:

$$(18) \qquad \sum_{r,s} (a_{lr} \varphi_{12s} + g_{l1r} a_{2s} - g_{l2r} a_{1s}) x^{(rs)} \sim 0 \qquad (l = 3, 4).$$

Ora, poichè le quadriche associate alle (18) devono contenere la retta $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, comune alle quadriche associate a tutte le (17), e questa retta, in virtù dell'indipendenza degli operatori A, non sta nei piani $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$, dovrà essere:

$$(19) \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \varphi_{121} & \varphi_{122} & \varphi_{123} & \varphi_{124} \end{Vmatrix} = 0,$$

cioè il sistema lineare omogeneo del prim'ordine nella funzione incognita F: $A_1 F = A_2 F = 0$ è completo. Allora, se assumiamo come nuovi parametri σ_1, σ_2 due soluzioni indipendenti di questo

sistema (il che è lecito salvo, eventualmente, una permutazione d'indici) e ripristiniamo le primitive notazioni, il sistema (17) dà luogo a un sistema ottenuto ponendo ~ 0 sei combinazioni linearmente indipendenti di $x^{(13)}$, $x^{(14)}$, $x^{(23)}$, $x^{(24)}$, $x^{(33)}$, $x^{(34)}$, $x^{(44)}$.

E a un analogo sistema possiamo giungere anche nel caso c_2). Allora infatti la V_4 dovrà rappresentare un sistema della forma:

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} & A_1 A_1 x + \sum_r g_{11r}\, x^{(r)} + g_{11}\, x = 0\,, \\ & A_2 A_1 x + \sum_r g_{12r}\, x^{(r)} + g_{12}\, x = 0\,, \\ & A_m A_l x + \rho_{lm} A_2 A_2 x + \sum_r g_{lmr}\, x^{(r)} + g_{lm}\, x = 0\,, \\ & \qquad\qquad (l = 1, 2;\ m = 3, 4). \end{aligned} \right.$$

Si ricavino le espressioni $A_m A_1 A_l x$ $(l = 1, 2, m = 3, 4)$, $A_2 A_1 A_2 x$ dalle prime due equazioni (approfittando della possibilità già notata di porre la seconda sotto la forma $A_1 A_2 x + \sum_r g_{21r}\, x^{(r)} + g_{21}\, x = 0$) e poi si operi con A_1 sulle ultime quattro, ricordando che $A_1 A_m A_l x \sim A_m A_1 A_l x + \sum_{r,s} a_{lr}\, \varphi_{m1s}\, x^{(rs)}$; si ottengono quattro nuove equazioni di Laplace le cui forme associate sono:

$$-\alpha_m \gamma_{l1} + \alpha_l \varphi_{m1} + A_1(\rho_{lm})\, \alpha_2^2 + \rho_{lm}\, \alpha_2 (-\gamma_{21} + \varphi_{21}) + \alpha_1 \gamma_{lm} \qquad (l = 1, 2:\ m = 3, 4);$$

da cui si trae intanto che γ_{11} e γ_{21} si annullano per $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Poi si approfitti in modo analogo dei valori di $A_3 A_2 A_1 x$, $A_4 A_2 A_1 x$, ricavati dalla seconda fra le (20) per eliminare $A_2 A_3 A_1 x$, $A_2 A_4 A_1 x$ dalle relazioni che si ottengono operando con A_2 sulle $A_3 A_1 x + \rho_{13} A_2 A_2 x \sim 0$, $A_4 A_1 x + \rho_{14} A_2 A_2 x \sim 0$; si giunge così a due equazioni del terz'ordine in cui le derivate terze compaiono però, in entrambe, nella sola espressione $A_2 A_2 A_2 x$, eliminando la quale si giunge infine a una nuova equazione di Laplace avente per forma associata:

$$\begin{vmatrix} -\alpha_3 \gamma_{12} + \alpha_1 \varphi_{32} + A_2(\rho_{13})\, \alpha_2^2 + \alpha_2 \gamma_{13} & \rho_{13} \\ -\alpha_4 \gamma_{12} + \alpha_1 \varphi_{42} + A_2(\rho_{14})\, \alpha_2^2 + \alpha_2 \gamma_{14} & \rho_{14} \end{vmatrix}$$

Quindi $\gamma_{12}(\rho_{14}\alpha_3 - \rho_{13}\alpha_4)$ deve annullarsi per $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; e non potendo annullarsi $\rho_{14}\alpha_3 - \rho_{13}\alpha_4$ (data l'indipendenza lineare degli operatori A questo potrebbe avvenire solo per $\rho_{14} = \rho_{13} = 0$, ma allora la V_4 sarebbe sviluppabile e si ricadrebbe in un caso già trattato) ([10]), dovrà essere $\gamma_{12} = 0$ conseguenza di $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, e siccome tale è già la $\gamma_{21} = 0$, sarà anche, per $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\varphi_{12} = \gamma_{21} - \gamma_{12} = 0$, ossia sussistono ancora le (19). Anche in questo caso possiamo dunque, con un opportuno cambiamento di parametri, ridurre il sistema rappresentato dalla V_4 alla forma sopra indicata.

La forma del sistema trasformato permette intanto di conchiudere, in entrambi i casi c_1), c_2), che le superficie $\tau_1 = \text{cost.}$, $\tau_2 = \text{cost.}$ sono superficie di S_3 (non piani). Infatti le sei equazioni del sistema si possono risolvere rispetto a sei tra le derivate seconde che vi compaiono, in modo da esprimerle come funzioni lineari omogenee di x, delle derivate prime e della ulteriore derivata seconda (scelta tra quelle in modo opportuno) che indicheremo con $x^{(lm)}$. Ora, poichè i punti:

$$x, \quad x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \quad x^{(3)}, \quad x^{(4)},$$

$$x + x^{(3)}\, d\tau_3 + x^{(4)}\, d\tau_4, \qquad x^{(1)} + x^{(13)}\, d\tau_3 + x^{(14)}\, d\tau_4,$$

$$x^{(2)} + x^{(23)}\, d\tau_3 + x^{(24)}\, d\tau_4, \qquad x^{(3)} + x^{(33)}\, d\tau_3 + x^{(34)}\, d\tau_4,$$

$$x^{(4)} + x^{(43)}\, d\tau_3 + x^{(44)}\, d\tau_4$$

stanno nello $S_5\,(x, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(lm)})$ ([11]), si vede intanto che lo S_4 tangente in un punto $P\,(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ di una superficie ω: $\tau_1 = \text{cost.}$, $\tau_2 = \text{cost.}$ sta in uno stesso S_5 cogli S_4 tangenti alla V_4 nei punti $(\tau_1, \tau_2, \tau_3 + d\tau_3, \tau_4 + d\tau_4)$ infinitamente vicini a P sopra la superficie ω (S_4 generalmente distinti dallo S_4 tangente in P se la V_4, come possiamo supporre, non è una

([10]) Anche se fosse $\rho_{13} = \rho_{14} = 0$, la conclusione a cui giungiamo continuerebbe tuttavia a sussistere, come risulta dall'esame delle due equazioni del terz'ordine di cui ci siamo serviti, equazioni che nell'ipotesi attuale si ridurrebbero al secondo.

([11]) Questi punti non possono stare in uno S_4, senza che la V_4 rappresenti più di sei eq. di Lap. lin. ind.

sviluppabile): tanto basta per conchiudere che gli $\infty^2 S_4$ tangenti alla V_4 nei punti di ω (tanti e non meno, perchè se no la V_4 sarebbe sviluppabile) stanno in uno S_5. E poichè gli S_5 ciascuno dei quali tocca la V_4 lungo una superficie ω sono ∞^2 (se fossero meno, la varietà W ricoperta dagli S_4 tangenti alla V_4 avrebbe dimensione minore di 7), segue che ciascuna delle ω sta in uno S_3, perchè, proiettando la V_4 su uno S_6, la proiezione ω' di una superficie ω deve stare nello spazio caratteristico del corrispondente S_5, entro la ∞^2 considerata, ossia in uno S_3; nè può una generica ω essere un piano (giacchè nei casi c_1) e c_2) entro il sistema ∞^5 delle quadriche associate alle equazioni di Laplace rappresentate dalla V_4 non è contenuto alcun sistema lineare ∞^2 formato dalle coppie di piani per una retta).

Di più, gli S_3 di appartenenza delle superficie ω, S_3 che sono pure ∞^2, poichè altrimenti la V_4 risulterebbe una ∞^1 di S_3 e come tale rappresenterebbe già un sistema di sei eq. di Lap. lin. ind. di forma diversa da quella che qui consideriamo, passano tutti per uno stesso piano. Per dimostrarlo, osserviamo anzitutto che gli S_5 che toccano la V_5' ricoperta dagli $\infty^2 S_3$ ([12]) nei punti dello S_3 di appartenenza di una superficie ω coincidono collo S_5 tangente alla V_4 lungo ω, come risulta dalla proiezione in S_6 di cui già ci siamo serviti. La varietà degli S_5 tangenti alla V_5' è dunque identica colla varietà W_7 degli S_4 tangenti alla V_4; e perciò la V_5' rappresenta ([13]) almeno dodici eq. di Lap. lin. ind.; d'altra parte non può V_5' rappresentare più di dodici eq. di Lap. lin. ind. perchè allora i suoi spazii osculatori avrebbero dimensione < 8, mentre gli spazi osculatori alla V_4, che è situata sulla V_5' hanno dimensione 8: e da ciò deduciamo (Nota I, n° 9) che la V_5' è uno S_2 — cono generico, e precisamente è costituita dagli $\infty^2 S_3$ che da un piano proiettano i punti di una superficie non rappresentante nessuna equazione di Laplace.

([12]) Se tale varietà avesse dimensione 4, anzichè 5, essa sarebbe uno S_4, e sarebbe pure uno S_4 la V_4 considerata, il che contraddice alle nostre ipotesi.

([13]) Nota I, n° 4.

Omettendo la elementare verifica della proposizione reciproca, e osservando solo che nei casi c_1), c_2) le superficie ω risultano rispettivamente non sviluppabili o sviluppabili, conchiudiamo:

Le V_4 *che risolvono il nostro problema nei casi* c_1), c_2) *sono tutte, e sole, quelle costituite da* ∞^2 *superficie rispettivamente non sviluppabili e sviluppabili (ma non piane) situate negli* S_3 *di uno* S_2 — *cono generico* (S_2 — *cono proiettante da un piano una superficie che non rappresenta nessuna equazione di Laplace*).

6. — Infine, nel caso c_3), si tratta di determinare le V_4 che soddisfanno a tutte e sole le equazioni di un sistema della forma:

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
& A_m A_l x + \sum_r g_{lmr} x^{(r)} + g_{lm} x = 0 \quad (l, m = 1, 2) \\
& A_4 A_1 x + \rho_{14} A_3 A_1 x + \sum_r g_{14r} x^{(r)} + g_{14} x = 0 \\
& A_3 A_2 x + \rho_{23} A_3 A_1 x + \sum_r g_{23r} x^{(r)} + g_{23} x = 0 \\
& A_4 A_2 x + \rho_{24} A_3 A_1 x + \sum_r g_{24r} x^{(r)} + g_{24} x = 0
\end{aligned}
\right.
$$

con $\rho_{14}\rho_{23} + \rho_{24} \neq 0$, se la V_4, come supponiamo, non è sviluppabile.

Applichiamo ancora l'identità $A_l A_n A_m x \sim A_n A_l A_m x + \sum_{r,s} a_{mr} \varphi_{nls} x^{(rs)}$ a calcolare $A_l A_n A_m x$ per $l, m = 1, 2$; $n = 3, 4$, ricavando $A_n A_l A_m x$ dal primo gruppo di equazioni (21) mediante l'applicazione dell'operatore A_n ai due membri di queste equazioni, cosicchè risulta:

$$
(22)\quad A_l A_n A_m x \sim \sum_{r,s} a_{mr} \varphi_{nls} x^{(rs)} - \sum_{r,s} g_{mlr} a_{ns} x^{(rs)} \qquad (l, m = 1, 2;\ n = 3, 4).
$$

Operiamo poi con A_1, A_2 sui due membri di ciascuna delle ultime tre equazioni (21): si ricavano per x sei equazioni lineari omogenee del terz'ordine, che, tenuto conto delle (22) si riducono al secondo. In particolare le tre equazioni di Laplace che si ottengono operando con A_1 e A_2 sulla $A_4 A_1 x + \rho_{14} A_3 A_1 x \sim 0$

e con A_1 sulla $A_3 A_2 x + \rho_{23} A_3 A_1 x \sim 0$ hanno per forme associate rispettivamente:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \varphi_{41} - \gamma_{11} \alpha_4 + A_1(\rho_{14}) \alpha_1 \alpha_3 + \rho_{14}(\alpha_1 \varphi_{31} - \gamma_{11} \alpha_3) + \alpha_1 \gamma_{14} \\ \alpha_1 \varphi_{42} - \gamma_{12} \alpha_4 + A_2(\rho_{14}) \alpha_1 \alpha_3 + \rho_{14}(\alpha_1 \varphi_{32} - \gamma_{12} \alpha_3) + \alpha_2 \gamma_{14} \\ \alpha_2 \varphi_{31} - \gamma_{21} \alpha_3 + A_1(\rho_{23}) \alpha_1 \alpha_3 + \rho_{23}(\alpha_1 \varphi_{31} - \gamma_{11} \alpha_3) + \alpha_1 \gamma_{23} . \end{array} \right.$$

Le (23) in quanto devono essere combinazioni lineari delle forme associate alle (21) si devono annullare per $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, e siccome per $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ non è identicamente nullo $\alpha_4 + \rho_{14} \alpha_3$, dalla considerazione delle due prime fra le (23) segue che γ_{11} e γ_{12} sono combinazioni lineari di α_1 e α_2, e poi, dall'ultima fra le stesse (23), che tale è pure γ_{21}: quindi, poichè $\varphi_{12} = \gamma_{21} - \gamma_{12}$, φ_{12} si annulla per $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ossia il sistema $A_1 F = A_2 F = 0$ nella funzione incognita F è ancora completo. E la sostituzione a τ_1, τ_2, come nuovi parametri, di due soluzioni indipendenti di tale sistema, permette (salvo una eventuale permutazione di indici) di ridurre il sistema (21) alla forma:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{(33)} \sim x^{(34)} \sim x^{(44)} \sim 0 \\ x^{(14)} + \rho_{14} x^{(13)} \sim 0 \\ x^{(23)} + \rho_{23} x^{(13)} \sim 0 \\ x^{(24)} + \rho_{24} x^{(13)} \sim 0 . \end{array} \right.$$

Ora lo stesso ragionamento di sopra prova che nelle $x^{(33)} \sim 0$, $x^{(34)} \sim 0$ compaiono tra le derivate prime solo $x^{(3)}, x^{(4)}$ e lo stesso avviene anche della $x^{(44)} \sim 0$ (poichè — colle notazioni iniziali — basta a dimostrarlo la possibilità di esprimere in funzione lineare di x, delle derivate prime, e di $A_3 A_2 x$ (oppure di $A_4 A_2 x$) le tre espressioni $A_3 A_1 x$, $A_4 A_1 x$, e $A_4 A_2 x$ (oppure $A_3 A_2 x$), possibilità che risulta assicurata dall'ipotesi $\rho_{14} \rho_{23} + \rho_{24} = 0$). Le superficie $\tau_1 = \text{cost.}$, $\tau_2 = \text{cost.}$ sono dunque piani: la V_4 è una ∞^2 di piani, e precisamente, come mostrano le (24) una ∞^2 di piani lungo ciascuno dei quali essa ammette uno S_5 tangente fisso.

In questo caso però, a differenza di quanto avveniva nei casi c_1), c_2), l'ipotesi che la V_4 rappresenta sei sole eq. di Lap.

lin. ind. non permette più di determinare ulteriormente la natura della V_4; giacchè si riscontra che una generica ∞^2 di S_2, con S_5 tangente fisso lungo ogni S_2, è integrale di un sistema della forma (24) e non rappresenta, in generale, delle ulteriori equazioni di Laplace. *Nel caso c_3) le V_4 che soddisfanno al nostro problema sono dunque delle generiche ∞^2 di piani con S_5 tangente fisso lungo ogni piano generatore.*

Raccogliendo i singoli risultati che siam venuti esponendo troviamo:

Se una V_4 rappresenta $d \leq 6$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti (e perciò sta in S_r con $r \geq 8$) e tuttavia è tale che i suoi S_4 tangenti ricoprono una varietà di dimensione sette, *essa è un cono proiettante da un punto una V_3 che non rappresenta alcuna equazione di Laplace* ($d = 4$), *o ne rappresenta una* ($d = 5$) *o due lin. ind.* ($d = 6$); *oppure (e in tutti i casi seguenti* $d = 6$) *essa è una generica sviluppabile con retta direttrice, o è formata dai piani tangenti a una superficie generica, o è una ∞^2 generica di piani tangenti a una curva; o è la V_4^6 (di S_8) di* SEGRE, *che rappresenta le coppie di punti di due piani, o è costituita da superficie (non piane)* [14] *poste negli S_5 di uno S_2 — cono generico (proiettante da un piano una superficie che non rappresenta nessuna equazione di Laplace), o infine è una generica ∞^2 di piani con S_5 tangente fisso lungo ogni piano generatore. I primi sei tipi di V_4 forniscono tutte le V_4 sviluppabili che soddisfanno alle condizioni imposte.*

---

[14] Mantengo questa limitazione che abbiamo trovato nei casi c_1) e c_2): ma tra le V_4 corrispondenti a c_3) si trovano precisamente anche quelle costituite da ∞^2 piani che incontrano in rette un piano fisso. Si verifica che esse rappresentano 6 sole equazioni di Lap. lin. ind. quando e solo quando non è fissa la retta d'intersezione col piano fisso.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 12 Marzo 1916.

PRESIDENZA DEL SENATORE GIAMPIETRO CHIRONI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci Carle, Pizzi, Ruffini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza di S. E. Boselli, Presidente dell'Accademia.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza del 27 febbraio u. s.

Il Presidente Chironi legge il telegramma col quale il Socio corrispondente Remigio Sabbadini ringrazia l'Accademia per il premio Vallauri a lui conferito. Quindi presenta, con parole di elogio, una recente pubblicazione del Prof. Alessandro Lattes intitolata *Il Regolamento Sardo del 1815 per il ducato di Genova* (Estratto dalla *Miscellanea di studi storici in onore di Giovanni Sforza*).

Il Socio Sforza presenta, indicandone i notevoli pregi, il recente libro del Socio corrispondente Alessandro Luzio *Isabella d'Este e i Borgia con nuovi documenti e quattro tavole di fac-simile* (Milano, L. F. Cogliati, 1916).

Il Socio Stampini presenta, a sua volta, soffermandosi a discorrere del loro valore, le seguenti pubblicazioni: 1° del Socio corrispondente Giuseppe Biadego *La fiorentina famiglia Errari trapiantata a Verona, il poeta Donato e il pittore Ranuccio* (Estratto da *Madonna Verona*, Anno IX, fasc. 36, an. 1915); 2° del Professore Pietro Rasi *La Bibliografia Virgiliana (1912-1913)* (Estratto dagli *Atti e Memorie* della R. Accademia Virgiliana di Mantova, Nuova Serie, Vol. VII, ann. 1914) e uno studio intitolato *Varia* su luoghi dei Catalepton, di Giovenale e Virgilio (Estratto dalla *Rivista di filologia e d'istruzione classica*, Ann. XLIV, fasc. I, 1916); 3° del Prof. Carlo Pascal un libro concernente *Poeti e personaggi Catulliani* (Catania, Battiato, 1916), che è il 12° volume della Biblioteca di filologia classica diretta dallo stesso Prof. Pascal.

Per i varii doni presentati dai Soci Chironi, Sforza e Stampini, la Classe ringrazia i chiarissimi autori.

Il Socio Sforza presenta per l'inserzione negli *Atti* una *Nota* del Dott. Carlo Frati dal titolo *Ancòra per l'epistolario di Carlo Botta*.

Pure per l'inserzione negli *Atti* il Socio Patetta presenta una *Nota* del Prof. Siro Sollazzi su *Le nozze della minorenne*.

In fine il Socio Vidari presenta una seconda *Nota* del Prof. Pier Angelo Menzio contenente la *Collazione del ms. Giobertiano N° 31* a proposito dei suoi *Cenni sulle carte e sui manoscritti Giobertiani*. Anche questa seconda *Nota* sarà pubblicata negli *Atti*.

LETTURE

Ancòra per l'epistolario di Carlo Botta.

Nota del Dr. CARLO FRATI.

I. Edizione dell'epistolario di C. Botta progettata da Giovanni Flechia. — II. C. Botta, Giuseppe Poggi e Angelo Pezzana. — III. C. Botta e il co. Tommaso Littardi. — IV. Giunte alla bibliogr. delle lettere del Botta.

I.

L'idea di " riunire tutte le lettere [di Carlo Botta] che si trovavano a stampa, per aggiungervi anche quelle che potessi ritenere d'inedite „, manifestò alcuni anni or sono la sig.[na] Caterina Magini, pubblicando, pei tipi Le Monnier, *Lettere inedite di C. B. con prefazione e note* (1); ma poi essa abbandonò (a quanto sembra) il proposito, giacchè il volumetto (che non comprende che quaranta lettere, dirette la più parte al professore Giuseppe Grassi di Torino) non fu seguito (come l'editrice aveva promesso) da " un altro di maggior mole „ (p. 4). Così, poco appresso, in una comunicazione fatta a questa R. Accademia delle Scienze nel giugno 1901, il dott. Carlo Salsotto poteva affermare che " l'epistolario del Botta non fu ancora raccolto. Molte lettere di lui furono pubblicate, è vero, in tempi diversi; ma molte di esse si trovano sparse in un numero troppo grande di libri, di riviste, e di semplici giornali, oltre a quelle che sono in vere raccolte, per cui riescirebbe difficilissimo ad uno studioso potersene servire. Da altra parte dobbiamo notare

(1) Firenze, Succ. Le Monnier, 1900; pp. 104, in 16°.

che ne esistono ancora molte inedite, le più finora ignote ad ogni studioso „ (1).

Nè il pensiero di raccogliere l'epistolario dell'" illustre storico (come a ragione lo definisce uno de' suoi biografi), che, per quanto censurato da dotti e da pseudo-dotti, sarà pur sempre il maggiore de' moderni nostri narratori: come fu de' migliori uomini, e de' più integri cittadini del suo tempo „ (2), è venuto soltanto a giovani studiosi in epoca recente. Molti anni or sono — appena un ventennio dalla morte del Botta — lo stesso pensiero vagheggiava un filologo e glottologo illustre, Giovanni Flechia; e chi rifletta al valore insigne dell'uomo e dello scrittore, all'integrità del carattere e alle condizioni della vita (costretti l'uno e l'altro, il Botta e il Flechia, a scrivere per vivere), e sopra tutto all'affettuosa devozione, che doveva inspirare al secondo per il primo la ' carità del natìo loco ' — il Canavese, — non può non deplorare vivamente che (per circostanze che ci sono ignote) l'ideata pubblicazione non abbia poi — nè per opera del Flechia, nè d'altri — visto la luce. Il fatto non è del tutto ignorato (3). Il dott. Salsotto, nella comunicazione

(1) Carlo Salsotto, *Per l'epistolario di Carlo Botta*; in *Atti d. R. Accad. delle Scienze di Torino*, vol. XXXVI (1900-01), p. 969.

(2) *Lettere inedite di* C. Botta *pubbl. da* Paolo Pavesio. Faenza, 1875, pp. xl–xli.

(3) Dell'epistolario del Botta e delle altre memorie che lo riguardano, raccolte dal Flechia, ebbe notizia e si valse largamente Carlo Boncompagni in una *Notizia storica su C. Botta*, letta all'Accademia delle Scienze di Torino ne' primi mesi del 1867, e pubblicata negli *Atti*, vol. II (1866-67), pp. 177-210, 259-80, 377-97. Ivi, a p. 187 *n.* 1, il Boncompagni scrive: " Il testo della memoria [*cioè di una memoria sul malgoverno dei funzionari francesi, scritta, in francese, dal Botta, e fatta consegnare da un amico al generale Bonaparte*] trovasi presso il cav. Flechia, professore di filologia comparata in questa Università degli studi, ed è suo l'estratto che qui se ne pubblica. Egli fece raccolta dell'epistolario del Botta, in gran parte inedito, e raccolse preziose notizie sulla sua vita. Di que' documenti e di quelle notizie mi fece copia con una liberalità di cui gli rendo somme grazie „. Infatti il Boncompagni cita espressamente e ripetutamente *Notizie mss. su C. Botta*, del Flechia (pp. 179 *n.*, 183 *n.* 1, 184 *n.*, 210 *n.* 2, 262 *n.*, 270 *n.*, 271 *n.* 2, 275 *n.*); e, in modo particolare, l'*Epistolario raccolto dal cav. Flechia* (pp. 192 *n.*, 202 *n.*, 261 *n.* 1, 265 *n.*, 269 *n.*, 382 *n.*). E circa la stessa epoca, il march. Giuseppe Càmpori, proemiando a *Dodici lettere di C. Botta edite*

sopra ricordata, accenna brevemente, in una nota (p. 969, *n.* 1), che " tale lavoro [*l'epistolario del Botta*] si proponeva già molti anni or sono il prof. G. Flechia, come prova una sua lettera a Carlo Dionisotti, il biografo del Botta „, conservata nella Biblioteca Civica di Torino; ed altrove, per comunicazione avuta dal compianto prof. Renier, dà l'importante notizia, che le lettere raccolte dal Flechia non sono andate disperse, ma furono " rinvenute dal suo nipote dott. Giuseppe Flechia, il quale ha ora intenzione di darle alla luce „ (p. 995, *n.* 1). Ed infatti fu appunto su codesto ricco materiale inedito che la dott. Emilia Regis potè comporre il suo *Studio intorno alla vita di C. Botta tracciato con la guida di lettere in gran parte inedite*, inserito nelle *Memorie* di questa R. Accademia del 1903 (1). Scrive infatti l'autrice in una nota preliminare: " Questo mio studio trae la sua origine dal copioso carteggio inedito dello storico canavesano raccolto (in parte vivente ancora lo storico) da Stanislao Marchisio (1773-1889), il noto commediografo, amico pure del Pellico e del Foscolo. Tale carteggio, donato dal Marchisio stesso fin dal 1857 al compianto Giovanni Flechia, l'insigne glottologo, trovasi ora in possesso del D.r Giuseppe Flechia, alla cui gentilezza io debbo i documenti che diedero origine al mio scritto „ (2). Alla stessa fonte la dott. Regis attinse pure per l'altro suo articolo: *Carlo Botta e Teresa Paroletti*, pubblicato contemporaneamente nel *Giornale storico e letterario della*

a sua cura, in ristretto numero di esemplari (Bologna, presso G. Romagnoli [tip. G. Monti], 1867; pp. 29, in 16°), scriveva (p. 4): " Di una raccolta di queste e di quelle [*cioè delle lettere del Botta pubbl. da P. Viani, e di quelle edite sparsamente in libri e giornali*] fu promessa la stampa per cura del prof. Flechia di Torino, la quale ancòra non si è veduta „. Ma il fatto è però, in genere, pochissimo noto, poichè sfuggì anche alla diligenza del ch. prof. Domenico Pezzi, che nulla ne dice nella bella commemorazione fatta del collega a questa R. Accademia: *La vita scientifica di Giovanni Flechia*; in *Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino*, ser. 2ª, vol. XLIII (1893), Sc. mor., pp. 135-154; ed al prof. C. O. Zuretti, nel cenno necrologico-bibliografico sul Flechia pubbl. nella *Rivista di filol. e d'istruz. classica*, vol. XXI (1893), pp. I-IV (dopo pag. 192).

(1) *Memorie della R. Accad. d. Scienze di Torino*, ser. 2ª, vol. LIII (Torino, 1903), Sc. mor., pp. 147-180.

(2) *Loc. cit.*, p. 147, nota (*).

Liguria (1). " Questo mio studio (scrive qui pure l'autrice) trae la sua origine dalle lettere inedite scritte da Carlo Botta a Teresa Paroletti. Di queste lettere, che in tutto sommano a trentatrè, sei già videro la luce in raccolte di lettere bottiane, e si riferiscono agli anni giovanili del Botta; ventisette invece, tutt'ora inedite, fan parte del copioso carteggio donato dal commediografo Marchisio al compianto prof. Flechia, e si trovano ora in possesso del d.r Giuseppe Flechia „ (2).

Ma noi possiamo qui lumeggiar meglio questa mancata pubblicazione, mercè due lettere del Flechia ad Angelo Pezzana, bibliotecario della Parmense, conservate in questa biblioteca. Il dott. Salsotto afferma (p. 995 *n.* 1), che " già fin dal 1853 [*il Flechia*] era in trattative con Felice Le Monnier per stampare „ le lettere del Botta. Se questa data è esatta (ciò che potrà riscontrarsi facilmente nella corrispondenza del Le Monnier), convien dire che il Flechia continuasse ancora parecchi anni il suo lavoro, poichè le lettere al Pezzana sono entrambe del 1857, ed in quest'anno appunto (come già sopra si è visto) il Flechia ricevette in dono dal Marchisio l'importante carteggio bottiano. In esse il Flechia scrive che il Le Monnier si proponeva di pubblicare una raccolta di lettere del Botta, affidandone l'edizione a lui, che già ne avea raccolte " alcune centinaia d'inedite „; e pregava il Pezzana di comunicargli quelle che eventualmente si trovassero nella Biblioteca di Parma, dove, a parer suo, doveano esservene alcune indirizzate al Bodoni. Ed il Pezzana, coll'abituale sua cortese premura, gli inviò quattro lettere, delle quali il Flechia gli fu riconoscentissimo.

La raccolta messa così assieme da quest'ultimo doveva essere assai considerevole, poichè il dott. Salsotto, nella ricordata sua comunicazione, afferma che le lettere bottiane, messe assieme dal Flechia, ed ora esistenti presso il nipote di lui, " sono più di mille, buona parte autografe „ (3).

(1) *Giornale storico e letter. d. Liguria*, vol. IV (1903), pp. 243-271.

(2) *Loc. cit.*, pp. 243-44, nota (*).

(3) Salsotto, loc. cit., p. 995 *n.* — Frutto delle carte di Giov. Flechia, ereditate dal nipote dott. Giuseppe, è la pubblicazione nuziale di quest'ultimo: *Lettere inedite di* Graziadio Ascoli *e di* Ruggero Bonghi *a Giovanni Flechia*. Nozze Martini-Sartori (1907).

Ecco pertanto integralmente le due lettere del Flechia al Pezzana, tolte dall'importante carteggio di quest'ultimo, conservato nella Palatina di Parma, e da me riordinato:

1.

Chiar.mo ed Ill.mo Signore,

Torino, il 25 maggio 1857.

Incaricato dal sig. Lemonnier di Firenze di mettere insieme una raccolta di lettere di Carlo Botta, io mi trovo averne già raunato alcune centinaja d'inedite. Avendo ragione di credere che egli ne scrivesse alcune al Bodoni e pensando che in caso affermativo tali lettere dovrebbero probabilmente trovarsi in codesta Biblioteca di Parma, mi prendo l'ardire di volgermi alla S. V. Chiar.ma, pregandola che, dove ella il possa senza suo scommodo, voglia avere la bontà di scrivermene due versi in proposito e indicarmi come, nel caso che vi siano, io possa ottenerne copia.

Domandandole scusa di questo disturbo e insieme anticipandole i miei ringraziamenti, ho il pregio di professarmi con singolare osservanza

Della S. V. Chiar.ma

Dev.mo obb.mo servitore

[*Manca l'indirizzo esterno*] Gio. Flechia

Bibliotecario-archivista del Senato (1).

Il Pezzana rispose il 2 giugno:

2.

Chiar.mo ed Ill.mo Sig. Bibliotecario,

Parma, 2 Giugno '57.

Rispondo all'onorevole lettera di lei del giorno 25 dell'uscito mese, ed ho il dispiacere di dirle che sola una lettera del celebre Carlo Botta

(1) Il Flechia era stato nominato bibliotecario-archivista del Senato l'8 maggio 1848, e, come qui si vede, tenne questo ufficio anche dopo che, nel 1853, venne incaricato dell'insegnamento della Grammatica sanscrita all'Università di Torino. Cfr. C. O. Zuretti in *Rivista di filol. e d'istruzione class.*, vol. XXI (1893), p. II. Vi rinunziò soltanto nel 1864, per poter attendere esclusivamente alla cattedra di ordinario della stessa disciplina, che gli era stata conferita nel 1860 dal ministro Mamiani. Cfr. D. Pezzi, *mem. cit.*, p. 144 *n.* 2.

ho trovata fra le migliaja del Carteggio Bodoniano da me acquistato per la Parmense, ed è la seconda delle quattro che ho fatte diligentemente trascrivere e collazionare in questo foglio. Per non venirle innanzi con sì povera offerta la prima volta ch'ella mi onora di un suo comando, ne ho aggiunto una indiritta al mio amico Cav. Rosini morto poco tempo fa, ed ora posseduta dal gentil.mo signor Avv. Gius. Giordani di Parma, che mi ha permesso di farla trascrivere; e finalmente ho inquartata l'offerta colle due sole a me indiritte dall'illustre Scrittore. Se mi verrà fatto di ottenerne qualche altra da' miei corrispondenti, mi sarà caro di rendernela servita.

Io avrei per favore singolarissimo se la S. V. Ch. si compiacesse di far sapere alla Direzione della *Rivista contemporanea*, che non ho ricevuta che la prima dispensa dell'opera del Gallenga intitolata: *La nostra prima carovana*. Torino, 1857, in 8° gr., mentre ne dovrebbero essere uscite tre o quattro.

E nel domandarle scusa di questa mia, forse troppo ardita, preghiera, ho il bene di rassegnarmele con ogni osservanza

Dev.mo
[Pezzana].

Risposta del Flechia:

3.

Chiarissimo e riveritissimo Signore,

Torino, addì 4 giugno 1857.

Se già noto non mi fosse stato che la S. V. Chiar.ma alla sua gran dottrina congiunge ancòra una bontà d'animo singolare, io bene l'avrei apparato dalla graziosissima Sua del 2 corrente, colla quale ella mi invia quattro lettere del Botta. La ringrazio pertanto con tutto l'animo così delle lettere ch'ella mi manda, come pure della benevolenza colla quale ella per sua somma gentilezza si mostra inchinevole a favorirmi in questa ricerca di lettere bottiane, facendomi sperare che per avventura ella possa ancòra ottenerne qualche altra da' suoi corrispondenti.

Fui alla Direzione della *Rivista contemporanea* e mi venne detto che dell'opera del Gallenga intitolata *La nostra prima carovana* (1),

(1) Lo scritto di Ant. Gallenga intitolato *La nostra prima carovana. Memorie semiserie del 1831*, — una delle più briose memorie autobiografiche della nostra moderna letteratura, la quale non trova riscontro che nello stile de' *Miei ricordi* di M. D'Azeglio, — si incominciò a pubblicare nella *Rivista*

sebbene siasi già data fuori la continuazione nella suddetta rivista, non fu però, quanto all'edizione tirata a parte, finora pubblicata che una prima dispensa; che la seconda, non appena uscita, le sarà sollecitamente mandata, e così via via sino alla fine.

Se posso servirla in qualcosa per questi paesi, mi onori alla libera de' suoi comandi. Piacciale intanto, o dottissimo e cortesissimo signore, gradire gli attestati di somma osservanza con cui mi pregio di professarmi

Della S. V. Chiar.[ma] ed Ill.[ma]

Dev.[mo] obb.[mo] servitore
Gio. Flechia.

(fuori) Al Chiar.[mo] ed Ill.[mo] signor
Il Sig. Cav. Angelo Pezzana
Bibliotecario della Parmense
Parma.

contemporanea di Torino del 1857, vol. IX, pp. 218-233, 374-394; vol. X, pp. I-XXIII (fra le pp. 80-81), I-XXXII (dopo p. 256), I-XX (fra le pp. 384-85); ma non ne uscirono che sei capitoli, intitolati rispettivamente I. *Ragazzate scolaresche.* — II. *Congiure scolaresche.* — III. *Il capo-parte.* — IV. *Avvisi e allarme.* — V. *Arresto e deportazione.* — VI. *Carcere duro.* Interrompendo la pubblicazione, la Direzione della rivista scriveva (vol. X, p. XX [prima di p. 385]): “ Con questo articolo si compie la prima parte della *Nostra prima carovana.* La Direzione, che è in potere del manoscritto, vede che per la soverchia quantità di altri importanti articoli non può pubblicare queste memorie che a brani troppo brevi, lo che fa procedere freddamente il racconto, e lo rende talmente lungo, che ci sarebbe forse per tutto quest'anno [1857] e il venturo. La Direzione pertanto è d'avviso di sospendere questa pubblicazione nella *Rivista,* e fa noto a quei signori che ne desiderano la continuazione, che essa ne pubblicherà un volume separato di 400 pagine circa al prezzo di 30 centesimi il foglio, formato della *Rivista,* e vi darà principio appena avrà assicurato sole 200 firme, lo che denuncierà con apposito avviso „. Ma, sia perchè non si raccogliesse il numero richiesto di sottoscrizioni, sia per altre cause, di codesta edizione a parte non uscirono che le prime due dispense (disp. 1ª, pp. 1-32; disp. 2ª, pp. 33-63), comprendenti i soli primi quattro capitoli; e la pubblicazione ne fu annunciata col seguente *Programma:* “ Il signor Gallenga, ritirato ormai dalla vita pubblica per occuparsi esclusivamente di cose letterarie, ha compiuto un lavoro autobiografico, lavoro che potrà ricevere maggiore estensione a misura che otterrà l'incoraggiamento del pubblico suffragio. Sono memorie le quali per ora toccano soltanto le vicende del 1831, ma l'autore si studierebbe di condurle fino ai presenti giorni, e di ritrarre caratteri, modi e costumanze de' varii paesi ne' quali per più di 25 anni la fortuna dell'esilio lo trasse ramingo. La Direzione

Due mesi dopo, il Pezzana scrisse ancòra al Flechia, dal suo ‘ suburbano ’ di S. Lazzaro, inviandogli copia di un'altra lettera bottiana:

4.

Chiar.mo e Prest. Sig. Bibliot.

S. Lazzaro presso Parma, 3 ag. '57.

Ringrazio senza fine la S. V. Prest.ma della risposta che le piacque darmi il dì 4 giugno intorno *La prima carovana* del Gallenga. La supplico di non attribuire a mala creanza questi tanto indugiati ringraziamenti, i quali sarebbonle venuti meno tardi se il timore d'infastidirla con troppo frequenti lettere non m'avesse suggerito di tornarle innanzi con qualche nuova offerta concernente l'illustre C. Botta. Benchè abbia chiesto a più miei corrispondenti alcuna altra lettera autografa di lui, sino ad ora non mi è riusciuto di ottenere che la terza (*sic*) che qui alligo. Nientedimeno non discontinuerò le mie ricerche, ed ove mi sia dato di renderla servita meglio di questa volta, non porrò dimora al satisfarla.

Intanto le fo riverente preghiera di mandar salutando il mio dilett.mo Collega ed amico Costanzo Gazzera, di cui non ho da pezza novella; ed ho l'onore di profferirmi novellamente con ogni osservanza

Alla S. V. Ch. e Prest.

Dev. Servitore
[Pezzana].

editrice essendo venuta a patto col signor Gallenga per la pubblicazione dell'opera sua, la offre al pubblico con la certezza che non le mancheranno lettori, contando che lo stile brioso e vivace dell'autore si farà strada da sè fra gli amatori di ciò che vi è di più spontaneo e di più originale nell'amena letteratura „. L'opera del Gallenga interessava il Pezzana, perchè, nella parte pubblicata, si riferiva appunto alle agitazioni ch'ebbero luogo nell'Università di Parma, quando Macedonio Melloni (indicato nelle memorie del Gallenga sotto lo pseudonimo di Ausonio Merlino), professore di fisica, nella prolusione letta il 15 novembre 1830, fece un'aperta apologia dei moti di Parigi, e fu indi costretto a dimettersi dalla cattedra e ad esulare. Cfr. U. Mancuso, *Cenni su V. Mistrali, ministro e poeta parmigiano*; in *Studi storici*, vol. XVII (Pisa, 1909), p. 21, *n*. 1. Nel *Catalogo generale della libreria italiana (1847-1899)* del Pagliaini, II (1903), p. 182, l'opera del Gallenga viene sdoppiata in due: *La nostra prima carovana* e *Memorie semiserie del 1831*; mentre, come si è visto, quest'ultimo non è che il sottotitolo del primo, nè ne fu fatta (che si sappia) altra edizione.

La divisata pubblicazione dell'intiero carteggio — come si è detto e come è noto — non ebbe poi luogo; ma molte furono le lettere del Botta venute in luce, in gruppi più o meno cospicui, dopo quell'epoca: ed è agevole pensare che parecchie di esse fossero già comprese in quelle messe assieme dal Flechia; come, ad es., le lettere a Giuseppe Grassi, pubblicate dalla sig.na Caterina Magini (1), e ricavate da un manoscritto della Biblioteca di S. M. in Torino, che non potè non esser noto al professore torinese. Ma molte devono essere tuttora inedite, come ne sono prova le lettere interessantissime del Botta a Teresa Paroletti, che solo in questi ultimi anni sono state fatte conoscere dalla dott. Regis, e che fanno parte appunto della raccolta flechiana.

II.

Prima dell'epoca, cui spettano le due lettere del Botta al Pezzana che siamo per pubblicare (1829), lo storico piemontese non era in relazione diretta col bibliotecario parmense, come ne fa fede, non solo la mancanza di lettere di lui anteriori a quell'anno, — lettere che, se vi fossero state, il Pezzana avrebbe certo, come tutte l'altre sue, gelosamente conservate; — ma altresì questo accenno (riferibile indubbiamente al Botta), che troviamo in una lettera di Giuseppe Poggi al Pezzana (2), scritta da " Parigi [ove tanto il Poggi quanto il Botta si trovavano da tempo, emigrati], ai 24 di marzo 1817 ": " Io sono a pregarvi di darmi al più presto un prospetto politico-letterario dell'amministrazione di Tillot Marchese di Felino, *sine ira et studio*: vi accennerete le epoche precise del suo arrivo a Parma e della sua dipartita. Il quadro deve aver parte nell'opera d'un mio amico, eccellente scrittore, che vuol dare un

(1) *Lettere inedite di* C. Botta, *con prefazione e note di* Caterina Magini. Firenze, 1900, in 16°. Delle 40 lettere (non numerate) comprese in questo volumetto, più della metà (25) sono dirette al prof. Grassi, e ricavate dal cod. n. 265 della Biblioteca del Re in Torino.

(2) Lett. cit. di Giuseppe Poggi al Pezzana, nel *Carteggio Pezzana* della Parmense, s. v. 'Poggi'.

cenno dello stato morale e politico de' diversi Paesi italici anzi la rivoluzione francese „.

Poco appresso, tra il settembre 1818 e il gennaio 1819, troviamo, pur sempre nella corrispondenza del Poggi col Pezzana, nominato espressamente il Botta, de' cui lagni l'amico piacentino si faceva eco presso il bibliotecario parmense, per la ristampa della *Storia della guerra dell'indipendenza degli Stati Uniti d'America* del Botta, fatta in Parma abusivamente dal Blanchon (1). Così ne scriveva il Poggi al Pezzana in un poscritto, tutto autografo, aggiunto alla lettera " di Parigi ai 15 di settembre 1818 „:

P. S. — Li nostri letterati e stampatori non sono troppo delicati in fatto di proprietà degli autori: non la conoscono, nè possono sospettare ch'ella esista se il bastone della legge non li persuade altrimente. V'ha di più: non conoscono nemmeno la civiltà che usar debbesi verso gli autori e mancano persino alla parola loro data. Spinsi già lagni al Mazzoni in ordine alla Storia d'America del caval.e Botta che si ristampava costì: fu un gracchiare ai porci. Oggi, e proprio in buon punto, me ne scrive l'autore e insieme proprietario della prima edizione; sentite le sue stesse parole: " Poggi carmo, Sarà bene che voi sappiate i " tratti di gentilezza che mi si usano nella vostra patria. La mia povera " Storia vi fu stampata dal Blanchon, senza nemmeno dire ' con licenza '. " Poi non ne ebbi tampoco una copia, la dio grazia. Solo l'Av.to Musi " me ne portò cinque o sei fogli stampati del primo volume, forse per " farmi gola e poi piantarmi in sul bello, e forse ancora per modo di " scherno. Così va, Poggi mio; *sic vos, non vobis, mellificatis apes*, dice " il proverbio antico. Poveri letterati italiani! etc. „. — Se non vi riesce di condurre a pentimento ed a riparazione la rustichezza ed avarizia di costoro, vi autorizzo, per punirli, a far conoscere questa lettera *lippis et tonsoribus* (2).

Il Pezzana, per rabbonire il Botta ed il Poggi, mandò a quest'ultimo una lettera giustificativa del tipografo Blanchon: e fu allora che il Botta scrisse al Poggi la lettera da " Roano.

(1) C. Botta, *Storia della guerra dell'indipendenza degli Stati Uniti d'America*. Parma, Blanchon, 1817-1819, tomi 6, in 12°. Di questa abusiva edizione furono tirati anche esemplari in carta azzurrina, di cui uno è posseduto dalla Biblioteca di Parma.

(2) Questa letterina del Botta, qui trascritta dal Poggi, non è compresa fra quelle del Botta al Poggi date in luce dal prof. G. P. Clerici. Cfr. più oltre, *Giunte alla bibliografia* (§ IV) [ad a. 1909-10].

7 novembre 1818 „, che è la prima di quelle date in luce dal prof. Clerici, e che il Poggi trascrisse per intero al Pezzana, nella sua lettera del 29 gennaio 1819 (1).

Dieci anni dopo, nel 1829, ancòra indirettamente il Botta si rivolgeva al Pezzana per documenti e notizie sull'interdetto lanciato da Papa Clemente XIII contro il Duca di Parma. Così ne scriveva sempre il Poggi al Pezzana:

Amico pregiat.^{mo}

Il comune amico, d.r Carlo Botta, continuatore, come sapete, del Guicciardini, desidera da voi una lista delle principali opere che vennero in luce in favore e contro l'*Interdetto* lanciato sul duca di Parma dal XIII Clemente (o Inclemente). Io non conosco che l'operetta del Contini (2), che non ho presso di me; nè so che cosa si potesse dire a difesa della Curia Romana in quell'incontro. So solo che quella fulminazione ci fu utile, perchè diè spinta all'espulsione dagli Stati ducali della funestissima congrega lojolitica.

Vi priego a dirigere la vostra risposta al Botta medesimo (à Paris, place St. Sulpice, n.° 8), perchè abitando io in villa ed in meschina salute, non sono più in grado d'intrattenere alcun carteggio.

Vi auguro ogni bene; salutatemi Garbarini e Taverna; e continuatemi la vostra amicizia.

Alli 20 di 7bre 1829.

Il Poggio.

A questa lettera — che reca nel bollo postale la data " 28 sept. 1829 „, e che dovette giungere al Pezzana ai primi

(1) Cfr. *Bollettino storico Piacentino*, vol. V (1910), pp. 164-65. Da questa trascrizione fatta dal Poggi della lettera del Botta rilevasi qualche erroruzzo di trascrizione, insinuatosi nella cit. stampa della lettera medesima. Così " Avvocato Musi „, e non " avvocato Masi „ (come ripetutamente è stampato), chiamavasi la persona che portò al Botta, a Parigi, un saggio dell'edizione Blanchon. Nel secondo alinea (" Circa la significazione... „) deve leggersi, anche per il senso: " quello che ne scrissi al signor Blanchon medesimo „, e non " che ne scrisse il signor Blanchon, ecc. „.

(2) Cioè le *Riflessioni sopra la bolla ' In coena Domini '* del p. Tommaso Contini, veneziano, professore di Sacri Canoni nell'Università di Parma, di cui si fecero non meno di tre edizioni in due anni: [1ª ediz.] In Venezia, 1769, " A spese dell'autore „; — Edizione seconda, corretta dall'autore. In Venezia, 1769, " Con le debite licenze „; — Edizione terza, corretta dall'autore. In Venezia, 1770.

di ottobre, il bibliotecario fece riscontro il 15 ottobre, scrivendo direttamente al Botta la lettera seguente:

1.

A Carlo Botta, Parigi.

[Parma], 15 8bre 1829.

Il comune amico Consigl.e Gius.e Poggi scriveami addì 20 dell'andato settembre come la S. V. Ch.a desiderasse da me *una lista delle principali opere che vennero in luce in favore e contro l'Interdetto lanciato sul Duca di Parma dal XIII Clemente.* Per non fastidirla con altri preamboli, ecco quello ch'io ne so.

Nella mia *Vita dell'Affò,* di cui è una copia nella Biblioteca Reale di Parigi, dissi a f. 154 (1) che non venne fulminato Interdetto di sorta nè contro il Duca, nè contro i Ducati di Parma, ecc., ma che il famoso Monitorio, o Breve del 30 Gennajo 1768, che si pubblicò in Roma nel giorno 1° di Febbraio, fu scagliato da quel Papa al solo ministero di Parma. Le cagioni di tanta ira Pontificale sono ivi da me indicate brevemente. Tra queste la Prammatica intorno le *Mani-morte* e l'*Editto* che obbligavale al pagamento delle pubbliche gravezze sopra i beni di nuovo acquisto. Essendo andate vôte d'effetto le trattative precedenti colla Corte di Roma su questi propositi, quella di Parma fu costretta pel bene dello Stato ad emanare queste leggi. Il suo diritto incontrastabile a ciò fare è dimostro evidentemente da una Scrittura impressa in f.° intitolata:

Memorie relative alle Risoluzioni prese dalla R. Corte di Parma in seguito della precedente trattazione avuta colla Corte di Roma.

Uscito il Monitorio, comparve dalla Stamperia Regia D.e di Parma un foglio volante con questo titolo:

Rimostranze presentate a S. Santità nel giorno 6 d'Aprile 1768 in nome del Ser.° R. Inf.e Duca [di Parma] dai Ministri delle tre Corone di Spagna, di Francia e delle Due Sicilie.

(1) È curioso osservare come il Pezzana rinvii qui senz'altro il Botta a un passo della propria *Vita dell'Affò* (pubblicata quattro anni innanzi, e che probabilmente il Botta, trovandosi a Parigi, non avea ancor vista), in cui è censurato appunto lo stesso Botta. Infatti la lunga nota, a cui il Pezzana si riferisce, e che occupa due pagine e mezza, è — malgrado le deferenti proteste per *l'opera di tanto autore e di così supremo momento per la nostra Italia*; per l'*illustre Botta, il celebratissimo storico*, ecc. — tutta una riveditura di bucce, per inesattezze sfuggite allo storico piemontese a proposito appunto dell'Interdetto e del Du Tillot. Cfr. A. Pezzana, *Continuazione delle Memorie degli scrittori e letterati parmigiani.* Parma, 1825, tom. VI, parte I, pp. 152-154 *n.*

Uscì eziandio, poco dopo, dalla Stamperia medesima, in 4°:

Memoria della Corte di Parma, sulle lettere in forma di Breve pubblicate ed affisse in Roma nel giorno primo Febbraio 1768. Questa Memoria fu ristampata in 8°, senza luogo ed anno, premessovi l'Editto del Duca del 13 Marzo 1768, che proibiva severamente il predetto Monitorio in tutti i suoi Stati. E la *Rimostranza* e la *Memoria* sono fatture di Giambattista Riga Piacentino, allora Avvocato Fiscale di esso Duca; uomo non timido al vero, ed intrepido propugnatore de' diritti regali.

Contro la sugosa e calzante *Memoria* del Riga uscì risposta lunghissima, tutto-romana, di 80 fitte facce in 4°, con sopraggiunte di gran soma, o sommario di Documenti: *Risposta alla Memoria di Parma,* ecc.

Fu proibito il Monitorio anche in Ispagna con lettera circolare, di cui ho sott'occhio la traduzione intitolata:

Lettera circolare de' Signori del Consiglio di S. M.ᵃ Cattolica relativa al breve affisso in Roma il 1° Febbraio contra il Ministro di Parma, e le sue regalie e diritti. Madrid, 16 Marzo 1768. E fu ancora in Napoli con Editto del dì 4 Giugno.

In difesa nostra uscì altresì:

Esame storico-legale-teologico sopra le lettere in forma di Breve pubblicate in Roma il primo di Febbraio dell'anno corrente 1768 contro gli Editti de' Reali Sovrani di Parma, emanati intorno la immunità e disciplina ecclesiastica. È un vol.ᵉ in 4°, di 192 f.ᵉ, fattura di un abate Copellotti. Se non le dispiacesse averlo, gliene offero in dono un esemplare, che manderolle a prima occasione non troppo dispendiosa, avutone da Lei licenza.

Ella troverà la Prammatica, e gli altri Editti sumentovati, scintille di tanto incendio, a f. 84 e seg.ᵗⁱ del to. 6° del de Martens, *Recueil des principaux Traités, etc.* E più riccamente nella *Raccolta di leggi, ecc. concernenti le Mani-morte,* ecc. Parma, 1803, in 8°. Il Breve, ed altre cose sul proposito stanno a f. 426 e seg.ᵗⁱ del to. 2° del Guerra, *Pontificiarum Constitutionum Epitome.* Venet. 1772.

Le *Riflessioni* del Contini *sulla Bolla* ' in Coena Domini ', le sono note.

E queste sono le cose venute sin qui a mia saputa, che sguardano le ricerche fatte dalla S. V. Ch.ᵐᵃ, a cui le mando per diretto, secondo che mi avvisa il Poggi. Ben vorrei potessero volgersi ad alcuna utilità dell'illustre Scrittore de' fatti Italiani, al quale profferisco lealmente l'opera mia in tutto ch'io possa al servigio suo.

Ho dal sig.ʳ Littardi com'ella proceda tenace e spedita in questo solenne lavoro, desiderio di tutta Europa. Io a lei me ne congratulo

molto sinceramente, mentre alla sua buona grazia mi raccomando, e sono con ogni osservanza

[Pezzana].

D. S. — La supplico di far sapere al Poggi che è stato servito, e che a lui non rispondo, perchè la sua gentilezza nol costringa ad altra risposta che lo incomoderebbe per lo stato di sua salute, che gli auguro migliore.

Il Botta rispose:

2.

Pregiatissimo e compitissimo mio Signore,

Parigi al primo di novembre 1829
place S.t Sulpice, n.° 8.

Ebbi a questi ultimi giorni la cortese sua dei quindici ottobre scorso, della quale per due ragioni massimamente io debbo con me medesimo rallegrarmi, la prima per essermi venuta scoprendo l'amorevolezza di una persona, quale V. S. è, che tanto merita di essere da tutti e amata e onorata; la seconda per avermi recato le notizie, ch'io desiderava per condurre convenientemente la mia storia in un fatto celebre del ducato di Parma. Io lo ringrazio del suo favore, e i suoi sussidi mi saranno di sprone al ben fare, se pure di ben fare mi è dato. Spero di trovare nelle Librerie di Parigi o tutti o la maggior parte dei libri indicatimi da Vostra Sig., e me ne servirò, quando sarà venuto il tempo. Quanto all'esame storico-legale-teologico, ecc. dell'abbate Copellotti (1), ch'ella così graziosamente mi offre, io lo accetto molto volentieri, e quando mi favorirà di mandarmelo per una occasione non dispendiosa, o a me direttamente a Parigi, o al conte Littardi a Tolone, mi farà molta grazia. Io lo serberò come segno gradito di chi tanto m'onora. La mia storia (2) va avanti; il manoscritto del settimo volume debb'essere arrivato alle mani del conte Littardi, avendoglielo spedito ai ventidue del mese passato. Questo volume mi ha condotto sino al 1731. Ora credo,

(1) Cioè l'*Esame storico-legale-teologico sopra le lettere in forma di breve pubblicate in Roma il primo di febbraio dell'anno corrente 1768 contro gli editti de' Reali Sovrani di Parma emanati intorno l'immunità e disciplina ecclesiastica*. S. n. t. [Parma, 1768], pp. 192, in 4°; anonimo, ma dell'abate Pietro Copellotti, come rilevasi anche dal Melzi, *Dizion. di opp. anon. e pseud.*, vol. I (Milano, 1848), p. 374 (ove l'autore è detto ' Capellotti ').

(2) Cioè la *Storia d'Italia continuata da quella del Guicciardini fino al 1789*.

che per condurre la tela sino al 1789, due altri volumi basteranno, cui spero di terminare, se Dio continua a darmi salute, nel corso dell'anno prossimo venturo; poi l'opera si stamperà nel 1831 (1), poi il pubblico sonerà o le trombe o le tabelle. Mi mantenga, la prego, nella sua buona grazia, e mi abbia per tutto suo

servitore
Carlo Botta.

P. S. — Conforme al suo desiderio, scrissi jeri al Poggi (2), ragguagliandolo di quanto per sua gentilezza ella ha fatto per me.

(fuori) A Monsieur
Monsieur Ange Pezzana
Bibliothécaire de la ville de Parme
Italie Parme.

Il giorno stesso in cui giunse al Pezzana questa risposta del Botta, il bibliotecario di Parma gli riscrisse, inviandogli l'opera promessa del Copellotti:

(1) Queste previsioni del Botta sul compimento e sulla stampa della propria opera si verificarono pienamente. Scriveva infatti il Botta al conte P[apadopoli] di Venezia, in una lettera da Parigi, 25 gennaio 1831, pubblicate da P. A. Paravia: " La Storia è terminata; l'ultimo volume del manoscritto è a Tolone in mano del conte Littardi, che presto ve ne darà avviso. Sono nove volumi grossissimi, che credo faranno dieci volumi di stampa. Il conte Littardi pensa alla stampa, ed eseguirà nel presente anno il pensiero, se in primavera non nasce qualche ballo di streghe. Ma se il ballo nasce, come si farà? Fra il rumore e lo scombuglio dell'armi, chi abbaderebbe alla pacifica fatica? Chi può prevedere i casi che seguirebbono? ". Cfr. P. A. Paravia, *Lettere d'illustri piemontesi*, nel *Subalpino, giornale di sc., lettere ed arti*, a. 1838 (p. 4 dell'*estratto*). Queste lettere sono dal Paravia indirizzate a Pietro Giordani.

(2) Il cav. Giuseppe Poggi-La Cecilia, piacentino, patriota, uomo politico e letterato, che tante benemerenze erasi acquistato pel ricupero degli oggetti d'arte dei ducati Parmensi, asportati dai francesi, e che visse appunto molti anni esule a Parigi, " frequentando le maggiori eminenze politiche e mantenendo vivi rapporti col suo paese e coi letterati d'Italia, Giordani e Botta in modo particolare, a quest'ultimo venendo in aiuto di 10.000 lire per la pubblicazione della sua *Storia d'Italia* ". Cfr. Ettore Rota, *Le conquiste artistiche del periodo napoleonico nei ducati Parmensi*. Catania, 1913, pp. 16-17. " Familiarissimo al Botta ", lo dice anche il prof. G. P. Clerici, *Intorno a undici lettere ined. del Botta a G. B. Maggi e a Gius. Poggi*, in *Bollettino storico piacentino*, a. V (1910), pp. 119-27. Codeste lettere del Botta al Maggi e al Poggi sono poi pubblicate ivi stesso, pp. 152-166. Cfr. più innanzi: Giunte alla bibliografia (§ IV) [ad a. 1909-10].

3.

A Carlo Botta, Parigi.

[Parma], 11 9bre 1829.

In quest'esso dì in cui ricevo la compitissima Sua del 1° corrente mi si offre opportunissima l'occasione di Parmigiano che si trasferisce costà, e che porralle in mano senza spesa veruna il Copellotti.

Alla tanta sapienza ben ella accoppia infinita gentilezza, se per lievissimo servigio da me prestatole mi rimunera di così cortesi e care parole. Ella debbe adoperarmi liberissimamente in tutto ch'io possa al servigio suo.

Quanto mi sia caro l'udire com'ella si travagli già all'ottavo volume della sua Storia d'Italia, e come speri di condurla a finimento nel prossimo anno, non è chi abbia viscere e mente Italiane che non sia per crederlo. Ella mi ha veramente fatta venir l'acquolina in bocca con cotesto suo annunzio. Dio le conceda salute non solo per terminarla, ma per godere degli onori del trionfo in tutta Europa dopo che sarà stampata, ristampata e tradotta in più lingue; lo che non è da porsi in dubbio, chi ricordi le altre due Storie d'America e d'Italia.

Alla sua buona grazia molto caldamente mi raccomando, mentre con ogni stima me le profferisco

[Pezzana].

Ricevuto il libro e la lettera, il Botta rispose:

4.

Pregiatissimo mio Signore

Paris, 18 decembre 1829
place S.t Sulpice, n.o 8.

È comparso con la graziosissima sua degli undici di novembre il libro del Copellotti, di cui mi varrò a tempo debito, se piacerà a Dio di darmi vita sino a quel periodo della mia storia. Lo ringrazio e della cortesia, che mi fece, e delle lodi, che mi dà. Accetto allegramente quella e queste, come segno di amicizia, ma però le ultime con molta tara. Una volta il sig. Mistrali mi onorava della sua amicizia, poi mi tuffò nel suo Lete (1). Tuttavia, se non gli è grave, lo saluti in nome mio. Mi usi, o gentile e dotto sig. Pezzana, per quel suo, che sono

servitore
Carlo Botta.

(fuori) A Monsieur
Monsieur Ange Pezzana
Bibliothécaire
Parme.

(1) Il barone Vincenzo Mistrali di Parma [n. 3 luglio 1780; m. 14 maggio 1846], che fu poi per molt'anni governatore di Parma e

III.

Nella prima delle due lettere sopra pubblicate, il Botta ricorda il conte Tommaso Littardi, che dimorava a Tolone in

Guastalla (1814-1821) e primo ministro della duchessa Maria Luigia (1831-1846), prima ancora di essere assunto a questi alti uffici, era legato di stretta amicizia col Botta e colla sua famiglia, come dimostrano alcune lettere di quest'ultimo recentemente pubblicate dal prof. G. P. Clerici, che le ha fatte seguire da un garbato schizzo biografico-letterario sul Mistrali (cfr. G. P. Clerici, *Intorno a otto lettere inedite di C. Botta a V. Mistrali*; in *Il Risorgimento italiano, rivista storica*, a. II (1909), pp. 593-615). Codeste lettere vanno dall'ottobre 1811 al gennaio 1816; e l'ultima di esse è l'appello disperato di un padre, che vedovato della moglie e gravato di numerosa famiglia, chiede all'amico, diventato potente ministro, pane per sè e pei figliuoli. " Sappiate (gli scrive) che oggimai non ho più modo alcuno di sostentar nè me nè loro. Onde io grido: accorr'uomo, ed accorrete voi il primo che siete mio amico. Trovatemi luogo, o come bibliotecario nella vostra università di Parma, o fatemi segretario di qualche gran signore, o trovate qualunque altro ripiego a questa mia travagliata vita. Se ciò non fate, sentirete a dir presto che l'autore della Storia d'America e del Camillo se n'è morto di fame. Non dico più oltre, perchè piango. Addio ". — Le stesse cose, quasi colle stesse parole, scriveva il Botta contemporaneamente a G. B. Maggi (cfr. *Boll. stor. Piacent.*, vol. V (1910), p. 154). Il Mistrali però non rispose, impedito (come sembra) anche da una grave malattia subíta in quell'anno (cfr. Clerici, in *Boll. stor. Piacent.*, V (1910) p. 119). Certo è che il suo prolungato silenzio (nessun'altra lettera del Botta esiste nel carteggio Mistrali) impressionò e addolorò il Botta, il quale non mancò di dolersene (come qui fa col Pezzana) cogli amici (cfr. *Boll. stor. Piacent.* cit., pp. 156, 158); e che, del resto, sino dal gennaio dell'anno antecedente (1815) aveva scritto a G. B. Maggi queste amare parole: " Dite a Mistrali, *che ha fatto bene a lasciar i versi per le cancellerie: poichè coi versi si spasseggia l'ammattonato, con le cancellerie si poggia al cielo* " (cfr. *Boll. stor. Piacent.* cit., p. 153). Sul Mistrali si cfr., oltre l'articolo del professore Clerici sopra indicato, e l'altro art. dello stesso, *Intorno a undici nuove lettere del Botta a G. B. Maggi e Giov. Poggi*, pubblicato nella rivista *Il Risorgimento italiano*, II (1909), pp. 593-615, e riprodotto nel *Boll. stor. Piacent.*, V (1910), pp. 119-127 e 152-166, anche U. Mancuso, *Cenni su V. Mistrali, ministro e poeta parmigiano (1780-1846)*; in *Studi storici*, XVIII (Pisa, 1909), pp. 3-108, il quale pubblica altresì, in appendice, 61 lettere inedite di Maria Luigia al Mistrali, i cui autografi si conservano tuttora in Parma presso il nipote bar. Attilio Mistrali.

qualità di Ricevitore generale delle Finanze pel Dipartimento del Varo, e che, com'è noto, costituì una società per la pubblicazione della *Storia d'Italia* del Botta, dal fine di quella del Guicciardini al 1789. Anche del conte Littardi vi sono alcune lettere nel carteggio Pezzana, relative al Botta: e precisamente due circolari a stampa, colle quali il nobile amico e mecenate teneva informati i sottoscrittori del procedere dell'opera bottiana: ed una lettera al Pezzana. Le facciamo qui seguire come non inutile complemento alle lettere del Botta; e chiudiamo questa breve comunicazione con un'appendice alla diligente bibliografia che dell'epistolario del Botta diede il dott. Salsotto nel 1901, registrando le stampe di lettere del Botta venute in luce dipoi, e alcune poche anteriori, sfuggite al Salsotto.

1.

CONTINUAZIONE
della
Storia d'Italia
dal fine di quella
del Guicciardini
sino al 1789
da
CARLO BOTTA

Tolone (Dip.to del Varo), 16 Giugno 1829.

Preg.mo Signore,

Nei primi giorni del mese corrente mi è stato rimesso un nuovo manoscritto del Sig.r Carlo Botta, il quale così ha terminato e riposto nelle mie mani il sesto volume dell'opera, che sta scrivendo per soddisfare ai desiderj della Società, della quale V. S. fa parte. Questo indefesso scrittore nel farmi fare un simile ricapito mi da a conoscere, che crede che il suo lavoro per essere condotto a compimento non richiederà oramai più di tre altri nuovi volumi.

Mi stimo fortunato di poter portare queste informazioni alla cognizione di V. S., e colla più distinta stima mi protesto

D. V. S.

L'Osseq.mo e Dev.mo servo
C.te T. Littardi.

(*Ms.*) Sig.r Angelo Pezzana,
Parma.

2.

CONTINUAZIONE
della
Storia d'Italia
dal fine di quella
del Guicciardini
sino al 1789
da
CARLO BOTTA

Tolone (Dip.[to] del Varo), 16 Novembre 1829.

Preg.[mo] Signore,

Continuando ad informare V. S. del progresso che va facendo l'opera intrapresa dal Sig.[r] Carlo Botta, ho l'onore di prevenirla, che questo Autore avendo terminato il manoscritto del settimo volume l'ha fatto deporre nelle mie mani, ove sarà mia cura di custodirlo coi manoscritti precedenti fino a che il totale compimento dell'opera permetta di eseguirne la stampa.

La prego di credermi colla più distinta stima D. S. V.

L'Osseq.[mo] e Dev.[mo] servo
C.[te] T. Littardi.

(*Ms.*) Sig.[r] Angelo Pezzana,
a Parma.

A tergo della prima delle due circolari riferite trovasi, aggiunto a mano, il seguente elenco degli associati Parmensi all'opera del Botta:

Associati concorsi a formare un'Azione per la Storia d'Italia che pubblicasi da Carlo Botta

Biblioteca Ducale	per	${}^{1}/_{20}$ di fr.	100
Pezzana (Cav.[e] Bibl.[o])	"	id.	—
Lombardini (Prof.[e] e V. Bibl.[o]) . .	"	id.	—
Lopez (Direttore del Museo d'Antichità)	"	id.	—
Oppici (Avv.[o] Luigi)	"	id.	—
Ortalli (Ermenegildo)	"	id.	—
Bosi (Dottore)	"	id.	—
Casa (Ispett.[e] Antonio)	"	id.	—
Galeotti (Ingegnere)	"	id.	—
They (Avvocato)	"	id.	—
Dalla Rosa (Eredi)	"	id.	—
Cornacchia (S. E.)	"	id.	—
Bruoli (Segret.[o] Aless.[o])	"	id.	—
Bolla (Barone Podestà)	"	${}^{2}/_{20}$	—
Mistrali (Delegato, Barone)	"	${}^{3}/_{20}$	—
Fainardi (Presidente)	"	${}^{1}/_{20}$	—
Olivieri (Domenico)	"	${}^{1}/_{20}$	—

Ventesimi N. 20 da 5, L. 100
Cambio del 4 ${}^{1}/_{2}$ p. ${}^{0}/_{0}$ 4,50

L. 104,50

E a tergo della seconda, il conte Littardi scrisse la seguente lettera al Pezzana:

3.

Preg.[mo] Signore

Tolone, 19 Nov. 1829.

Profitto di questa lettera per spedirle la ricevuta della 4[a] rata della di lei sottoscrizione all'Opera, che va componendo il Botta. Fino dal mese di Maggio scorso feci compiere quest'obbligo alla Cassa del Caccia, e mi sono sempre scordato di avvisarne V. S. Per il rimborso potrà ricapitarmelo a Genova, ove sto per recarmi tra pochi giorni, ed ove mi troverò ai 4 oppure ai 5 del mese prossimo.

Il Botta mi ha incaricato di ricorrere in di lui nome alla di lei gentilezza perchè, se esiste a di lei cognizione negli archivi di Parma o altrove qualche documento, o manoscritto o stampato sull'interdetto del 1748 (*sic*) (1), si compiaccia indicarglielo, ed anche mandarglielo. Il Cav. Poggi aveva promesso di scrivere a V. S. per questo oggetto, ed anche per chiederle certe notizie e certi libri intorno ad esso, che abbisognano all'Autore onde poter parlare convenevolmente di questa materia. Si compiaccia, car.[mo] Sig.[e], di rispondere su di questo proposito al Botta più diffusamente e più pienamente che può, e prenda nota che l'indirizzo del Botta è il seguente: Paris, place S.[t] Sulpice, N.° 8.

Gradisca i miei sinceri complimenti e mi creda

Suo dev.° ed obbl.° servo
T. C. Littardi.

(fuori) A Monsieur
M.[r] Angelo Pezzana
Bibliothécaire de la Ville
(Italie) de Parme.

Il Botta che, per le strettezze in cui versava, desiderò e chiese un posto, pubblico o privato, in Parma, e, ove lo avesse ottenuto, avrebbe, con altri illustri Piemontesi — il Paciaudi, il Bodoni, il De Rossi, — cresciuto lustro alla città, vide deluse tutte le sue speranze, e non ebbe (fatta qualche rara eccezione) molta fortuna presso i parmigiani e i piacentini, neppure dopo la sua morte. Di questi ultimi, il più illustre, Pietro Giordani, che in altri tempi gli avea dimostrato una deferenza rispettosa,

(1) La data *1748* è cancellata con un tratto di penna, perchè errata. Leggasi *1768*.

scrivendo a G. B. Maggi da Milano (16 febbraio 1816): “ Il nostro giornale [la *Biblioteca Italiana*] è cosa sul nascere, nè può sapersi quale fortuna e quale profitto possa avere; ma se Botta potesse e volesse applicarsi, sarebbe accettato più come un genio che come un bravo uomo... Non m'induco a scrivergli io di ciò, non conoscendo se non la sua penna; nè essendomi riuscito quel che desideravo di farmegli prima conoscere; nè oso famigliarizzarmi troppo speditamente con uomo che tanto riverisco „ (1): — pubblicata la *Storia*, non esitava ad unirsi al coro dei denigratori, prima ancòra di leggerla. Così infatti ne scriveva da Firenze, a un parmigiano, Venanzio Dodici (27 agosto 1824): “ Non ho letto la Storia del Botta: e vedo che per un gran pezzo non avrò tempo di leggerla. Ma se ne dice assai male. È rimproverata di molta inesattezza ne' fatti; e chi ha pratica de' luoghi, delle cose, delle persone, vien notando i molti errori e grossi. Anche è biasimata per la viltà delle massime, tanto più indegne allo scrittore della storia Americana. E questo biasimo gliel'ho sentito dare da persone che non dovrebbero pensare come me, o non parlare almeno come me. Figúrati dunque che deve essere „ (2). — Ed Angelo Pezzana (cioè lo stesso, a cui sono dirette le due lettere del Botta più sopra pubblicate) così scriveva a Camillo Ugoni, dopo la morte del Botta (Parma, 31 luglio 1844): “ Quanto alla maniera con cui volete trattare l'articolo dell'Affò, parmi la sicura, e vi farete buona prova alla barba del Botta, il quale, se manterrassi in riputazione di forbito scrittore, certo non potrà mai aver quella di storico imparziale e fededegno „ (3): censura, quest'ultima, di parzialità, che il Botta, se vivo, avrebbe rimbeccato ben vivacemente al bibliotecario parmense, memore di ciò che sentiva e scriveva di sè e dell'opera sua. “ Chi volesse giudicare di quest'opera

(1) Lettera inedita del GIORDANI, pubbl. da E. REGIS nelle *Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino,* serie 2ª, tom. LIII (1903). Sc. mor., p. 178.

(2) Cfr. GIORDANI, *Epistolario*, ed. A. GUSSALLI, vol. V (Milano, 1854), pp. 303-304. E che cosa, anche di peggio, ne scrivesse il Giordani dopo averla letta, veggasi in una lettera al co. Antonio Papadopoli, scritta molto più tardi (Piacenza, 23 settembre 1843). Cfr. *Epistolario* cit., vol. VII (Milano, 1855), p. 76.

(3) A. PEZZANA, lett. cit., in: C. UGONI, *Della letteratura italiana nella seconda metà del sec. XVIII*. Milano, 1857, vol. V, p. 627.

[cioè della *Storia d'Italia dal 1789 al 1814*, ch'è appunto quella di cui parlava il Giordani] da quelle che corrono alla giornata, certamente s'ingannerebbe a gran partito; ella è opera da sè e che non somiglia ad alcun'altra; ella non è scritta secondo gli umori di questa parte o di quella, ma secondo i dettami della giustizia eterna. Gli uomini non vi son nulla, ma solo o il bene o il male, o la virtù o il vizio, o l'innocenza o il delitto, o la giustizia o l'ingiustizia vi si considera, e ciò non secondo gli umori e le parzialità delle sètte, ma secondo quello che ha stabilito il consenso universale di tutti gli uomini e di tutti i secoli „ (1). Il disegno dell'opera era sì vasto; le condizioni in cui l'autore la scriveva così difficili; ed i tempi, di cui dovea discorrere, così recenti, e perciò mancanti del controllo che solo il tempo può dare, che non è a stupire se il Botta potè incorrere più volte in errori di fatti o di giudizi; ma egli fu sempre — come professava ad alta voce — profondamente giusto e imparziale, e degno veramente di essere chiamato (*laudari a laudato viro, summa laus est*) " il più grande de' nostri storici moderni „. Atto Vannucci, cui spetta questo giudizio, così scriveva dello storico piemontese in occasione del monumento erettogli a S. Giorgio Canavese dal barone Carlo Marochetti: " Sarebbe stato bello il vedere tutte le provincie d'Italia concorrere a gara a rendere l'estrema testimonianza di reverenza e di affetto ad un uomo che tanto amò ed onorò ciascuna di esse. Sarebbe stata una di quelle solenni dimostrazioni di gratitudine che illustrano gli individui e i popoli, e sono feconde di belle speranze. Ciò era necessario oggi, che presso certuni è venuto di moda il vituperare con frasi maligne lo storico a cui l'Italia moderna non vanta l'uguale, e l'uomo che spese l'intera vita a combattere con tutte le forze a sostegno dell'umanità, della libertà e della ragione. Certamente era opera benefica della critica il notare i difetti dello scrittore: e alcuni lo fecero con ingegno leale, e mostrarono quando si dilunga dal vero, quando tralascia alcune vicende importanti, quando è incerto nelle opinioni, quando contradice a sè stesso, quando non apprezza adeguatamente certi tempi e certi scrittori. Tali difetti era bello e

(1) *Lettere inedite di* C. Botta, ed. C. Magini. Firenze, 1900, p. 55.

necessario notare: ma era indegno vituperarlo perchè amava gli esempi dell'antica libertà, perchè faceva guerra alle istituzioni della barbarie, che da taluni, a nome della filosofia d'oggi, si vorrebbero richiamate in vigore. E questi sono quei sofisti medesimi i quali, come il Botta medesimo diceva, hanno perduto la greca e latina libertà, e perderanno ancòra la libertà europea, se non vi è posto riparo „ (1).

E poichè i ' sofisti ' d'avanti il quarantotto non sono neppur oggi — dopo tanta mole di eventi — scomparsi, ma hanno col tempo prolificato, le savie e sante parole del vecchio scrittore ci suonano all'orecchio come un mònito solenne, per la difesa dell'oggi, per la sicurezza del dimani.

IV.

Giunte alla bibliografia delle lettere a stampa di C. Botta (2).

1838.

Lettere d'illustri Piemontesi [pubbl. da] PIER-ALESSANDRO PARAVIA [e dedicate] *a Pietro Giordani*; in *Il Subalpino, giornale di scienze, lettere ed arti*, a. II, vol. II (Torino 1838), pp. 560-573; ed estratto, pp. 14, in 8°.

Nell'anno immediatamente successivo a quello della morte del Botta il Paravia pubblicò, nel periodico torinese *Il Subalpino*, tre lettere dello storico, dedicandole a Pietro Giordani, “ sì come quegli, che tanto valete (scriveva il P.) per vigor di concetti e di stile, quanto il Botta per magnificenza di lingua e di cose „ (p. 1). Esse sono indirizzate “ a

(1) A. VANNUCCI, recensione di alcune pubblicazioni riguardanti Carlo Botta, ed il figlio Paolo Emilio, in *Archivio storico ital.*, Appendice, vol. II (Firenze, 1845), p. 575.

(2) Cfr. CARLO SALSOTTO, *Per l'epistolario di Carlo Botta: nota*; in *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino*, vol. XXXVI (1900-01), pp. 969-996. Gli articoli di questa buona bibliografia delle lettere a stampa del Botta non sono numerati; quindi non ci è stato possibile dare (come forse sarebbe stato utile) alla nostra ' appendice ' una numerazione consecutiva a quella della bibliografia maggiore.

quel cultissimo giovane Veneziano, nel quale voi ed io [*il Giordani ed il Paravia*] abbiamo posto sì vivo e meritato amore „ (ibid.), ed in cui (sebbene indicato soltanto coll'iniziale [“ Conte P.... „]) si deve certo riconoscere il conte Antonio Papadopoli. Sono scritte da Parigi, 28 marzo 1828, 25 gennaio 1831, e da Vaux près Meulon, 17 luglio 1831; e sono notevoli per particolari sulla vita che il Botta conduceva in Francia, per notizie sui figli, sulla villa di Vaux, ecc. Non ci è noto che fossero riprodotte in altre raccolte. — Alle tre lettere del Botta seguono poi: una lettera del Paciaudi a Gio. Bernardo De Rossi; la risposta del De Rossi al Paciaudi; una lettera di Camillo Federici a Michelangelo Morano (Torino); ed un brano di lezione del Paravia, *Del Villemain e dell'Alfieri* (pp. 12-14). — La pubblicazione del Paravia, così iniziata, non ebbe poi altro sèguito.

1858.

Operette bibliografiche del cav. Giuseppe Molini, *già bibliotecario Palatino, con alcune lettere di distinti personaggi al medesimo, precedute dalle notizie biografiche di esso scritte da* G. A. - Firenze, coi tipi di M. Cellini, 1858: pp. LXIII-361, in 8°, con ritr.°.

La *scelta di* (50) *lettere dirette a Giuseppe Molini da vari distinti personaggi* (pp. 43-106), che viene dopo le *Notizie biografiche* e gli *Annali delle opere pubblicate* dal Molini (pp. VII-LXIII e 1-42) e precede le *Operette* (cioè le *Aggiunte e correzioni al Panzer e al Brunet*, pp. 107-331), comprende anche due lettere del B. indirizzate al Molini, da Parigi il 21 ott. 1825 (pp. 68-69, n.° 17), e il 14 marzo 1831 (p. 84, n.° 29), di cui notevole specialmente la prima, pel proposito che il B. vi riconferma, di non pubblicare in italiano la *Storia dei popoli d'Italia*, da lui data fuori in francese, e pel cenno che vi si legge di un “ ritratto del Tasso „.

1888.

Marco Minghetti, *Miei Ricordi.* — Torino, L. Roux e C. editori, 1888, vol. I (a. 1818-1848), p. 49.

Vi sono pubblicate due lettere, prima inedite, al Minghetti, scritte da Parigi il 17 giugno 1836 e il 29 marzo 1837. Nella prima, il B. ringrazia di alcune copie ricevute del proprio ritratto; nella seconda, dà un giudizio sui *Sermoni* di Paolo Costa. Quest'ultima fu quasi per intero riprodotta dal Guidetti [v. più oltre, ad a. **1914**], p. 237, n.° XXVII.

1900.

Lettere inedite di CARLO BOTTA, *con prefazione e note di* CATERINA MAGINI. — Firenze, Successori Le Monnier, 1900; pp. 104, in 16°.

Non avendo avuto notizia (come pare) della raccolta di lettere bottiane messa assieme dal Flechia, di cui abbiam detto più sopra, l'a. della presente raccoltina aveva posto mano " a riunire tutte le lettere che si trovavano a stampa, per aggiungervi anche quelle che potessi ritenere d'inedite „ (p. 4). In questo volumetto però, a cui avrebbe dovuto " tener dietro fra poco un altro di maggior mole „, che poi non vide la luce, di inedite non ne sono pubblicate che 40, di cui la maggior parte (25) indirizzate al prof. Giuseppe Grassi di Torino, dal 1802 al 1830, ricavate dal codice n.° 265 della Biblioteca del Re in Torino. Le altre quindici sono indirizzate: all'ab. Gio. Battista Zannoni di Firenze (5): 7 luglio 1824, 1° nov. 1828, 26 genn. e 8 apr. 1830, 26 ag. 1832; — a Gino Capponi (3): 25 febbr. e 24 marzo 1827, 7 nov. 1828; — a Leopoldo Cicognara (1): 18 apr. 1818; — a Modesto Paroletti, Torino (1): 28 febbr. 1820; — al barone Friddani, siciliano (1): 2 ott. 1825; — a Fruttuoso Becchi (1): 1 lug. 1833; — a G. P. Vieusseux (3): 29 marzo 1826, 17 marzo e 25 ag. 1832. Queste 15 lettere sono tratte dagli autografi della Bibl. Nazionale di Firenze e della R. Accademia della Crusca. Delle tre dirette al Capponi, una sola era inedita: le altre due erano già state pubblicate nell'Epistolario del Capponi. Tutte sono disposte in ordine cronologico, senza numerazione progressiva.

1901.

GIUSEPPE ROBERTI. *Un anno della vita di Carlo Botta (Giugno 1799-Giugno 1800)*; in *Nuova Antologia*, 16 febbr. 1901 (4ª serie, vol. XCI), pp. 732-741.

Valendosi di " molto materiale inedito „ — cioè di " documenti e lettere degli Archivi Torinesi „, di " un copiosissimo copialettere inedito „, posseduto dal comm. Leone Fontana, di " documenti trascritti... agli Archivi dell'Isère „ dal prof. Nicollet del Liceo di Grenoble, di " carte del bisavolo paterno, Gio. Giulio Robert, amicissimo del Botta „, e anch'egli emigrato e delegato al Corpo Legislativo; — l'a. ricostruisce uno dei periodi più fortunosi della vita del B., producendo alcuni brani di lettere di lui a Gio. Giulio Robert, a Giuseppe Cavalli e

a Teresa Paroletti. Su questo stesso periodo della vita del B., veggansi le due importanti pubblicazioni di G. Sforza, indicate più oltre [ad a. **1909**].

1903.

Dott. Emilia Regis, *Studio intorno alla vita di Carlo Botta tracciato con la guida di lettere in gran parte inedite*; nelle *Memorie d. R. Accad. d. Scienze di Torino*, ser. 2ª, tom. LIII (1903), Sc. mor., pp. 147-180.

Le lettere inedite del B. pubblicate nell'*Appendice* (pp. 178-180) sono cinque sole: 1 a Giuseppe Grassi (28 giugno 1817); — 2 a Stanislao Marchisio (8 apr. 1823 e 14 marzo 1836); — 1 a Giovanni Fabbroni (24 dic. 1818); — 1 a Carlo Ignazio Giulio (6 dic. 1833); più altre due al Marchisio, di cui non sono pubblicati che degli estratti (18 nov. 1825 e 24 lug. 1828). Ma l'interesse principale di questa memoria consiste nell'essere *tracciata* (come il titolo annunzia) *con la guida di lettere in gran parte inedite*: cioè del " copioso carteggio inedito dello storico canavesano raccolto (in parte vivente ancora lo storico) da Stanislao Marchisio (1773-1859), il noto commediografo, amico pure del Pellico e del Foscolo. Tale carteggio, donato dal Marchisio stesso fin dal 1857 al compianto Giovanni Flechia, l'insigne glottologo, trovasi ora in possesso del D.r Giuseppe Flechia, " alla cui gentilezza io debbo i documenti che diedero origine al mio scritto „ (p. 147, nota (*)); e di codesti ' documenti ', cioè delle lettere inedite del B. facenti parte della raccolta Flechia, l'a. si vale qua e là, producendone dei brani, e indicando sempre, in nota, quando le lettere sono inedite. — Tutta la memoria poi consta di due soli capitoli: I. *La vita di C. B. attraverso il suo epistolario.* — II. *Giudizi di C. B. su alcuni scrittori suoi contemporanei.*

Emilia Regis, *Carlo Botta e Teresa Paroletti*; in *Giornale storico e letterario della Liguria*, vol. IV (Spezia 1903), pp. 243-271.

Questo studio (scrive l'a.) " trae la sua origine dalle lettere scritte da Carlo Botta a Teresa Paroletti. Di queste lettere, che in tutto sommano a trentatrè, sei già videro la luce in raccolte di lettere bottiane e si riferiscono agli anni giovanili del Botta; ventisette invece, tutt'ora inedite, fan parte del copioso carteggio donato dal commediografo Marchisio al compianto prof. Flechia e si trovano ora in possesso del D.r Giuseppe Flechia „ (pp. 243-44 *n.*). La sig.na R. ne produce molti brani, ma nessuna integralmente. — Teresa Paroletti che

il B. conobbe a Torino ne' suoi anni giovanili, andò sposa il 15 ottobre 1794 all'avv. Giuseppe Roggeri, amico del B., che abitava alla Morra; ma la relazione epistolare tra loro continuò, per circa un quarantennio, anche dopo quest'epoca; si fece più intensa dopo la morte della moglie del B., Antonietta Viervil; e si protrasse poi sino all'ultimo anno di vita del B. Si può dire che questa interessante pubblicazione costituisca una pagina inedita della vita del B.

1905.

Lettere di Piemontesi illustri: VITTORIO EMANUELE II - BALBO - BOTTA - CAVOUR - CIBRARIO - COLLEGNO - D'AZEGLIO - GIOBERTI - GRASSI - LAMARMORA - LANZA - MANNO - PELLICO - PEYRON - REGALDI [pubbl. da A. D'ANCONA per *Nozze Vinaj-Tullio: Torino, VI aprile MDCCCCV*]. — Pisa, F. Mariotti, 1905; pp. 21, in 8° (Ediz. di LXXV ess. fuori di commercio).

La III delle quindici lettere qui pubblicate è di C. Botta, e diretta al co. Vittorio Sallier della Torre, Ministro degli affari esteri del Re di Sardegna (Parigi, 20 genn. 1832), per ringraziarlo (e ringraziare per suo mezzo, il Re) " della nuova grazia compartitami da essa S. M. col concedermi una delle pensioni di annue lire mille attribuite all'Ordine civile di Savoja " (p. 9). È tratta., come quasi tutte l'altre della raccoltina nuziale, dall'autografo dell'Archivio di Stato in Torino.

1909.

GIOVANNI SFORZA, *L'Amministrazione generale del Piemonte e Carlo Botta [1799]: memoria*: in *Memorie d. R. Accad. d. Scienze di Torino*, ser. 2ª, tom. LIX (Torino 1909), Sc. mor., pp. 215-285.

Carteggio dell'Amministrazione generale del Piemonte con Carlo Botta e Gio. Giulio Robert, suoi Agenti a Parigi, edito e illustrato da GIOVANNI SFORZA; ibid., pp. 286-339.

Nella seconda di queste due pubblicazioni, che si seguono e si integrano a vicenda, sono pubblicati per esteso i dispacci che C. Botta e Gio. Giulio Robert, nella loro qualità di agenti dell'Amministrazione generale del Piemonte a Parigi, diressero a quest'ultima (e per essa per lo più al segretario capo avv. Angelo Pico), dal 30 pratile a. VII (= 18 giugno 1799) al 4 vendemmiatore a. IX (= 26 sett. 1800). Essi sono ricavati da un copialettere originale che conservasi nell'Archivio di Stato di Torino, e sono, complessivamente, in numero di 27;

quasi tutti firmati simultaneamente dal B. e dal Robert, meno 7, firmati dal solo B. (pp. 328, 331, 333-34, 334-35, 336, 336-37, 337-38), e uno, l'ultimo, firmato dal B., dal Robert e da Giuseppe Cavalli (pp. 338-39).

Nella memoria illustrativa poi, che precede (*L'Amministrazione generale del Piemonte, ecc.*), sono prodotte alcune altre lettere del B. e del Robert all'Amministrazione (pp. 251, 253-54, 259-60, 265, 267), e una del solo B. scritta da " Paris, 3 Messidor, a. VII „ (= 21 giugno) al ministro Talleyrand, per protestare contro lo sfratto che la polizia del Direttorio voleva intimargli da Parigi (p. 255); e, in appendice, due rapporti firmati contemporaneamente dal B. e dal Robert: l'uno, *État du Piémont depuis le passage du Tesin par les Austro-Russes jusqu'à l'époque du 3 prairial*, in data di " Paris, le 17 prairial, a. VII „ (= 5 giugno 1799), pp. 280-83: l'altro, *Sur les secours qu'il est nécessaire d'envoyer à l'armée pour rétablir les affaires en Piémont et des ressources qu'on pourroit en tirer ensuite*, in data di " Paris, le 19 prairial, a. VII „ (= 7 giugno 1799), pp. 283-85: rapporti, che furono dal B. e dal Robert presentati a Giuseppe Maturino Musset per invito del Talleyrand (cfr. p. 254).

GRAZIANO PAOLO CLERICI. *Intorno a otto lettere inedite di Carlo Botta a Vincenzo Mistrali*: in *Il Risorgimento italiano: rivista storica diretta dal prof.* B. Manzone, vol. II (Torino 1909), pp. 593-615, con ritr.° del Mistrali.

Le otto lettere, tratte dall'archivio privato della famiglia Mistrali in Parma, vanno dal 21 ott. 1811 all'11 genn. 1816. " Le due prime tra queste lettere (scrive l'editore) sono indirizzate a Vincenzo Mistrali a Firenze, quand'era Direttore del deposito di Mendicità; le tre seguenti al Mistrali sottoprefetto di Grosseto nel Dipartimento dell'Ombrone: la sesta al Mistrali fuggiasco; la settima e l'ottava, tragicamente brevi, al Mistrali governatore di Parma e Guastalla ne' primi tempi del governo della duchessa Maria Luigia d'Austria „ (p. 600). Il prof. C. fa seguire alle lettere un garbato schizzo biografico-letterario sul bar. Vincenzo Mistrali (n. 1780; m. 1846), che non solo ebbe influenza grande in Parma, come Governatore di Parma e Guastalla (1814-1821), poi come Primo Ministro di Maria Luigia (1831-1846); ma fu anche gentile cultore della poesia. Intorno al Mistrali, veggasi U. MANCUSO, *Cenni su V. Mistrali, ministro e poeta Parmigiano (1780-1846)*: in *Studi storici*, ed. Crivellucci, vol. XVIII (Pisa 1909), pp. 3-108, con un'Appendice di 61 lettere di Maria Luigia a lui dirette.

Graziano Paolo Clerici, *Intorno a undici nuove lettere inedite del Botta a Giambattista Maggi e Giuseppe Poggi*; in *Il Risorgimento italiano*, vol. II (Torino 1909), pp. 761-780.

Le lettere a Giambattista Maggi, piacentino (n. 1767; m. 1850), deputato del Dipartimento della Trebbia al Corpo Legislativo, poi Consigliere di Stato e governatore di Piacenza, " amico costante e gentile del Botta ", che sovvenne " in ogni occasione ", sono 9, e vanno dal 29 genn. 1815 all'8 lug. 1827. Una sola era pubblicata, la sesta (28 ag. 1816), nell'Epistolario del Giordani; le altre, inedite, sono tratte dagli originali, presso l'avv. G. B. Maggi, nipote del destinatario. Le lettere a Giuseppe Poggi, pure piacentino (n. 1761; m. 1842), deputato del Dipartimento del Taro al Corpo Legislativo, incaricato d'affari della duchessa Maria Luigia per la liquidazione finanziaria dei ducati di Parma e Piacenza, sono due sole: del 7 nov. 1818 e del 26 maggio 1824. Il Poggi, anch'egli amicissimo del B. durante il lungo suo soggiorno a Parigi, si rese singolarmente benemerito degli ex-ducati Parmensi (oltre lasciti e doni insigni ad essi fatti), per l'importante parte avuta nella restituzione delle opere d'arte asportate dai francesi (v. più sopra, p. 15 *n.* 2). — Anche in questa pubblicazione il prof. C. fa seguire al testo delle lettere alcuni cenni biografici sul Maggi (pp. 776-78) e sul Poggi (pagine 778-80). La stessa pubblicazione fu poi integralmente riprodotta in altra rivista, e col medesimo titolo:

1910.

Graziano Paolo Clerici, *Intorno a undici lettere inedite del Botta a Giambattista Maggi e a Giuseppe Poggi*; in *Bollettino storico Piacentino*, a. V (Piacenza 1910), pp. 119-127 e 152-166.

A pp. 119-127 trovansi i cenni illustrativi del prof. C., e a pp. 152-166, il testo delle lettere. Non si comprende perchè, nella breve avvertenza premessa dalla Direzione della rivista a queste ultime (p. 152), esse sieno dette " tutte inedite ", mentre avevano visto la luce nella pubblicazione precedente, qui completamente taciuta.

Arturo Bersano, *Alcune lettere inedite di Carlo Botta*; in *Atti d. R. Accad. d. Scienze di Torino*, vol. XLVI (1910-11), pp. 12-28.

Sono in tutto otto lettere, dirette per la massima parte (6) all'abate Francesco Bonardi, che, insieme al B. ed al teologo Guglielmo

Leone, aveva " fatto parte di quelle prime società segrete, che in Piemonte avevano preparato la venuta dei Francesi ed i successivi avvenimenti politici „ (p. 13). Una sola (II) spetta all'a. 1812; le altre cinque (IV-VIII) sono degli a. 1832 e 1833. Delle due rimanenti, una (I), mancante di indirizzo, è certamente diretta a Gio. Battista Marochetti, amico del B. e del Bonardi, " già sottoprefetto a Crescentino e a Chivasso, cugino di quel Vincenzo Marochetti che in Parigi fu fratello al B., come i suoi figli, Paolo e lo scultore Carlo, ebbero il B. in luogo di padre „ (p. 14); — e l'altra (III), pure mancante di indirizzo e di data, è probabilmente diretta da Parigi, 23 maggio 1817, all'ab. Datta, che con altri amici aveva chiesto il suo consenso per la stampa delle sue lettere. In quest'ultima lettera è notevole il seguente brano: " Io non ricevei richiesta nissuna, dico recente, per dar il mio consenso onde si stampino alcune mie lettere famigliari. Pure vi rispondo in questo che non mi posso risolvere ad acconsentire che si stampino, sia perchè poche sono quelle che mi sia messo per farle, sia perchè il loro argomento è per lo più nullo e ne ritrarremmo più vergogna che lode. Dopo la morte mia, se i miei figliuoli e coloro ai quali il mio nome non sarà discaro, crederanno che esse portino il prezzo di veder la luce del mondo, e se alcuno le avrà serbate, chè per me non ne tengo scartafaccio, si le potranno stampare „ (p. 24). — Queste lettere, che il Bersano pubblica, — insieme ad altre due lettere di G. Leone e di Paolo Marochetti riguardanti il B., — sono tratte dalle carte dell'ab. Bonardi, conservate presso la nipote, sig.^{na} Lia Bonardi.

G. Gallavresi. *Tra gli autografi: Lettere d'amici e nemici di Alessandro Manzoni*: in *Il Libro e la Stampa*, N. S., a. IV, fasc. 4-6 (lug.-dic. 1910), pp. 172-183.

Non propriamente 'nemico' del Manzoni, ma profondamente avverso al romanticismo, fu Carlo Botta; e di lui il G. pubblica qui quattro lettere, quasi tutte assai brevi. " Queste letterine (scrive l'ed.), da me comprate all'asta Muoni, si riferiscono, salvo la prima, all'ultimo periodo della vita del B.: non hanno del resto particolare riferimento alle questioni religiose e letterarie che separarono i due antichi amici „ (p. 181). La 1^a è diretta al Ginguené (s. l. e s. a., 27 dic.); la 2^a a Antonio Disperati di Livorno (Parigi, 21 maggio 1828); la 3^a al Roggieri, Parigi; la 4^a, al co. Sclopis (Parigi, 27 ott., s. a.). Queste quattro lettere sono le stesse che il dott. Salsotto indica nella sua bibliografia colle segg. parole: " Della lettera 21 maggio 1828 trovai l'autografo nella collezione lasciata dal cav. Damiano Muoni, già archivista nel R. Archivio di Stato di Milano, e che è tuttora conservata dalla sua famiglia. Io debbo render grazie al figlio di lui, Guido, che

gentilmente mise a mia disposizione questa ed altre tre lettere, pure autografe, del B., cioè quanto del nostro storico si trova nella collezione del suo defunto padre „ (p. 978, *n.* 2). La lettera al Disperati era però già stata pubblicata in: *Dodici lettere di* C. Botta *edite p. cura di* Giuseppe Campori. Bologna, 1867, p. 20 (ediz. di soli 202 esempl.).

1913.

Antonio Boselli, *Il carteggio Bodoniano della Palatina di Parma.* — Parma, presso la R. Dep. di storia patria, 1913; pp. 132, in 8° (estr. d. *Archivio storico p. le prov. Parmensi*, N. S., vol. XIII [1913], pp. 157-288).

A pp. 97-98 il Boselli pubblica per la prima volta una lettera del B. a Giambattista Bodoni (Parigi, 4 lugl. 1810), tratta dal carteggio di quest'ultimo conservato nella Bibl. Palatina di Parma, e non “ priva di qualche interesse specialmente là dove il B. difende le sue idee sulla lingua „ (p. 98 *n.*). Con essa il B. inviava al Bodoni la sua *Storia della guerra dell'indipendenza degli Stati Uniti d'America.*

1914.

Scritti musicali, linguistici e letterari di Carlo Botta, *uniti e ordinati per cura di* Giuseppe Guidetti. Vol. unico. — Reggio d'Emilia, Tip. editrice della *Collez. storico-letteraria*, 1914; pp. xxxii-398, in 16° (In: ‘ Collezione storico-letteraria di opp. italiane ined. o rare ’).

Fra gli scritti vari del B., qui insieme riuniti e ordinati, vi sono naturalmente anche molte lettere, pubblicate, ora integralmente, ora per estratto, e ricavate da varie collezioni, come il compilatore dichiara nel *Proemio* (p. xiii): “ Le Lettere dell'insigne storico, da me qua e là riprodotte, interamente o parzialmente, secondo il bisogno, ho tolte dalle raccolte, che ho già indicate qui oltre nella mia *Bibliografia* coi numeri 4, 10, ecc. „; ma l'ed. si limita a questo rinvio complessivo, e non indica onde ogni lettera sia ricavata. Esse poi sono distribuite, non cronologicamente, ma ne' vari gruppi che gli è piaciuto stabilire, sotto diverse rubriche: *Intorno la lingua e lo stile* (p. 63 sg.); *Su A. Cesari e l'opera sua* (p. 86 sg.); *Della lingua italiana e del dialetto Toscano* (p. 91 sg.). Nulla essendovi d'inedito, torna inutile indicare le lettere qui ripubblicate, in modo preciso.

1915.

Mario Zucchi, *Lettere inedite di Carlo Botta a G. B. Balbis.* — Lucca, tip. editrice Baroni, 1915; pp. 271-88 (estratto d. *Miscellanea di studi storici in onore di Gio. Sforza*).

Le lettere qui pubblicate, in numero di 10 (le prime tre in francese, le altre in italiano), sono tutte indirizzate (come il titolo annunzia) a " Gio. Battista Balbis, botanico illustre, nato a Moretta il 17 nov. 1765, morto a Torino il 13 febbr. 1831 ". Il Balbis " era stato egli pure compromesso nel complotto del 1794 per le rivelazioni del medico Barolo... L'identità delle vicende e delle aspirazioni politiche aveva fatto di lui e del Botta due amici, la cui salda affezione durò quanto la vita " (p. 278). Le lettere qui pubblicate sono però, ciò malgrado, tutte di un solo anno, il 1826 (dal 25 gennaio al 5 dicembre); ma sono, probabilmente, parte di un carteggio maggiore. In esse non v'hanno che accenni alla vita che il B. conduceva a Parigi, a' suoi figli, alla Continuazione della *Storia* del Guicciardini, che stava scrivendo, ai sottoscrittori, ecc. Quanto alla *Storia*, è curiosa una confessione del B. sul suo modo di scrivere: " Je mets ordinairement plus de tems à écrire la première phrase qu'à écrire tout l'ouvrage. Par exemple, j'ai mis quatre ans pour écrire la première phrase de mon histoire d'Amérique, et la rédaction des quatre vol. qui composent l'ouvrage, n'a duré qu'un an " (p. 281). E notevoli pure le premure fatte ripetutamente per avere dal co. Prospero Balbo " una notizia, quanto più sia possibile, particolarizzata " sulle cose operate dal ministro conte Bogino (pp. 284-87). — Sono tratte dal ms. della Biblioteca del Re in Torino (alla quale il ch. editore appartiene), segn. *Varia 263. I.*

Le nozze della minorenne.

Nota di SIRO SOLAZZI.

Vi fu nella storia del diritto romano un tempo durante il quale per il matrimonio della minorenne si richiese il consenso del curatore?

Il problema ha occupato la letteratura più recente: nacque col libro Siro-Romano, le cui disposizioni il Bruns non credette fossero conformi alle leggi romane; si riprodusse col Pap. Lips. 41 ed io giudico che si possa risolvere con le costituzioni del Teodosiano e con la critica di alcuni testi della compilazione giustinianea. Anzichè dalle nuove fonti, gli elementi più certi per la soluzione definitiva sono dati forse dal vecchio *Corpus iuris*, a chi vi frughi dentro coi più perfezionati strumenti della nostra scienza.

***

L. 88, P. 47, Ar. 58 e Arm. 59 dichiarano che l'orfana minorenne non può contrarre matrimonio senza il consenso del suo curatore. Tutti questi passi cominciano col domandarsi se all'orfana sia necessario il consenso della madre e dei fratelli, ma rispondono che basta il consenso del curatore, eccetto Arm. 59 che sembra esigere il consenso tanto della madre e dei fratelli quanto del curatore (1).

(1) I nuovi manoscritti confermano questo resultato: vedansi R II 59 ed R III 88 in *Syrische Rechtsbücher*, Berlin, 1907, Bd. I. Anzi R III 88, secondo la ricostruzione del Sachau (*ivi*, p. 207), direbbe che la fanciulla " darf " sich nicht auf Geheiss ihrer Mutter und ihrer Brüder verheiraten, wohl " aber auf das Wort des Kurators ", proverebbe cioè l'inesattezza di Arm. 59.

Ora che la questione si agitasse per i parenti della sposa non faceva meraviglia al Bruns (1). Benchè non avessero alcun diritto alla prestazione del consenso, tuttavia la madre e i prossimi congiunti ed anche i tutori vollero ingerirsi nel matrimonio dei minorenni e, poichè nessuno possedeva il diritto di decidere, con la loro pretesa fecero sì che il negozio andasse davanti ai magistrati. Ciò avvenne nel caso dell'a. 440 a. C., narrato da Livio (4. 9), in cui, aspirando un patrizio ed un plebeo alla mano di una bella giovanetta plebea, la madre ambiziosa favoriva il primo e i tutori attaccati al partito popolare preferivano sposare la pupilla col plebeo (2). Egualmente nell'a. 199 d. C. Severo ed Antonino decidevano che nel conflitto fra il tutore, la madre ed i parenti dovesse pronunciarsi il preside: " cum de " nuptiis puellae quaeritur nec inter tutorem et matrem et pro- " pinquos de eligendo futuro marito convenit, arbitrium prae- " sidis provinciae necessarium est „ (C. 5. 4. 1). Norme simili dettavano gli imperatori del 4° e 5° secolo (3). E però non dalla questione posta nelle *leges saeculares* era sorpreso il Bruns, sibbene dalla decisione che basti il consenso del curatore. Essa non è conforme alle leggi citate dei Codici Teodosiano e Giusti-

(1) *Syrisch-römisches Rechtsbuch*, Leipzig, 1880, p. 258.

(2) " Cum res peragi intra parietes nequisset, ventum in ius est. — Po- " stulatu audito matris tutorumque, magistratus secundum parentis arbi- " trium dant ius nuptiarum „. Vedi peraltro COSTA, *Storia d. dir. r. priv.*, p. 113, n. 2.

(3) Cfr. C. Th. 3. 7. 1 = C. I. 5. 4. 18 (VALENTINIANUS VALENS ET GRATIANUS, a. 371); C. I. 5. 4. 20 (HONORIUS ET THEODOSIUS, a. 408/9). Di quest'ultima costituzione mi occupo più oltre nel testo. Valentiniano scriveva al Senato che le vedove minorenni, quantunque emancipate, dovessero per le seconde nozze ottenere il consenso del padre. " Quod si — soggiunge l'imperatore " — in condicionis delectum mulieris voluntas certat [*repugnat* Trib.] sen- " tentiae propinquorum, placet admodum, ut in pupillarum [*virginum* Trib.] " coniunctionibus sanctum est, habendo examini auctoritatem quoque iudi- " ciariae cognitionis adiungi rell. „. E non è troppo chiaro se la disposizione sia dettata solo per dirimere il conflitto tra la volontà della minorenne e quella del padre ovvero estenda anche ad altri parenti il diritto di dare il consenso. Ma dal § 2 appare la possibilità che anche parenti di grado più remoto e non chiamati alla successione della vedova minorenne diano " auctoritatem iudiciumque „ per il secondo matrimonio.

nianeo; poichè ancora nella legge di Onorio è detto: " si — sub " curatoris defensione consistat, — coram positis propinquis " iudici deliberare permissum sit „. Non è conforme a D. 23. 2. 20 e C. 5. 4. 8, che mettono la conclusione del matrimonio al di fuori della competenza dei curatori. Mancando ogni elemento per determinare donde derivi questa anormalità, il Bruns taccia il testo d'imprecisione. " Man wird daher wohl gar keine eigen- " tliche Abweichung, sondern nur eine Ungenauigkeit anzu- " nehmen haben „.

Il medesimo scetticismo domina i successivi commentatori del libro Siro-Romano. Il De Francisci (1) dice singolare la disposizione, dalla quale apparirebbe la necessità del consenso del curatore (!) per le nozze della fanciulla minore. L'ammirativo è del De Francisci, il quale si richiama ai testi già addotti dal Bruns e di suo aggiunge che D. 23. 2. 20 a vero dire si riferisce solamente al curatore della pupilla, ma *a fortiori* possiamo ritenere, come pare affermare anche la c. 8, C. 5. 4, che il principio si applicasse alle minori. L'osservazione non è molto felice, perchè il curatore della pupilla non poteva provvedere alle nozze di una fanciulla ancora immatura; la questione trattata nella l. 20, D. 23. 2 " sciendum est ad officium curatoris non " pertinere, nubat pupilla an non „ riguarda unicamente il curatore della minorenne. Per quale ragione poi questa sia chiamata " pupilla „ e da chi, è un punto che vuole essere esaminato diligentemente, ma che nella compilazione giustinianea D. 23. 2. 20 si riferisca al " curator mulieris „ è indubitabile.

Anche il De Francisci pensa col Bruns ad una imprecisione e scorrettezza del testo, a meno che non si voglia invece " at- " tribuire la curiosa affermazione a influenze locali, che in ogni " modo nessuno potrebbe dire con approssimazione a quali prin- " cipî si riconnettessero „. Se avesse conosciuto il papiro di Lipsia già pubblicato e commentato dal Mitteis, il nostro romanista avrebbe asserito con certezza l'esistenza, almeno in Egitto, di una norma eguale a quella attestata dalle varie redazioni del libro Siro-Romano.

---

(1) *Επίτροπος vel κουράτωρ nel libro Siro-Romano*, in " Saggi romanistici „, p. 41 sgg.

Dico attestata, perchè l'accordo delle diverse redazioni e meglio ancora le considerazioni che svolgeremo in seguito, non possono lasciare perplessi sul significato della regola e non permettono di aderire all'interpretazione del Ferrini (1), il quale traduceva L. 88 " ... si sit ei *κουράτωρ*, licet ei esse cui ipsa " voluerit in verbo *κουράτορος* „ e commentava " scilicet propter " instrumenta dotalia, sine quibus in libro nostro iustae nuptiae " fieri non intelleguntur „. Poichè il Ferrini assumeva che il consenso del curatore fosse necessario per la costituzione della dote e solo indirettamente per la conclusione del matrimonio, egli usciva dall'angustia della spiegazione offerta dal Bruns, ma in pari tempo eliminava la regola dal territorio del diritto romano, che per le giuste nozze non rende necessaria la dote.

Noi invece vedremo che nel 4° secolo il principio, che richiede per le nozze della minorenne il consenso del curatore, si trovava nelle leggi romane.

Ad aggravare il dubbio ed insieme a promuoverne lo scioglimento giungeva nel 1906 un papiro di Lipsia (2), che per il carattere della scrittura sembra appartenere alla fine del 4° secolo. Lo riporto secondo la lezione della *Chrestomathie* n. 300, in cui il Mitteis accoglie alcuni supplementi proposti dal Wilcken negli scritti che dovremo ricordare più avanti.

Νι.... ὑ[πὲ]ρ Ὀλ[υ]μπιανῆς [θυγ]ατρὸς Διονυσί[ο]υ ἀπὸ πριμιπιλαρίων μετὰ Κάστορος βουλευ[τ]οῦ τῆς λαμπρᾶς (3) *Ἑρμο[π]ολειτῶν πόλεως. Ἔ[στιν] ἀμφοῖν τοῖν γονέοιν ὀρφανὴ ἡ βοηθ(ουμένη). Τοῦ οὖν κουράτορος αὐτῆς τοῦ προωνο-*

μασμ[έ]νου Κάστ[ο]ρος [ὑ]π[ὸ Βησ]αρίωνός τιν[ο]ς ἀπὸ βενεφικιαρίου τῆς σεμνῆς ταυτησεὶ τάξεω[ς] ἀξιω[θ]έν-

(1) *Fontes iuris romani anteiustiniani*, Florentiae, 1909, II, p. 660.

(2) *Griechische Urkunden der Papyrussammlung zu Leipzig herausgegeben von* L. Mitteis, 1906, I Bd, n. 41.

(3) Sopra *Κάστορος* si legge *κουράτορος* aggiunto da una seconda mano, che ha anche eseguito correzioni di poco momento alle linee 10 e 14.

τος ἐπὶ ἕδνοις τ[ι]σὶν ὡς ἄγεσθαι βο[ύ]λεσθαι τὴν παῖδα,
ὁ μὲν κ[ο]υράτωρ γνώμης γενομέν[η]ς τῆς βοη[θ(ου-
μένης)] ἐπὶ συμφώ-
5 νοις [ἕδ]νοις ἀγράφως τὸν γάμον ἐδεξιώσατο, ἐξ ἑτοίμου
δὲ μὴ ἔχων ὁ γῆμαι βουληθεὶς τὰ ἕδνα παρα-
σχέ[σθ]αι [γραμμ]ατ⟨ῖ⟩ον ἔθετο [τ]ῇ νῦν βοηθ(ουμένῃ) με[τὰ]
τοῦ κουράτορος καὶ φοντό γε κατὰ τὴν πίστιν τοῦ
γραμματείου
τὰ ἕδν[α π]αρ[ασχ]ήσεσ[θ]αι, δι[ὸ] καὶ οἱ γάμοι συνήφθη-
σαν. Τούτων οὕτω πεπραγμένων καὶ τῆς [συ]μβιώσεως
κατὰ ταῦτ[α..........]κυας ἡρμ[ο]σμένης ὁμοῦ οὐκ εἰς μακράν,
ἐπειδὴ τὰ ἕδνα ἀπαιτεῖσθαι πρός τε τοῦ κου-
ράτορο[ς καὶ αὐ]τ[ῆς] τ[ῆς γ]ημαμ[έ]νης ἔμελλεν, [ο]ὐκ'
ἴσμεν ὃν τρόπον βουληθεὶς τὰ μὲν οὐκ ἀπεδίδου
10 ἀνεχώ[ρ]ει δὲ ἀπὸ τ[ῆ]ς ἑσ[τ]ίας, ἐν ᾗ οἱ γάμοι ἐπετελέσ-
θησαν, οὐ τὰ ἑαυτοῦ ἐπικομιζόμενος μόνον,
ἀλλὰ κα[ί] τινα [τ]ῆς γη[μ]αμέν[η]ς. Ἐπεὶ τοίνυν [[τὸν]]
μὲν ἕδνον οὐκ' ἀποδέδωκεν, ἀλλ' ἔτι καὶ νῦν χρεωστῖ
ἀλλ' ὃ διήρπασεν [τῆς π]αιδό[ς] ἔτι διακατ[έ]χει ἐν ἀργυ-
ρίῳ, καθ' ἑαυτὴν δὲ ἐάσας διαιτᾶσθαι ᾤχετο ὡς
ἑαυ[τ]ὸν πέ[μπ]ειν [κατὰ τ]οὺς νόμους μετὰ τοῦ [κ]ουρά-
τορος αὐτῇ ὑπαρχθῆναι παντ[[η]] (a) ἀξιοῦσα (?). Προηγου-
μένως μὲν αὐτῇ [ἐ]γ'γράφως τὸ χρεωστούμενον ἕδνον ἀπο-
δοθῆναι, ἔπιτα δὲ κα[ὶ] ἃ ἀπηνέγκατο
15 .....οντα αὐ[τὸν] τῷ οἰ[κ]είῳ ἀποδοῦναι τόπῳ. Τούτων γὰρ
οὕτω πεπραγμένων εἰκότως καὶ ἡ
τ[οῦ γ]άμου ἁρμ[ονία] τέλει[ος] ἔσται.

Il documento ha procurato ad editori ed interpreti molte difficoltà, che in gran parte non sono ancora vinte. Fino la sua natura fu discussa, ma l'idea del Wilcken (1) che qui si abbia l'estratto fornito per un caso concreto da un protocollo processuale parve sciogliere felicemente questo primo ordine di difficoltà (2). Lo stesso Wilcken proponeva di sciogliere il *Νι* iniziale in *Νι(λάμμων)*, che sarebbe il nome dell'avvocato, da

(1) *Archiv f. Papyrusforschung*, 4, p. 472 sgg.
(2) Cfr. anche Mitteis, *Z. d. Sav. St. f. Rg.*, 29, p. 472.

cui fu pronunciata l'arringa per Olympiane contro il marito Besarion; e questa congettura fu accettata dal Mitteis nella Crestomazia (num. 300). Se non che il P. Thead. 16 l'ha più tardi smentita, come il Mitteis riconosce (1). L'editore di questo papiro (2) osserva che anch'esso comincia con un *N* maiuscolo traversato da un tratto verticale ed appare anch'esso, come il papiro di Lipsia, un'arringa di avvocato. Il Jouguet suggerisce di introdurre anche nel papiro lipsiense il *λέγεις* che si trova in quello di Theadelphia (*N*[*λέγεις*] *ὑ*[*πὲ*]*ρ* ecc.); ma è certo più saggio rimettere alla fortuna di altre scoperte di documenti simili la decifrazione dell'enigmatico *Nι*.

Importante per noi giuristi è determinare da chi siano dati gli *ἕδνα* della lin. 5. Mentre il Mitteis (3) crede che nella lin. 4 *ἐπὶ ἕδνοις τ*[*ι*]*σὶν* siano i donativi offerti dallo sposo alla sposa e nella lin. 5 con *ἐπὶ συμφώνοις* [*ἕδ*]*νοις* si indichino i doni contraccambiati dalla sposa, il Wilcken (4) ha sostenuto che i secondi siano i doni che Besarion promise alla sposa e di cui questa domanda la prestazione, i primi invece siano stati da Besarion dati al curatore, che avrebbe surrogato il padre così nel consenso alle nozze come nell'accettazione degli *ἕδνα*. Convengo col Mitteis che dall'uso di propiziarsi il consenso paterno per mezzo di donativi (C. I. 5. 3. 2 di Alessandro; P. Flor. 36 dell'a. 312) non segue necessariamente che l'aspirante alla mano dell'orfana minorenne dovesse agire nello stesso modo col curatore. Tuttavia la tesi, che il curatore Castor abbia ricevuto gli *ἕδνα* della lin. 4 e che gli sposi non si siano scambiati doni, bensì soltanto Besarion abbia promesso e non dato gli *ἕδνα* reclamati da Olympiane, è presentata dal Wilcken, specialmente nel secondo articolo, con tale finezza esegetica che io sarei indotto a farvi adesione.

Il Mitteis, pur ammettendo che gli *ἕδνα* potessero essere considerati tanto come semplici doni nuziali quanto come " arrhae

(1) *Z. d. Sav. St. f. Rg.*, 32, p. 346 sgg.

(2) *Papyrus de Théadelphie* édités par P. Jouguet, p. 102 sgg.

(3) Oltre l'introduzione nell'edizione principe cfr. *Z. d. Sav. St. f. Rg.*, 29, p. 472 sgg.

(4) *Archiv* cit., 4, p. 474 sgg.; 5, p. 186 sgg.

sponsaliciae „, inclinava per la seconda ipotesi; ma è forse più probabile, come già pensò il De Ruggiero (1), che si tratti di veri e propri " munera sponsalitia „. Anche il fratello di Marcella in C. 5. 3. 3 (ALEXANDER) aveva fatto una *pollicitatio* " sponsalium causa „ e l'aveva anche " in stipulationem deducta „; morto il marito, la vedova intenta l'" actio ex stipulatu „ contro la sorella erede, la quale si difende con l'" exceptio doli „, perchè " in dote uxor maritum fefellit „.

La sposa, che non ha ottenuto i doni nuziali promessi da Besarion, che è stata da costui abbandonata e derubata delle sue robe, agisce contro il marito per il pagamento degli *ἕδνα* e per la restituzione delle cose che le sono state sottratte, quantunque ella affermi che per l'abbandono avrebbe diritto di divorziare *κατὰ τοὺς νόμους*. Riconosceva il Mitteis (2) che ciò è esatto, se il documento si ritiene posteriore a Giuliano l'Apostata, il quale abolì la legislazione di Costantino fortemente restrittiva delle cause di divorzio. E tuttavia l'affermazione è strana, perchè, come è stato osservato dallo stesso Mitteis (3), secondo la lin. 5 il matrimonio di Olympiane e di Besarion è un *ἄγραφος γάμος*, nel quale è avviso comune che il divorzio fosse una libera (cioè impunita) facoltà di entrambe le parti.

Ho voluto accennare a tutti questi punti controversi, perchè il lettore alla fine riposi nel sapere che una notizia del papiro è indisputata ed indisputabile in linea di fatto: che il curatore Castor, inteso che lo sposo piaceva alla fanciulla, consentì al matrimonio: *ὁ μὲν κ[ο]υράτωρ γνώμης γενομέν[η]ς τῆς βοη-[θ(ουμένης)]... τὸν γάμον ἐδεξιάσατο.*

Il Mitteis accompagnava l'edizione con questo commento (4). " Il papiro è molto istruttivo per la configurazione che in que-" st'epoca ha di fatto ricevuto la curatela. Il curatore funziona " come un padre..... Ciò conferma la proposizione (*Reichsrecht*, " 217 sgg.) che quest'epoca aveva perduto il senso per la di-

(1) *Nuovi documenti per la storia del matrimonio e del divorzio nell'Egitto greco-romano*, in " Studi storici per l'antichità classica „, I, p. 354 sgg.

(2) Nell'edizione principe, p. 140.

(3) Nell'introduzione al n. 300 della Crestomazia.

(4) *Griechische Urkunden... zu Leipzig*, p. 139 sgg.

" stinzione della tutela e della cura (1). Nel caso speciale si " aggiunge che le donne greche avevano bisogno per la con- " clusione del matrimonio dell'" auctoritas „ del tutore, ma per " le romane questa non era necessaria, a prescindere dall'antico " matrimonio " cum manu „ (cfr. Sever. et Anton. D. 23. 2. 20, " C. I. 5. 4. 8). Nondimeno già un rescritto dioclezianeo men- " ziona un " in matrimonium collocare „ da parte del curatore " (C. I. 5. 6. 7) ed egualmente Leone (C. I. 5. 6 8) e il C. Th. 3. " 5. 11. 3. Così pure il nostro documento presuppone come neces- " sario per il divorzio l'assenso del curatore: lin. 13 *πέ[μπ]ειν*... " *μετὰ τοῦ [κ]ουράτορος* „. Nell'introduzione al n. 300 della Crestomazia il Mitteis è più reciso. " L'approvazione del cura- " tore al matrimonio della donna corrisponde al diritto allora " vigente: cfr. il libro Siro-Romano, L. 88 „.

Poichè il Mitteis non dichiara esplicitamente se il diritto rispecchiato nel libro Siro-Romano ed applicato dal papiro sia il diritto ufficiale o quello popolare, e nella prima ipotesi tra l'affermazione del Mitteis che riconoscerebbe la conformità del libro al diritto ufficiale romano e quella del Bruns che la contestava non sarebbe meno imbarazzante la scelta, ci resta il còmpito di cercare quale peso abbiano nella decisione del problema storico che ci siamo proposti, le tre leggi introdotte dal Mitteis nel campo della nostra indagine, C. I. 5. 6. 7 e 8, C. Th. 3. 5. 11. 3.

* * *

Le due costituzioni del Codice giustinianeo non provano nulla.

C. 5. 6. 7. — " Impp. Diocletianus et Maximianus AA. et CC. Paregorio. Si tutor vel curator pupillam vel adultam

(1) Veramente il papiro attesterebbe la confusione fra tutela e cura, solo presupponendo che al tempo, in cui si concludevano le non fauste nozze di Olympiane e di Besarion, vigesse ancora la tutela del sesso, nel qual caso si potrebbe credere che la facoltà di consentirvi dovesse spettare al tutore della minorenne; altrimenti o interviene il curatore o nessuno fuori dei prossimi congiunti.

quondam suam sibi vel filio suo nullo divino impetrato beneficio in matrimonio collocaverit, manet infamia contra eum velut confessum de tutela, quia huiusmodi coniunctione fraudem administrationis tegere laboravit, et dos data per condictionem repeti potest „.

Il rescritto di Diocleziano non prova nulla, anche se la menzione del curatore fosse genuina (1). Non prova, perchè letteralmente esso dice che il curatore " adultam *quondam* suam " sibi vel filio suo in matrimonio collocaverit „, cioè diede il consenso al matrimonio dopo che la minore età era finita e con essa la curatela. Non prova, soprattutto perchè il consenso del curatore, di cui ragiona la c. 7, non è prestato da lui come curatore, ma come sposo o *pater familias* dello sposo, che impalmando la minorenne o maritandola col figlio tenta di sottrarsi al rendiconto.

Non prova infine, perchè il testo è interpolato. Il tutore non può sposare se non la " pupilla quondam sua „, perchè al momento del matrimonio la sposa deve essere pubere e quindi uscita di tutela. Il curatore, se non ostasse il senatoconsulto di Marco Antonino e Commodo, potrebbe ammogliarsi con la sua curanda anche durante la minore età. Ciò dimostra che l'imperatore soltanto per la pupilla poteva aggiungere la determinazione " quondam suam „.

C. 5. 6. 8. — " Impp. Leo et Anthemius AA. Erythrio pp. (a. 472). Si quis tutoris vel curatoris nomine usurpato, id est pro tutore seu pro curatore vel negotiorum gestore res pupillae administraverit eamque sibi filiove suo copulaverit, tales nuptias stare et non ad exemplum tutorum infirmari, ne ex huiusmodi subtili vel maligno tractatu matrimonia seu proles ex his progenita vel dos super his data vel promissa aliquam laesionem vel calumniam patiantur „.

(1) Contra *Minore età*, p. 49, dove già attribuivo ai Giustiniani " vel " curator — vel adultam „. Egualmente GRADENWITZ ivi citato ed ALBERTARIO, *Z. d. Sav. St. f. Rg.*, 33, p. 248. Io dubito anche di " vel filio suo „ (*ivi*, n. 1), probabilmente aggiunto sull'esempio della c. 8 seguente, dove è genuino, trattandosi di una costituzione generale e non di un rescritto.

Anche la costituzione di Leone deve essere eliminata, sia perchè anch'essa potrebbe essere emblematica quantunque meno sicuramente dell'altra (1), sia perchè in ogni caso non allude ad un consenso che il curatore dia in tale qualità e non presuppone l'esistenza di una norma giuridica che lo renda necessario per il matrimonio della minorenne.

Grande importanza è invece da attribuire alla costituzione che il 17 giugno 380 gli imperatori Graziano Valentiniano e Teodosio indirizzavano ad Eutropio prefetto del pretorio. Il diritto del curatore di concludere gli sponsali e ricevere le arre vi è palesemente riconosciuto; ma di quale curatore? Del " curator pupillae „ o del " curator mulieris „? Qui sta il punto.

Gli imperatori, volendo determinare quando e da chi sia dovuta la pena del quadruplo per la rottura degli sponsali, distinguono varie ipotesi. La prima è che la fanciulla sia stata promessa non ancora decenne: in questo caso " patri matri tutori vel cuicumque... quadrupli poenam remittimus „. La seconda è che gli sponsali siano stati contratti nel decimo o undicesimo anno; allora, se giunto il tempo delle nozze cambino la loro volontà, saranno tenuti al quadruplo " pater quisve alius, ad quem puellae ratio pertinet „. La terza ipotesi è quella della *vidua* " cui auxilium non suffragatur aetatis „ (2), onde " ea matrimonium non implens ad quadruplum ex vetere constitutione teneatur „. L'ultima ipotesi riguarda la vergine.

(1) Interpolato è certamente l'inciso " id est... gestore „, come dimostra benissimo il PETERS, *Z. d. Sav. St. f. Rg.*, 32, p. 230 sgg. In favore dell'emblema " vel curatoris „, ammesso pure dal Peters, *ivi* e dall'Albertario, *loc. cit.*, sta la circostanza che il seguito non dice " ad exemplum tutorum " vel curatorum „, ma solamente " ad exemplum tutorum „. Tuttavia questa osservazione, in un testo del 472 (data che io sostituisco al 469 dei manoscritti, desumendola dalle altre costituzioni che a giudizio stesso del KRÜGER devono ad essa riunirsi) e per di più sciolto dal suo nesso originario, non ha quel peso che altrimenti potrebbe avere.

(2) Questa espressione è degna di nota. La vedova è certamente pubere, poichè ebbe marito, ma può essere tuttora minorenne. L'età, che esonera sempre dalla pena del quadruplo, per Graziano è dunque l'impubertà. La minore età acquisterà questa forza in C. I. 5. 1. 5, la quale logicamente doveva però equiparare la vedova alla vergine: " ... teneatur...

3. “ Duodecimo autem anno inpleto quisquis de nubtiis paciscitur, si quidem pater, semetipsum obliget sive mater curatorve aut alii parentes, puella fiat obnoxia. 4. Cui quidem contra matrem tutorem curatorem eumve parentem actio ex bono et aequo integra reservetur eorum pignerum, quae ex propriis iuxta poenam iuris reddiderit facultatibus, si ad consensum accipiendarum arrarum ab his se ostenderit fuisse conpulsam „.

Il curatore, che pattuisce gli sponsali della donna dopo i dodici anni, cioè dopo la fine dell'impubertà, non può essere il “ curator pupillae „, deve essere il “ curator mulieris „. I §§ 3 e 4 della costituzione riguardano la minorenne; chè se il § 4 menziona ancora il tutore, o allude al tutore del sesso (1) o il binomio “ tutorem curatorem „ sta ad indicare una sola persona, che i provinciali ellenizzanti chiamavano indifferentemente con l'uno e con l'altro nome. La diversità delle conseguenze, secondo che le arre siano state accettate dal padre ovvero da altri parenti o dal curatore, non è difficile a spiegare. Il padre promette la mano della figlia senza richiederne la volontà (2);

“ in simplum... id est tantummodo quod accepit, si minoris aetatis est, sive “ virgo sive vidua sit „. Che questa costituzione attribuita a Leone sia in gran parte fattura dei compilatori, fu già mostrato dal Riccobono, *Arra sponsalicia* nel volume per le onoranze al prof. Pepere. Forse anche la norma, che conferisce alla minore età l'efficacia discriminante prima posseduta dall'impubertà, è tribonianea; se ne glorierà la mitezza dell'imperatore bizantino, ma la disciplina di Graziano, fedele al pensiero “ habilis “ ad nuptias, habilis ad matrimonii consequentias „, non può dispiacere al giurista.

(1) La data della sua definitiva scomparsa non si può accertare. Il Girard, *Manuel de droit romain*[5], p. 223, n. 8, citava un papiro dell'a. 350 o poco posteriore (*Arch. f. Pap.*, 1, p. 293 sgg.) come il documento più recente che ne attesti l'esistenza. Ma il *κύριος* si trova ancora menzionato in P. Grenf. II 85 dell'a. 535 ed in Wessely, *P. klein. Form.*, n. 239 del VI-VII secolo. Se non che deve trattarsi del quasi-tutore dei peregrini, il quale sarebbe sopravvissuto alla costituzione di Caracalla (cfr. Mitteis, *Reichsrecht*, p. 219 sgg.) e persino alla legislazione giustinianea.

(2) La costituzione del Codice Teodosiano smentisce quella che fu la dottrina fin qui pacifica su gli sponsali della “ filia familias „. Fondandoci sui testi di D. 23. 1 noi insegnammo che la “ filia familias „ deve consen-

perciò obbligato alla pena del quadruplo sarà il padre. Invece la madre, gli altri parenti, il curatore, dando la loro approva-

tire al proprio fidanzamento, sia pure nella forma passiva del silenzio, del non contraddire. Ora ecco che il Codice Teodosiano ci rappresenta una fanciulla eventualmente “ conpulsa „ ad accettare le arre dalla madre e da altri parenti; ma il padre non esercita alcuna coazione, perocchè promette esso la figlia ed obbliga se stesso. Che poi la dottrina comune sia mal ferma si vede nel titolo medesimo del Digesto. 1) Paul. 5 *ad ed.* (D. 23. 1. 13) “ Filio familias dissentiente sponsalia nomine eius fieri non possunt „. *Filio vel filia* avrebbe dovuto dire il giureconsulto, se il dissenso, cioè la contraddizione, l'opposizione della figlia contasse qualcosa: il genere maschile non può comprendere il femminile qui dove la condizione giuridica dei due sessi è diversa. Nè in contrario si adduca l'editto pretorio “ de postulando „, in cui il pretore dichiara incapaci “ quive suo nomine non “ iussu eius, in cuius potestate esset, eiusve nomine quem quamve in potestate haberet bina sponsalia binasve nuptias eodem tempore constitutas “ habuerit „ (D. 3. 2. 1). Che il padre concludesse gli sponsali per i figli dell'uno e dell'altro sesso era cosa frequente a Roma e lo è anche oggidì in talune regioni e classi sociali: ciò non toglie che il padre ordinariamente riportasse il consenso del figlio, poichè era necessario, nè impedisce al pretore di colpire con la stessa sanzione la condotta del padre, siavi o non siavi stato il consenso dei fidanzati. Così, se il pretore scusa chi ha concluso doppi sponsali o doppio matrimonio, purchè l'abbia fatto “ iussu eius, “ in cuius potestate esset „, non vuol dire che il figlio non possa ribellarsi all'imposizione paterna, ma riconosce soltanto che il buon figlio suole obbedire al padre e punisce il padre che abusa della riverenza filiale. Nello stesso modo si spiega l'assoluzione del “ filius familias „, che ha tolto in moglie una vedova prima della fine del lutto “ iussu eius, in cuius potestate “ esset „. Ma ciò che chiarisce la vera dottrina è la diversità delle espressioni adoperate per il matrimonio del figlio e per quello della figlia: “ qui “ eam, quae in potestate eius esset... antequam virum elugeret, *in matrimo-* “ *nium collocaverit* — qui eum quem in potestate haberet, eam, de qua supra “ comprehensum est, *uxorem ducere passus fuerit* „. 2) Ulp. 3 *disput.* (D. 23. 1. 10) “ In potestate manente filia pater sponso nuntium remittere potest “ et sponsalia dissolvere, enimvero si emancipata est, non potest neque “ nuntium remittere rell. „. L'emancipazione toglie al padre la facoltà di sciogliere gli sponsali, ma, finchè dura la patria potestà, il diritto del padre non è limitato. A me pare che in buona logica chi può denunciare il fidanzamento senza attendere alla volontà della fidanzata, possa altresì concluderlo di suo arbitrio. Infatti i tutori, che non hanno diritto da soli di promettere la pupilla, non possono neanche mandare la denuncia degli sponsali: D. 23. 1. 6 (Ulp. 36 *ad Sab.*) “ si puellae tutores ad finienda spon- “ salia nuntium miserunt, non putarem suffecturum ad dissolvendam nup- “ tiarum spem hunc nuntium, non magis quam sponsalia posse eos solos

zione alla volontà della minorenne, devono fare ciò che fece Castor nel P. Lips. 41, lin. 4 — γνώμης γενομέν[η]ς τῆς βοη-

" constituere ". 3) La figlia, perchè sia reputata " non contradicere ", dovrebbe essere in grado di intendere ciò che si faccia. Invece da MODESTIN. 4 *different.* (D. 23. 1. 14) parmi resultare la possibilità del fidanzamento di qualunque bambina. " In sponsalibus contrahendis aetas contrahentium de-" finita non est ut in matrimoniis. Quapropter et a primordio aetatis spon-" salia effici possunt, si modo id fieri ab utraque persona intellegatur, id " est, si non sint minores quam septem annis ". Che " id est... annis " sia tribonianeo è oggi riconosciuto da tutti con gli antichi e con EISELE, *Z. d. Sav. St. f. Rg.*, 11, p. 10; ma io vedo una contraddizione pure fra il " primordium aetatis " e il " si modo... intellegatur ". Se fosse stata necessaria questa intelligenza, Modestino non avrebbe scritto che gli sponsali sono possibili fin dai primi anni, " a primordio aetatis ", che è quanto dire dal momento della nascita. Cfr. PAUL. II. 19. 1. A questi dubbi, tratti dai luoghi medesimi che i compilatori credettero di conservare nel titolo del Digesto, si aggiunge la dichiarazione della c. 11 C. Th. 3. 5, che non sembra richiedere il consenso della figlia nemmeno nella forma attenuata del silenzio; si aggiunge C. Th. 3. 5. 12 = C. I. 5. 1. 4 riportato più oltre, che vieta al curatore della minorenne e parmi alla minorenne stessa di mutare i patti voluti dal padre defunto, " si pater pactum de filiae nubtiis inierit... " id inter sponsos firmum ratumque permaneat, quod a patre docebitur de-" finitum... cum plerumque etiam ipsius feminae adversus commoda propria " inveniatur laborare consilium "; e si aggiunge infine, forse più chiara di tutte, la norma di C. I. 5. 4. 20 " in coniunctione filiarum in sacris posi-" tarum patris expectetur arbitrium: si sui iuris puella sit intra quintum et " vicesimum annum constituta, ipsius quoque exploretur adsensus ". Le due ultime costituzioni (cfr. anche C. 5. 8. 1 e D. 23. 2. 34 pr.), mostrando che la volontà del padre è sovrana circa le nozze della figlia non emancipata della quale non si ricerca il consenso, vuotano di ogni forza probatoria i testi che fin qui costituirono la base della comune dottrina. Tanto PAOLO 35 *ad ed.* (D. 23. 1. 7 § 1) quanto GIULIANO 16 *dig.* (D. *eod.* 11) argomenterebbero la necessità del consenso della " filia familias " dalla premessa che per gli sponsali occorre il consenso di quelle persone delle quali è richiesto per il matrimonio. Ma, se noi sappiamo che il matrimonio della " filia familias " dipendeva dall'arbitrio del padre, dovremo concludere che anche agli sponsali bastasse la volontà paterna.

Avvertasi poi che il fr. 7 § 1 e il fr. 11 trattano due questioni diverse.

In sponsalibus etiam consensus eorum exigendus est, quorum in nuptiis desideratur. Intellegi tamen semper filiae patrem consentire, nisi evidenter dissentiat, Iulianus scribit.	Sponsalia sicut nuptiae consensu contrahentium fiunt: et ideo sicut nuptiis, ita sponsalibus filiam familias consentire oportet.

[ϑουμένης)] — affinchè il patto degli sponsali da loro convenuto sia efficace. Io poi non so astenermi dal rilevare che

Il fr. 7 § 1 parla semplicemente di *filia*, non di *filia familias*; ed è il padre che aderisce alla volontà della figlia, non viceversa. Si tratta dunque degli sponsali dell'emancipata, per cui si esigeva il consenso del padre (cfr. C. 5. 4. 20), consenso che Giuliano ritiene accordato " nisi evidenter dissentiat „. È quindi con nostra meraviglia che nel fr. 11 di Giuliano vediamo rovesciarsi le parti e consentire la figlia al padre anzichè il padre alla figlia. Il ragionamento, correttissimo nel fr. 7, è un illogismo nel fr. 11. Il fr. 7 richiedeva per gli sponsali " etiam consensus eorum, quorum in " nuptiis desideratur „, cioè richiedeva il consenso del padre oltre che della sposa contraente (cfr. D. 23. 2. 2). Ma, se il fr. 11 afferma che " sponsalia " consensu contrahentium fiunt „ e se il contraente è il " pater familias „, non si può da quell'affermazione indurre che *perciò* = *et ideo* debba consentire anche la " filia familias „. Il fr. 11 è stato dunque alterato. E poichè il fr. 12 pr. (Ulp. *l. sing. de sponsalibus*) è anche esteriormente congiunto col precedente — " sed quae patris voluntati non repugnat, consentire intel- " legitur „ — non occorre una prova immediata e specifica per ritenerlo esso pure interpolato. Sul § 1 " tunc autem solum dissentiendi a patre li- " centia filiae conceditur, si indignum moribus vel turpem sponsum ei pater " eligat „ si esercitò già la critica del Gradenwitz, *Interpolationen*, p. 102. E alla nostra odierna ricerca compete soltanto il dovere di soggiungere che non possiamo determinare se tutto il paragrafo sia emblematico, come sembra ritenere il Gradenwitz, o se invece il testo originale discorresse già dell'opposizione del padre alle nozze della figlia (*filia* dice anche il testo attuale e non *filia familias*) con persona indegna. Se fosse vera l'ultima ipotesi, anche il § 1, come il pr. del fr. 12 ed il fr. 11, sarebbero stati convertiti dal matrimonio dell'emancipata, per cui il diritto classico esigeva che il padre non si opponesse, al matrimonio della " filia familias „, per cui il diritto giustinianeo esige che la figlia non si opponga, mentre il diritto classico lasciava le nozze e gli sponsali nell'arbitrio del " pater familias „. E così in D. 45. 1. 134 pr. (Paul. 15 *resp.*) solo dopo la morte del padre la figlia di Gaio Seio rifiuta di maritarsi al fratellastro, a cui per amore della matrigna il padre vedovo l'aveva promessa.

Vediamo infine quale trattamento il diritto giustinianeo voglia fare all'emancipata. Da un lato abbiamo C. 5. 4. 18 e 20, che richiedono apertamente il consenso paterno, e D. 23. 1. 7 § 1, a cui si può attribuire lo stesso valore, in quanto menziona la *filia* e non la *filia familias*. Dall'altro lato evvi la chiusa di D. 23. 1. 10 " nisi forte quis proponat ita dotem pa- " trem pro emancipata filia dedisse, ut, si nuptiis non consentiret, vel con- " tractis vel non contractis repeteret quae dederat: tunc enim habebit re- " petitionem „, che prevede la conclusione delle nozze non ostante che manchi il consenso del padre. Il testo ha tanto maggior peso, perchè è emblematico: si consideri *nisi forte, tunc enim* e sopra tutto il cangiamento

madre, parenti e curatore, che qui concludono gli sponsali e ricevono le arre per la minorenne consenziente, sono quelle stesse persone che nel libro Siro-Romano aspirano a corroborare con la loro approvazione la volontà matrimoniale della giovane.

Insomma io credo che di aver citato la c. 11, § 3, C. Th. 3. 5 sia da dar lode al Mitteis, perchè penso che una legislazione, la quale fa intervenire il curatore nella conclusione degli sponsali, sia portata naturalmente, se pure non necessariamente, a richiederne il consenso anche per il matrimonio. Un principio di prova, che il diritto del libro Siro-Romano e di P. Lips. 41 era nella seconda metà del 4° secolo diritto ufficiale dell'impero, si ha già nella costituzione di Graziano.

Si risale indietro nel tempo e la prova meglio si colorisce con C. Th. 3. 5. 5. È una costituzione del 12 aprile 332, diretta da Costantino a Pacaziano prefetto del pretorio.

" Patri puellae aut tutori aut curatori aut cui(libet) eius adfini non liceat, cum prius militi puellam despon(deri)t, eandem alii in matrimonium tradere. Quod si intra bi(enni)um, ut perfidiae reus in insulam relegetur. Quod si pac(tis n)ubtiis transcurso biennio qui puellam desponderit al(teri) eandem sociaverit, in culpam sponsi potius quam

di stile, onde l'interpolatore scrive " repeteret, repetitionem ", mentre Ulpiano nella prima parte aveva usato " condicere, condictionem ". I Bas. 28. 1. 8 nella ἐρώτησις pongono il quesito e lo risolvono egregiamente. Stefano osserva anche che, qualunque età abbia la figlia di cui qui si discute, essa segue la prima volontà del padre, maritandosi con lo sposo da lui originariamente scelto, sebbene poi il padre abbia mutato idea; ma innanzi tutto ricorda che in C. 5. 4. 18 e 20 la necessità del consenso per l'emancipata è mantenuta solo finchè la figlia sia minorenne. Io poi opinerei che il consenso si abbia a valutare con gli stessi criterii che sono stati ammessi per la " filia familias ": bastare il silenzio del padre ed il dissenso non impedire le nozze della minorenne emancipata, a meno che lo sposo non sia " indignus moribus vel turpis ". Giova rilevare che la distinzione della minore età fra le emancipate è post-classica; non si ha notizia che il diritto classico limitasse in questo modo la facoltà del padre. Ma, ristretta alla minore età la necessità del consenso paterno per le figlie emancipate, quanto diviene più naturale che, in mancanza del padre, l'epoca romano-ellenica attribuisca il diritto di consentire al curatore?

puel(lae r)eferatur, nec quicquam noceat ei, qui post biennium pu(ella)m marito alteri tradidit „.

Come il padre ed il tutore possono fidanzare un'impubere, così anche il curatore, che *despondet* la fanciulla, può essere un " curator pupillae „; ma il curatore, che la fanciulla *in matrimonium tradit*, deve essere un " curator mulieris „, perchè nessuna può prender marito che non sia " viripotens „.

Non aggiunge nulla agli argomenti desunti dalle costituzioni sopra citate C. Th. 3. 6. 1 = C. I. 5. 2. 1, perocchè proviene dagli stessi imperatori (Graziano Valentiniano e Teodosio) ed ha la stessa data (17 giugno 380) di C. Th. 3. 5. 11, con la quale formava in origine un'unica costituzione. Nel Codice Teodosiano, dove la c. 1. 3. 6 può e deve essere combinata con la c. 11. 3. 5, quando leggo:

> " ... si quis in potestate publica positus atque honore administrandarum provinciarum, qui parentibus aut tutoribus aut curatoribus aut ipsis, quae matrimonium contracturae sunt, potest esse terribilis, sponsalia dederit, iubemus, ut deinceps, sive parentes sive eaedem mutaverint voluntatem, non modo iuris laqueis liberentur poenaeque expertes sint, quae quadruplum statuit rell. „

non dubito di intendere per " curatoribus „ i curatori delle minorenni. Quanto al Codice Giustinianeo, dove la c. 11. 3. 5 del Teodosiano non è stata accolta, nulla trovo nel testo che mi impedisca di ritenere, se dall'insieme degli altri passi della compilazione ciò apparisse necessario, che " curatoribus „ si riferisca soltanto ai curatori delle pupille.

Non è invece da trascurare C. Th. 3. 5. 12 = C. I. 5. 1. 4, che Onorio e Teodosio il 3 novembre 422 emanavano da Ravenna a Mariniano prefetto del pretorio.

> " Si pater pactum de filiae nubtiis inierit et humana sorte consumptus ad vota non potuerit pervenire, id inter sponsos firmum ratumque permaneat, quod a patre docebitur definitum, nihilque permittatur habere momenti, quod cum defensore, ad quem minoris commoda pertinebunt, docebitur fuisse transactum. Periniquum est enim, ut contra

patriam voluntatem redempti forsitan tutoris aut curatoris admittatur arbitrium, cum plerumque etiam ipsius feminae adversus commoda propria inveniatur laborare consilium „.

Ecco qua che il curatore della minorenne, forse corrotto (come il nostro pensiero va oltre gli *ἕδνα* del papiro!), preferisce un nuovo sposo a quello che il padre defunto volle per la figliuola e oserebbe rescindere il patto concluso dal padre, se gli imperatori non lo vietassero. È chiaro che non sarebbe da temere il “ curatoris arbitrium „, se egli non avesse il diritto di approvare le nozze della minorenne. La legge di Onorio è grave, perchè, essendo riprodotta testualmente nel Codice Giustinianeo, farebbe pensare che il requisito del “ consensus curatoris „ duri ancora nel diritto di Giustiniano. Altro che dubitarne per il libro Siro-Romano! Dalla negazione del Bruns chi studia tutte le fonti va incontro al problema se la norma, accertata per il diritto di Costantino e dei suoi successori, non sia dispiaciuta nemmeno a Giustiniano. Il problema si pone per C. 5. 1. 4 citata ed egualmente per C. 5. 1. 5 pr. (Leo et Anthemius, a. 472), giusta la quale la donna ora è tenuta a restituire il *duplum* (1), ora soltanto le arre ricevute. È obbligata nel *simplum* “ si minoris aetatis est, sive virgo sive vidua sit, “ sive per se sive per tutorem vel curatorem vel aliam per“ sonam easdem arras acceperit „. I testi precedenti ci hanno abituati all'idea che il curatore, il quale assiste o rappresenta la minorenne nella conclusione degli sponsali e nell'accettazione delle arre, l'assiste anche nella conclusione del matrimonio. Forse qui le cose stanno diversamente? D'altra parte C. 5. 1. 5 pr. è estratta dalla stessa costituzione di Onorio, cui pure appartiene C. 5. 6. 8, dove sono interpolate le parole “ id est pro tutore seu pro curatore vel negotiorum gestore „ e probabilmente anche “ vel curatoris „. Saranno analogamente emblematiche in C. 5. 1. 5 pr. le espressioni “ vel curatorem vel aliam personam „?

---

(1) La riduzione della pena al “ duplum „ è giustinianea? Cfr. Riccobono, *Arra sponsalicia* cit. e in senso contrario Krüger, *Z. d. Sav. Stift. f. Rg.*, 22, p. 52 sgg. Più cauto è Koschaker, *Z.* cit., 33, p. 385 n. 3.

Forse per la c. 5 il problema si risolve in più modi che non comporti la c. 4. 5. 1; ma prima dobbiamo cercare se in altri luoghi Giustiniano abbia chiaramente manifestato la sua intenzione contraria alla regola vittoriosa nel basso impero. Il che faremo subito, appena dopo aver notato che l'*Interpretatio* visigota a C. Th. 3. 5. 12 suona " nec habebit puella licentiam " aliud faciendi, etiamsi mater tutor aut curator vel propinqui " alium voluerint fortasse suscipere, quam pater elegit rell. „. Il tutore ed il curatore sono ricordati dalla costituzione; la madre ed i " propinqui „ li aggiunge il commentatore, poichè nel costume e nel diritto contemporanei li vede, come li vedevano gli autori del libro Siro-Romano, partecipare alla conclusione del matrimonio.

* * *

Il Bruns non aveva torto di invocare per sè il testo giustinianeo di C. 5. 4. 20. Avremmo torto noi, se, osservando che proviene da Onorio e Teodosio ed è dell'a. 408/9, ci dimenticassimo che ancora nell'a. 422, in una costituzione di Onorio e Teodosio (C. Th. 3. 5. 12 = C. I. 5. 1. 4), il curatore si ingeriva, e prepotentemente, nel matrimonio della minorenne.

> " In coniunctione filiarum in sacris positarum patris expectetur arbitrium: si sui iuris puella sit intra quintum et vicesimum annum constituta, ipsius quoque exploretur adsensus. Si patris auxilio destituta, matris et propinquorum et ipsius quoque requiratur adultae iudicium. **1**. Si vero utroque orbata parente sub curatoris defensione consistat et inter honestos competitores matrimonii oriatur forte certamen, ut quaeratur, cui potissimum puella iungenda sit, si puella cultu verecundiae propriam noluerit depromere voluntatem, coram positis propinquis iudici deliberare permissum sit, cui melius adulta societur „.

Il pr. sta bene. Se la figlia si trova sotto la patria potestà, il suo matrimonio dipende dall'arbitrio paterno. Solo se la giovane è " sui iuris „, se ne richiederà il consenso, cui dovrà aggiungersi quello del padre o, in mancanza, della madre e dei

" propinqui „. Il § 1 è sorprendente. Ambedue i genitori sono morti, ma esiste il curatore. Sentiremo il giudizio di costui, oltre, beninteso, il parere della fanciulla? Niente affatto: nel testo giustinianeo il curatore tace, quantunque si immagini che la giovane sia imbarazzata fra più aspiranti e per verecondia non voglia esprimere la sua volontà. Deciderà il giudice " coram positis propinquis „ ed è ovvio supporre che i prossimi congiunti non si limitino a presenziare l'udienza del magistrato, ma siano da costui interrogati sulla scelta dello sposo. Il curatore, solo lui, non pare abbia diritto di intervenire, poichè la costituzione non dice " coram posito curatore „.

La circostanza che la giovanetta " utroque orbata parente " sub curatoris defensione consistat „ non influisce sulla regola enunciata dal § 1. È chiaro che, anche quando il curatore non ci fosse, bisognerebbe andare dal magistrato per dirimere il conflitto fra i " propinqui „ e la minorenne o per eleggere quello sposo che la troppo vereconda donzella si rifiuta di scegliere da sè " inter honestos competitores „.

" Sub curatoris defensione consistat „! A che pro' nominare il curatore, se, comunque vadano le cose, egli non ha niente da dire, niente da fare? In C. 5. 4. 20 il curatore c'entra come Pilato nel Credo. Anzi, non volendo calunniare Ponzio Pilato, il quale nel Credo indica approssimativamente una data, bisognerà confessare che " sub curatoris defensione „ in C. 5. 4. 20 c'è piuttosto per ingenerare dubbi ed equivoci. L'interprete poco guardingo potrebbe pensare che valga una soluzione diversa nel caso che la minorenne non abbia curatore!

Che di queste stranezze sia responsabile Triboniano, che viceversa al tempo di Onorio e Teodosio il giudizio del curatore fosse in qualche modo richiesto, è, dopo l'indagine condotta sul Codice Teodosiano, più che verosimile, anche per chi voglia prescindere dal libro Siro-Romano e dal P. Lips. 41.

*
* *

Di C. 5. 4. 8 (Gordianus — a. 241) mi sono occupato in *Minore età*, p. 85, rilevando che " curatoris... auctoritas „ è una espressione anomala, la quale si dimostra interpolata nei luoghi

del Digesto dove ricorre (1), e che, se pure " curatoris „ fosse genuino, il rescritto dovrebbe con Bas. 28. 4. 29 riferirsi alle nozze della fanciulla, non ostante che sia diretto ad un uomo (Romano).

> " In copulandis nuptiis nec curatoris, qui solam rei familiaris sustinet administrationem, nec cognatorum vel adfinium ulla auctoritas potest intervenire, sed spectanda est eius voluntas, de cuius coniunctione tractatur „.

La mia esegesi non è piaciuta al Lenel (2), il quale mi obbietta che destinatario del rescritto è appunto un uomo, nè il testo del Codice giustinianeo denota in alcun modo che fosse in questione la competenza del " curator mulieris „ e che, se è vero che nella traduzione dei Basilici la decisione sembra dettata per una persona di sesso femminile, bisognerebbe provare che la traduzione stessa deriva da una fonte pregiustinianea, affinchè l'argomento fosse decisivo. Rispondo alla seconda obbiezione che la mia pretesa è più modesta; io vedo in Bas. 28. 4. 29 un'interpretazione molto verosimile e molto autorevole, ma nulla di più. Alla prima rispondo che di Romano noi conosciamo il sesso e non la qualità. È egli il minorenne che reclama all'imperatore contro le inframmettenze del curatore e dei parenti, o è piuttosto il curatore o un cognato o un affine che vorrebbero essere appoggiati nelle loro pretese dalla suprema autorità? Un'ipotesi è legittima quanto l'altra. E ve n'è anche una terza non meno verosimile: che Romano sia l'aspirante bene accetto alla fanciulla ma contrastato dal curatore e dai parenti. In definitiva il sesso della persona, cui è indirizzato il rescritto, non prova nulla. Ma provano per la mia interpretazione tutti i testi, i quali certificano che il curatore ebbe nell'epoca romano-ellenica riconosciuto il diritto di consentire alle nozze della minorenne; prova il diritto greco (3) e quindi la consuetudine delle provincie ellenistiche che pel matrimonio

(1) Cfr. *Minore età*, pp. 8, n. 1, 297.

(2) *Z. d. Sav. St. f. Rg.*, 35, p. 163.

(3) Cfr. Beauchet, *Histoire du droit privé de la république athénienne*, I, p. 132 sgg.; II, p. 377 sgg.

delle donne esigeva l'autorizzazione del tutore, ciò che probabilmente ha influito sulla legislazione di Costantino e dei successivi imperatori perchè fosse attribuito lo stesso diritto al romano " curator mulieris „. Siffatta tradizione giuridica prova efficacemente, in quanto ci permette di pensare come possibile che già al tempo di Gordiano il curatore tentasse di esercitare quell'ufficio che più tardi ottenne dalle leggi. Il Lenel deve invece supporre che, senza alcuna base nei costumi e fuori di ogni tradizione giuridica, sia venuto in testa al curatore di un maschio di immischiarsi nelle sue faccende matrimoniali. Ammesso, come io ammetto, che la lettera del testo giustinianeo autorizzi egualmente le due interpretazioni, quella che lo riferisce al curatore del maschio e quella che pensa al curatore della donna, rimane a decidere se storicamente sia più probabile la prima patrocinata dal Lenel o la seconda appoggiata dai Basilici.

Io sono convinto assertore della seconda, quantunque venga a mettere in contraddizione la c. 8 con la c. 20 dello stesso titolo (1). L'antinomia non esiste pel curatore, a cui una costituzione nega e l'altra non attribuisce un diritto di intervenire nelle nozze; esiste per i parenti, poichè la c. 8 dichiara che " nec cognatorum vel adfinium ulla auctoritas potest intervenire „ e la c. 20 al contrario sancisce che per il matrimonio dell'orfana di padre " matris et propinquorum et ipsius quoque requi- " ratur adultae iudicium „. Non credo che questa contraddizione rafforzi seriamente la tesi del Lenel. Già i Basilici avevano rilevato l'antinomia e la notavano, come essi scrivono (2), per disingannare coloro i quali pensano che non vi sia contrasto fra una legge e l'altra. Noi non abbiamo più di simili illusioni, ma intendiamo che gli abbagli di Triboniano non ci possano impedire di ricercare il senso proprio della legge nel pensiero e nel tempo dell'autore da cui deriva.

Ed in verità io contesto che la c. 8 sia " ganz unverdächtige „. A renderla sospetta mi pare che basti la " curatoris

(1) E anche con la c. 18 *eod.*

(2) Sch. 1 : *Σημείωσαι πρὸς τοὺς λέγοντας, μὴ ἐναντιοῦσθαι κεφ. ἕτερον θατέρῳ*...

auctoritas „, una macchia per il linguaggio ancora corretto delle costituzioni di questo periodo. Che Gordiano abbia dovuto risolvere la questione sulla necessità dell' " auctoritas tutoris „, anzichè sulla pretesa del curatore di essere chiamato a dare il proprio consenso? Non lo so e non l'affermo. Vedo anzi che " qui solam rei familiaris sustinet administrationem „ conviene col curatore e non col tutore. Ma vedo anche l'ineguaglianza del ragionamento imperiale: quella proposizione relativa giustifica, e lo fa egregiamente, l'esclusione del curatore e perchè dunque non è stato spiegato il motivo che esclude alla loro volta i cognati e gli affini?

Ciò che io so, poichè le nostre fonti ce ne serbano ancora l'eco, è il contrasto, probabilmente alimentato dalle consuetudini giuridiche provinciali, fra il tutore del sesso, un istituto in decadenza, e il curatore della minorenne, un istituto in piena evoluzione progressiva. Leggasi il Vat. 110: " Paulus respondit " etiam post nuptias copulatas dotem promitti vel dari posse, " sed non curatore praesente promitti debere, sed tutore auctore „. Il curatore tende già a sostituire il tutore, aggiungendo alle sue funzioni di amministratore quelle anticamente riservate al tutore. E più tardi il curatore ha vinto: donde il problema se il diritto di consentire alle nozze della minorenne, che non appartiene all'amministrazione patrimoniale del curatore, che compete invece al tutore del diritto greco, sia sorto primieramente nel curatore dell'epoca romano-ellenica o sia stato da lui raccolto insieme con l'eredità trasferitagli dal tutore. Prima di cedere dinanzi al vittorioso rivale, il tutore romano, che già interveniva nel matrimonio per la costituzione della dote, non avrà, almeno fra i nuovi sudditi provinciali, reclamato per sè quel potere di consentire al matrimonio che vedeva esercitato dal suo collega greco?

Io pongo un problema, che sarà dato risolvere soltanto col ritrovamento di nuove fonti. Per il rescritto di Gordiano concludo: 1) che la sua genuinità non è al coperto di ogni dubbio; 2) che, la questione circa il consenso del curatore essendosi certamente agitata per il matrimonio della donna minorenne, è assai verosimile che di questo matrimonio si occupasse il rescritto per negare al curatore ogni facoltà in proposito; 3) che tuttavia, non potendosi escludere in modo assoluto che la me-

desima questione sia stata dibattuta per la " tutoris auctoritas ", si deve prendere in considerazione anche l'ipotesi che Gordiano siasi trovato a respingere codesta pretesa del tutore.

***

D. 23. 2. 20. — " Paulus libro singulari ad orationem divi " Severi et Commodi. Sciendum est ad officium curatoris pertinere, nubat pupilla an non, quia officium eius in administratione negotiorum constat: et ita Severus et Antoninus rescripserunt in haec verba: ' Ad officium curatoris administratio " pupillae pertinet: nubere autem pupilla suo arbitrio potest ' ".

Ho riportato fedelmente il testo della Fiorentina, perchè gli errori che lo deturpano sono un primo motivo di sospetto. Innanzi a " pertinere " manca *non*, che gli editori restituiscono senz'altro nel passo e fan bene per il senso della legge; che poi l'omissione dipenda da una pura svista dell'amanuense è cosa da discutere, per chiunque ricordi che il Raevardus (1) fra gli antichi ed il Partsch (2) fra i moderni giudicano " curatoris " interpolato al posto di *tutoris*. Nasce quindi il dubbio che Triboniano, tirando un frego sull'originale, abbia cancellato *tutoris non* anzichè *tutoris* soltanto, come era sua intenzione. Nell'iscrizione " divi Severi " sta in luogo di " Marci Antonini "; e da questa falsità si è lasciato ingannare il Partsch, che ha riferito il passo all'*Oratio* di Severo sull'alienazione dei " praedia rustica " e " suburbana ". Anche il rescritto invocato da Paolo è guasto; la locuzione " administratio pupillae pertinet " non piaceva ad Aloandro, che giustamente dopo " administratio " voleva inserito " rerum ". Il giureconsulto e gli imperatori chiamano *pupilla* colei che, per essere nubile, deve aver raggiunto la pubertà. Io avevo notato (3) che *pupilla* dovrebbe significare l'ex-pupilla; ma ha ragione il Lenel (4) di obbiettare che non s'intende perchè qui si dovesse accennare alla tutela già estinta.

(1) *Coniect.*, 2. 15.
(2) *Studien zur Negotiorum Gestio*, I, p. 91 n. 3.
(3) *Minore età*, p. 134.
(4) Op. cit., p. 155, n. 1.

Il Lenel ha torto solo quando assume il testo a prova della sua affermazione (1) che presso i classici *pupillus* significasse anche il giovanetto sottoposto a curatela. Avrebbe forse torto, anche se la sua affermazione resultasse fondata, ciò che io nego (2), perchè qui la diversità di sesso potrebbe avere qualche influenza. Il Peters (3) ha sostenuto che " pupilla " usassero i classici in relazione al " curator ", perchè la donna era soggetta a tutela perpetua. Le prove addotte dal Peters non suffragano la tesi, poichè egli non avverte che nei luoghi da lui citati si discorreva del " curator pupillae " propriamente detto, cioè del curatore dato ad una fanciulla impubere. Ma certo una qualche giustificazione per l'uso di *pupilla* si può accampare, che non ricorre per *pupillus*.

Io non dirò pertanto che " pupilla " sia interpolata in luogo di " mulier ", benchè ammetta la possibilità che il testo originario parlasse del tutore. Che se il Lenel reputa ciò impossibile, perchè un'impubere non può " nubere ", egli non ha pensato che il tutore a cui in ipotesi si sarebbe riferito Paolo, sarebbe stato il tutore del sesso: il tutore dell'impubere è fuori causa. Tanto che io, difendendo altra volta la genuinità di " curatoris ", è contro il tutore del sesso che ho combattuto. Le donne puberi, per le quali soltanto si può parlare di matrimonio, " ipsae sibi negotia tractant " (Gai. I. 190), e però Paolo non avrebbe potuto dire che l'ufficio del loro tutore " in administratione negotiorum constat " (cfr. Ulp. 11. 25). L'obbiezione sarebbe irresistibile, se il passo non apparisse avvolto in un'ombra di sospetto. Io non ho mezzi nè per dissipare quest'ombra nè per mutare il sospetto in certezza. Questo io so, che, trovando negato il diritto del tutore, i compilatori dovevano tartassare il frammento, perocchè il tutore del sesso aveva finito di esistere; trovando invece negato il diritto del curatore, i compilatori, che avevano modificato la costituzione di Onorio, pote-

(1) Vedila già in Brassloff, *Z. d. Sav. St. f. Rg.*, 22, p. 188, n. 1.

(2) Sui testi citati dal Lenel vedi per ora *La minore età, passim.* Vi torno sopra nel *Curator impuberis.* E, come accenno in *Bull. dell'Ist. di dir. rom.*, 27, p. 306, n. 1, non sarei molto propenso neanche ad ammettere per " pupilla " l'eccezione postulata dal Peters.

(3) *Z. d. Sav. St. f. Rg.*, 32, p. 301, n. 1.

vano rispettare pienamente il fr. 20 D. 23. 2, onde solo per inescusabile negligenza del copista vi sarebbe caduta sopra la fitta gragnuola di errori che abbiamo deplorato.

*
* *

Genuini o interpolati, D. 23. 2. 20 e C. 5. 4. 8 provano egualmente per il diritto antico e per il nuovo. Paolo, i Severi, Gordiano non combattevano contro i mulini a vento, ma ostacolavano un principio vivamente operoso nella coscienza popolare e trionfante nell'epoca romano-ellenica. La negazione al " curator mulieris " del diritto che gli attribuiscono le costituzioni del Teodosiano, è così recisa da vincere ogni circostanza contraria che potesse apparire nei libri giustinianei. E poichè non v'ha dubbio che in C. 5. 4. 20 sia stata soppressa quella qualsiasi ingerenza che gli imperatori dell'a. 408/9 dovevano assegnare al curatore nelle nozze della minorenne, la dimostrazione è esauriente per quanto riguarda il " curator mulieris " (1).

(1) D. 23. 2. 62 pr. non vuole riconoscere al tutore un diritto normale di ingerirsi nelle nozze della pupilla, perchè questo proposito fu alieno dai compilatori, quando stimarono di dover rafforzare il motivo della decisione papinianea.

> " Papinianus *l. 4 responsorum*. Quamquam in arbitrio matris pater esse voluerit, cui nuptum filia communis collocaretur, frustra tamen ab ea tutor datus eligetur: neque enim intellegitur pater de persona tutoris cogitasse [cum ideo maxime matrem praetulit, ne filiae nuptias tutori committeret] ".

Anche il Beseler, *Beiträge*, III, p. 63, per il *cum* causale con l'indicativo sospetta la chiusa " cum ideo maxime rell. ". Ma certo, se il diritto giustinianeo è fermo nella negativa, le facoltà del tutore circa gli sponsali della pupilla oscillano attraverso le varie fonti. Vedemmo che per Ulpiano (D. 23. 1. 6) i tutori non possono nè denunziare gli sponsali nè concluderli: " non magis quam sponsalia posse eos solos constituere, nisi forte omnia " ista ex voluntate puellae facta sint ". L'eccezione " nisi forte rell. " è tribonianea (cfr. Eisele, *Z. d. Sav. St. f. Rg.*, 13, p. 152; Beseler, op. cit., III, p. 132; Perozzi, *Istituzioni*, I, p. 242 n. 1); ma resta vero che i tutori, non più soli, sibbene col concorso della volontà della fanciulla, potevano fidanzarla. In questo senso si potrà anche interpretare la costituzione di Costantino

Invece per i congiunti della sposa il contrasto entro il medesimo titolo (C. 5. 4) fra la c. 8 e le cc. 18 e 20 non rende chiaro il pensiero di Giustiniano (1).

(C. Th. 3. 5. 5), che vieta " patri puellae aut tutori aut curatori aut cuilibet " eius adfini... cum prius militi puellam desponderit, eandem alii in ma- " trimonium tradere ". Ma la costituzione di Graziano (C. Th. 3. 5. 11 pr.): " patri matri tutori vel cuicumque ante decimum puellae annum datis " sponsalibus quadrupli poenam remittimus " mi pare che non possa piegarsi senza sforzo alla tesi della nullità degli sponsali conclusi dal tutore. L'imperatore rimette la pena, ma non dichiara nulli gli sponsali; anzi, parlando di remissione, ammette la validità degli sponsali. E risalendo indietro dal decimo anno si arriva presto ad un'età in cui la fanciulla non può avere una volontà cosciente, sicchè i tutori debbono esser soli a concludere gli sponsali e, contrariamente alla dottrina di Ulpiano, resulterebbe " sponsalia posse eos solos constituere ".

(1) Difficile è pure determinare i confini del diritto che possa spettare alla madre. Cfr. (oltre C. 5. 4. 1 e 20; D. 23. 2. 62 pr. citati) C. 3. 28. 20 (Diocletianus); 5. 17. 4 (Id.). L'ava è ricordata da D. 23. 2. 57 *a*.

Cenni sulle Carte e sui Manoscritti Giobertiani.

Nota II del Prof. PIER ANGELO MENZIO.

§ 1°. Collazione del ms. giobertiano n° 31 (Della riforma cattolica).

Edizione Massari	Ms. giobertiano n° 31	Osservazioni
pagg. XXXIX-XL	fogli 71, 72	
§ I	1, 2	Il f. 2 comincia colle parole: " Come Cristo è l'individuo „ (p. 3, l. 10). Non c'è tra i due fogli nessuna relazione: nel 1° si parla dei preti che trascurano od astiano la civiltà: nel 2°, dell'inferiorità del sacerdozio rispetto al suo tipo.
§ II	3	
§ III	4-5	
§ IV	6	
§ V	7, 8, 9	Il f. 8 comincia colle parole: " La bontà e eccellenza „ (§ V, p. 7, l. 8); il 9, colle parole: " La grandezza degli uomini „ (ivi, l. 20).
§ VI	10	
§ VII	11	
§ VIII	12-13, 14, 15	Il f. 14 comincia colle parole: " La scienza sacra „ (p. 12, l. 15); il 15: " Giulio secondo è il più gran papa „ (p. 13, l. 1). Questi fogli stanno a disagio sotto il titolo: " Imperfezioni della teologia moderna „.
§ IX	16, 17	Il f. 17 comincia colle parole: " I due momenti dialéttici „ (p. 14, l. 19). Non c'è legame tra i due fogli: il 16 parla della dualità del Cristianesimo; il 17, dell'armonia degli opposti.
§ X	18-19	

Edizione Massari	Ms. giobertiano nº 31	Osservazioni
§ XI	20	
§ XII	21-2, 23, 24, 25	Il f. 23 comincia colle parole: “ Cristo dicendo „ (p. 19, l. 20); il 24, colle parole: “ La storia ecclesiastica „ (p. 20, l. 3); il 25, colle parole: “ Una delle cagioni „ (p. 20, l. 18), e termina col § XIII (p. 21, l. 18). I f. 21-22 parlano della civiltà e religione; il 23, del Cristianesimo di fronte agli altri culti; il 24, della sproporzione fra l'idea cristiana e gli uomini; il 25, della ignoranza dei missionari. Non si comprende, poi, perchè il Massari abbia diviso il f. 25, assegnandolo parte al § XII e parte al § XIII.
§ XIII	25, 26	Il f. 26 comincia colle parole: “ Il temporale, il sensato „ (p. 21, l. 18). Il f. 25 accenna al fallimento delle missioni gesuitiche, causato dalla loro ignoranza; il 26, al *temporale*, come rovina della Chiesa.
§ XIV	27	
§ XV	28, 29	Il f. 29 comincia colle parole: “ Il clero dei nostri tempi „ (p. 23, l. 11). Il f. 28 tratta del Cristianesimo come civiltà; il 29, della inferiorità del clero attuale nella vita civile.
§ XVI	30-31	
§ XVII	32	Il Massari tolse dal f. 32 e trasportò a p. 288 il pensiero: “ Parlano della mia semplicità, ecc. „.
§ XVIII	33	
§ XIX	34, 35	Il f. 35 comincia colle parole: “ Le definizioni ecclesiastiche „ (p. 27, l. 16). Il f. 34 dice che la Chiesa armonizza gli opposti; il 35, che le definizioni ecclesiastiche del sovrintelligibile sono negative.
§ XX	36, 37, 38, 39, 40	Il f. 37 comincia colle parole: “ Il vero è flessibile „ (p. 29, l. 1); il 38, colle parole: “ L'organizzazione di Roma „ (p. 29, l. 16); il 39, colle parole: “ Distinzione tra la dignità „ (p. 30, l. 4); e il 40, colle parole:

Edizione Massari	Ms. giobertiano nº 31	Osservazioni
		" Il cielo e la terra " (p. 30, l. 21). I ff. 36, 38, 39, 40 parlano del papa, di Roma, ecc.; ma il 37, della poligonia del vero!
§ XXI	41-2, 3	Il f. 43 principia colle parole: " I dogmi cattolici " (p. 32, l. 23). Il f. 41-42 parla dell'*ingegno grande come strumento di progresso* e del *progresso cattolico*; il 43, dell'*immutabilità dei dogmi*.
§ XXII	44-5	
§ XXIII	46, 47-8	Il f. 47-48 si inizia colle parole: " La teologia attuale " (p. 37, l. 19).
§ XXIV	49, 50	Il f. 50 comincia colle parole: " L'appello al futuro " (p. 39, l. 18, del § XXIV). Il f. 49 parla del dogma; il 50, dell'appello al futuro.
§ XXV	51-2	
§ XXVI	53	
§ XXVII	54-5	
§ XXVIII	56, 57-8, 59, 60	Il f. 57-58 principia a p. 46, l. 9: " La filosofia e la teologia rivelata "; il f. 59 a p. 48, l. 10: " L'unità del dogma "; il f. 60 a p. 48, l. 16: " Bossuet interpretando ". Il f. 56 spiega il detto che fuor della Chiesa non vi è salute; il 57-58 parla dei rapporti tra teologia e filosofia, cattolicismo e razionalismo; il 59 e il 60, del dogma.
§ XXIX	61-2	
§ XXX	63, 64	Il f. 64 comincia a p. 52, l. 8: " Il Cristianesimo è la cima ".
§ XXXI	65, 66	Il f. 66 che comincia coll'" *Ite, docete* " (p. 54, l. 4) non ha che fare col 65, e riguarda l'*insegnamento laico*.
§ XXXII	67, 68	Il f. 68 comincia colle parole: " L'Europa non tornerà alla Chiesa cattolica " (p. 55, l. 19).
§ XXXIII	69	
§ XXXIV	70	
§ XXXV	73-4	
§ XXXVI	75	

Edizione Massari	Ms. giobertiano nº 31	Osservazioni
§ XXXVII	76	
§ XXXVIII	77, 78-9, 80-1	Il f. 78-79 comincia a p. 62, l. 9: " Della riforma cattolica „; l'80-81 a p. 64, l. 3: " La Chiesa e le sette „. Il f. 77 tratta de' *difetti umani* del Cristianesimo; il 78-79, della riforma cattolica; l'80-81, della Chiesa e della eterodossia.
§ XXXIX	82	
§ XL	83-4	
§ XLI	85, 86, 87	Il f. 86 comincia a p. 68, l. 19, del § XLI: " I confini tra cattolicità „; l'87, colle parole: " L'individuo non fa equazione „ (p. 69, l. 17). I ff. 85 ed 86 parlano delle relazioni tra cristianità e cattolicità, ortodossia ed eterodossia; l'87, della imperfezione degli individui di fronte alla perfezione degli istituti di cui fanno parte.
§ XLII	88	
§ XLIII	89	
§ XLIV	90	
§ XLV	91	
§ XLVI	92	
§ XLVII	93, 94, 95, 96, 97-8, 99-100, 101, 102	Il f. 94 comincia a p. 73, l. 21: " La pugna è utile „; il 95, ivi, l. 25: " Gli studi superficiali „; il 96, a p. 74, l. 17: " Il cattolicismo è una dottrina „; il 97-98 a p. 75, l. 21: " Le definizioni della Chiesa „; il 99-100 a p. 77, l. 26: " La sentenza che fuori della Chiesa „; il 101-102 a p. 78, l. 31: " Bull, Bossuet „; il 102 a p. 79, l. 13: " La storia del Cristianesimo „. Tutti questi numeri sono raggruppati sotto il titolo: " Il cattolicismo è una istituzione viva „; ma il 93 parla della definizione dei sovrintelligibili; il 94, della pugna dialettica, utile al cattolicismo, se gerarchica; il 95, de' veri difensori del cattolicismo; il 96, della parte mutabile e della immutabile del catto-

Edizione Massari	Ms. giobertiano nº 31	Osservazioni
		licismo; il 97-98, delle definizioni della Chiesa, del dogma e dell'opinione; il 99-100, ripete il ritornello che fuori della Chiesa non vi è salute e parla dell'infallibilità del papa, congiunto colla Chiesa; il 101, del dogma della Trinità e, in generale, della vita del dogma; il 102, infine, accenna alla storia del Cristianesimo.
§ XLVIII	103	
§ XLIX	104, 105, 106-7 108, 109	Il f. 105 comincia a p. 81, l. 12: " La *variazione* del dogma „; il 106-07 a p. 81, l. 31: " Le eresie appartengono „: il 108 a p. 83, l. 6: " L'eresia, mancando del vero „; il 109 a p. 83, l. 29: " La vera tradizione cattolica „. Il f. 105 parla della *variazione* del dogma; gli altri, della eresia e della vera tradizione cattolica.
§ L	110	
§ LI	111-2, 113, 114 115-6	Il f. 113 comincia a p. 87, l. 3: " Come tutti gli occhi „; il 114, ivi, l. 23: " I teologi distinguono „; il 115-16 a p. 88, l. 23: " Il Cristianesimo è l'integrità „. Il f. 111-12 tratta della scrittura, della tradizione e scienza nel Cristianesimo; il 113, del vero e del cattolicismo; il 114, della scienza cattolica e della scienza protestante; il 115-16, del Cristianesimo, della morale e dell'ascetismo.
§ LII	117	
§ LIII	118, 119	Il f. 119 comincia a p. 91, l. 16: " La Chiesa è la sola parte „, e parla della Chiesa e dell'idea intuitiva.
§ LIV	120	
§ LV	121, 122	Il f. 122 comincia a p. 93, l. 23 del § LV: " Lo stato immanente „ e parla del *progresso*, quale prodotto dell'intuito e della riflessione.
§ LVI	123	
§ LVII	125, 126	Il f. 126 comincia a p. 96, l. 5: " La scolastica ha fatto „. Il f. 125 sostiene che il cattolicismo è l'unico sistema.

Edizione Massari	Ms. giobertiano n° 31	Osservazioni
§ LVIII	127, 128	Il f. 128 comincia a p. 98, l. 1: " Le definizioni dogmatiche „.
§ LIX	129, 130, 132, 133, 134	Il f. 130 comincia a p. 99, l. 9: " Il Cristianesimo si va attuando „: il 132, ivi, l. 19: " La razza pelasgica rappresenta „: il 133 a p. 100, l. 13: " L'epoca prima della Chiesa „; il 134, ivi, l. 17: " L'ubbidienza e l'indipendenza „. Qui i numeri 133 e 134 male si collegano cogli altri; il 133 parla delle epoche della Chiesa; il 134, della ubbidienza e dell'indipendenza.
§ LX	135-8, 139	Il f. 139 comincia a p. 105, l. 11: " Quando chi è investito „.
§ LXI	140, 141	Il f. 141 principia a p. 107, l. 13: " Cristo vuol salvare „.
§ LXII	142-3	
§ LXIII	144	
§ LXIV	145-6	
§ LXV	147	
§ LXVI	148	
§ LXVII	149	L'ultimo periodo del f. 149 è unito, non se ne capisce la ragione, al § LXVIII.
§ LXVIII	150, 151	Il f. 151 comincia a p. 115, l. 13, del § LXVIII: " Il cattolicismo fu finora „.
§ LXIX	153, 154, 155	Il f. 154 comincia a p. 117, l. 25: " Il cattolicismo, come sistema „; il 155 a p. 118, l. 9: " Il cattolicismo è il vincolo „. Come possono questi fogli 153, 154, 155 comprendersi sotto la generica designazione di: *definizione del cattolicismo*?
§ LXX	156	
§ LXXI	157, 158	Il f. 158 comincia a p. 120, l. 31: " L'androginismo dell'Evangelio „ e non si collega per nulla col f. 157.
§ LXXII	159-160	
§ LXXIII	161, 162	Il f. 162 comincia a p. 123, l. 7: " La fede è la continuità „.
§ LXXIV	163	
§ LXXV	164	

Edizione Massari	Ms. giobertiano n° 31	Osservazioni
§ LXXVI	165	
§ LXXVII	166	
§ LXXVIII	167	
§ LXXIX	168	
§ LXXX	169	
§ LXXXI	170	
§ LXXXII	171, 172-3	Il f. 172-73 comincia a p. 132, l. 10: " Lutero introdusse il metodo ".
§ LXXXIII	174, 175	Il f. 175 comincia a p. 134, l. 11: " La tradizione cattolica ".
§ LXXXIV	176	
§ LXXXV	177	
§ LXXXVI	178	
§ LXXXVII	178, 179	Il f. 179 comincia a p. 138, l. 8: " Le ragioni e autorità ". Invece di scindere il f. 178 in due paragrafi, era meglio unire 178 e 179 in un solo paragrafo.
§ LXXXVIII	180	
§ LXXXIX	181, 182, 183, 184	Il f. 182 comincia a p. 141, l. 3: " Il Protestantesimo è il Cristianesimo "; il 183, ivi, l. 16: " La Chiesa è la metessi "; il 184, ivi, l. 23: " La fede, come virtù ". Il f. 181 parla dell'indole dell'eterodossia; il 182, del Protestantesimo e del Cattolicesimo; il 183, dell'adesione dell'individuo alla Chiesa: il 184, della fede e dei motivi di credibilità.
§ XC	185	
§ XCI	186	
§ XCII	187, 188-9	Il f. 188-89 comincia a p. 145, l. 4: " Ogni religione corre ". Il titolo del § XCII: " Nella religione sono due cicli, il religioso e il civile " non si addice al contenuto del f. 187.
§ XCIII	190	
§ XCIV	191, 192	Il f. 192 comincia a p. 148, l. 18, del § XCIV: " Il dogma rivelato "; il f. 191 è monco, dimezzato (V. correzioni).
§ XCV	193	

Edizione Massari	Ms. giobertiano n° 31	Osservazioni
§ XCVI	194, 195	Il f. 195 comincia a p. 151, l. 10: “ Nella costituzione della Chiesa „. Il f. 194 tratta della libertà gallicana; il 195, della libertà che si gode nella Chiesa cattolica.
§ XCVII	196, 197	Il f. 197 comincia colle parole: “ La ragione e la rivelazione „ (p. 152, l. 8). Il f. 196 parla della prudenza e dell'audacia; il 197, della ragione e della rivelazione.
§ XCVIII	199	
§ XCIX	200	Se il Massari avesse capito che il f. 200 è *tutto soggettivo* e che nell'*uomo o dittatore ideale* il Gioberti intendeva di raffigurare se stesso, non avrebbe staccato dal § XCIX e portato a p. 288 il pensiero ultimo: “ Ordine ideale delle mie opere. Le prime essoteriche, le altre acroamatiche „.
§ C	201, 202-3	Il f. 202-03 comincia colle parole: “ La storia del dogma ortodosso „ (p. 154, l. 27). Il f. 201 parla della Chiesa, come contenente e come vincolo; il 202-03, accenna alla storia del dogma e alla storia delle eresie.
§ CI	204, 205	Il f. 205 comincia a p. 157, l. 14: “ L'universalità della Chiesa „. Il f. 204 parla della poligonia del cattolicismo; il 205, degli atti della Chiesa.
§ CII	206	
§ CIII	207	Il Massari ha soppresso alcune parole, in fine (V. correzioni).
§ CIV	208	
§ CV	209	
§ CVI	210, 211	Il f. 211 comincia a p. 161, l. 10: “ Il dogma rivelato è l'indefinito „. Il f. 211, che concerne le varie epoche del dogma, come può stare col 210, che parla delle attinenze tra rivelazione e filosofia?
§ CVII	212	
§ CVIII	213	

Edizione Massari	Ms. giobertiano n° 31	Osservazioni
§ CIX	214	
§ CX	215-6	
§ CXI	217-8	
§ CXII	219	
§ CXIII	220-1	
§ CXIV	222-3	
§ CXV	224	
§ CXVI	225	
§ CXVII	226-7, 228	Il f. 228 comincia a p. 177, l. 28, colle parole: " La Chiesa cattolica " e sta da sè.
§ CXVIII	229, 230	Il f. 230 comincia a p. 179, l. 24: " Le definizioni della Chiesa ", e parla della *decadenza* del cattolicismo e dei rimedi.
§ CXIX	231	
§ CXX	232	
§ CXXI	233, 234, 235	Il f. 234 comincia a p. 183, l. 20: " Il cattolicismo è l'universale "; il 235 a p. 184, l. 3: " Il cattolicismo non esclude ".
§ CXXII	236	
§ CXXIII	237	
§ CXXIV	238-9*bis*, 240	Il f. 240 comincia a p. 192, l. 25: " La credulità o superstizione " ed accenna alle proprietà della fede.
§ CXXV	241, 242	Il f. 242 comincia colle parole: " Il cattolicismo è il Logo rivelato " a p. 193, l. 6, del § CXXV, e parla dell'ampliamento del cattolicismo. Nel *verso* del f. 242 si leggono queste parole: " ... cercarlo nel clero solo; ma nel laicato e nel sacerdozio. L'uno è l'intuito conservativo, e l'altro la riflessione speculativa del Cristianesimo ".
§ CXXVI	243, 244	Il f. 244 comincia a p. 194, l. 5: " L'uomo non potendo conoscere ". Il f. 243 parla dei progressi del Cristianesimo.
§ CXXVII	245	
§ CXXVIII	246	

Edizione Massari	Ms. giobertiano n° 31	Osservazioni
§ CXXIX	248	
§ CXXX	249	
§ CXXXI	250	
§ CXXXII	251, 252, 253	Il f. 252 comincia a pag. 198, l. 8: " L'epoca messianica "; il 253, ivi, l. 16: " Obbiettasi contro il Cristianesimo ". Il f. 252 parla delle *epoche messianiche.*
§ CXXXIII	255, 256-7, 258	Il f. 256-57 comincia a p. 200, l. 9: " L'évangile n'est pas un livre "; il 258 a p. 201, l. 16: " Cristo in tutti quelli ". Il f. 255 parla dell'incredulità e fede, che rampollano dalla natura intrinseca del Cristianesimo; il 256-7, del Vangelo; il 258, di Cristo.
§ CXXXIV	259	
§ CXXXV	261, 262, 263	Il f. 262 comincia colle parole: " Pare strano a dire " (p. 203, l. 11); il 263, ivi, l. 18-19: " *Superstitio, superstizione* ". Il f. 261 parla della *percezione cristiana* e non risponde al titolo del § CXXXV.
§ CXXXVI	264	
§ CXXXVII	265, 266	Il f. 266 comincia colle parole: " Se l'indifferenza religiosa " (p. 204, l. 12), e dice che l'indifferenza, in religione, è in parte un bene.
§ CXXXVIII	267	
§ CXXXIX	268	
§ CXL	269-70, 271	Il f. 271 comincia: " Come Dio creatore " (p. 208, l. 5).
§ CXLI	272-4	
§ CXLII	275-6	
§ CXLIII	277	
§ CXLIV	278	
§ CXLV	279, 280	Il f. 280 comincia a p. 215, l. 15: " Filosofia è *scienza* " e dà la definizione della filosofia (doveva far parte del *proemio* della *protologia*).
§ CXLVI	281	
§ CXLVII	282-3	

Edizione Massari	Ms. giobertiano nº 31	Osservazioni
§ CXLVIII	284-5	
§ CXLIX	286-7, 288	Il f. 288 comincia a p. 221, l. 27: " Cristo, dice Origene ".
§ CL	289, 290	Il f. 290 comincia colle parole: " Cristo chiamò gli Ebrei " (p. 223, l. 11).
§ CLI	291, 292	Il f. 292 principia a p. 223, l. 7, del § CLI: " La religione per essere ". Il f. 291 parla dei gradi della rivelazione; ma il 292 delle doti che deve avere la religione, per essere credibile.
§ CLII	293, 294-5	Il f. 294-95 principia a p. 224, l. 16, del § CLII: " Ogni dogma cristiano " e non si confà col 293, che parla del vario valore delle prove, secondo i tempi.
§ CLIII	296	
§ CLIV	297, 298-9	Il f. 298-99 comincia (p. 228, l. 4): " L'ingegno e la virtù eccellente ", e parla del potere gerarchico e sopragerarchico (nella Chiesa).
§ CLV	300	
§ CLVI	301	Il f. 301 è *soggettivo* al massimo grado.
§ CLVII	302	
§ CLVIII	303	
§ CLIX	304-5, 306, 307, 308	Il f. 306 comincia a p. 233, l. 23: " Per convertire Roma "; il 307, a p. 234, l. 2: " Ogni sistema "; il 308, ivi, l. 9: " Vi ha un cattolicismo ". Il f. 306 parla del bisogno di svecchiare, colla filosofia, il cattolicismo, e potrebbe unirsi col 308; il 304-5 può stare col 307.
§ CLX	309-10	
§ CLXI	311, 312	Il f. 312 comincia a p. 237, l. 17: " Il Cristianesimo è per diversi aspetti ", e parla dei caratteri del Cristianesimo.
§ CLXII	313-4, 315, 316	Il f. 315 comincia colle parole: " Difetti della scienza cristiana " (p. 239, l. 18); il 316, ivi, l. 26: " La fede è certo modo ". Il f. 315 parla dei difetti della scienza cristiana; il 316, della fede e della grazia.

Edizione Massari	Ms. giobertiano n° 31	Osservazioni
§ CLXIII	317-8	
§ CLXIV	319	
§ CLXV	320-1	
§ CLXVI	322	
§ CLXVII	323, 324-6, 328	Il f. 324-26 comincia colle parole: " La filosofia dell'uomo " (p. 245, l. 12); il 328 a p. 247, l. 19: " La tradizione cattolica ". Il f. 323 parla della rivelazione e della ragione; il 324-26, della filosofia e della religione; il 328, della tradizione cattolica (Il f. 327 è in bianco).
§ CLXVIII	329-30	
§ CLXIX	331	
§ CLXX	332-3	
§ CLXXI	334	
§ CLXXII	335, 336	Il f. 336 comincia a p. 253, l. 5, del § CLXXII: " La religione per conservare ", ed accenna al cattolicismo travisato.
§ CLXXIII	338, 339, 340, 341	Questi 4 fogli (il 339 comincia: " Il Cristianesimo è un vero " (p. 254, l. 4); il 340 (ivi, 14): " *Vitam non exploratam* "; il 341 (ivi, 22): " *In carità son fatte* ") sono tenuti insieme da un tenue filo.
§ CLXXIV	342	
§ CLXXV	343-4	
§ CLXXVI	345	
§ CLXXVII	347	
§ CLXXVIII	348-9	
§ CLXXIX	350	
§ CLXXX	351	
§ CLXXXI	352	
§ CLXXXII	353	
§ CLXXXIII	354-5	
§ CLXXXIV	357	
§ CLXXXV	358, 359	Il f. 359 comincia a p. 265, l. 8, del § CLXXXV: " Plutarco dice ".
§ CLXXXVI	360	
§ CLXXXVII	361, 362	Il f. 362 contiene le ultime 3 righe di questo paragrafo.

Edizione Massari	Ms. giobertiano n° 31	Osservazioni
§ CLXXXVIII	363, 364	Il f. 364 comincia: " L'incertezza sul punto preciso " (p. 267, l. 6, del § CLXXXVIII).
§ CLXXXIX	365	
§ CXC	366	
§ CXCI	367, 368	Il f. 368 comincia a p. 271, l. 12: " Le sette religiose "; il f. 367 è contro il dogmatismo volgare; il f. 368 tratta del cattolicismo come *somma* ed *armonia delle eresie.*
§ CXCII	369	
§ CXCIII	370	
§ CXCIV	371	
§ CXCV	372	
§ CXCVI	373, 374, 375	Il f. 374 comincia a l. 10, p. 275, § CXCVI: " Il Cristianesimo da mistico "; il 375 a p. 276, l. 1-2: " Accordo del diritto ", e parla dell'accordo del diritto di esame coll'autorità cattolica.
§ CXCVII	376	
§ CXCVIII	377, 380	Il f. 380 comincia colla l. 21 della p. 277: " Discorso sull'unione religiosa ".
§ CXCIX	383	
§ CC	384	
§ CCI	385	
§ CCII	386, 387	Il f. 387 comincia colla l. 7 della p. 280: " Ora il papa è tornato ".
§ CCIII	388-9	
§ CCIV	390, 391	Il f. 391 comincia colle parole: " Roma. Tre Rome " (p. 283, l. 6).
§ CCV	392	
§ CCVI	393	
§ CCVII	394	
§ CCVIII	396	

Frammenti diversi:

p. 288	α) f. 32, 200	β) 131	γ) 356		
" 289	f. 198 (retto)				
" 290	α) f. 198 (verso)	β) 198 (verso)	γ) 198 (verso)	δ) 346	ε) 207
" 291	α) f. 247	β) 260	γ) 337		
" 292	α) f. 68 (verso)	β) 381	γ) 395	δ) 379	
" 293	α) f. 378	β) 198 (retto)			

§ 2°. Errata-corrige alla stampa del Massari.

NB. Il Massari stampa sempre *minesi, minetico* invece di *mimesi, mimetico* (nella *Filosofia della rivelazione* e nella *Protologia* appare la forma corretta); *ecletico, ecletismo* per *eclettico, eclettismo,* ecc., ecc.

Pagina	Linea	*Invece di:*	*Leggi:*
3	13	scarsa	sempre
7	1	anche i	i
„	2	per essi	per essa
8	VI, 5	competono	[così il ms.; ma] compete
11	15	sovrasti	sovrasta
„	20	propagarle	propagarla
„	30	questo	questi
12	19	assennati	arrenati
„	„	precedente....	precedente.
13	IX, 3	con religione	come religione
14	6	ricompra	ricompensa
„	23-4	risecare	risecarne
16	6	dogmi.	dogmi: ma dell'inutile raffinamento
„	20	sarà forza	segue forse
17	4	esteriore	esterna
18	5	media	mediana
„	7	cielo	ciclo
19	2	dal disegno	tal disegno
„	25	rivelazione	rivoluzione
20	15	aggiungesi	aggiungasi
„	16	intera	interna
23	20	Charré	Charée
„	29	regressivo	regressivo;
26	12	della facoltà umana	delle facoltà umane
27	14	carità	unità (?)
28	21	terreno	temeno
30	12	od è	ed è

Pagina	Linea	*Invece di:*	*Leggi:*
32	5	Chesa	Chiesa
36	XXIII, 18	e così	è così
41	8	trasporta	trasportare
42	XXVI, 14	riguardava	[così il ms.; ma] riguardavano
„	XXVII, 1	è la	la
46	19	idea di fuori	idea, di fuori
„	26-7	e la sua esteriorità	[così il ms.; ma] e alla sua esteriorità
48	11	sola	solo
49	4-5	Ente: (atto creativo	Ente (atto creativo):
50	6	presa	pura
51	20	nè tendervi	ma tendervi
„	21	forze	forme
„	XXX, 2	vano	aereo (?)
55	9-10	eterodossa	[il ms.: ortodossa; ma la correzione è esatta]
„	20	ardente	?
„	29-30	come amici	con amore
„	31	ricorressero	ricorrono
„	„	all'artifizio	all'arte esemplare
57	3, 4 ecc.	unitoria	unitaria
59	32	rigenerante	rigenerata
60	XXXVI, 5	due	le due
„	„ 12	Sciti	Siiti
61	XXXVIII, 3	istessa	interna
63	7	ecclesiastici, l'istruzione	ecclesiastici d'istruzione
65	5	traviati	traviamenti
67	12	credano	credono
70	7	possedendone	possedendo
„	8	con esso	con essa
„	13	professione	professo
72	XLV, 7	parti	parti:
79	26	razionale	riformata (?)
82	21-2	momento, transeunte	momento transeunte

Pagina	Linea	*Invece di:*	*Leggi:*
83	14	ristrinse	ristringe
84	L, 15	invalsero	invalse
„	„ 20	teologico	teleologico
90	LII, 10	questa	questo
91	LIII, 15		[si aggiunga:] Arminio e Gomaro
95			[Prima del § LVII si aggiunga:] Il celibato appartiene all'essenza del sacerdozio perfetto, e si richiede al suo ufficio di *generatori morali* della società, di padri spirituali del mondo, di ministri della notizia ideale. Il sacerdozio essendo il germe della dinamica morale, dee rinunziare alla dinamica fisica: altrimenti il principio organico morale non avrebbe la maggioranza. Esso rappresenta la *superiorità dell'Idea sul senso* e dee quindi domare il più veemente dei sensuali istinti. Il sacerdozio gentilesco fu ereditario e quindi non celibe perchè imperfetto. Tuttavia anche nel suo seno i riformatori avvisarono spesso la necessità del celibato per effettuare appieno l'idea ieratica: Budda, i Capnobati getici. Il celibato è sovrattutto necessario per impedire l'eredità e mantenere il principio dell'elezione, che è fondata sulla *generazione morale* (f. 124)
96	17	dei concilii	del concilio
98	25	nè	ma
113	6	innalzante... e	innalzamento... ad
114	2	concentrica	concentra
116	16-7	senza imperfettarla	sempre imperfettamente
			[tra il § LXVIII e LXIX c'è il foglietto 152 con queste parole:] Conclusione della protologia. Dell'ampliamento succes-

Pagina	Linea	*Invece di:*	*Leggi:*
			sivo del cattolicismo. Il ristringimento del cattolicismo è opera francese.
119	15	certa	certo
125	11	governato	governante
126	LXXVI, 5	eccezione	creazione
128	LXXVIII, 15	fanno	[così il ms.; ma] fa
131	1	icarica	iranica
132	6	ultima parte	ultimo prete
"	21-22	riduce, facendo	riduce a formole
"	24	indichiamo	inchiudo in essa
"	26	teologico	teologico cattolico
"	31	dalla	della
133	14	apre... al scetticismo	e apre... allo scetticismo
135	9	non	ne (?)
139	nota 3ª e 4ª		[Delle note 3ª e 4ª si faccia una sola nota e si legga:] È inconciliabile colla grandezza classica: Livio e Bartoli
140	LXXXIX, 12	seguente	figmento
141	10	non però	[così il ms.; ma] però
"	14	minesi	movenze
"	18	partecipe	partecipa
148	4	che l'hanno	[così il ms.; ma] che non l'hanno
"	XCIV, 12	accresciuta	accrescimento
"	" 13	monca	menna
"	" 17	tutto	tutte le discipline: quindi la superiorità germanica. Ma i Tedeschi da Kant in poi ripudiano quasi tutti il corredo della rivelazione, e chiamano per istrazio *iperfisico* l'uso che si fa di essa, quasi che lo stesso studio ideale non fosse anco iperfisico. Non si accorgono che imitano i Francesi per questa parte e che ristringono la scienza. La scienza per essere universale dee abbracciar tutto; ragione e ri-

Pagina	Linea	*Invece di:*	*Leggi:*
			velazione, intelligibile, sensibile e sovrintelligibile; osservazioni e tradizioni, ecc. (Ciò vuol dire che dee essere cattolica). A questo sol patto può essere compiuta e aspirare all'infinito. Questa universalità scientifica è degna di essere ristorata dal senno pelasgico. Dante n'è il tipo. L'enciclopedia italiana dee essere cattolica e non men grande della italiana epopea. Non si vuol già rinnovare la confusione scolastica.
148	XCIV, 21	questi	questa
149	„ 2	determinarli	determinarla
150	20	sarebbe... uscito	sarebbero... usciti
151	6	oggi	assai
152	2-3	celeste	celata
„	19-20	complementario	complementare
156	CI, 4	a tutto	a tutte
157	24	perfezionati	perfezionamenti
158	CIII, in fine		[Il Massari ha soppresso le parole:] Della civiltà della Chiesa: sua importanza
161	19	indefinito	[così il ms.; ma] definito
164	18	fra noi	fino a noi
	nota		L'*asterisco* va collocato dopo la parola *risposta* dell' ultima linea.
165	CXI, 14	fece	facea
168	11	dello soprannaturale	della soprannatura
„	20-21	al soprannaturale	alla soprannatura
170	CXIV, 8	si distingue	[così il ms.; ma] si distinguono
175	10	esausta	esausto
„	24	partita	partite
177	3	neutralità	mentalità
179	13	dal principio	da tal principio

Pagina	Linea	*Invece di:*	*Leggi:*
181	11	derivatrice	dominatrice
182	6	Osiriaco	Osirinco
"	10	ai sciocchi	a' sciocchi
183	26	veggo	v. g.
189	21	assegnarono	assegnano
190	10	creato	creativo
191	12	facciano... paia	facevano... pareva
193	CXXVI, 1	e... incircoscritto:	è... incircoscritto,
195	CXXVIII, 2	lati	dati
196	CXXIX, 6	insegnati	insegnamenti
198	2, 3	ingenera... dal	insomma... del (?)
"	5	ripugna	bisogna
"	10-1	cosmopolitico	cosmopolitia
"	13-4	cosmopolitico	cosmopolitia
"	14	abbraccia	abbracciò
199	18	d'errore	davvero
201	21	e odiato	o odiato
203	3	appercezione	apprensione
"	19	superstrazione	superstruzione
"	21	sustrazione	sustruzione
206	3	della cosa	delle cose
207	24	levitato	[il ms. scrive] levicato
208	CXLI, 1	dico... casi	dirò... suoi
209	4	innovata	innocente
"	5	accessoria	necessaria
210	7	scienza	??
"	11	il dubbio al	al dubbio il
214	13	ridurlo	ridurla
"	nota	Proemio protologico	prot. proem.
215	13	cade	cadi
"	CXLVI, 1	della riforma cattolica	del riformatore cattolico
218	10	soppiattare	soppiantare
219	27	fa	fu

Pagina	Linea	*Invece di:*	*Leggi:*
221	7	come	con
223	CLI, 3	nella Chiesa	[si tolga]
224	CLII, 21	forma	ferma
225	6	copiatasi	copiatori
„	7	dai	dei
„	8	uno	una
„	25	preceduti	precedenti
234	CLIX, 1	essersi	[così il ms.; ma] essergli
„	CL, 10	Mazdechianismo	Mazdeanismo
235	20	contenuta	contenuto
237	24-5	sola da sè medesima	solo in se medesimo
238	8	un chinese	una chimera
239	12	piega	[così il ms.; ma] piegano
240	5	della grazia	dalla grazia
242	15	l'instituzione	d'instituzione
243	6	quel che	qual
244	CLXVI, 3	confesse	confuse
249	18	opinativa è	opinativa. È
„	19	superficiale è	superficiale. È
„	20	parlare	procedere (?)
250	CLXX, 1	c'est la	c'est là la
251	12	venerando	veneranda
„	15	hanno	ha in
252	22	l'intende	s'intende
257	15	ingenera	rigenera
258	3	quello	quella
„	14	essa *in*	essa. *In*
260	CLXXX, 3	braminismo	bramanismo
„	13	in apparenza	che apparenze
262	CLXXXIII, 2	certo	contro
263	3	cagione	ragione (?)
264	CLXXXIV, 11	involata	involuta
266	CLXXXVII, 2	*opere*	*opere.*
267	1	fu	fa

Pagina	Linea	*Invece di:*	*Leggi:*
267	CLXXXVIII, 9	confusa	conforme
"	" 12	dolci,	dolci...
270	1	criteri.. lanciate.. aristocrazia	unitari... lasciate... astruserie
"	3	pari, che	pari, [di] voi che
272	8	non perì	mai fiorì
273	8	innovato	innocente
276	6	possessione	passaggio
"	6-7	id.	id.
277	2	l'incivilisce	s'incivilisce
"	13	dogma	dogma; i raffinamenti di questo son passati
"	24	usate cose	appartenenze
278	CXCIX		[Il f. 382 è, in parte, depennato: resta a sapersi *quando* e *da chi*. Trascrivo quello che contiene, mettendo entro *parentesi quadra* i passi depennati]. Sul *retto* del foglio: " ... senza semenza; fatelo fecondo finchè volete non potrà sacrificare(sic). Meglio è la mediocrità religiosa che l'ingegno irreligioso; quello vi dà poco questo niente. Il suolo arido delle steppe produce poco; quello di Egitto e di Babilonia non darebbe nulla, se gli uomini o i venti non ci portassero i germi. Or qual è il germe che feconda l'ovaia dell'ingegno? La parola ideale. Non ve lo proverò col discorso; ma col fatto. Leopardi: il più grande ingegno d'Italia a' suoi tempi. Niuno più di me lo amò vivo e più venera la sua memoria. Fu un uomo irreprensibile. Or qual è la sua filosofia? Tutti lo sanno: intessuta di imagini. Qual è l'operosità che ne nasce logicamente e che l'autore ne trasse? Quale l'azione? La disperazione, o alla

Pagina	Linea	Invece di:	Leggi:
			men trista l'apatia, l'atarassia di certi antichi filosofi. Esorta a fare come poeta, perchè segue come poeta ciò che chiama i fantasmi dell'immaginazione; e l'immaginazione è religiosa perchè è il riflesso della ragione. Ma come filosofo fa il contrario: non è egli che dice... [Dunque il laicato non può esser operoso se non è religioso. Ma come? Non può essere religioso senza essere cattolico e papalino? Adagio; l'operosità si dee conciliare coll'altra dote cioè coll'italianità, non contraddirle. Ora egli è impossibile l'essere religioso italianamente senza essere cattolico. In prima l'uomo europeo non può essere religioso se non è cristiano; perchè cristiana è la civiltà di Europa. Ora a pari cattolica è la civiltà d'Italia. Prove: memoria, storia, civiltà, plebe] „. Sul *verso* del foglio: “ [Vi sono due Cristianesimi, l'uno eterodosso, l'altro ortodosso; questo solo può essere italiano. Vi sono pure due cattolicismi: l'uno che possiamo chiamare giansenistico o gallicano, e l'altro romano. Non vedete che il nome solo indica che questo solo è italiano? Non entro qui nel merito della causa; considero la religione solo civilmente. L'Italiano non può essere operoso se non è religioso; e non può essere religioso italianamente se non è cattolico romano. Sfido chiunque di rompere questa catena logica. L'operosità e l'italianità ci conducono quindi alla cattolicità.

Pagina	Linea	*Invece di:*	*Leggi:*
			Ma questa è essa possibile se cattolico e gesuitico si hanno per tutt'uno? Oh come mentre il gesuitismo è la contraddizione sofistica e l'imitazione solo apparente del cattolicismo? Anche qui la cosa è chiara. Il cattolicismo è operoso e il gesuitismo è la ignavia incarnata. Il cattolicismo è italiano: il gesuitismo è antiitaliano per essenza. Il cattolicismo è universale, una religione; il gesuitismo è parziale, è una setta]. So che la conclusione riesce amara a molti, e non che difficile, impossibile a tranghiottire. Ma perchè amara? Perchè confondono il cattolicismo romano col gesuitismo, perchè non distinguono il modello dalla creatura „. In un angolo del foglio, nel *verso*, si leggono anche queste parole: “ Mentre mi lacerate con tanto amore? E mi mandate il canchero così dolcemente? „
279	14	soli	sali
281	6	creato	evento
„	9	pure... nè incarnata	pura... ma incarnata
283	4	più	può
285	CCVI, 3	assiomatico speculativo	assiomatica speculativa
„	CCVII, 7	falsificano	falsificarono
289	6	profondersi	profondarsi
291	18	massime indefinite	margine indefinito

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Marzo 1916.

PRESIDENZA DEL SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ovidio, Direttore della Classe, Salvadori, Naccari, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari, Balbiano, Panetti e Segre, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Foà e Somigliana.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio Guidi offre in omaggio un suo opuscolo *Sulla trave continua solidale coi piedritti.*

Il Socio Somigliana ha inviato, per essere stampata fra gli *Atti*, una sua Nota *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di doppio strato neutoniano.*

Anche per gli *Atti* vengono presentate: dal Socio Naccari, per incarico del Prof. G. Boccardi, le *Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1915 all'Osservatorio della R. Università di Torino, calcolate dalla Dott. Tiziana Comi*; e dal Socio Grassi uno scritto del Dott. A. G. Rossi, *Un trasformatore dinamico per correnti alternate.* Nota II.

LETTURE

Sulle derivate seconde della funzione potenziale di doppio strato newtoniano.

Nota del Socio CARLO SOMIGLIANA.

Il procedimento, col quale ho potuto ottenere la forma esplicita delle discontinuità delle derivate seconde delle funzioni potenziali di superficie [1], può essere esteso anche al calcolo delle discontinuità delle derivate seconde delle funzioni potenziali di doppio strato, partendo sempre dal metodo di Neumann-Beltrami. Esporrò i risultati che così si ottengono, sia perchè ritengo siano quasi tutti nuovi, sia perchè mettono in luce delle relazioni fra le proprietà delle funzioni potenziali e le proprietà geometrico-differenziali delle superficie agenti, a cui forse non fu dato finora il rilievo che possono meritare.

Sia

$$W = \int_\sigma g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma$$

la funzione data di doppio strato, disteso sulla superficie σ, di momento g. Per la formula (4) della nota citata possiamo porre

$$\frac{\partial W}{\partial x} = V_1 + W_1 + Q, \tag{1}$$

[1] *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di superficie*, "Atti" di questa Accademia, vol. LI, pag. 501.

ove si ha, colle notazioni usate in quella Nota,

$$V_1 = \int_\sigma (\alpha \Delta_2 g + \Delta_1 (g, \alpha)) \frac{\partial \sigma}{r}$$

$$W_1 = \int_\sigma \Delta_1 (g, \xi) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma$$

e Q è un integrale di linea esteso al contorno, nullo quindi allorchè la superficie σ è chiusa.

La formula (1) determina immediatamente le discontinuità delle derivate prime della W. Da essa infatti risulta

$$D\left[\frac{\partial W}{\partial x}\right] = 4\pi \Delta_1 (g, \xi),$$

ossia, per una relazione stabilita nella Nota sopracitata,

$$D\left[\frac{\partial W}{\partial x}\right] = 4\pi \left(\alpha_1 \frac{\partial g}{\partial s_1} + \alpha_2 \frac{\partial g}{\partial s_2}\right).$$

Formule analoghe si hanno per le altre due derivate. Da queste si ricava subito

$$D\left[\frac{\partial W}{\partial s_1}\right] = 4\pi \frac{\partial g}{\partial s_1} \qquad D\left[\frac{\partial W}{\partial s_2}\right] = 4\pi \frac{\partial g}{\partial s_2} \qquad D\left[\frac{\partial W}{\partial n}\right] = 0$$

formule note, e che possono dedursi anche da quelle che dànno le discontinuità delle derivate seconde della funzione potenziale di superficie, come fa il Poincaré.

Dalla (1) deduciamo poi

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial W_1}{\partial x} + Q_1. \tag{2}$$

E ponendo

$$h_1 = \alpha \Delta_2 g + \Delta_1 (g, \alpha) \qquad g_1 = \Delta_1 (g, \xi)$$

per la formula (4), già citata, e per la (3), avremo

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int_\sigma (h_1 \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h_1, \xi)) \frac{d\sigma}{r} - \int_\sigma h_1 \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + P_{11}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \int_\sigma (\alpha \Delta_2 g_1 + \Delta_1 (g_1, \alpha)) \frac{d\sigma}{r} + \int_\sigma \Delta_1 (g_1, \xi) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + Q_{11},$$

ove al solito P_{11}, Q_{11} sono integrali del contorno.

Da queste due espressioni e dalla (2) risulta subito, per la discontinuità della derivata seconda rispetto ad x della W, il valore

$$(3) \qquad D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] = -4\pi h_1 \alpha + 4\pi \Delta_1 (g_1, \xi).$$

Ora colle formule (7) della Nota succitata si trova subito

$$\Delta_1 (g, \alpha) = \frac{\alpha_1}{R_1} \frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\alpha_2}{R_2} \frac{\partial g}{\partial s_2},$$

quindi

$$(\mathrm{I}) \qquad h_1 \alpha = \alpha^2 \Delta_2 g + \alpha \left(\frac{\alpha_1}{R_1} \frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\alpha_2}{R_2} \frac{\partial g}{\partial s_2}\right).$$

Resta ora a calcolarsi $\Delta_1 (g_1, \xi)$, cioè esprimere questa quantità come funzione quadratica dei coseni di direzione della normale e delle tangenti alle linee di curvatura, poichè tale appunto deve essere il secondo membro della (3).

Osserviamo perciò che si ha

$$g_1 = \Delta_1 (g, \xi) = \frac{\partial g}{\partial s_1} \alpha_1 + \frac{\partial g}{\partial s_2} \alpha_2,$$

e analogamente

$$\Delta_1 (g_1, \xi) = \frac{\partial g_1}{\partial s_1} \alpha_1 + \frac{\partial g_1}{\partial s_2} \alpha_2,$$

perciò sostituendo

$$(4) \qquad \Delta_1 (g_1, \xi) = \alpha_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} + 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} + $$
$$+ \alpha_1 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} \frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} \frac{\partial g}{\partial s_2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2} \frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} \frac{\partial g}{\partial s_2}\right).$$

Conviene ora richiamare alcune formule di geometria differenziale ([1]) analoghe alle formule di Rodrigues. Esse sono le seguenti:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} &= -\frac{\partial\, lg \sqrt{E}}{\partial s_2}\,\alpha_2 - \frac{\alpha}{R_1} & \qquad \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2} &= \frac{\partial\, lg \sqrt{G}}{\partial s_1}\,\alpha_2 \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} &= \frac{\partial\, lg \sqrt{E}}{\partial s_2}\,\alpha_1 & \qquad \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} &= -\frac{\partial\, lg \sqrt{G}}{\partial s_1}\,\alpha_1 - \frac{\alpha}{R_2}
\end{aligned}
$$

ed altre simili che si ottengono da queste sostituendo alla lettera α la β, o la γ. Sussistono inoltre le relazioni

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial\, lg \sqrt{E}}{\partial s_2} + \frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial s_2} = 0 \\
&\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial\, lg \sqrt{G}}{\partial s_1} - \frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial s_1} = 0,
\end{aligned}
$$

le quali permettono di eliminare dalle formule precedenti i coefficienti dell'elemento lineare E, G ed introdurvi invece le inverse dei raggi di curvatura e le loro derivate rispetto agli archi delle linee di curvatura.

Indichiamo con H_1 H_2 i coefficienti delle derivate prime di y nel secondo membro della (4), cioè poniamo

$$
H_1 = \alpha_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} + \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2} \qquad H_2 = \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} + \alpha_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2}.
$$

Mediante le (5) otteniamo

$$
\begin{aligned}
H_1 &= -\alpha_2\left(\frac{\partial\, lg \sqrt{E}}{\partial s_2}\,\alpha_1 - \frac{\partial\, lg \sqrt{G}}{\partial s_1}\,\alpha_2\right) - \frac{\alpha\,\alpha_1}{R_1} \\
H_2 &= \alpha_1\left(\frac{\partial\, lg \sqrt{E}}{\partial s_2}\,\alpha_1 - \frac{\partial\, lg \sqrt{G}}{\partial s_1}\,\alpha_2\right) - \frac{\alpha\,\alpha_2}{R_2},
\end{aligned}
$$

([1]) BIANCHI, *Lezioni di Geom. Diff.*, vol. I, § 67, 125.

quindi sostituendo nella (4) si ha

$$\text{(II)} \qquad \Delta_1(g_1, \xi) = \alpha_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} + 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial s_2} + \\ + \left(\alpha_1 \frac{\partial g}{\partial s_2} - \alpha_2 \frac{\partial g}{\partial s_1}\right) H - \alpha \left(\frac{\alpha_1}{R_1} \frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\alpha_2}{R_2} \frac{\partial g}{\partial s_2}\right),$$

dove per brevità si è posto

$$H = \alpha_1 \frac{\partial \, lg \sqrt{E}}{\partial s_2} - \alpha_2 \frac{\partial \, lg \sqrt{G}}{\partial s_1}.$$

Mediante queste formule (I) (II) possiamo ora costruire la funzione che compare nel secondo membro della (3). Troviamo

$$-h_1 \alpha + \Delta_1(g_1, \xi) = -\alpha^2 \Delta_2 g + \alpha_1 \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} + 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} + \\ + \left(\alpha_1 \frac{\partial g}{\partial s_2} - \alpha_2 \frac{\partial g}{\partial s_1}\right) H - 2\alpha \left(\frac{\alpha_1}{R_1} \frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\alpha_2}{R_2} \frac{\partial g}{\partial s_2}\right),$$

ed è questa la funzione che, all'infuori del fattore 4π, rappresenta la discontinuità della derivata seconda rispetto ad x della funzione potenziale W, che ci eravamo proposti di determinare.

Possiamo ora esprimere H mediante le due curvature della superficie. Dalle (6) risulta infatti

$$\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) H = \alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial s_2} - \alpha_2 \frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial s_1}.$$

per cui finalmente, ordinando la funzione che rappresenta la discontinuità come una funzione quadratica dei tre coseni $\alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha$, troviamo

$$\frac{1}{4\pi} D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] = \alpha_1^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} - \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial s_2} \frac{\partial g}{\partial s_2}\right) + \\ + 2\alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{1}{2} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial s_2} \frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial s_1} \frac{\partial g}{\partial s_2}\right)\right) + \\ + \alpha_2^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} + \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial s_1} \frac{\partial g}{\partial s_1}\right) - \alpha^2 \Delta_2 g - \\ - 2\alpha \left(\frac{\alpha_1}{R_1} \frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\alpha_2}{R_2} \frac{\partial g}{\partial s_2}\right).$$

Un'osservazione assai semplice permette di assegnare senz'altro, in base a questa formula, le discontinuità di tutte le altre derivate seconde della W. Si ha infatti, indicando con D un simbolo di derivazione,

$$D_x = \alpha_1 D_{s_1} + \alpha_2 D_{s_2} + \alpha D_n ,$$

e perciò

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = (\alpha_1 D_{s_1} + \alpha_2 D_{s_2} + \alpha D_n)^2 W.$$

Di qui segue che i coefficienti di $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots$ nella formula precedente devono rappresentare le discontinuità delle derivate seconde della W rispetto a quelle direzioni che possiamo chiamare principali rispetto alla superficie nel punto che si considera, cioè le due tangenti alle linee di curvatura e la normale. Abbiamo così

$$\frac{1}{4\pi} D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial s_1^2}\right] = \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} - \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial s_2} \frac{\partial g}{\partial s_2}$$

$$\frac{1}{4\pi} D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial s_2^2}\right] = \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} + \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial s_1} \frac{\partial g}{\partial s_1}$$

$$\frac{1}{4\pi} D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial n^2}\right] = -\Delta_2 g$$

$$\frac{1}{4\pi} D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial s_1 \partial s_2}\right] = \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{1}{2} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial s_2} \frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial s_1} \frac{\partial g}{\partial s_2} \right)$$

$$\frac{1}{4\pi} D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial s_1 \partial n}\right] = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial g}{\partial s_1}$$

$$\frac{1}{4\pi} D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial s_2 \partial n}\right] = -\frac{1}{R_2} \frac{\partial g}{\partial s_2} .$$

Di queste formule la terza si trova anche nella Memoria, più volte citata, del Beltrami: le rimanenti, per quanto so, devono ritenersi nuove.

Con un procedimento inverso a quello che abbiamo seguìto, potremmo ora dalle formule precedenti ottenere le formule generali relative alle altre derivate seconde rispetto a due qua-

lunque delle coordinate x, y, z. Basta infatti osservare che si ha, ad esempio,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y} = (\alpha_1 D_{s_1} + \alpha_2 D_{s_2} + \alpha D_n)(\beta_1 D_{s_1} + \beta_2 D_{s_2} + \beta D_n)\, W,$$

e che perciò la discontinuità di questa derivata è una funzione lineare delle discontinuità del quadro precedente, i cui coefficienti sono determinati da questa formula.

È superfluo scrivere queste relazioni in forma esplicita.

Dal procedimento che abbiamo seguìto appare in via generale come si possano ottenere in forma esplicita le discontinuità delle derivate di qualunque ordine delle funzioni potenziali newtoniane di semplice e doppio strato. Basta per questo infatti osservare che mediante le formule di Rodrigues e le (5), con successive derivazioni, si possono esprimere le derivate di qualunque ordine dei coseni di direzione delle tangenti alle linee di curvatura e della normale alla superficie, come funzioni lineari di questi stessi coseni. Queste formule permetteranno di rappresentare le discontinuità delle derivate delle funzioni potenziali come funzioni omogenee di questi coseni, di grado uguale all'ordine di derivazione. È appunto questo il risultato raggiunto nei casi qui studiati. E si intravede anche quale debba essere il risultato generale; cioè che le discontinuità delle derivate di qualunque ordine delle funzioni potenziali saranno esprimibili mediante le derivate della densità, o del momento, e le curvature e le loro derivate nel punto che si considera.

Per queste ragioni mi è sembrato che le considerazioni esposte in questa Nota, e nella precedente, fossero un complemento quasi necessario della Memoria del Beltrami.

Un trasformatore dinamico per correnti alternate.

Nota II di A. G. ROSSI.

Qui si prosegue lo studio teorico, iniziato nella Nota I con lo stesso titolo [1], di una macchina speciale avente lo scopo di riprodurre con aumentata energia e spendendo lavoro meccanico una corrente alternata di determinato periodo, la quale si faccia servire come corrente eccitatrice o primaria.

Ricordiamo che l'apparecchio consiste in una coppia di statori identici, portanti avvolgimenti multipolari spaziati fra loro come quelli di un sistema bifase, isolati e costituenti un primario e un secondario; e di un rotore pieno e continuo, di alta conduttività, fronteggiante ugualmente le estremità polari dei due statori. Di questa macchina venne realizzato un tipo *a disco*.

Ora vogliamo ricercare le proprietà dell'apparecchio inserito come *autotrasformatore* e cioè con *i due avvolgimenti statori in parallelo* su la stessa tensione sinoidale E, l'uno dei rami essendo però caricato da un circuito esterno di utilizzazione (r_e, λ_e), secondo lo schema indicato dalla figura 1.

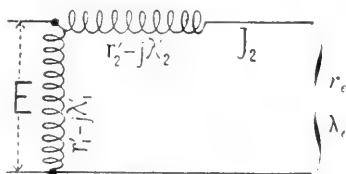



Fig. 1.

8. — Con gli stessi simboli usati precedentemente, le equazioni dei due rami di corrente derivati sono:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} J_1\,(r_1' - j\lambda_1') - jK\,(g' + jb')\,J_2 \\ J_2\,(r_2' - j\lambda_2') - jK\,(g' + jb')\,J_1\,. \end{cases} \tag{1}$$

[1] "Atti della R. Accademia delle Scienze", seduta 20 febbraio 1916, Nota I, pag. 624.

le quali forniscono subito il rapporto delle due correnti, d'eccitazione e di linea:

$$(2) \qquad \frac{J_1}{J_2} = \frac{(r_2' - Kb') - j(\lambda_2' - Kg')}{(r_1' - Kb') - j(\lambda_1' - Kg')} = \frac{R_2^2 - j(\Lambda_2^2 - K)}{R_1^2 - j(\Lambda_1^2 - K)},$$

ove (v. Nota I) si è posto: $K = k\mu u$, ed

$$R_1^2 = r_1' r' - \lambda_1' \lambda', \qquad R_2^2 = r_2' r' - \lambda_2' \lambda',$$

$$\Lambda_1^2 = r_1' \lambda' + \lambda_1' r', \qquad \Lambda_2^2 = r_2' \lambda' + \lambda_2' r'.$$

La seconda forma delle (2), mostra che, per riguardo al rapporto delle correnti, l'apparecchio si comporta come un autotrasformatore statico di caratteristiche $(R_1^2, \Lambda_1^2)\ K\ (R_2^2, \Lambda_2^2)$, nel quale si avesse in potere di variare arbitrariamente da 0 a ∞ il " fattore d'induzione „ K.

La corrente primaria è

$$(3) \qquad J_1 = \mathcal{E} \frac{(r' - j\lambda')[R_2^2 - j(\Lambda_2^2 - K)]}{(R_1^2 R_2^2 - \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 + K^2) - j(R_1^2 \Lambda_2^2 + R_2^2 \Lambda_1^2)},$$

e la secondaria, o corrente di linea, si otterrebbe scambiando l'indice 2 con 1. L'espressione risulterebbe equivalente alla seguente:

$$(4) \qquad J_2 = \mathcal{E} \frac{(r_1' - Kb') - j(\lambda_1' - Kg')}{[R_{12}^2 - K^2(b'^2 - g'^2)] - j[\Lambda_{12}^2 - 2b'g'K^2]},$$

ove si abbrevi con:

$$R_{12}^2 = r_1' r_2' - \lambda_1' \lambda_2', \qquad \Lambda_{12}^2 = r_1' \lambda_2' + r_2' \lambda_1'.$$

Nel modo consueto, si deducono ampiezze e fasi. Ad esempio il ritardo di J_2 su E è

$$(5) \qquad \widehat{I_2 E} = \varphi_2 = \text{arc tg} \frac{\Lambda_{12}^2 - 2b'g'K^2}{R_{12}^2 - (b'^2 - g'^2) K^2} - \text{arc tg} \frac{\lambda_1' - Kg'}{r_1' - Kb'},$$

che parte da $\text{arc tg} \frac{\lambda_2'}{r_2'}$ per $K = 0$ (ritardo a vuoto).

Secondo la equazione simbolica

$$\mathcal{E} = J_2 [R'' - j\Lambda''] = J_2 \mathfrak{Z}'',$$

ed abbreviando (v. Nota I) con

$$B_1^2 = b' g_1' + b_1' g', \qquad G_1^2 = g' g_1' - b' b_1'; \qquad (B_1^4 + G_1^4 = y'^2 y_1'^2),$$

si ottengono: *la resistenza apparente*

$$(6) \quad R'' = \frac{r_2' - K[r_2' B_1^2 + \lambda_2' G_1^2] + K^2[g' G_1^2 - b' B_1^2] + K^3 b' [B_1^4 + G_1^4]}{[1 - K B_1^2]^2 + K^2 G_1^4} =$$

$$= r_2' - K \frac{\lambda_2' R_1^2 - r_2' (\Lambda_1^2 - K)}{R_1^4 + (\Lambda_1^2 - K)^2} + K^2 \frac{g' R_1^2 - b' (\Lambda_1^2 - K)}{R_1^4 + (\Lambda_1^2 - K)^2};$$

la reattanza apparente del ramo secondario

$$(7) \quad \Lambda'' = \frac{\lambda_2' + K[r_2' G_1^2 - \lambda_2' B_1^2] - K^2[g' B_1^2 + b' G_1^2] + K^3 g' [B_1^4 + G_1^4]}{[1 - K B_1^2]^2 + K^2 G_1^4} =$$

$$= \lambda_2' + K \frac{r_2' R_1^2 + \lambda_2' (\Lambda_1^2 - K)}{R_1^4 + (\Lambda_1^2 - K)^2} - K^2 \frac{b' R_1^2 + g' (\Lambda_1^2 - K)}{R_1^4 + (\Lambda_1^2 - K)^2},$$

e l'espressione del ritardo di I_2 *su* E:

$$(8) \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\lambda_2' [R_1^4 + \Lambda_1^4] + K[r_2' R_1^2 - \lambda_2' \Lambda_1^2] - K^2 [g' \Lambda_1^2 + b' R_1^2] + K^3 g'}{r_2' [R_1^4 + \Lambda_1^4] - K[r_2' \Lambda_1^2 + \lambda_2' R_1^2] + K^2 [g' R_1^2 - b' \Lambda_1^2] + K^3 b'}.$$

Finchè le condizioni interne dell'apparecchio e quelle della linea soddisfino le relazioni ovvie fra i ritardi a vuoto nei tre indotti I, II, Δ,

$$\pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_2'}{r_2'} > \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda'}{r'} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_1'}{r_1'} > \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_2'}{r_2'},$$

(9) (cfr. Nota I)

$$\pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_1'}{r_1'} > 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda'}{r'} > \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_1'}{r_1'},$$

i coefficienti di K e di K^2 nelle prime espressioni di R'' e Λ'' (ai numeratori), e i corrispondenti in $\operatorname{tg} \varphi_2$, sono generalmente *negativi* (insieme a G_1^2 ed R_1^2). Ciò notato, dall'esame delle (6), (7),

si conclude che *le grandezze* R″, Λ″ *sono all'origine funzioni crescenti di* K *(velocità), raggiungono ciascuna un (piccolo) massimo particolare, poi decrescono indefinitamente, potendo raggiungere anche valori negativi.* Lo stesso avverrà per le corrispondenti componenti della tensione di linea, che devono equilibrare la E applicata.

Ad esempio: per due valori tali della velocità che portino rispettivamente

$$(a) \qquad 1 - KB_1^2 = 0, \qquad \text{oppure } (b) \qquad \Lambda_1^2 - K = 0,$$

si ha:

$$R''_a = -\lambda_2' \frac{B_1^2}{G_1^2} + \frac{g'B_1^2 + b'G_1^2}{B_1^2 G_1^2} \qquad R''_b = r_2' - \frac{\Lambda_1^2}{R_1^2}(\lambda_2' - g'\Lambda_1^2),$$

$$\Lambda''_a = r_2' \frac{B_1^2}{G_1^2} + \frac{g'G_1^2 - b'B_1^2}{B_1^2 G_1^2} \qquad \Lambda''_b = \lambda_2' + \frac{\Lambda_1^2}{R_1^2}(r_2' - b'\Lambda_1^2),$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{2a} = \frac{r_2'B_1^4 + (g'G_1^2 - b'B_1^2)}{-\lambda_2'B_1^4 + (b'G_1^2 + g'B_1^2)} \qquad \operatorname{tg} \varphi_{2b} = \frac{(\lambda_2'R_1^2 + r_2'\Lambda_1^2) - b'\Lambda_1^4}{(r_2'R_1^2 - \lambda_2'\Lambda_1^2) + g'\Lambda_1^4}.$$

In entrambi i casi, $\operatorname{tg} \varphi_2$ *può* essere negativa, per causa dell'uno o dell'altro termine del rapporto.

Il rapporto fra il valore della corrente I_2 che si ottiene a rotore in movimento e il valore I_{02} esistentevi a rotore fermo (cioè, il rapporto inverso delle corrispondenti impedenze), rappresenta una specie di *rapporto di trasformazione* per la corrente utilizzata.

Poichè:

$$I_{02} = \frac{E z'}{\sqrt{R_2^4 + \Lambda_2^4}} = \frac{E}{z_2'},$$

si ottiene l'espressione del rapporto di trasformazione:

$$(9) \qquad \rho = \frac{z_2'}{Z''} = \sqrt{\frac{1 + \dfrac{K^2 - 2K\Lambda_1^2}{R_1^4 + \Lambda_1^4}}{1 - \dfrac{K^2[2(\Lambda_1^2\Lambda_2^2 - R_1^2R_2^2) - K^2]}{(R_1^4 + \Lambda_1^4)(R_2^4 + \Lambda_2^4)}}}.$$

Per $\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - R_1^2 R_2^2 > 0$, come è generalmente, ρ, all'origine funzione decrescente di K, assume, dopo una certa velocità del rotore, valori maggiori di 1. Parte cioè del valore 1 per $K = 0$ e vi ripassa poi due volte, per le due radici positive della equazione

$$K^3 - K\left[R_2^4 + \Lambda_2^4 - 2(R_1^2 R_2^2 - \Lambda_1^2 \Lambda_2^2)\right] + 2\Lambda_1^2 (R_2^4 + \Lambda_2^4) = 0$$

(di cui il discriminante è negativo finchè il ramo secondario non cada in corto parallelo sul primario). Intermediariamente a

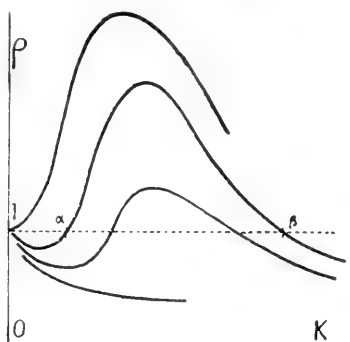



Fig. 2.

queste due radici, K_α e K_β (fig. 2), la espressione (9) assume valori maggiori di 1, per

$$K\left[2(\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - R_1^2 R_2^2) - K^2\right] > (2\Lambda_1^2 - K)(R_2^4 + \Lambda_2^4),$$

passando per un massimo. Il quale può essere assai elevato, rispetto al minimo che lo precede, se le condizioni in circuito sieno tali da rendere assai piccola la grandezza $R_1^2 \Lambda_2^2 + R_2^2 \Lambda_1^2$, complementare della $\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 - R_1^2 R_2^2$ nel prodotto $z'^2 z_1' z_2'$, — come in un caso precedentemente discusso (Nota I).

Allorquando il ramo secondario sia *in corto parallelo*, il rapporto

$$\rho_{11} = \sqrt{\frac{(R_1^4 + \Lambda_1^4)^2 + (R_1^4 + \Lambda_1^4)(K^2 - 2\Lambda_1^2 K)}{(R_1^4 + \Lambda_1^4)^2 + K^4 - 2K^2(\Lambda_1^4 - R_1^4)}}$$

è funzione sempre decrescente di K: così come *l'impedenza ri-*

sultante dai due rami identici in parallelo è funzione sempre crescente di K, *o della velocità:*

$$(10) \qquad Z_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[(r_1'^2 - K^2 b'^2) - (\lambda_1'^2 - K^2 g'^2)]^2 + 4\,[\lambda_1' r_1' - b' g' K^2]^2}{(r_1' - K b')^2 + (\lambda_1' - K g')^2}}\,.$$

La inserzione di una impedenza esterna di carico in uno dei rami derivati fa sì che, ad una certa velocità, il rapporto di trasformazione, dopo aver diminuito dall'origine, torni a crescere e possa raggiungere un massimo maggiore dell'unità.

Il rapporto della energia elettrica disponibile sulla linea con rotore in moto, alla energia elettrica spesavi con rotore fermo, rappresenta, come nel caso precedente, una specie di " rendimento elettrico „ dell'apparecchio:

$$\eta = \frac{I_2^2\, r_2'}{E\, I_{01} \cos\varphi_{01} + E\, I_{02} \cos\varphi_{02}}\,.$$

Sostituendo quivi:

$$I_{01} = \frac{E z'}{\sqrt{R_1^4 + \Lambda_1^4}}\,, \qquad \cos\varphi_{01} = \frac{r_1'}{z_1'} = \frac{R_1^2 r' + \Lambda_1^2 \lambda'}{z' \sqrt{R_1^4 + \Lambda_1^4}} \;;\ \text{etc.},$$

si ricava:

$$(11) \qquad \eta = \frac{r_2' (R_1^4 + \Lambda_1^4)}{r_2' (R_1^4 + \Lambda_1^4) + r_1' (R_2^4 + \Lambda_2^4)}\,\rho^2 = \frac{\rho^2}{1 + \dfrac{r_1'}{r_2'} \dfrac{z_2'^2}{z_1'^2}}\,.$$

Il " rendimento elettrico „ dell'autotrasformatore dinamico è proporzionale al quadrato del rapporto di trasformazione della corrente di linea. Il fattore di proporzionalità è però minore di 0,5, valore cui tende per $g_1' = g_2'$, quando cioè il circuito esterno d'utilizzazione si annulli (corto parallelo), o più in generale, quando esso contenga della capacità con un certo valore critico.

9. Statori con induzione mutua diretta $\gtrless 0$. — Nella trattazione del trasformatore dinamico si è fin qui supposto che fra statore primario e statore secondario non esistesse induzione mutua diretta, nè in assenza nè in presenza del rotore in quiete.

Questo è in verità un caso puramente teorico, poichè è generalmente impossibile costruire i due avvolgimenti, o su due statori distinti o sopra un unico statore, nelle condizioni di identità supposte dalla teoria e rigorosamente spostati di un quarto di passo. All'atto pratico, si trova sempre una mutua induzione diretta *attraverso il* Δ *rotore*, anche se questo sia perfettamente omogeneo e continuo. Per vero dire, questo difetto di costruzione tende a sparire, per via di compensazioni, coll'aumentare del numero delle coppie di poli.

Osservazioni sperimentali offerte dal funzionamento del tipo di macchina dall'autore costruita, la quale comprende due statori spostabili angolarmente per rispetto al disco rotore cui sono affacciati, suggerirono lo studio seguente del caso più generale che i due statori stessi presentino, attraverso il Δ in quiete, una mutua induzione diversa da zero. E si può supporre che essa provenga da ciò che i due sistemi di spirali fisse sieno spostati fra loro di un intervallo angolare differente da un quarto di passo.

A definire questa *sregolazione*, adotteremo un coefficiente numerico x, variabile fra $+1$ e -1, come potrebbe essere il *cos* di un angolo misurato su una circonferenza di lunghezza uguale al *passo* dell'avvolgimento. Sarà $x = 0$ per uno spostamento uguale ad un quarto di passo.

A rotore immobile, avremo a considerare due trasformatori statici I, Δ e Δ, II, collegati fra loro dalla mutua induzione μx,

Fig. 3.

attraverso il Δ (fig. 3). Le equazioni fondamentali dei due sistemi sono allora:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= J_1\,(r_1 - j\lambda_1) - j\mu\,(J' + xJ'') \\ O &= J'\,(r - j\lambda) \;\; - j\mu\,(J_1 + x\,(J'' + J_2)) \\ O &= J''(r - j\lambda) \;\; - j\mu\,(J_2 + x\,(J' + J_1)) \\ O &= J_2\,(r_2 - j\lambda_2) - j\mu\,(J'' + xJ'). \end{aligned} \right.$$

Se x è diverso da zero, anche a Δ immobile sarà J_2 diversa da zero.

Le due equazioni centrali forniscono:

$$J' = j\mu(g + jb)\left[J_1 + xJ_2(1 + j\mu(g + jb))\right] = \\ = j\mu\left[J_1(g + jb) + xJ_2(g' + jb')\right]$$

$$J'' = j\mu(g + jb)\left[J_2 + xJ_1(1 + j\mu(g + jb))\right] = \\ = j\mu\left[J_2(g + jb) + xJ_1(g' + jb')\right],$$

ove si ponga:

$$g' + jb' = (g - \mu 2bg) + j(b - \mu(b^2 - g^2)).$$

Con queste, eliminando le correnti di rotore dalle due equazioni estreme (1), e ponendo, in estensione alla regola abituale,

$$r_1'' = r_1 + \mu^2 g + \mu^2 x^2 g' = r_1' + \mu^2 x^2 g'; \qquad r_2''; \qquad g'' = g + g';$$
$$\lambda_1'' = \lambda_1 - \mu^2 b - \mu^2 x^2 b' = \lambda_1' - \mu^2 x^2 b'; \qquad \lambda_2''; \qquad b'' = b + b';$$

si ottiene:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = J_1(r_1'' - j\lambda_1'') - j\mu J_2 \,.\, j\mu x(g'' + jb'') \\ O = J_2(r_2'' - j\lambda_2'') - j\mu J_1 \,.\, j\mu x(g'' + jb''). \end{cases}$$

Le cose vanno dunque come se, fra i due avvolgimenti statori possedenti le nuove caratteristiche modificate $r_1'' \dots \lambda_2''$, si stabilisse attraverso il disco immobile un fattore d'induzione della forma:

$$j\mu^2 x(g'' + jb'').$$

Si ricavano le due correnti:

$$(3) \quad \begin{aligned} J_2(r_2'' - j\lambda_2'') &= - J_1 \mu^2 x(g'' + jb''), \\ \mathcal{E}_1(r_2'' - j\lambda_2'') &= J_1\left[R_{12}^2 + \mu^4 x^2(b''^2 - g''^2) + j(\Lambda_{12}^2 + \mu^4 x^2 2b''g'')\right], \end{aligned}$$

e l'*impedenza primaria*:

$$(3')\quad Z_{01} = \sqrt{z_1''^2 + \frac{\mu^8 x^4}{z''^4 z_2''^2} + 2\frac{\mu^4 x^2}{z_2''^2}\left[R_{12}^2(b''^2 - g''^2) + \Lambda_{12}^2\, 2b''g''\right]},$$

ove:

$$R_{12}^2 = r_1'' r_2'' - \lambda_1''\lambda_2'', \qquad \Lambda_{12}^2 = r_1''\lambda_2'' + r_2''\lambda_1''.$$

La corrente secondaria cambia di segno e svanisce insieme ad x:

$$(3'')\qquad I_2 = I_1 \frac{\mu^2 x}{z'' z_2''}\ ; \qquad \pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{b''}{g''} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda_2''}{r_2''}\ .$$

Quando si ponga *il rotore in movimento* con la velocità u, all'insieme dei fenomeni espressi dalle (1), si sovrappongono quelli dovuti alle correnti generate dinamicamente

$$J_2'' = kuJ_2\,(g' + jb'), \qquad J_1' = kuJ_1\,(g' + jb'),$$

le quali reagiscono sui due avvolgimenti induttori con forze elettromotrici di mutua induzione, secondo il fattore $\mu\,(1 - x)$.

Le equazioni fondamentali per la macchina in movimento, ponendo $g + jb = \mathcal{Y}$, $r - j\lambda = \mathcal{Z}$, divengono:

$$(4)\quad \begin{cases} \mathcal{E} = J_1\,(r_1 - j\lambda_1) - j\mu\left[J' + xJ'' + (1-x)J_2''\right] \\ kuJ_2(1 + j\mu\mathcal{Y}) = (J' + J_2'')\mathcal{Z} - j\mu\left[J_1 + x\,(J'' + J_2)\right] \\ kuJ_1\,(1 + j\mu\mathcal{Y}) = (J'' + J_1')\mathcal{Z} - j\mu\left[J_2 + x\,(J' + J_1)\right] \\ O = J_2\,(r_2 - j\lambda_2) - j\mu\left[J'' + xJ' + (1-x)\,J_1'\right]. \end{cases}$$

Col solito procedimento, eliminando J', J_2'' e J'', J_1', e sostituiti gli elementi apparenti $r_1'' \ldots \lambda_2''$ dianzi indicati, si ottengono le *equazioni delle correnti di statore*:

$$(5)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = J_1\,(r_1'' - j\lambda_1'') - j\mu J_2\left[X\,(g' + jb') + j\mu x\,(g'' + jb'')\right] \\ O = J_2\,(r_2'' - j\lambda_2'') - j\mu J_1\left[X\,(g' + jb') + j\mu x\,(g'' + jb'')\right], \end{cases}$$

ove, nelle espressioni fra parentesi quadre in μ, che rappresentano il *fattore complesso d'induzione regnante fra i due avvolgimenti*, si è abbreviato con: $X = ku(1 - x)$.

Tale fattore può considerarsi come la somma di quello statico con quello dinamico, entrambi complessi; equivalente, comunque, alla forma $\mu(\gamma + j\beta)$, ove γ e β sono grandezze prive di dimensioni fisiche:

$$\mu(\gamma + j\beta) = \mu[Xg' - \mu x b'' + j(Xb' + \mu x g'')].$$

A seconda dei segni di u e di x, può l'una delle componenti essere inizialmente crescente e l'altra decrescente, col crescere della velocità. Il funzionamento dipenderà dunque nel caso presente dal verso della velocità impressa al rotore.

Dalle (5) si ricavano: *la corrente primaria:*

$$\text{(6)} \qquad I_1 = \frac{E_1 z_2''}{\sqrt{z_1''^2 z_2''^2 + \mu^4(\gamma^2 + \beta^2)^2 - 2\mu^2[R_{12}^2(\beta^2 - \gamma^2) + 2\beta\gamma\Lambda_{12}^2]}}\,.$$

la corrente secondaria:

$$\text{(7)} \qquad I_2 = I_1 \frac{\mu\sqrt{\gamma^2 + \beta^2}}{z_2''} = \rho I_1\,,$$

e la resistenza e la reattanza apparenti primarie:

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} R = r_1'' - \dfrac{\mu^2}{z_2''^2}\left[r_2''(\beta^2 - \gamma^2) + \lambda_2'' 2\beta\gamma\right], \\ \Lambda = \lambda_1'' + \dfrac{\mu^2}{z_2''^2}\left[\lambda_2''(\beta^2 - \gamma^2) - r_2'' 2\beta\gamma\right], \end{cases}$$

ove si noterà l'analogia formale con le espressioni corrispondenti del *caso normale* (Nota I).

Per i termini in β, γ, si ha però:

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \beta^2 + \gamma^2 = X^2 y'^2 + 2X\mu x(b'g'' - b''g') + \mu^2 x^2 y''^2, \\ \beta^2 - \gamma^2 = X^2(b'^2 - g'^2) + 2X\mu x(b'g'' + b''g') - \mu^2 x^2(b''^2 - g''^2), \\ 2\beta\gamma = X^2 2b'g' + 2X\mu x(g'g'' - b'b'') - \mu^2 x^2 2b''g''. \end{cases}$$

Introducendo questi valori nelle (8), si ottiene, più esplicitamente:

$$(8') \quad \begin{aligned} R &= r_1'' - \frac{\mu^2}{z_2''^2}\left[AX^2 + 2B\mu xX - C\mu^2 x^2\right], \\ \Lambda &= \lambda_1'' + \frac{\mu^2}{z_2''^2}\left[DX^2 + 2E\mu xX - F\mu^2 x^2\right], \end{aligned}$$

ove A e D sono coefficienti di termini preesistenti del caso normale e B, E, C, F, coefficienti di nuovi termini, di cui l'influenza scompare per $x = 0$:

$$(10) \quad \begin{aligned} A &= r_2''(b'^2 - g'^2) + \lambda_2'' 2b'g', \\ D &= \lambda_2''(b'^2 - g'^2) - r_2'' 2b'g', \\ B &= r_2''(b'g'' + b''g') + \lambda_2''(g'g'' - b'b''), \\ E &= \lambda_2''(b'g'' + b''g') - r_2''(g'g'' - b'b''), \\ C &= r_2''(b''^2 - g''^2) + \lambda_2'' 2b''g'', \\ F &= \lambda_2''(b''^2 - g''^2) - r_2'' 2b''g''. \end{aligned}$$

Fra questi coefficienti si hanno le relazioni:

$$B^2 + AC = E^2 + DF = z_2''^2 (g'g'' + b'b'')^2,$$

$$A^2 + D^2 = z_2''^2 y'^4; \quad B^2 + E^2 = z_2''^2 y'^2 y''^2; \quad C^2 + F^2 = z_2''^2 y''^4.$$

Se ne conclude che, i trinomi quadratici in X e x delle (8') essendo funzioni simmetriche di $X = ku(1 - x)$ e di μx, per ogni dato valore dell'anomalia x esisteranno sempre valori di u che annullino R o Λ, riproducendo le vicissitudini del caso normale; e per ciascuna velocità u esisteranno valori dell'anomalia x che portino agli stessi eventi. Ciò vale però praticamente per un campo di variazioni di x lontano dal suo valor massimo $+ 1$, chè allora è costantemente $X = 0$ e il movimento del rotore non ha più alcuna influenza sull'impedenza apparente: gli assi magnetici dei due statori sono allora per diritto e i campi delle due correnti sono in opposizione, cosicchè il rotore non taglia più che un flusso nullo. Per il caso limite opposto, $x = - 1$, si ha invece $X = 2ku$ e i termini in μx cambiano

di segno rispetto a quelli in $\mu^2 x^2$; ma quest'ultimo effetto può elidersi, se contemporaneamente cambi di segno anche X ossia u.

Finalmente, nella espressione della *corrente secondaria*

$$(11) \qquad I_2 = E_1 \sqrt{\frac{\mu^2 (\beta^2 + \gamma^2)}{\left[R_{12}^2 - \mu^2 (\beta^2 - \gamma^2)\right]^2 + \left[\Lambda_{12}^2 - 2\mu^2 \beta \gamma\right]^2}}$$

compaiono, in confronto a quella del caso normale, termini sottrattivi, funzioni di β, γ, cioè della u, *in entrambi* i membri quadratici del denominatore. Per $u = 0$, $(X = 0)$, esso si riduce alla impedenza primaria a rotore in quiete $(3')$; precisamente, a

$$z_2'' Z_{01} = \sqrt{\left[R_{12}^2 + \mu^4 x^2 (b''^2 - g''^2)\right]^2 + \left[\Lambda_{12}^2 + 2\mu^4 x^2 b'' g''\right]^2}.$$

Per u crescente: il numeratore della I_2 è sempre crescente, e il denominatore può essere decrescente oppure crescente a seconda dell'andamento dei gruppi sottrattivi in β, γ: ciò che dipende, (9), dai segni di u e di x, oltre che dal valore assoluto di x.

In definitiva, come l'esperienza mostra, la corrente secondaria, partendo dal valore $(3'')$, inizialmente *aumenta oppure diminuisce a seconda del verso della rotazione impressa.* Nel secondo caso si raggiunge un minimo, dopo di che I_2 torna a crescere, avviandosi con il solito gradiente notevole al suo massimo, il quale non è allora che ritardato; nel primo caso invece, il massimo di I_2 è avanzato, cioè si raggiunge per una velocità minore.

La *differenza di fase fra le due correnti* non è più, come nel caso normale, indipendente dalla velocità, ma dipende ora da u e da μx:

$$(12) \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_2''}{r_2''} + \operatorname{arc\,tg} \frac{ku(1-x)b' + \mu x g''}{ku(1-x)g' - \mu x b''}.$$

Allorchè dunque coesistano insieme trasformatore statico e dinamico, la differenza di fase fra corrente secondaria e primaria dipende tanto da μx come da u, — mentre sia nell'uno che nell'altro, separatamente, φ non dipende nè da μx nè da u. Tale dipendenza sparisce insieme ad x.

In conclusione, finchè i termini dipendenti da x non superino l'importanza di termini di correzione, i caratteri generali del funzionamento dell'apparecchio resteranno inalterati. Per valori sensibili o finiti della sregolazione x, la sua influenza si fa sentire nel campo delle velocità più basse, per avanzare oppure per ritardare l'aumento iniziale delle correnti, a seconda del verso della velocità. Quanto maggiore sia la sregolazione x e tanto più alta diviene la velocità alla quale scompare la sua influenza sul valore delle correnti, specialmente della secondaria.

10. Mutua induzione esterna nei circuiti degli statori. — A complemento della trattazione ora fatta del caso che i due statori si esercitino mutua induzione *attraverso* il rotore, merita esame anche il caso che esista esternamente ai due statori, nelle *condizioni normali*, una mutua induzione costante fra i due circuiti primario e secondario, procurata da un ordinario trasformatore statico inseritovi.

Per conservare simmetria, supporremo che questo consista in due uguali avvolgimenti di caratteristiche (r_0, λ_0), fra i quali regni il fattore d'induzione μ_0 costante. Esso può essere *in serie* col trasformatore dinamico, oppure accoppiato *in derivazione*.

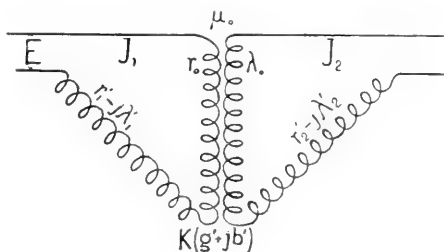



Fig. 4.

I) Se il primario e il secondario $(r_0, \lambda_0; \mu_0)$ sieno rispettivamente *in serie* sui due circuiti del trasformatore dinamico (fig. 4), le equazioni del sistema sono

$$(1) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = J_1 (r_1' - j\lambda_1') - jJ_2 (\mu_0 + K(g' + jb')) \\ O = J_2 (r_2' - j\lambda_2') - jJ_1 (\mu_0 + K(g' + jb')), \end{cases}$$

ove s'intenda che nei termini d'impedenza $r_1' \dots \lambda_2'$ sieno incluse le grandezze r_0, λ_0.

Il *rapporto di trasformazione* è dato da:

$$(2)\quad \frac{J_2}{J_1} = \frac{j(\mu_0 + K(g' + jb'))}{r_2' - j\lambda_2'}\,; \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{Kb'}{\mu_0 + Kg'} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda_2'}{r_2'}\,.$$

La *resistenza* e la *reattanza apparenti primarie* sono:

$$(3)\quad \begin{cases} R = r_1' + \mu_0^2 g'_2 - K^2 G_2'^3 - 2\mu_0 K [b' b_2' - g' g_2'] , \\ \Lambda = \lambda_1' - \mu_0^2 b_2' + K^2 B_2'^3 + 2\mu_0 K [g' b_2' + g_2' b'] , \end{cases}$$

ove si è posto omogeneamente:

$$G_2'^3 = g_2' (b'^2 - g'^2) + b_2' 2 b' g' , \qquad B_2'^3 = b_2' (b'^2 - g'^2) - g_2' 2 b' g' .$$

Ovviamente, i termini in μ_0 sono passibili del doppio segno, a seconda del senso della inserzione o della velocità u.

Gli effetti sono analoghi a quelli, riscontrati nel caso precedente, di una sregolazione x.

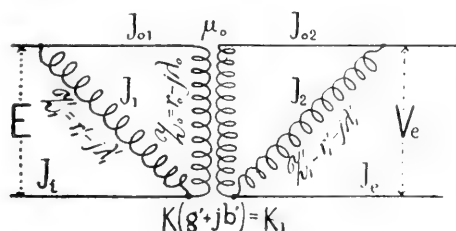



Fig. 5.

II) Sieno invece i due primari e i due secondari rispettivamente *accoppiati in parallelo*, secondo lo schema in fig. 5. Indichino: J_{01} e J_{02} le correnti negli avvolgimenti del trasformatore statico, d'impedenza $\mathcal{Z}_0 = r_0 - j\lambda_0$; J_1 e J_2 le correnti negli avvolgimenti del trasformatore dinamico, d'impedenza $\mathcal{Z}_1' = r_1' - j\lambda_1'$; J_i la corrente totale primaria, che porta la tensione $\mathcal{E}$ alla coppia primaria; J_e la corrente nel circuito secondario esterno (r_e, λ_e); $\mathcal{V}_e$ la tensione secondaria sulla impedenza esterna $\mathcal{Z}_e = r_e - j\lambda_e$, cosicchè: $\mathcal{V}_e = J_e \mathcal{Z}_e$.

L'impedenza apparente di ciascun avvolgimento del trasformatore statico è:

$$(1)\qquad \mathfrak{Z}_0' = r_0' - j\lambda_0' = r_0\,(1 + \mu_0^2 y_0^2) - j\lambda_0\,(1 - \mu_0^2 y_0^2) = \frac{1}{\mathfrak{Y}_0'}\,.$$

L'impedenza apparente di ciascun avvolgimento del trasformatore dinamico, a rotore in moto, è:

$$(2)\qquad \mathfrak{Z}_1'' = r_1'' - j\lambda_1'' = r_1' - K^2\,G_1'^3 - j\,(\lambda_1' + K^2 B_1'^3) = \frac{1}{\mathfrak{Y}_1''}\,,$$

ove si abbrevi con le sostituzioni omogenee:

$$G_1'^3 = g_1'\,(b'^2 - g'^2) + b_1'\,2b'g', \qquad B_1'^3 = b_1'\,(b'^2 - g'^2) - g_1'\,2b'g'.$$

Le cadute di tensione nei quattro avvolgimenti sono quindi: nei primari:

$$(3)\qquad J_{01}\,\mathfrak{Z}_0' = \mathcal{E} - j\mu_0\,\frac{\mathfrak{V}_e}{\mathfrak{Z}_0}\,, \qquad J_1\,\mathfrak{Z}_1'' = \mathcal{E} - jK_1\,\frac{\mathfrak{V}_e}{\mathfrak{Z}_1'}\,;$$

nei secondari:

$$(4)\qquad J_{02}\,\mathfrak{Z}_0' = j\mu_0\,\frac{\mathcal{E}}{\mathfrak{Z}_0} - \mathfrak{V}_e\,, \qquad J_2\,\mathfrak{Z}_1'' = jK_1\,\frac{\mathcal{E}}{\mathfrak{Z}_1'} - \mathfrak{V}_e\,;$$

avendo posto, per brevità, $K\,(g' + jb') = K_1$ (omogeneo con μ_0, ma complesso). Se ne possono ricavare le correnti esterne $J_i = J_{01} + J_1$; $J_e = J_{02} + J_2$; e la tensione secondaria

$$(5)\qquad \mathfrak{V}_e = J_e\,\mathfrak{Z}_e = \mathcal{E}\,\frac{j\mu_0\,\mathfrak{Y}_0\,\mathfrak{Y}_0' + jK_1\,\mathfrak{Y}_1'\,\mathfrak{Y}_1''}{\mathfrak{Y}_e + \mathfrak{Y}_0' + \mathfrak{Y}_1''}\,.$$

La trattazione si semplifica alquanto, senza perdere in generalità, ove si supponga $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}_1'$, cioè che l'impedenza (complessa) di ciascun avvolgimento del trasformatore statico uguagli la impedenza (complessa) di ciascun avvolgimento del trasformatore dinamico in presenza del rotore immobile. Si ha perciò $r_0 = r_1'$, $\lambda_0 = \lambda_1'$, e quindi si può scrivere: $r_1'' = r_0''$, $\lambda_1'' = \lambda_0''$;

$$\mathfrak{Z}_1'' = \mathfrak{Z}_0'' = r_0 - K^2\,G_0^3 - j\,(\lambda_0 + K^2 B_0^3)\,,$$

$$G_0^3 = g_0\,(b'^2 - g'^2) + b_0\,2b'g'\,, \qquad B_0^3 = b_0\,(b'^2 - g'^2) - g_0\,2b'g'.$$

Il calcolo delle due correnti si fa allora in base alle espressioni simboliche:

$$J_e = \mathcal{E}\mathcal{Y}_0 \frac{j[\mu_0 \mathcal{Y}_0' + K_1 \mathcal{Y}_0'']\mathcal{Y}_e}{\mathcal{Y}_e + \mathcal{Y}_0' + \mathcal{Y}_0''}, \tag{6}$$

$$J_i = \mathcal{E}\left[\mathcal{Y}_0' + \mathcal{Y}_0'' + \mathcal{Y}_0^2 \frac{[\mu_0 \mathcal{Y}_0' + K_1 \mathcal{Y}_0'']^2}{\mathcal{Y}_e + \mathcal{Y}_0' + \mathcal{Y}_0''}\right]. \tag{7}$$

Questo calcolo si esegue con gli elementi seguenti:

$$\mathcal{Y}_e + \mathcal{Y}_0' + \mathcal{Y}_0'' = (g_e + g_0' + g_0'') + j(b_e + b_0' + b_0'').$$

$$\begin{aligned}
&g_0' = r_0(1 + \mu_0^2 y_0^2)\, y_0'^2, && g_0'' = (r_0 - K^2 G_0^3)\, y_0''^2,\\
&b_0' = \lambda_0(1 - \mu_0^2 y_0^2)\, y_0'^2, && b_0'' = (\lambda_0 + K^2 B_0^3)\, y_0''^2.\\
&y_0^2 = \begin{cases} y_0'^2\,(1 + \mu_0^4 y_0^4 - 2\mu_0^2(b_0^2 - g_0^2)) \\ y_0''^2\,(1 + K^4 y'^4 y_0^4 - 2K^2(\beta^4 - \gamma^4)). \end{cases}\\
&\beta^2 = b_0 g' + b' g_0, && \beta_{''}^2 = \frac{\beta^2}{y_0^2}(1 - K^2 y'^2 y_0^2)\, y_0''^2,\\
&\gamma^2 = g_0 g' - b_0 b', && \\
&\beta^4 + \gamma^4 = y_0^2 y'^2. && \gamma_{''}^2 = \frac{\gamma^2}{y_0^2}(1 + K^2 y'^2 y_0^2)\, y_0''^2,\\
&B_0^6 + G_0^6 = y_0^2 y'^4. && \beta_{''}^4 + \gamma_{''}^4 = y'^2 y_0''^2.
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\mu_0 \mathcal{Y}_0' + K_1 \mathcal{Y}_0'' = \mu_0(g_0' + j b_0') + K(\gamma_{''}^2 + j\beta_{''}^2).$$

La conoscenza delle espressioni, molto complicate e voluminose, delle I_1, I_2, ..., cui si giunge con sviluppi lunghissimi, non interessa essenzialmente, — dato anche il grado modesto di approssimazione che a tali espressioni competerà, di fronte ad un apparecchio praticamente realizzato con ferro.

Per concludere, ci limiteremo però a notare che la funzione principale del trasformatore dinamico nel primario è (v. Nota I) quella di avanzare continuamente la fase della corrente sulla tensione applicata, creando, col crescere della velocità, prima una componente reattiva poi una componente attiva, disponibili per il circuito primario esterno.

Tali componenti possono ora venire assorbite dal primario del trasformatore statico che gli è accoppiato.

Effettivamente, il primario del trasformatore dinamico può, ad una certa velocità, fornire al primario del trasformatore statico tutta la corrente oziosa di cui esso abbisogna. È l'effetto che si potrebbe richiedere ad un condensatore di capacità opportuna in parallelo sul primario $(r_0, \lambda_0; \mu_0)$.

Le due correnti primarie essendo ridotte alla forma

$$J_{01} = \mathcal{E}(g_{01} + jb_{01}), \qquad J_1 = \mathcal{E}(g_1 + jb_1),$$

la compensazione completa avverrà quando sia

$$b_1 + b_{01} = 0. \tag{9}$$

Allora la J_t si riduce alla sola componente ohmica $\mathcal{E}(g_{01} + g_1)$ e il " circuito " dei due primari è percorso dalla stessa corrente oziosa.

Sviluppando la condizione (9), in base alle (3) ... (8), si giunge ad una equazione del 10° grado completa in K; la quale offre sempre una radice positiva; e cioè (almeno per il caso semplificativo da noi assunto: $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}_1'$) esisterà sempre una velocità del rotore tale che la corrente J_1 fornisca alla J_{01} la sua componente reattiva, per una completa elisione, o con eccesso.

Alla stessa conclusione conduce una analisi minuziosa eseguita sulla differenza di fase fra J_1 ed J_{01}, che anche ha una espressione molto voluminosa: la prima corrente viene in fase con la seconda per una tale velocità che sia

$$K^2 = \frac{\lambda_0^2(1 + \mu_0^2 y_0^2) + r_0^2(1 - \mu_0^2 y_0^2)}{r_0' G_0^3 - \lambda_0' B_0^3} =$$
$$= \frac{1 + \mu_0^2(b_0^2 - g_0^2)}{2b'g' \cdot 2b_0 g_0 - (b'^2 - g'^2)(b_0^2 - g_0^2 - \mu_0^2 y_0^4)} .$$

Per velocità maggiori, la compensazione comincia.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 26 Marzo 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Prato, e Stampini Segretario della Classe. Assiste inoltre il Socio nazionale non residente Senatore Scialoia.

È scusata l'assenza del Socio Carle.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 12 marzo corrente.

Il Presidente porge, a nome della Classe, un cordiale saluto al Socio nazionale Scialoia che ringrazia ricambiando il saluto.

Il Socio Segretario Stampini presenta — e dichiara di presentare con un senso di inesprimibile tristezza — il volume di Étienne Moreau-Nélaton *La cathédrale de Reims* (Paris, Librairie centrale des Beaux-Arts) che il Sottosegretario di Stato per le Belle Arti di Francia si compiacque di donare alla nostra Accademia. Ne riassume brevemente il contenuto storico e descrittivo, richiamando in particolar guisa l'attenzione sulle 135 magnifiche tavole in fototipia che ci permettono di rivedere in parte qual fu l'insigne monumento che la demente ferocia del nemico ha fatto segno a distruzione vandalica che la storia non perdonerà. Il Presidente propone, e la Classe unanime approva, che sia ringraziato il Sottosegretario di Stato delle Belle Arti di Francia per il gradito dono.

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 2 Aprile 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Naccari, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Fusari, Balbiano, Panetti e Segre, Segretario.

Letto e approvato il verbale della precedente adunanza, il Presidente esprime al Socio Naccari, per la morte avvenuta in questi giorni, in guerra, di un suo nipote, le vivissime affettuose condoglianze di tutti i Colleghi. Il Socio Naccari ringrazia.

Il Presidente presenta alla Classe la medaglia d'oro che è stata coniata per il premio Avogadro conferito al Prof. Morse. Essa sarà inviata a questo scienziato, appena le circostanze lo consentano.

Il Socio Segretario, a nome del Prof. G. Boccardi, offre in omaggio: un volumetto di *Lezioni di Cosmografia* e un opuscolo su *La latitudine di Pino Torinese nel 1915* del Prof. G. Boccardi; e l'*Annuario astronomico pel 1917* pubblicato dal R. Osservatorio di Pino Torinese.

Vengono presentate per la stampa negli *Atti*, dai Soci Parona e Peano, rispettivamente, le seguenti Note:

A. Roccati, *Ricerche lito-mineralogiche sopra alcuni pozzi profondi della pianura padana. III. Pozzo di Saluggia.*

M. Bottasso, *Teoremi su massimi e minimi geometrici, e su normali a curve e superficie.*

LETTURE

Ricerche lito-mineralogiche sopra alcuni pozzi profondi della pianura padana.

III. *Pozzo di Saluggia.*

Nota di ALESSANDRO ROCCATI.

Il pozzo trivellato, il cui materiale forma oggetto del presente studio, fu scavato, nel corso dell'anno 1915, presso la cascina " Giarrea „ in territorio di Saluggia (circondario di Ivrea), località situata a 164 metri sul livello del mare.

Furono in quell'occasione, allo scopo di ricerca di acqua potabile, perforati quattro pozzi, posti a breve distanza l'uno dall'altro e che furono spinti rispettivamente alle profondità di metri 36-42-46 e 164.

Del materiale incontrato in quest'ultimo fu raccolta ai differenti livelli una serie sistematica di campioni, serie che è ora conservata nel Museo Geo-mineralogico del R. Politecnico di Torino.

Dei pozzi di Saluggia, che furono trivellati nelle alluvioni della Dora Baltea, poco prima della confluenza di questa nel Po. già si occupò il Prof. Federico Sacco in una Nota di indole geo-idrologica (1), nella quale sono rilevati i buoni risultati ottenuti nella perforazione. Infatti furono incontrate abbondanti falde acquee alle profondità di 48, 147 e specialmente 164 metri. Il livello piezometrico di questa ultima falda, alla quale si fermò la perforazione, giunge a metri 3 $^1/_2$ sul piano di campagna, con una portata di 10 litri al secondo ed una temperatura di circa 15°.

(1) F. Sacco, *Il pozzo artesiano di Saluggia*, " Annali R. Accad. Agricoltura di Torino „, vol. LVIII, 1915.

* * *

La serie degli esemplari, che sono in numero di 58, si inizia alla profondità di 4 metri e comprende ghiaie, sabbie ed argille più o meno calcarifere. Il materiale fu da me studiato seguendo le norme già indicate nelle precedenti Note (1), in cui presi a trattare dei pozzi profondi della pianura padana.

Fu fatto l'esame completo dell'esemplare di ogni singolo livello, ma nella descrizione che segue, onde evitare inutili ripetizioni, ho riunito quelli successivi corrispondentisi per natura fisico-mineralogica.

Metri 4-6.

Sabbia mista a **ghiaiette** nelle proporzioni di circa 4 : 1: il tutto inquinato da abbondante sostanza terrosa-argillosa, non calcarea.

Liberato dalla parte terrosa, il materiale presenta tinta alquanto scura dovuta all'abbondanza del *serpentino*, che si verifica essere l'elemento predominante sia per le ghiaie che per la sabbia.

Le ghiaiette hanno la grossezza media di una nocciuola, poche essendo alquanto maggiori, e sono rappresentate dalle seguenti roccie:

Serpentino finamente granulare o compatto, di tipo alpino, verde-azzurro scuro fino a nero; oppure verde-giallo chiaro, subtrasparente della varietà *S. nobile*. Parecchi ciottolini, sia dell'uno che dell'altro tipo, sono molto ricchi in *magnetite*; qualcuno della varietà comune contiene *calcopirite*.

Quarzo, abbondante ma subordinato al serpentino; ialino di tipo filoniano, oppure compatto con tinta lattea o giallognola.

Granito macroscopico, bianco, con scarsa mica (muscovite) e feldspato più o meno caolinizzato.

Diorite normale a grana media.

(1) Alessandro Roccati, *Ricerche lito-mineralogiche sopra alcuni pozzi profondi della pianura padana*. I. *Pozzo di Alessandria*. " Atti R. Accad. Sc. di Torino ", XLVII, 1912. *Ricerche*, ecc. II. *Pozzi di Suzzara, Galliera, Massa Lombarda e Lodi*, Id. Id.

Eufotide normale e *a smaragdite*; *Prasinite*; *Lherzolite*.

Gneiss vari: *a due miche*; *a due miche granatifero*; *a muscovite*; *a biotite*.

Schisti molteplici: *Micaschisto a muscovite*; *Id.* con *glaucofane* e *granato*; *Id.* a *granato* roseo chiaro, trasparente; *Id. a due miche granatifero*; *Talcoschisto* con *attinoto* fibroso verde-scuro, oppure prismatico, verde chiaro, trasparente; *Cloritoschisto* con *magnetite*; *Id. granatifero*; *Anfiboloschisto*, costituito essenzialmente da *attinoto* fibroso con accessoriamente *epidoto* e *granato*. Sembrano mancare completamente le roccie calcaree.

Vi sono inoltre frammenti od associazioni di minerali, così: lamine ampie di *muscovite* ed altre di *clorite* a tipo di *ripidolite*; grani di *magnetite*, alcuni magnetico-polari; frammenti subtrasparenti di *epidoto* giallo-verde; associazione di *magnetite* e *dolomite*, che ricorda la analoga del giacimento di Traversella; *quarzo* con *clorite*; *id.* con *granato*; *id.* con *tormalina* nera.

La sabbia è costituita essenzialmente da *quarzo* (ialino, latteo, giallognolo, roseo) e *serpentino* (delle varietà precedentemente indicate, a cui si aggiungono fibre di *crisotilo*), i quali minerali sono pressochè in proporzioni uguali e complessivamente rappresentano oltre l'80 $^0/_0$ della massa totale. Seguono per frequenza:

Feldspati vari; così *ortosio* bianco e roseo; *albite* in piccoli frammenti di sfaldatura, incolori, con lucentezza perlacea; *microclino* bianco latteo; *oligoclase* ed un termine più basico riferibile a *labradorite*.

Mica con abbondante *muscovite* e scarsa *biotite*; noto qui che tale scarsezza della mica bruna in confronto della chiara è fenomeno che si continua a tutti i livelli. *Clorite* in frustuli informi oppure in lamine distinte riferibili alla *ripidolite*, con color verde intenso e viva lucentezza perlacea.

Anfiboli vari: *glaucofane* in frammenti informi o frammenti di cristalli con notevole sviluppo della faccia (100), mentre sono ridotte quelle del prisma }110{. Vi sono quanto al colore due varietà di glaucofane, l'una di tinta azzurra chiara, trasparente o subtrasparente; l'altra di colore azzurro cupo con intenso pleocroismo.

Attinoto in fibre oppure in piccoli frammenti di sfaldatura, limpidi, trasparenti, di color verde erba chiaro oppure verde tendente allo smeraldo; *tremolite*, fibrosa; *orneblenda* in grani

informi o in frammenti di sfaldatura; *edenite* (?). All'*edenite* ritengo possano riferirsi taluni frammenti di sfaldatura, perfettamente incolori, con estinzione = 16°.

Epidoto, molto abbondante, in grani informi, con tinta variabile, ma prevalentemente giallo-verde o verde-pistacchio.

Pirosseni lamellari: *diallagio, enstatite* e *bronzite*; un altro *pirosseno* è in grani o frammenti prismatici, con estinzione = circa 39° e color verde chiaro passante all'incoloro.

Granato, con due varietà: l'una rosea, trasparente e limpida in granuli o piccoli cristalli }110{ perfetti di forma, qualcuno accennante a pseudosimmetria dimetrica; l'altra in individui maggiori, di color rosso cupo, subopaco, in grani o cristalli con l'associazione }110{ }211{.

Tormalina, nera, fortemente dicroica oppure incolora; questa seconda varietà è normalmente in piccoli cristalli tozzi, prismatici, a terminazioni emimorfiche.

Zircone, incoloro, in cristalli prismatici sottili, allungati con terminazioni ottaedriche acuminate.

Rutilo, giallo rossastro con distinto dicroismo e lucentezza perlacea; si presenta in frammenti con faccie di prisma striate longitudinalmente.

Rarissimi grani sono di *carbonati*, fra cui di *calcare grigio dolomitico*.

I minerali metalliferi sono rappresentati da abbondante *magnetite* in grani, dei quali alcuni con fenomeno di polarità; *cromite*; *pirite* granulare; *pirrotina* ed *ematite* in masserelle o lamine micacee.

La struttura della sabbia è nettamente a tipo fluviale, cioè con granuli sempre fortemente fluitati e superficialmente più o meno corrosi; fanno eccezione però molti granati ed i frammenti di sfaldatura di attinoto, come anche i cristallini di zircone e di tormalina, che presentano notevole freschezza, probabilmente per il fatto che essi erano inizialmente inclusi in altri minerali stati poi fluitati, disgregati ed alterati.

Metri 7-8.

Ghiaiette, che raggiungono un diametro fin di 3-4 cm., con poca **sabbia** minuta, il tutto fortemente inquinato da sostanza argilloso-terrosa molto debolmente calcarea.

La parte sabbiosa corrisponde per la composizione mineralogica a quella del livello precedente, ma con evidente prevalenza del *quarzo* sul *serpentino,* che sono però ancora sempre i due componenti predominanti.

A costituire le ghiaiette oltre ai tipi di roccie indicati al livello precedente, si osserva:

Quarzite micacea con schistosità distinta; *diaspro* rosso.

Granito protogino a struttura macroscopica, più o meno alterato.

Eufotide a smaragdite.

Anfiboliti compatte: *granatifera*; *micacea*; *epidotica*; con *glaucofane* e *granato.* Una varietà è a grossi prismi di *attinoto,* dal quale sembrano derivare i frammenti di sfaldatura verde smeraldo esistenti nella sabbia, mentre quelli di color verde erba potrebbero derivare da masserelle costituite da anfibolo in prismi allungati associato a granato.

Talcoschisto con *attinoto.*

Vi sono, ma molto subordinate, *roccie carbonate*: così *calcare dolomitico* grigio. del tipo comune nelle formazioni triasiche alpine, e *calcare* bianco finamente granulare.

Metri 9-12.

Associazione in parti pressochè uguali di **ghiaiette** e **sabbia** con sensibile aumento della parte sabbiosa verso la parte inferiore del livello; il materiale continua ad essere inquinato da argilla terrosa debolmente calcarea.

La parte sabbiosa corrisponde a quella dei livelli precedenti. ma vi diminuisce ancora la quantità del *serpentino,* il quale diventa affatto subordinato al *quarzo.*

Le ghiaiette hanno le dimensioni massime di un pisello e comprendono le roccie già indicate, a cui sono da aggiungere:

Serpentino con *bronzite*; *S.* con venuzze di *crisotilo.*

Diorite granulare ed altra a schistosità abbastanza distinta; *Porfido felsitico.*

Talcoschisto fogliaceo; *Calceschisto* del normale tipo alpino.

Granatite o *granato* compatto, di color rosso bruno, del tipo non raro nella zona delle " Pietre verdi „ delle Alpi occidentali.

Vi sono pure frammenti di minerali, così: *Quarzo* con *clo-*

rite e *pirite*; *microclino* in frammenti di sfaldatura; *quarzo* con *epidoto* verde pistacchio; *attinoto* in masserelle sfaldabili; *attinoto* con *talco* lamellare e la già ricordata associazione di *magnetite* e *dolomite*.

Metri 13-14.

Il materiale a questo livello cambia nettamente di natura essendo rappresentato da **argilla gialla non calcarea**, con commiste ghiaie e sabbia (circa $^1/_5$ della massa complessiva).

Le ghiaie corrispondono per dimensioni e natura litologica a quelle dei livelli superiori, ma vi è caratteristica la assoluta mancanza del *serpentino* e delle *roccie calcaree*, mentre dominano quelle *quarzose* e *gneissico-granitiche* con subordinatamente tipi *anfibolici ad attinoto* ed *orneblenda* con *granato*, *glaucofane* ed *epidoto*. Fra le roccie ad epidoto va ricordata una *epidosite* compatta, ricca in *magnetite*, che vedremo molto frequente a livelli inferiori.

Vi sono pure frammenti di minerali, così *quarzo* con *pirite*; *q.* con *tormalina* nera; *q.* con *ematite* micacea; *granato* rosso bruno.

La parte sabbiosa è essenzialmente *quarzosa* ed ha nel complesso composizione che ricorda quella dei piani superiori, essendovi però affatto scarso il *serpentino*, ridotto a pochi granuli e mancando i *carbonati*.

Fra i minerali caratteristici di questo livello ricordo: *olivina* granulare; *orneblenda*, in frammenti di prisma, verde-azzurra; *pirosseno* incoloro in solidi di sfaldatura con estinzione di circa 45°; *rutilo* aghiforme a tipo di *sagenite*; abbondante *magnetite* e qualche grano di *pirrotina*. Continua ad essere frequente la *glaucofane*, con frammenti prismatici a notevole sviluppo della faccia (100); il minerale è sovente perfettamente limpido e trasparente.

Metri 15-16.

Argilla giallognola non calcarea corrispondente, anche per la presenza di ghiaiette e sabbia, al materiale del livello precedente, ma caratterizzata dal fatto che la parte ghiaiosa è costituita, si può dire, esclusivamente da *quarzo* e da una *epidosite* compatta, durissima, finamente granulare-fibrosa, di color

verde-giallo chiaro e sempre più o meno ricca di *magnetite*. Osservata al microscopio la roccia si risolve in un intreccio di aghi finissimi, fra i quali sono contenuti pochi grani di quarzo e fibre di attinoto.

Mancano il *serpentino* e le *roccie calcaree* sia fra le ghiaiette che nella sabbia.

Metri 17-20.

Materiale corrispondente al livello precedente, ma con proporzioni pressochè uguali tra la parte argillosa e quella ghiaioso-sabbiosa.

Continua la frequenza dell'*epidosite* ed è pure notevole la presenza di abbondanti ghiaiette costituite da una varietà di *quarzo* giallognolo, opaco, a lucentezza grassa e frattura scagliosa, con aspetto di *selce piromaca*.

Manca il *serpentino*; abbastanza frequenti invece le *roccie a glaucofane* e da ricordare l'esistenza di una speciale *arenaria* a cemento metamorfico, la quale ricorda le anageniti minute del Permo-Trias alpino, e di *porfido quarzifero*.

Metri 21-24.

Sabbia mista a **ghiaiette** ed inquinata dalla solita argilla gialla non calcarea.

Le proporzioni tra sabbia e ghiaiette son pressochè uguali; queste ultime hanno dimensioni oscillanti fra $1/2$ ed 1 cm. di diametro, eccezionalmente 3-4.

Le roccie presenti sono ancora prevalentemente *Quarzo* (a tipo filoniano, ialino, oppure latteo, giallognolo o roseo) con *Diaspro* rosso e frammenti a tipo di *Selce*, analoghi a quelli del livello superiore; *Quarziti* varie, fra cui una verdiccia ricordante l'analoga roccia delle formazioni del Trias alpino ed altra a grani varicolori con tipo di *anagenite*; *Gneiss* vari: *a muscovite* (comune), *a due miche, a biotite granatifero, a clorite*; *Granito* macromero, ricco in *quarzo* e *feldspato* bianco: *Aplite*; *Pegmatite*; *Epidosite* con *magnetite*, del tipo sopra descritto: *Eclogite* con *pirosseno* verde erba chiaro e *granato* roseo; *Anfiboliti*: *ad attinoto*, con *epidoto*, con *glaucofane* e *granato, micacea*; *Schisti* molteplici: *micaschisto a muscovite* con *glaucofane* e *granato, clorito-*

schisto, *talcoschisto* con *attinoto* e *granato*, *talcoschisto* a tipo di *steatite* con *magnetite* ottaedrica, *cloritoschisto granatifero*; *Eufotide* comune e *a smaragdite*; *Porfido quarzifero*; scarso *serpentino*, con tipo schistoso.

Vi sono pure frammenti di minerali, così: *quarzo* con *epidoto* verde chiaro; *epidoto* verde pistacchio in frammenti prismatici; *quarzo* con *pirite*; *quarzo* con *tormalina* nera; *microclino* ed *ortosio* roseo; *granato* rosso cupo; ampie lamine di *muscovite*, altre di *clorite* a tipo di *ripidolite*.

La sabbia ha composizione che ricorda quella dei livelli precedenti ed è prevalentemente costituita da *quarzo* (circa 80 % della massa totale); della *mica* è essenzialmente presente la *muscovite* mentre scarseggia la *biotite*, fenomeno questo che si ripete, come già dissi, costantemente a tutti i livelli. Incomincia poi ad essere comune l'alterazione della muscovite, la quale prende quella speciale tinta giallo oro con lucentezza submetallica che si osserva frequentemente nella muscovite delle sabbie.

Fra i minerali prima non incontrati ricordo: *pasta felsitica*; *cianite* azzurrognola in frammenti prismatici appiattiti; piccoli frammenti di un minerale vetroso, isotropo, che sembra riferibile a *fluorite*.

Tra i minerali metalliferi abbonda la *magnetite* con frequenti grani magnetico-polari; vi è pure *pirite* granulare o in forma cubica; *ematite* lamellare ed *ilmenite*.

A questo livello si osservano pure alcuni frammenti di *conchiglie*, ma che sono così fortemente fluitati da rendere impossibile qualunque determinazione.

Metri 25-26.

Materiale analogo al livello precedente, ma fortemente inquinato da argilla giallognola, non calcarea, che rappresenta circa metà della massa totale.

Sembra nuovamente mancare il *serpentino*, mentre è abbastanza comune sia fra le ghiaiette che nella sabbia il *diaspro* rosso.

Metri 27-28.

Sabbia fina fortemente inquinata dall'argilla gialla non calcarea.

È essenzialmente costituita da *quarzo* con alquanto *diaspro* rosso; manca il *serpentino*.

Metri 29-30.

Argilla giallognola non calcarea, agglutinata, grumosa, con poco materiale sabbioso-ghiaioso (circa $^1/_{10}$ della massa totale).

Le ghiaiette sono rappresentate dai tipi di roccie precedentemente indicati, ma con assoluta prevalenza del *quarzo* e delle roccie *gneissico-granitiche*.

Tale natura della parte ghiaiosa ha il suo riscontro nella composizione della sabbia essenzialmente *quarzifera*, mentre i minerali colorati sono scarsissimi e la parte separata con i liquidi densi non è che circa $^1/_{40}$ della massa totale.

Metri 31-32.

Sabbia finissima con rare **ghiaiette** di *quarzo* e di roccie *gneissico-granitiche*.

La sabbia continua ad essere essenzialmente costituita da *quarzo*, con pochi minerali colorati: *epidoto*, *attinoto* e *glaucofane* con scarso *granato* e *serpentino*; mancano del tutto i carbonati.

È da ricordare a questo livello l'esistenza di minuti cristalli di *gesso* speculare, probabilmente di origine secondaria, dovuto cioè al deposito dell'acqua che dà luogo ad una falda non indifferente (1).

Metri 33-40.

Sabbia giallognola con **ghiaiette** più o meno abbondanti, il tutto inquinato da argilla giallognola non calcarea, che agglutina la sabbia rendendola alquanto grumosa.

Continua la identica natura litologica delle ghiaie (in prevalenza assoluta costituite da *quarzo* e da roccie *gneissico-gra-*

(1) Sono indotto a ritenere che i cristallini di gesso possano essere stati depositati dall'acqua, per il fatto che da una analisi riportata dal Sacco (*loc. cit.*) tale acqua risulta contenere milligr. 5,33 di SO_3 per litro.

nitiche) e quella mineralogica della sabbia essenzialmente a base di *quarzo* (non meno di 80 %). Mancano fra le ghiaie le *roccie calcaree*, mentre grani sporadici ne esistono nella sabbia; il *serpentino* è raro e rappresentato esclusivamente dal tipo comune, alpino, in grani minuti e fortemente fluitati, che accennano quindi a lontana provenienza.

Si ritrovano a questo livello i piccoli cristalli di *gesso* già precedentemente indicati, talora agglutinati con argilla.

Metri 41-42.

Materiale di natura lito-mineralogica analoga a quella del precedente livello, ma con sabbia finissima, terrosa, agglutinata, e rare ghiaiette di *quarzo*.

Metri 43-53.

Argilla grigia, smettica, untuosa, molto debolmente calcarea, ricca in frustuli di *muscovite* e con piccoli frammenti di *lignite*.

Con ripetute levigazioni e decantazioni si ottiene un debole residuo sabbioso, in cui, oltre al *quarzo*, vi è discreta quantità di *serpentino* e nel quale ho osservato, fra altri minerali: *tremolite* fibrosa; *granato* roseo, trasparente, del quale un cristallo {110} perfetto è aderente a quarzo; *glaucofane*; *cianite* azzurrognola; *tormalina* incolora in cristallini a terminazioni emimorfiche e *diaspro* rosso.

Metri 54-58.

Sabbia finissima, senza ghiaie, commista a poca sostanza argillosa debolmente calcarea.

La composizione mineralogica indica l'origine da roccie essenzialmente gneissico-granitiche, quindi con prevalenza del *quarzo* ed abbondante *mica*, specialmente *muscovite*, mentre è scarsa la *biotite*; di questa vi sono lamine a perfetto contorno pseudoesagonale.

I minerali colorati sono però discretamente abbondanti e la parte separata con i liquidi pesanti rappresenta circa $^1/_{10}$ della massa totale. Vi si osserva: *clorite* a tipo di *ripidolite* in lamine distinte, oppure in frustuli derivati da cloritoschisto; *talco* in laminette verdastre e masserelle steatitose; *serpentino* abbon-

dante, con i diversi tipi, fra cui fibre di *crisotilo*; *attinoto* fibroso o in frammenti prismatici di sfaldatura aventi color verde scuro o chiaro trasparente, oppure tendente allo smeraldo con lucentezza perlacea: *orneblenda* granulare; *pirosseno* incoloro o leggermente verdognolo a tipo di *diopside*; *diallagio* e *bronzite* lamellari; *epidoto* granulare, verde-giallo miele, verde pistacchio e brunastro; *cianite* azzurrognola; *tormalina* bruna, fortemente dicroica; *zircone*, incoloro; *apatite* in piccoli cristalli esagoni a spigoli arrotondati; *magnetite* molto abbondante.

Mancano i *carbonati*; il *granato* e la *glaucofane*, per quanto presenti, sono però nettamente subordinati, specialmente in confronto ai livelli precedenti.

Metri 59-68.

Materiale analogo al livello superiore, ma con sabbia più grossolana, avendo i grani le dimensioni medie di una capocchia d'ago.

La composizione mineralogica è pure analoga, solo notandosi un sensibile aumento del *serpentino*, che dopo il *quarzo* è il componente più frequente, fatto che può spiegare l'abbondanza della *magnetite*.

Metri 69-72.

Impasto tenace di **argilla** grigia, plastica, grassa, debolmente calcarea, contenente abbondantissimi frustuli micacei e **ghiaiette** (circa $^1/_3$ della massa) di natura molto varia, fra cui dominano il *quarzo* ed il *serpentino*. Di quest'ultimo vi sono le solite varietà: comune, nobile, fibroso; ricordo a questo proposito un frammento di serpentino nobile tenente aderenti fibre lunghe circa 2 mm. di *crisotilo* in forma di ciuffetto.

Altre roccie osservate sono: *Quarzite* granulosa; *id. micacea* con la mica a tipo aureo; *Diaspro* rosso e rosso bruno con venuzze di *quarzo* ialino; *Granito* bianco, macromero, a scarsa mica; *id.* micromero a *muscovite* aurea; *Gneiss a due miche*; *id. a muscovite*; *id. a biotite e clorite*; *Schisto a muscovite* con *glaucofane* e *granato*; *Cloritoschisto*; *Anfibolite (attinolite) granatifera*; *id.* con *epidoto*; *Diorite* normale; *Prasinite*; *Roccie calcaree*, fra cui a tipo dolomitico: frammenti di *marna* compatta e concrezioni di *limonite*.

Metri 73-74.

Sabbia argillosa (l'argilla rappresenta circa $^1/_4$ della massa) fortemente calcarea.

A questo livello la natura del materiale cambia notevolmente, poichè mentre precedentemente i *carbonati* erano o mancanti del tutto o sempre molto scarsi, qui diventano abbondanti sino a costituire uno degli elementi prevalenti della sabbia, con tipi a natura dolomitica, molti grani essendo soltanto attaccati da HCl concentrato ed avendosi dalla soluzione abbondante precipitato magnesifero.

Con i carbonati si hanno frequentissimi frustuli di *muscovite*, mentre i componenti dominanti sono *quarzo* (compreso il *diaspro* rosso) e *serpentino*. Notevole è la mancanza totale della glaucofane e la scarsezza del granato, fenomeno che sembra continuarsi per una cinquantina di metri.

Vi sono *fossili* rappresentati da numerosi frustuli di *lignite* e da alcuni frammenti di *conchiglie* fortemente fluitate e provenienti da *Bivalvi*, *Ditrupi*, ecc., quindi da organismi marini.

Credo interessante indicare come a questo livello ho osservate alcune sferette metalliche corrispondenti a quelle indicate per il pozzo di Alessandria (1) e che devono avere uguale origine. Alcune sono limonitizzate, altre hanno superficie liscia e viva lucentezza metallica, oppure aspetto come di vetro fuso; parecchie sono fortemente magnetiche.

Metri 75.

Sabbia fina, corrispondente come composizione a quella del livello precedente, quindi ricca in *carbonati*, ma priva o quasi di argilla.

Vi è notevole l'abbondanza della *mica*, anche in lamine del diametro di 2-3 mm., sia di *muscovite* (comune il tipo aureo) che di *biotite*, fra cui lamelle di una varietà di color bruno tendente al violaceo.

(1) ALESSANDRO ROCCATI, *Ricerche lito-mineralogiche sopra alcuni pozzi profondi della pianura padana. I. Pozzo di Alessandria*, loc. cit.

Continuano i frustuli di *lignite* ed i frammenti fortemente fluitati di *conchiglie bivalvi* a tipo marino.

Sono poi da ricordare piccoli arnioni, grossi come capocchie di ago, di *marcassite*, alcuni liberi, altri avvolti nella marna.

Metri 76-87.

Marna argillosa calcareo-magnesifera, con poca **sabbia**, in cui è discretamente abbondante il *serpentino* e nella quale continuano a mancare glaucofane e granato.

Abbondanti sono i *carbonati*, anche a tipo dolomitico; si ritrovano poi i piccoli arnioni di *marcassite* indicati al livello precedente e così pure i frustuli di *lignite* ed i frammenti di *conchiglie*; di questi alcuni sono caratteristici per essere internamente tappezzati da *pirite*.

Metri 88-92.

Materiale costituito esclusivamente da **ghiaiette**, fortemente fluitate e della grossezza media di 1-2 cm. nel diametro maggiore, eccezionalmente 3-4.

Trattasi essenzialmente di roccie quarzose e granitico-gneissiche, notando che sembrano mancare totalmente le roccie a tipo schistoso con glaucofane e granato. A dare un'idea della composizione litologica del materiale credo interessante indicare per ordine di frequenza le diverse roccie costituenti i 125 ciottolini che complessivamente formano l'esemplare.

Quarzite compatta (26); *quarzo* a tipo filoniano (22); *quarzite* granulare (5); *quarzo* ialino con *clorite* (2); *quarzite micacea* con tipo ricordante la *bargiolina* (2).

Gneiss a biotite (10); *gneiss a muscovite*, nel quale la mica è resa gialla aurea da alterazione (8); *gneiss a muscovite tormalinifero* (1); *gneiss a due miche* con *clorite* in belle lamine distinte (2); *gneiss a biotite* con *epidoto*, di color verde-giallo miele corrispondente al minerale sempre abbondante ai diversi livelli della trivellazione (1).

Granito bianco a scarsa *biotite*, macromero, con feldspato più o meno profondamente caolinizzato (10); *granito* micromero a *muscovite* (2); *granito* bianco *tormalinifero* (1); *microgranito* (1).

Prasinite (8); *Serpentino* comune (5); *id.* a tipo nobile (2); *Epidosite*, corrispondente alla varietà indicata come comune a livelli superiori e ricca in *magnetite* (2).

Anagenite minuta (1); *Appenninite* (?) (1).

Arenaria a cemento calcareo con grani di *quarzo* e *serpentino* (1); masserelle *limonitiche*, provenienti probabilmente da roccie ferrettizzate (3).

Roccie calcaree (10), fra cui 2 ghiaiette del tipo dolomitico grigio, comune nelle formazioni del Trias alpino.

Metri 93-98.

Sabbia fina, omogenea, di color grigio chiaro, senza ghiaie nè sostanza argillosa inquinante.

La composizione mineralogica indica ancora prevalente provenienza da roccie quarzose e gneissico-granitiche e subordinatamente da roccie verdi. Infatti il *quarzo* è assolutamente il componente predominante, mentre i minerali colorati sono scarsi; scarsissima la *glaucofane* ridotta a pochi grani.

Il *serpentino* è invece comune, e comuni pure i *carbonati*, fra cui il *calcare* grigio dolomitico a tipo triasico.

Di minerali metalliferi sembra unicamente presente, ed in piccola quantità, la *magnetite*.

Metri 99-105.

Zona di **ghiaiette**, come al livello 88-92, ma più piccole, avendosi come media grossezza quella di un pisello.

Vi ha corrispondenza di natura litologica, predominando il *quarzo* e le *roccie gneissico-granitiche*, ma tornano a comparire, diventando anzi frequenti tanto da formare circa $1/3$ del materiale insieme al *serpentino*, le roccie schistose con *granato* e *glaucofane*, e ciò specialmente nella parte inferiore del livello.

Sono quindi da ricordare: *cloritoschisto*, *talcoschisto*, *calceschisto*, *micaschisto*, *anfiboloschisto* e *anfibolite* compatta, oltre a *carbonati*, *diaspro* rosso e *appenninite*: come tale indico una roccia alterata, di aspetto clastico, costituita essenzialmente da quarzo, plagioclasio e cemento di aspetto talcoso.

Metri 106-120.

Zona di **sabbia** più o meno grossolana, con strati però di materiale fino od anche finissimo, il tutto inquinato da poca sostanza argillosa, debolmente calcarea.

Liberata della parte argillosa, la sabbia ha color grigio scuro per l'abbondanza del *serpentino*, che è, insieme al *quarzo* ed ai *carbonati*, il minerale prevalente.

La composizione torna ad essere quindi quella dei livelli superiori con *muscovite* quale mica dominante, *clorite*, *attinoto*, *epidoto*, *pirosseno*, *talco*, *glaucofane* e *granato*.

Abbondantissima la *magnetite*; pure presenti *pirite*, *pirrotina* ed *ematite*.

Metri 121-128.

Ghiaiette come al livello 99-105 costituite prevalentemente da *quarzo*, da roccie *gneissico-granitiche* e da *serpentino* con subordinatamente roccie ad *anfibolo*, *epidoto*, *glaucofane* e *granato*.

Le *roccie calcaree* sono relativamente scarse e sembrano mancare i *diaspri* e le roccie clastiche a tipo di arenaria-anagenite.

Metri 129-145.

Sabbia con poche **ghiaiette** e poca sostanza argilloso-calcarea.

La composizione mineralogica continua a corrispondere a quella di una sabbia derivata da *roccie quarzose* e *granitico-gneissiche*, con *serpentino*, *roccie calcaree* e subordinatamente *Pietre verdi*.

Il *serpentino* a taluni livelli (così a m. 129-136-140) diventa abbondantissimo, mentre in ogni punto sono comuni le *roccie carbonate* con *calcari*, *calcari argillosi* e *dolomitici*.

Al livello 136 m. la sabbia è caratteristica per l'abbondanza dei minerali colorati, che formano (compreso il serpentino) circa metà del materiale, con frequente *glaucofane*. A proposito di questa conviene notare che non si osserva più che la varietà a tinta scura fortemente pleocroica, mentre sembra non esistere quella a tinta chiara.

Abbondantissima la *magnetite* e discretamente abbondante la *pirite*.

Metri 146-147.

Materiale costituito in parti pressochè uguali da **argilla** azzurrastra alquanto calcareo-magnesifera e da **sabbia** con **ghiaiette**. Queste e quella sono delle solite roccie e minerali con abbondanza di *serpentino* e delle *roccie calcaree*, fra cui il tipo grigio dolomitico.

Metri 148-155.

Argilla marnosa, magnesifera, di color azzurrognolo con abbondanti frustuli di *muscovite*.

Mediante ripetute levigazioni e decantazioni si possono separare alcune ghiaiette (di *quarzo* e di *gneiss a biotite*) e poca sabbia. Questa, per quanto scarsa, ha composizione complessa con *quarzo, feldspato, carbonati, mica* (*muscovite* e *biotite*), *clorite* a tipo di *ripidolite*, *attinoto* fibroso od in piccoli solidi di sfaldatura, *epidoto*, *granato* roseo, *glaucofane*, *tormalina* nera, *zircone* incoloro; vi sono inoltre masserelle di marna dura, calcarea, inglobanti piccoli arnioni di *marcassite*.

Fossili relativamente abbondanti con frustuli di *lignite*, frammenti di *conchiglie* bivalve e *Foraminiferi* dei generi *Nodosaria*, *Dentalina*, *Lituolina*, *Biloculina*, *Miliolina*, *Cornuspira*, *Cristellaria*, *Polystomella*.

Metri 156-162.

Continua l'**argilla** grigio-azzurrognola fortemente calcareo-magnesifera con parte sabbiosa affatto trascurabile; vi si ritrovano i frustuli di *lignite* ed i *fossili* indicati al livello precedente.

Levigando e decantando ripetutamente il materiale, ho osservato a questo livello l'esistenza di pallottine metalliche, di cui parecchie magnetiche, corrispondenti a quelle indicate al livello m. 73-74.

Metri 163-164.

Sabbia grossolana con **ghiaiette**, il tutto inquinato da sostanza argillosa calcareo-magnesifera.

Le roccie costituenti le ghiaiette ed i grani maggiori della

sabbia sono ancora essenzialmente *quarzose* e *gneissico-granitiche* con abbondante *serpentino* e roccie calcaree, fra cui il solito *calcare* grigio *dolomitico* a tipo triasico alpino.

Frammenti più voluminosi di minerali isolati sono di *granato* rossastro e roseo con qualche cristallo {110} ben conservato; *tormalina* nera, in frammenti di cristalli, fra cui un piccolo individuo dall'aspetto poco fluitato e risultante dall'associazione di due prismi con terminazioni emimorfiche di romboedro e pinacoide; *epidoto* granulare o in frammenti prismatici, di color giallo-verde chiaro o verde pistacchio, anche perfettamente trasparenti; *attinoto* in frammenti di sfaldatura; *feldspato*, fra cui *ortosio* roseo; *muscovite* in lamine fin di 3 mm. di diametro e lamine di *clorite* a tipo di *ripidolite*.

La sabbia minuta ha composizione che non si scosta da quella dei livelli superiori, cioè si ha predominanza del *quarzo*, abbondanti *serpentino* e *carbonati* ed i caratteristici minerali colorati: *glaucofane*, *granato*, *attinoto* in frammenti di sfaldatura, *epidoto*, ecc., con abbondante *magnetite*.

* * *

Dalla descrizione che precede del materiale raccolto ai diversi livelli della trivellazione ne risulta evidentissima la costanza della natura lito-mineralogica, natura che si può dire identica dall'inizio fino alla profondità di 164 metri, che è la massima raggiunta. Inoltre si constata agevolmente che sempre si tratta di alluvioni a tipo nettamente fluviale, come indica il forte rotolamento delle ghiaie e dei granuli della sabbia.

È vero che ad alcuni livelli si verificano piccole differenze rappresentate dalla frequenza più o meno grande di talune specie minerali, come il serpentino, la glaucofane, ecc., o di speciali tipi litologici, quali diaspro, anagenite, ecc., ma il fatto si può facilmente spiegare con momenti diversi nella sedimentazione, conseguenti al temporaneo maggior afflusso nella corrente fluviale principale di correnti affluenti derivate da zone a diversa costituzione litologica.

Ad ogni modo è fuori dubbio che tutto il materiale proviene dalla vicina cerchia alpina e più specialmente dalla valle d'Aosta, ove è appunto caratteristica l'esistenza delle roccie

quarzose e gneissico-granitiche con serpentino ed altre " Pietre verdi „, che sono appunto i tipi litologici osservati a costituire le ghiaie e quelli da cui derivano evidentemente le sabbie. Siamo quindi essenzialmente di fronte ad antiche alluvioni della Dora Baltea, le quali, è opportuno qui far rilevare, hanno nell'insieme corrispondenza di costituzione con le alluvioni attuali.

Non si deve però escludere, anzi è probabile, che a fornire il materiale alluvionale del sottosuolo nella regione di Saluggia non abbiano soltanto concorso le formazioni geologiche della valle della Dora Baltea, ma che siano pure intervenute quelle di valli vicine ad analoga costituzione litologica; così dell'Orco, della Stura, ecc., mentre parte delle roccie calcaree e granitiche, le porfiriche, le diasproidi e quelle a tipo clastico (anageniti e simili) devono provenire dalle formazioni permo-triasiche della vicina regione canavesana. La mancanza poi o quasi di elementi calcarei nei livelli superiori deve dipendere più che altro da fenomeno di decalcificazione operata dalle acque di infiltrazione, tanto più se si tiene conto della natura permeabilissima del terreno.

Circa l'età geologica si può ritenere che la prima parte della trivellazione si è svolta nelle formazioni del Quaternario antico; nelle zone inferiori, ove non sono rari i frustuli di lignite e neppure i resti fossili con frammenti di conchiglie (essenzialmente marine) e molteplici Foraminiferi, siamo forse in presenza di terreni riferibili al Pliocene superiore. Gli avanzi fossili potrebbero derivare dal disfacimento e dal lavacro di formazioni marine del Pliocene inferiore (Placenziano) esistenti in posto nella regione quando avveniva la sedimentazione (1).

Torino, Gabinetto Geo-mineralogico del R. Politecnico.
Marzo 1916.

(1) F. Sacco, *Il pozzo artesiano di Saluggia*, loc. cit.

Teoremi su massimi e minimi geometrici, e su normali a curve e superficie.

Nota di MATTEO BOTTASSO.

In una Nota del 1888 (*), avente lo stesso titolo della presente, il Prof. Peano enunciava alcune proposizioni, in parte già note, tutte dimostrabili facilmente con i procedimenti del suo classico *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di* H. Grassmann (Torino, frat. Bocca, 1888). Poichè non mi consta che la dimostrazione delle nuove proposizioni là enunciate sia apparsa in seguito, credo utile d'indicare come esse possano appunto dedursi con i procedimenti del calcolo assoluto delle formazioni geometriche (**), che ragionevolmente dovrebbero chiamarsi di Peano (***).

In simil modo sono dati (nn. 15-19) alcuni altri teoremi, che ritengo nuovi, aventi una certa analogia con quelli del Prof. Peano; e per meglio completare l'illustrazione della sua

(*) " Rendic. del Circolo matem. di Palermo ", t. II (1888), pp. 189-192.

(**) Per una breve trattazione di queste sotto la forma elaborata dal Prof. C. Burali-Forti, che può ritenersi ormai definitiva, vedasi l'Appendice degli *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications*, etc. par C. Burali-Forti et R. Marcolongo (Paris, Hermann, 1910). Nel seguito richiameremo quest'opera indicandola brevemente con *Élém.*

(***) È infatti al Peano che si deve l'esposizione, in forma del tutto nuova, chiara e indipendente dalle coordinate, dell'opera del Grassmann, rimasta per lungo tempo incomprensibile ai più e tutta poggiata sulle coordinate, tanto che, com'ebbe giustamente ad osservare il Sig. E. Carvallo (*La méthode de Grassmann*, " Nouvelles Annales de Mathématiques ", troisième série, tome XI, 1892, pp. 8-37), è stato un puro caso l'aver potuto trarre da tale opera un Calcolo Geometrico, degno di tale nome. Per la dipendenza di queste forme geometriche dai lavori di Cauchy, Chelini, ecc., vedasi l'opera citata del Prof. Peano.

Nota, darò pure la dimostrazione, sotto forma assoluta, delle proposizioni già note ivi ricordate, affinchè il lettore possa facilmente rendersi conto della grande semplificazione apportata dai nuovi metodi.

I.

1. — *Se* $r_1, r_2, \ldots$ *sono le distanze d'un punto variabile* P *dello spazio da punti, rette e piani fissi, e* $f(r_1, r_2, \ldots)$ *è una loro funzione analitica, allora la normale alla superficie luogo dei punti* P *per cui* f *è costante ha la direzione della risultante di forze applicate al punto considerato* P, *dirette ai punti fissi, o normalmente alle rette e piani fissi, e di intensità uguali a* $\frac{\partial f}{\partial r_1}, \frac{\partial f}{\partial r_2}, \ldots$.

Si suppone che il punto P *non coincida con alcuno dei punti dati, nè giaccia su alcuna delle rette o piani dati; inoltre che la risultante di quelle forze non sia nulla.*

Se per un punto P_0 *dello spazio, non giacente in alcuno dei punti, rette o piani dati,* f *diventa massima o minima, la risultante di quelle forze è nulla* (*).

La proposizione enunciata segue subito dal fatto che la normale indicata è parallela al vettore $\mathrm{grad}_P f$ (*Élém.*, p. 78) e che si ha (*Élém.*, p. 68 (2))

$$\mathrm{grad}_P f = \frac{\partial f}{\partial r_1} \mathrm{grad}_P r_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} \mathrm{grad}_P r_2 + \ldots.$$

ove (*Élém.*, pp. 68-69) $-\mathrm{grad}_P r_1$, $-\mathrm{grad}_P r_2$, ... sono vettori unitari diretti dal punto P rispettivamente ai punti fissi, o normalmente alle rette e piani fissi.

Infine, se in P_0 la f è massima o minima, in tale punto $\mathrm{grad}_P f$ si annulla (*Élém.*, p. 79, *b)*).

(*) Questa proposizione trovasi accennata nelle opere di Leibniz (*Mathematische Schriften*, Berlin, 1849, tomo VI, p. 233). Essa fu chiaramente enunciata dal Poinsot (*Statique*, Bruxelles, 1836, p. 291), ed in seguito fu oggetto di studi di molti matematici.

La risultante considerata, cambiata di segno, è il parametro differenziale (o gradiente) del Lamé.

II.

2. — *Se, nello spazio,* $r_1, r_2, \ldots$ *sono le distanze d'un piano variabile* π *da punti fissi, e* $f(r_1, r_2, \ldots)$ *è una loro funzione analitica, l'equazione* $f =$ *costante determina un inviluppo di piani. Se* π *è un piano dell'inviluppo, il punto di contatto di esso colla superficie inviluppata è il baricentro dei piedi delle perpendicolari abbassate dai punti dati sul piano* π*, ai quali siano affissi pesi eguali a* $\frac{\partial f}{\partial r_1}, \frac{\partial f}{\partial r_2}, \ldots,$ *purchè la somma di questi pesi non sia nulla* (*).

Se, per una posizione speciale del piano π*, la somma di tali pesi è nulla, senza che siano nulli tutti i pesi, il piano* π *è tangente all'inviluppo in un suo punto all'infinito.*

E se, per una posizione speciale del piano π*, la funzione* f *diventa massima o minima, il sistema di forze parallele applicate al piano* π *come a corpo rigido, dirette secondo le normali abbassate dai punti dati sul piano* π*, e di intensità eguali a* $\frac{\partial f}{\partial r_1}, \frac{\partial f}{\partial r_2}, \ldots,$ *è in equilibrio.*

Infatti, siano O_s (per $s = 1, 2, \ldots$) i punti fissi; r_s la distanza (con segno) di O_s dal piano variabile π; $\boldsymbol{u}$ un vettore unitario normale a questo piano, per modo che

$$B_s = O_s + r_s \boldsymbol{u}$$

sia il piede della normale condotta da O_s al piano π; si trae allora

$$(a) \qquad dB_s = dr_s \,.\, \boldsymbol{u} + r_s \,.\, d\boldsymbol{u}.$$

Indichiamo ancora con π una forma geometrica di 3ª specie (*Élém.*, *Appendice*, pp. 193-94) che individua (colla sua posizione) il piano π e tale che, per es., il *prodotto alternato* $P\pi$ (*Élém.*, p. 183 e seg.) rappresenti la distanza da π del punto arbitrario P, ed $\boldsymbol{u}\pi$ sia positivo; si ha così

$$(b) \qquad B_s\pi = 0, \qquad \boldsymbol{u}\pi = 1,$$

(*) Questa 1ª parte della proposizione si può dedurre da una formula di P. Serret, *Géométrie de direction* (Paris, 1869, p. 44).

da cui

$$dB_s \,.\, \pi + B_s \,.\, d\pi = 0 \,. \tag{c}$$

Eseguendo allora il prodotto alternato per π dei due membri della (a), e per essere $d\boldsymbol{u} \,.\, \pi = 0$ (perchè $d\boldsymbol{u}$, normale ad $\boldsymbol{u}$, è parallelo a π), in virtù delle (b) e (c), si ottiene subito

$$dr_s = - B_s d\pi \,. \tag{d}$$

Differenziando ora la relazione $f(r_1, r_2, ...) =$ costante, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} dr_2 + ... = 0 \,.$$

cioè, per (d),

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r_1} B_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} B_2 + ...\right) d\pi = \left(\frac{\partial f}{\partial r_1} + \frac{\partial f}{\partial r_2} + ...\right) G d\pi = 0 \,,$$

avendo indicato con G il baricentro dei punti B_1, B_2, ... a cui siano applicate le masse $\frac{\partial f}{\partial r_1}$, $\frac{\partial f}{\partial r_2}$, ..., nell'ipotesi di $\frac{\partial f}{\partial r_1} + \frac{\partial f}{\partial r_2} + ... \neq 0$; quando $\frac{\partial f}{\partial r_1} + \frac{\partial f}{\partial r_2} + ... = 0$, senza che siano nulle tutte le $\frac{\partial f}{\partial r_1}$, $\frac{\partial f}{\partial r_2}$, ..., la forma di 1ª specie

$$\frac{\partial f}{\partial r_1} B_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} B_2 + ...$$

è allora un vettore (*Élém.*, p. 20) $\boldsymbol{g}$. Si ha così, nei due casi,

$$G d\pi = 0 \,, \qquad \text{oppure} \qquad \boldsymbol{g} d\pi = 0 \,.$$

Da ciò segue subito la 1ª parte della proposizione enunciata, giacchè sussiste il *lemma* generale seguente:

Data nello spazio (nel piano) una forma di 3ª specie (di 2ª specie) variabile π, *in guisa che il piano (la retta) posizione di* π *descriva un inviluppo di piani (di rette) e sopra un dato piano (una data retta) dell'inviluppo si abbia un punto* G *o un vet-*

tore g, *tale che per* dπ *arbitrario sia nullo il prodotto alternato* G dπ, *o* g dπ, *cioè si abbia*

$$(e) \qquad G d\pi = 0 , \qquad \text{oppure} \qquad g d\pi = 0 ,$$

il punto G, *o il punto all'infinito del vettore* g, *è il punto di contatto, coll'inviluppo, del piano (o retta) considerato.*

Invero, dall'ipotesi indicata si trae appunto che G, o g, appartiene ad ogni piano (retta) dell'inviluppo infinitamente vicino a quello considerato, poichè da (e) e per essere $G\pi = 0$, oppure $g\pi = 0$, ne segue essere

$$G(\pi + d\pi) = 0 , \quad \text{ovvero} \quad g(\pi + d\pi) = 0 ,$$

per ogni valore di $d\pi$. c. d. d.

Infine, se la funzione $f(r_2, r_2, ...)$ per un certo piano π_0 risulta massima o minima, il differenziale

$$-df = \left(\frac{\partial f}{\partial r_1} B_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} B_2 + ...\right)_{\pi_0} d\pi$$

deve avere un segno costante per $d\pi$ arbitrario, perciò deve essere necessariamente, per il piano π_0,

$$\frac{\partial f}{\partial r_1} B_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} B_2 + ... = 0 ,$$

od anche

$$\frac{\partial f}{\partial r_1} B_1 u_0 + \frac{\partial f}{\partial r_2} B_2 u_0 + ... = 0 ,$$

essendo u_0 un vettore unitario normale a π_0. Il che esprime appunto (*Élém.*, p. 189) che le forze di vettori $\frac{\partial f}{\partial r_1} u_0, \frac{\partial f}{\partial r_2} u_0, ...,$ applicate rispettivamente ai punti B_1, B_2, ... del piano rigido π_0, sono in equilibrio, come vuole l'ultima parte della proposizione enunciata.

Si ha una proposizione analoga, più semplice, per le rette d'un piano fisso:

3. — *Se, in un piano fisso,* $r_1, r_2, ...$ *sono le distanze d'una retta variabile* p *da punti fissi (del piano), e* $f(r_1, r_2, ...)$ *è una loro funzione analitica, l'eguaglianza* f = *costante determina un in-*

viluppo di rette. Se p *è una retta dell'inviluppo, il punto di contatto di essa con la linea inviluppata è il baricentro dei piedi delle perpendicolari condotte dai punti dati alla retta* p, *ai quali siano affissi pesi eguali a* $\frac{\partial f}{\partial r_1}$, $\frac{\partial f}{\partial r_2}$, ..., *quando la somma dei pesi* $\frac{\partial f}{\partial r_1} + \frac{\partial f}{\partial r_2} + \ldots$ *non è nulla.*

Se la somma di questi pesi è nulla, senza che siano nulli tutti i pesi, la retta p *è un asintoto della curva inviluppata.*

E se, per una posizione speciale della retta p, *la funzione* f *diventa massima o minima, il sistema di forze parallele applicate alla retta* p *come a corpo rigido, dirette secondo le normali condotte dai punti dati sulla retta* p, *e di intensità eguali a* $\frac{\partial f}{\partial r_1}$, $\frac{\partial f}{\partial r_2}$, ..., *è in equilibrio.*

La dimostrazione si ottiene sostituendo nella dimostrazione precedente le parole " retta „ e " forma di 2ª specie „ alle parole " piano „ e " forma di 3ª specie „; tenendo poi presente che si opera in un piano fisso, e si possono quindi riguardare come numeri le forme di 3ª specie di questo piano.

La proposizione corrispondente per le rette dello spazio è la seguente:

III.

4. — *Se* p *è una retta dello spazio,* $r_1, r_2, \ldots$ *le sue distanze da punti fissi, si immaginino le forze* F, *applicate alla retta* p, *dirette secondo le normali abbassate dai punti dati alla retta* p, *e di intensità eguali a* $\frac{\partial f}{\partial r_1}$, $\frac{\partial f}{\partial r_2}$, ...

Le rette p *per cui* f *è costante formano un complesso.*

Le rette del complesso giacenti in un piano π *inviluppano una linea.*

Se p *è una retta siffatta, per trovarne il punto di contatto coll'inviluppo, si proiettino normalmente le forze* F *sul piano* π, *e si compongano considerandole applicate alla retta* p, *come corpo rigido.*

Supposto che le proiezioni indicate (tutte fra loro parallele) non siano tutte nulle, se si ottiene così una risultante, il punto d'applicazione di questa sarà il punto cercato; se invece il detto

sistema di forze proiezioni è equivalente ad una coppia, la retta p *è un asintoto della linea inviluppata.*

Le rette del complesso passanti per un punto dato P *formano un cono.*

Per trovare il piano normale a questo cono lungo una generatrice p, *si decomponga ogni forza* F *in una forza passante per* P *ed in una coppia, e si compongano queste varie coppie. Il piano passante per* P *e parallelo alla coppia risultante sarà il piano cercato.*

Se, per una posizione della retta p *nello spazio, la funzione* f *diventa massima o minima, le forze* F *si fanno equilibrio.*

Infatti, se O_1^0, O_2^0, ... sono le proiezioni ortogonali dei punti fissi O_1, O_2, ..., sopra π; r_{01}, r_{02}, ... le distanze (con segno) d'una delle rette mobili p, giacenti sopra π, dai punti O_1^0, O_2^0, ... ed h_1, h_2, ... le distanze (con segno) dei punti O_1, O_2, ... da π, si ha

$$r_1^2 = h_1^2 + r_{01}^2, \qquad r_2^2 = h_2^2 + r_{02}^2, \ldots,$$

e le rette p sopra π sono le rette di questo piano che soddisfano alla condizione

$$f(\sqrt{h_1^2 + r_{01}^2}, \sqrt{h_2^2 + r_{02}^2}, \ldots) = \text{costante}.$$

Per il teorema precedente (n. 3) tali rette formano un inviluppo, e indicando con B_1, B_2, ... i piedi delle perpendicolari condotte a p da O_1^0, O_2^0, ..., il punto di contatto d'una retta p con la linea inviluppata è il baricentro della forma di 1ª specie $\frac{\partial f}{\partial r_{01}} B_1 + \frac{\partial f}{\partial r_{02}} B_2 + \ldots$ (*Élém.*, p. 21) se la sua massa $\frac{\partial f}{\partial r_{01}} + \frac{\partial f}{\partial r_{02}} + \ldots$ non è nulla; ed è il punto all'infinito di p se tale massa è nulla, ma non sono nulle tutte le $\frac{\partial f}{\partial r_{01}}, \frac{\partial f}{\partial r_{02}}, \ldots$.

D'altra parte si osservi che B_1, B_2, ... sono pure i piedi delle perpendicolari condotte alla retta p da O_1, O_2, ..., ed indicando con $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ... dei vettori unitari colla direzione ed il senso dei vettori $O_1 - B_1$, $O_2 - B_2$, ..., la forza applicata in B_s (per $s = 1, 2, \ldots$), indicata nell'enunciato del teorema, ha per vettore $\frac{\partial f}{\partial r_s} \boldsymbol{u}_s$, e l'intensità della sua proiezione ortogonale

sopra π è $\frac{\partial f}{\partial r_s} \frac{r_{0s}}{r_s} = \frac{\partial f}{\partial r_{0s}}$. Ne segue così subito la 1ª parte del teorema enunciato.

5. — Indichiamo ora con $\boldsymbol{v}$ un vettore unitario parallelo alla retta mobile p, la quale si suppone passi per il punto fisso P, e poniamo per brevità $\boldsymbol{v}_s = O_s - P$ (sempre per $s = 1, 2, \ldots$). Si ha

$$O_s - B_s = (O_s - P) - (B_s - P), \qquad \text{cioè} \qquad r_s \boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{v}_s \times \boldsymbol{v} \, . \, \boldsymbol{v},$$

e differenziando

$$dr_s \, . \, \boldsymbol{u}_s + r_s \, . \, d\boldsymbol{u}_s = -(\boldsymbol{v}_s \times d\boldsymbol{v}) \, \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}_s \times \boldsymbol{v}) \, d\boldsymbol{v} :$$

da cui, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{u}_s$, per essere

$$\boldsymbol{u}_s \times d\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{u}_s \times \boldsymbol{v} = 0,$$

si trae

$$dr_s = -\boldsymbol{v}_s \times \boldsymbol{v} \, . \, \boldsymbol{u}_s \times d\boldsymbol{v}.$$

Quindi, differenziando la $f(r_1, r_2, \ldots) =$ costante, si ha che il vettore $\boldsymbol{v}$ deve soddisfare alla condizione

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r_1} \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v} \, . \, \boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v} \, . \, \boldsymbol{u}_2 + \ldots \right) \times d\boldsymbol{v} = 0 ;$$

e siccome il vettore $d\boldsymbol{v}$ (insieme a $\boldsymbol{v}$ ed a $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$) è parallelo al piano tangente al cono descritto dalle rette p del complesso passanti per P, lungo la generatrice p (ossia $P\boldsymbol{v}$) considerata, il vettore

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial f}{\partial r_1} \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v} \, . \, \boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v} \, . \, \boldsymbol{u}_2 + \ldots$$

è parallelo alla normale al cono in un punto qualunque della generatrice p.

D'altro lato, l'asse momento della coppia di braccio $B_s - P$ ed avente $\frac{\partial f}{\partial r_s} \boldsymbol{u}_s$ come vettore delle forze, è

$$(B_s - P) \wedge \frac{\partial f}{\partial r_s} \boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{v}_s \times \boldsymbol{v} \, . \, \boldsymbol{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial r_s} \boldsymbol{u}_s ,$$

e quindi l'asse momento della somma di queste coppie è rappresentato dal vettore $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{N}$, il che prova che il piano di tale coppia risultante (o piano del bivettore $\boldsymbol{v}\boldsymbol{N}$) è parallelo al vettore $\boldsymbol{N}$, cioè, per quanto precede, è normale al cono lungo la generatrice p; ciò che dimostra la 2ª parte del teorema enunciato.

6. — Se per una posizione p_0 della retta p, la funzione f è massima o minima, l'incremento subìto dalla funzione f nel passaggio dalla retta $p_0 = P\boldsymbol{v}$ ad un'altra retta p (infinitamente vicina a p_0), che incontri p_0 in un punto $P + x\boldsymbol{v}$ e sia parallela al vettore $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$, cioè

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial r_1}(O_1 - P - x\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2}(O_2 - P - x\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}_2 + \ldots\right] \times d\boldsymbol{v},$$

deve avere segno costante per x e $d\boldsymbol{v}$ arbitrarî.

Ne segue che dev'essere, qualunque sia x,

$$\frac{\partial f}{\partial r_1}(O_1 - P) \times \boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2}(O_2 - P) \times \boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{u}_2 + \ldots$$
$$\ldots - x\left(\frac{\partial f}{\partial r_1}\boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2}\boldsymbol{u}_2 + \ldots\right) = 0.$$

E siccome $(O_s - P) \times \boldsymbol{v} = (B_s - P) \times \boldsymbol{v}$, se ne trae dover essere

$$(a) \qquad \frac{\partial f}{\partial r_1}\boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2}\boldsymbol{u}_2 + \ldots = 0,$$

$$(b) \qquad \frac{\partial f}{\partial r_1}\boldsymbol{v} \times (B_1 - P) \,.\, \boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2}\boldsymbol{v} \times (B_2 - P) \,.\, \boldsymbol{u}_2 + \ldots = 0,$$

l'ultima delle quali si può pure scrivere (*Élém.*, p. 34 (2))

$$(b') \qquad -\boldsymbol{v} \wedge \left[\frac{\partial f}{\partial r_1}(B_1 - P) \wedge \boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2}(B_2 - P) \wedge \boldsymbol{u}_2 + \ldots\right] = 0,$$

od ancora, poichè il vettore in parentesi [ ], come i suoi singoli termini, è normale alla retta p, cioè al vettore unitario $\boldsymbol{v}$,

$$(b'') \qquad \frac{\partial f}{\partial r_1}(B_1 - P) \wedge \boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2}(B_2 - P) \wedge \boldsymbol{u}_2 + \ldots = 0.$$

L'insieme delle due condizioni (a), (b'') esprime appunto che è nulla la forma di 2ª specie

$$P\left[\frac{\partial f}{\partial r_1} u_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} u_2 + \ldots\right] + \frac{\partial f}{\partial r_1}(B_1 - P) u_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2}(B_2 - P) u_2 + \ldots$$
$$\ldots = \frac{\partial f}{\partial r_1} B_1 u_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} B_2 u_2 + \ldots,$$

ossia che le forze di vettori $\frac{\partial f}{\partial r_1} u_1$, $\frac{\partial f}{\partial r_2} u_2$, ..., applicate ai punti B_1, B_2, ..., si fanno equilibrio (*Élém.*, p. 189). c. d. d.

IV.

7. — *Se, nello spazio,* p *è una retta che passa per un punto fisso* P *e forma gli angoli* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *con rette fisse, che possiamo supporre pure passanti per* P, *il luogo delle rette* p *per cui è costante una funzione analitica* $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ *di questi angoli, è un cono.*

Si immaginino coppie di forze giacenti nei piani passanti per la retta p *e per ognuna delle rette fisse, ed i cui momenti sono eguali a* $\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \ldots$. *Il piano normale al cono considerato, lungo la generatrice* p, *è parallelo alla risultante di queste coppie. Se per una retta* p, f *è massima o minima, questa risultante è nulla.*

Infatti, indicando con v un vettore unitario parallelo alla retta mobile p, e con v_s dei vettori unitari paralleli alle rette fisse, in guisa che si abbia $v \times v_s = \cos \alpha_s$, per $\alpha_s \neq 0$, si ricava

$$d\alpha_s = -\frac{v_s \times dv}{\sin \alpha_s}, \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

e differenziando la $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) =$ costante, si ottiene così

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \frac{v_1}{\sin \alpha_1} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \frac{v_2}{\sin \alpha_2} + \ldots\right) \times dv = 0.$$

Ciò significa (cfr. il n. 5) che il vettore

$$N = \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \frac{v_1}{\sin \alpha_1} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \frac{v_2}{\sin \alpha_2} + \ldots$$

è normale al cono descritto dalla retta p, che sodisfa alla $f =$ costante, lungo la generatrice p; e poichè $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{N}$ è il momento della risultante delle coppie indicate nell'enunciato $\left(\text{essendo mod}\left(\boldsymbol{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \alpha_s} \frac{\boldsymbol{v}_s}{\sin \alpha_s}\right) = \text{mod} \frac{\partial f}{\partial \alpha_s}\right)$, ne segue subito la 1ª parte del teorema.

Nell'ipotesi poi di f massima o minima, per una posizione speciale p_0 della retta p, si deduce facilmente (come nel n. 2) che il corrispondente vettore $\boldsymbol{N}$ dev'essere nullo, ossia che dev'essere nulla la risultante delle coppie dianzi considerate.

c. d. d.

V.

8. — *Se un punto* P *si muove nello spazio in guisa che rimanga costante il volume (con segno) del solido formato dalle piramidi aventi per vertice* P *e per basi le faccie d'una superficie poliedrica aperta, esso descrive un piano. Questo piano è normale alla risultante delle forze dirette da* P *normalmente alle faccie del poliedro e d'intensità proporzionali a queste stesse faccie. Si suppone che tale risultante non sia nulla.*

Si può aggiungere:

Tutti i piani così ottenuti sono paralleli. Non esiste nessun piano (al finito) per il quale il detto volume risulti massimo o minimo.

Se la superficie poliedrica è chiusa il volume indicato è costante, per ogni posizione di P, *ed eguaglia il volume del solido* S *limitato dalla superficie, quando il volume di ognuna delle piramidi indicate si riguardi (per es.) come positivo o negativo secondochè la normale interna alla piramide, in un punto della sua base, è interna od esterna ad* S.

Infatti, siano $\pi_1, \pi_2, \ldots$ le forme di 3ª specie che rappresentano le faccie della data superficie poliedrica, in guisa che i piani delle dette faccie siano le posizioni di quelle forme, ed il volume (con segno) della piramide con vertice in un punto arbitrario P e base la faccia sopra π_s $(s = 1, 2, \ldots)$ sia $P\pi_s$. Allora, il volume del solido indicato nell'enunciato del teorema è espresso da $P(\pi_1 + \pi_2 + \ldots)$.

Ora la relazione $P(\pi_1 + \pi_2 + \ldots) =$ costante, è lineare in P e quindi rappresenta un piano, se essa non è identica od impossibile.

Indicando con π_1^0, π_2^0, ... le aree delle faccie della superficie poliedrica e con r_1, r_2, ... le distanze (con segno) di esse dal punto arbitrario P, la detta relazione può anche scriversi

$$(a)\qquad \frac{1}{3}\left(\pi_1^0 r_1 + \pi_2^0 r_2 + \ldots\right) = \text{costante};$$

epperò, per il teorema del n. 1, il luogo descritto da P è normale al vettore

$$(b)\qquad \boldsymbol{N} = \pi_1^0 \operatorname{grad}_P r_1 + \pi_2^0 \operatorname{grad}_P r_2 + \ldots,$$

perchè, differenziando la (a), si ha $\boldsymbol{N} \times dP = 0$.

Siccome $\operatorname{grad}_P r_s$ è un vettore unitario normale a π_s e volto verso il semispazio, limitato da π_s, i cui punti hanno da questo piano una distanza positiva, risulta così dimostrata completamente la 1ª parte della proposizione enunciata.

Osservato che i singoli termini di $\boldsymbol{N}$, e quindi anche tutto il vettore $\boldsymbol{N}$ (b), non dipendono da P, si trae che le superficie (a) sono piani paralleli fra loro.

Se il vettore $\boldsymbol{N}$ non è nullo, cioè il 1° membro della (a) non è sempre costante, tale 1° membro può variare da $-\infty$ a $+\infty$. Invero, essendo O un punto fisso arbitrario, per $P = O + x\boldsymbol{N}$ si ha

$$P(\pi_1 + \pi_2 + \ldots) = O(\pi_1 + \pi_2 + \ldots) + x\boldsymbol{N}(\pi_1 + \pi_2 + \ldots),$$

ove $\boldsymbol{N}(\pi_1 + \pi_2 + \ldots)$, per l'ipotesi fatta, non può essere nullo, e quindi $P(\pi_1 + \pi_2 + \ldots)$ al variare di x può assumere qualsiasi valore positivo o negativo.

Supposto che le faccie π_1, π_2, ... formino una superficie chiusa, che limita un solido (poliedro) S, è facile riconoscere che il 1° membro della (a), per P arbitrariamente scelto, rappresenta il volume di S quando le distanze positive da ogni faccia siano determinate dalla normale a questa faccia volta verso l'interno (p. es.) di S.

In tale ipotesi la relazione (a) è identica od impossibile secondochè il suo secondo membro è uguale o diverso dal volume di S; ed il vettore (b) è identicamente nullo.

9. — Il teorema vale pure per una superficie non poliedrica, cioè si ha:

Data una superficie Σ *limitata da un contorno* s, *il luogo dei punti* P *per cui è costante il volume limitato da* Σ *e dal cono di vertice* P *ed avente come direttrice* s, *è un piano. La normale comune a tutti questi piani è parallela al vettore* $\int_\Sigma \boldsymbol{n}\, d\Sigma$, *essendo* $\boldsymbol{n}$ *un vettore unitario diretto secondo la normale all'elemento* $d\Sigma$, *ove si convenga che il volume del cono di base* $d\Sigma$ *e vertice* P *sia positivo o negativo secondochè* P *è situato, rispetto al piano di* $d\Sigma$, *dalla banda secondo cui è volto il vettore* $\boldsymbol{n}$, *o dalla banda opposta.*

Se la superficie Σ *è chiusa e limita uno spazio* S, *il volume dianzi considerato espresso da* $\frac{1}{3}\int_\Sigma \boldsymbol{n} \times (P - M) . d\Sigma$, *essendo* M *un punto dell'elemento* $d\Sigma$ *di* Σ, *è indipendente da* P *ed è uguale al volume di* S.

Per la dimostrazione della 1ª parte basta sostituire, in quella esposta nel n. 8, alle faccie π_1, π_2, ... della superficie poliedrica gli elementi $d\Sigma$ di Σ.

Nell'ipotesi della superficie chiusa, si ha (*Élém.*, p. 105 (2). p. 73 (*b*))

$$\frac{1}{3}\int_\Sigma \boldsymbol{n} \times (P-M) . d\Sigma = -\frac{1}{3}\int_S \operatorname{div}_M (P-M) . dS = \int_S dS .$$

c. d. d.

VI.

10. — *Se un punto* P *si muove in guisa che rimanga costante l'area della superficie poliedrica formata dai triangoli aventi per vertice* P *e per basi i lati d'una poligonale data, esso descrive una superficie. La normale a questa superficie è diretta secondo la risultante delle forze applicate in* P, *dirette normalmente ai lati della linea poligonale e d'intensità proporzionali a questi lati. Se per un punto* P *l'area è minima questa risultante è nulla.*

Questo teorema è pure un caso particolare del teorema I, perchè se l_1, l_2, ... sono i lati della data poligonale ed r_1, r_2, ... le distanze di essi da un punto P, il luogo di punti considerato è quello definito dalla relazione $f(P) = \frac{1}{2}(l_1 r_1 + l_2 r_2 + \ldots) = \text{cost.}$

11. — Se si sostituiscono ai lati della poligonale gli elementi $ds = \text{mod}\, dQ$ d'una linea s, si ha:

Se un punto P *si muove in guisa che rimanga costante l'area della superficie conica avente* P *come vertice e come direttrice una linea finita* s, *esso descrive una superficie. La normale a questa superficie è parallela al vettore* $\int \text{grad}_P \,\text{mod}\,[(P-Q) \wedge dQ]$, *ove l'integrale va esteso a tutti i punti* Q *di* s, *ossia al vettore* $\int \text{grad}_P\, r \,.\, ds$, *essendo* r *la distanza di* P *dalla tangente in* Q *ad* s.

Se per un punto P *l'area indicata è minima, il detto vettore è nullo.*

VII.

12. — *Abbiasi nello spazio una superficie fissa* Σ, *ed un piano variabile* π *che incontri la superficie* Σ *secondo una linea chiusa* s.

Sussistono allora le proposizioni seguenti (nn. 12-18):

Se il piano π *si muove in guisa che il volume limitato dal piano* π *e dalla superficie* Σ *sia costante, il punto di contatto del piano* π *coll'inviluppo è il baricentro dell'area piana* σ *limitata dal contorno* s, *intersezione di questo piano colla superficie* Σ.

Indichiamo: con π una forma di 3ª specie che individua (colla sua posizione) il piano mobile π, il quale limita con Σ una parte finita di spazio S, di volume costante v, e detta forma sia tale che la distanza (con segno) d'un punto qualunque Q dal piano π sia espressa (p. es.) da $Q\pi$; sia poi P un punto generico della superficie piana finita σ, limitata da s, e $d\sigma$ un elemento d'area di tale sezione contenente il punto P. Essendo allora $\pi + d\pi$ una forma di 3ª specie che individua un qualsivoglia piano dell'inviluppo, descritto da π, infinitamente vicino a questo piano, si ha $P(\pi + d\pi) = P d\pi = h$ (poichè $P\pi = 0$), ove h è la distanza (infinitesima) di P dal piano $\pi + d\pi$.

Allora, se q è la lunghezza del segmento di perpendicolare a π condotta per P, compreso fra i piani π e $\pi + d\pi$, ed α è l'angolo (infinitesimo) formato da questi due piani, la variazione δv subita dal volume v nel passaggio dal piano π al piano $\pi + d\pi$, è espressa da

$$\delta v = \int_\sigma q\, d\sigma = \int_\sigma \frac{h}{\cos\alpha}\, d\sigma = \frac{1}{\cos\alpha}\int_\sigma P d\pi \,.\, d\sigma = \frac{\sigma}{\cos\alpha}\, G d\pi,$$

ove $G = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma P d\sigma$ è il baricentro dell'area σ.

Dopo ciò, dall'ipotesi $\delta v = 0$, cioè $Gd\pi = 0$ (perchè $\frac{\sigma}{\cos\alpha} = 0$), segue subito (n. 2) il teorema enunciato.

Osservazione. — Questo teorema, dovuto a Dupin (*Applications de Géométrie et de Mécanique*, Paris, 1822) è uno dei teoremi fondamentali della teoria dei galleggianti, ove il piano π si chiama *piano di galleggiamento*; la sezione σ si dice *sezione fluttuante*; il solido S (di volume costante v) si dice *carena*; la superficie inviluppata da π (luogo dei punti G) si dice *superficie fluttuante*, ed alla superficie luogo dei baricentri C delle carene si dà il nome di *superficie dei centri di carena*.

Col calcolo vettoriale si possono pure dimostrare molto facilmente tutte le altre proprietà fondamentali di tale teoria. Ad esempio, si vede subito che: *il piano tangente in un punto* C *della superficie dei centri di carena è parallelo alla sezione fluttuante corrispondente* (Cfr., per es., F. Caldarera, *Corso di Meccanica razionale*, vol. 3°, Palermo, 1906, pp. 149-150).

Infatti, se $C + dC$ è il centro della carena $S + dS$ staccata dal piano $\pi + d\pi$, C_1, C_2 sono i baricentri dei solidi (infinitesimi ed unghiformi) di eguale volume $d\tau$, staccati rispettivamente in $S + dS$ da π ed in S da $\pi + d\pi$, si ha

$$v(C + dC) = vC + d\tau(C_1 - C_2),$$

ossia $v dC = d\tau(C_1 - C_2)$, la quale esprime che il vettore dC è parallelo al vettore (finito) $C_1 - C_2$, che appartiene (a meno di infinitesimi d'ordine superiore) al piano π.

13. — *Se il piano π si muove in guisa che risulti costante l'area piana σ limitata dall'intersezione di π colla superficie data Σ, il punto di contatto del piano π coll'inviluppo da esso descritto è il baricentro della linea* s *(che limita σ), supposto che la densità in ogni punto di questa linea sia proporzionale alla cotangente dell'angolo che il piano tangente alla superficie Σ in quel punto, fa col piano π.*

Sia P un punto qualunque del contorno s, β l'angolo (acuto) formato da π col piano tangente in P alla superficie Σ.

Se si immagina ribaltato il piano $\pi + d\pi$ sul piano π (facendolo rotare intorno all'intersezione dei piani π e $\pi + d\pi$) il

contorno s_1, sezione di Σ con $\pi + d\pi$, vien ribaltato in (s_1); ed indicando con l la lunghezza (con segno) del segmento di normale ad s in P, compresa fra s ed (s_1), la variazione subita dall'area sezione cambiando il piano π in $\pi + d\pi$, è ovviamente espressa da $\int_s l\,ds$.

D'altra parte, considerando la sezione Σ_1, di Σ, fatta con il piano per P normale a π ed al piano tangente a Σ in P, è facile riconoscere che, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, l eguaglia la distanza dell'intersezione P_2 (infinitamente vicina a P) di Σ_1 con $\pi + d\pi$ dal piede P_0 della perpendicolare condotta da P al piano $\pi + d\pi$; e nel triangolo (a lati infinitesimi) PP_0P_2, rettangolo in P_0, l'angolo in P_2, od il suo supplemento, è eguale all'angolo β più un angolo infinitesimo (dell'ordine dell'angolo α formato dai due piani π e $\pi + d\pi$). Quindi, sempre a meno di infinitesimi d'ordine superiore, si ha $l = h \cot\beta$ (essendo ancora h la distanza di P dal piano $\pi + d\pi$) e la variazione dell'area σ è perciò

$$\delta\sigma = \int_s h \cot\beta\, ds = \int_s P d\pi \cot\beta\, ds = m_0 G_0 d\pi,$$

essendo G_0 il baricentro del contorno s, quando in ogni punto P di questo la densità sia proporzionale a $\cot\beta$ $\left(\text{cioè } m_0 G_0 = \right.$ $\left. = \int_s P \cot\beta\, ds \text{ ed } m_0 = \int_s \cot\beta\, ds \neq 0\right)$.

Dal che segue immediatamente, come nel n. 12, la proprietà enunciata.

14. — *Se il piano π si muove in guisa che risulti costante la lunghezza della linea sezione di esso piano colla superficie data, il punto di contatto di π col proprio inviluppo è il baricentro della linea sezione* s *di Σ, ove si supponga la densità in ogni punto proporzionale al prodotto della cotangente dell'angolo che il piano ivi tangente alla superficie fa col piano secante, moltiplicata per la curvatura della linea sezione nello stesso punto.*

Considerando ancora, come nel n. 13, il ribaltamento (s_1) sopra π del contorno s_1 posto sul piano $\pi + d\pi$, tale curva (s_1) si potrà pure riguardare (sopra π) come la variazione subita

dalla curva s dando ad ogni punto P di questa uno spostamento infinitesimo l secondo la normale ad s in P, cioè nella direzione del vettore unitario $\boldsymbol{n}$, parallelo alla normale indicata. Si ottiene così, sopra (s_1), un punto

$$Q = P - l\boldsymbol{n},$$

da cui, differenziando,

$$dQ = dP - \left(l \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} + \frac{dl}{ds}\boldsymbol{n}\right) ds;$$

ossia, se $\boldsymbol{t}$ è un vettore unitario parallelo alla tangente e ρ è il raggio di curvatura di s in P. per una delle formule di Frenet (*Élém.*, p. 87), si ha

$$dQ = \left[\left(1 + \frac{l}{\rho}\right)\boldsymbol{t} - \frac{dl}{ds}\boldsymbol{n}\right] ds.$$

Se eleviamo a quadrato ambo i membri di questa eguaglianza e trascuriamo nel secondo membro il termine con $\left(\frac{dl}{ds}\right)^2$, che è infinitesimo di ordine superiore rispetto agli infinitesimi principali ds, l, $\frac{dl}{ds}$, si ottiene subito

$$dQ^2 = ds_1{}^2 = \left(1 + \frac{l}{\rho}\right)^2 ds^2,$$

e quindi

$$ds_1 : ds = (\rho + l) : \rho, \qquad \text{cioè} \qquad ds_1 - ds = \frac{l}{\rho} ds \text{ (*)}.$$

Perciò, la variazione δs subìta dalla lunghezza del contorno s nel passaggio dal piano π al piano $\pi + d\pi$, tenendo conto di quanto s'è esposto nel n. 13, è

$$\delta s = \int_s \frac{l}{\rho} ds = \int_s h \frac{\cot \beta}{\rho} ds = \int_s P d\pi \frac{\cot \beta}{\rho} ds = m_1 G_1 d\pi,$$

(*) Cfr. con il calcolo generale della variazione di un arco esposto in G. Peano, *Formulario Mathematico*, ed. V, Torino, 1908, p. 450.

essendo G_1 il baricentro del contorno s quando in ogni suo punto la densità sia proporzionale a $\frac{\cot \beta}{\rho}$. Dal che segue subito, per essere $m_0 = \int_s \frac{\cot \beta}{\rho} ds \neq 0$, che per $\delta s = 0$ è $G_1 d\pi = 0$, e che (n. 2) G_1 è il punto di contatto dell'inviluppo descritto da π. c. d. d.

15. — *Se il piano π si muove in guisa che risulti costante l'area della calotta Σ_0, che esso stacca dalla superficie Σ, il punto di contatto di π col proprio inviluppo è il baricentro della linea sezione, ove si supponga la densità in un punto qualunque proporzionale alla cosecante dell'angolo che il piano tangente in quel punto, alla superficie Σ, fa col piano π.*

Riferendoci alle considerazioni del n. 13, se k è la lunghezza dell'arco (infinitesimo) $\widehat{PP_2}$ della sezione Σ_1, di Σ, compreso fra i due piani π e $\pi + d\pi$, dal triangolo (a lati infinitesimi) PP_2P_0, rettangolo in P_0 e col cateto h opposto all'angolo in P_2 (che vale β), si ha $k = \frac{h}{\sin \beta}$; e la variazione $\delta \Sigma_0$ dell'area di Σ_0 è ovviamente espressa da

$$\delta \Sigma = \int_s k ds = \int_s \frac{h}{\sin \beta} ds = \int_s \frac{P d\pi}{\sin \beta} ds = m_2 G_2 d\pi ,$$

essendo G_2 il baricentro del contorno s, in ogni punto P del quale la densità sia proporzionale a $\operatorname{cosec} \beta$. E poichè $m_2 = \int_s \operatorname{cosec} \beta ds \neq 0$, dall'ipotesi $\delta \Sigma = 0$ si trae che G_2 è il punto di contatto di π con l'inviluppo considerato. c. d. d.

VIII.

16. — *Se il piano π si muove in guisa che risulti costante il momento d'inerzia rispetto a π del solido omogeneo S, limitato dalla superficie Σ e dal piano π, il punto di contatto di questo piano coll'inviluppo da esso descritto è il baricentro di una distribuzione di massa, sul piano π stesso, ottenuta considerando in ogni piede M di normale a π condotta da un punto P della calotta Σ_0, staccato in Σ da π, una densità proporzionale al quadrato della*

distanza di M *da* P, *e con segno positivo o negativo secondochè il segmento da* P *ad* M *è diretto (in* P*) verso l'interno o verso l'esterno del solido* S.

Infatti, se z è la distanza (con segno) dal piano π d'un punto qualsiasi Q della perpendicolare a π, condotta per un punto P di Σ_0, il momento d'inerzia rispetto a π del cilindro infinitesimo, che ha per sezione normale un elemento d'area $d\sigma$, contenente il piede M di detta perpendicolare, è $d\sigma\int z^2 dz$. E se supponiamo dapprima, per semplicità di dimostrazione, che il segmento PM sia tutto interno ad S ed abbia la lunghezza (con segno) $h = P\pi$, il momento d'inerzia di S, rispetto a π, è

$$(a) \qquad I = \int_\sigma d\sigma \int_0^h z^2 dz = \frac{1}{3}\int_\sigma h^3 d\sigma .$$

Consideriamo ora il momento d'inerzia di S rispetto al piano $\pi + d\pi$. Se δh è la lunghezza del segmento della retta PM compreso fra π e $\pi + d\pi$ (e quindi $\delta h = Md\pi / \cos\alpha$), la distanza del punto Q da quest'ultimo piano è $(z + \delta h)\cos\alpha$, essendo $\alpha = \text{ang}(\pi, \pi + d\pi)$, ed il momento d'inerzia, rispetto al piano $\pi + d\pi$, del cilindro infinitesimo dianzi considerato (limitato fra π e Σ_0) è $d\sigma\int_0^h (z + \delta h)^2 \cos^2\alpha\, dz$; ossia, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, rispetto all'infinitesimo principale α (ovvero δh), $d\sigma\left(\frac{1}{3} h^3 + h^2 \delta h\right)$. Quindi, la differenza fra il momento d'inerzia del solido S rispetto al piano $\pi + d\pi$, ed il momento d'inerzia dello stesso solido rispetto al piano π, è

$$(b) \qquad \delta I = \int_\sigma h^2 \delta h\, d\sigma = \int_\sigma h^2 \frac{Md\pi}{\cos\alpha} d\sigma = m_3 G_3 d\pi ,$$

essendo G_3 il baricentro della sezione σ, quando sopra questa si consideri una distribuzione di massa la cui densità, in ogni punto M, sia proporzionale al quadrato dell'altezza h corrispondente, ed $m_3 = \frac{1}{\cos\alpha}\int_\sigma h^2 d\sigma \neq 0$.

Ora si osservi che la differenza fra i momenti d'inerzia di $S + dS$ e di S rispetto allo stesso piano $\pi + d\pi$, cioè il momento d'inerzia rispetto a questo piano di dS, è un infinitesimo

d'ordine superiore, ed è perciò infinitamente piccolo rispetto a δI, perchè la distanza di ogni punto di dS (formato dalle due unghie solide comprese fra i due piani π e $\pi + d\pi$) è infinitesima; il suo quadrato è infinitesimo di 2° ordine ed il detto momento d'inerzia di dS è così infinitesimo di 3° ordine. Quindi δI rappresenta ancora, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, la variazione subita da I nel passaggio da questo momento d'inerzia di S rispetto a π, al momento d'inerzia di $S + dS$ rispetto a $\pi + d\pi$.

Nell'ipotesi che la normale in M a π incontri la superficie Σ_0, che limita S, in più punti P_1, P_2, ... alternatamente d'entrata e d'uscita da S, l'integrale $\int z^2 dz$ va allora esteso a tutti e soli i segmenti di MP interni ad S. È però facile vedere che sussistono in tal caso le formule (a) e (b), purchè ad h ed al δh corrispondente si attribuisca il segno che compete alla distanza considerata (a seconda da quale parte si trova rispetto al piano π o $\pi + d\pi$) od il segno opposto secondochè il segmento da P ad M è rivolto (nel punto P) verso l'interno o verso l'esterno di S.

Fissata così, in ogni caso esaminato, l'espressione (b) di δI, dall'ipotesi $\delta I = 0$ segue $G_3 d\pi = 0$, e quindi (n. 2) il teorema enunciato.

Osservazione. — È utile notare che il δI di (b) si può subito ottenere calcolando la variazione di I, per il che basta fare l'operazione δ sotto il segno d'integrazione in (a) (supposto dapprima, come si è fatto, che l'integrazione sia sempre estesa ad S), ed osservare poi che si deve ritenere $\delta d\sigma = 0$, eseguendo l'integrazione secondo gli stessi cilindri infinitesimi di sezione retta $d\sigma$, sopra π.

17. — I teoremi dei nn. 12 e 16 sono casi particolari del seguente teorema generale:

Se il piano π si muove in guisa che per una funzione analitica intera fz, *della distanza* z *d'un punto dal piano π, sia finito e costante l'integrale di* fz *esteso al solido* S *limitato da π e dalla superficie Σ_0, staccata in Σ da π, allora il punto di contatto del piano π coll'inviluppo è il baricentro di una distribuzione di massa, sul piano π stesso, ottenuta considerando in ogni piede* M *di normale condotta a π da un punto* P *della calotta Σ_0, il quale disti di* h

da M, *una densità proporzionale ad* fh, *e con segno positivo o negativo secondochè il segmento da* P *ad* M *è diretto (in* P*) verso l'interno o verso l'esterno di* S.

Si suppone che la funzione $fz = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$, *ove le* $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ *sono costanti, sia continua e finita in tutto il campo d'integrazione.*

Per $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0$, $a_0 \neq 0$, si ha il teorema del n. 12 e vale la dimostrazione là data.

Per $a_0 = 0$ si può ripetere una dimostrazione perfettamente analoga a quella esposta nel n. 16 e si ha, in particolare, il teorema di questo numero quando $a_2 \neq 0$ ed $a_1 = a_3 = \ldots = 0$.

Il caso delle $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ arbitrarie si deduce subito dai due casi ora indicati osservando che

$$\int fz \,.\, M d\sigma = a_0 \int M d\sigma + \int (a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) M d\sigma.$$

Per $a_0 = a_2 = a_3 = \ldots = 0$ ed $a_1 \neq 0$, si ha:

Se il piano π *si muove in guisa che risulti costante il prodotto del volume del solido* S *per la distanza del suo baricentro (o centro di carena) dal piano* π, *il punto di contatto di questo piano coll'inviluppo è il baricentro d'una distribuzione di massa ottenuta considerando in ogni punto* M *una densità proporzionale all'altezza* h *corrispondente.*

18. — *Se il piano* π *si muove in guisa che risulti costante il momento d'inerzia rispetto ad esso della superficie* Σ_0, *staccata in* Σ *da* π, *il punto di contatto di questo piano coll'inviluppo da esso descritto è il baricentro di una distribuzione di massa, sul piano* π *stesso, ottenuta considerando in ogni piede* M *di normale a* P, *condotta da un punto* P *di* Σ_0, *una densità proporzionale alla distanza del punto* P *da* π, *moltiplicata per la secante dell'angolo (acuto) formato con* π *dal piano tangente a* Σ *in* P.

Si suppone che in nessun punto P, *di* Σ_0, *il piano tangente a questa superficie sia normale a* π.

Infatti, essendo $d\Sigma$ l'elemento di superficie di Σ contenente il punto P, il momento d'inerzia I_1 di Σ_0 rispetto a π è

$$I_1 = \int_{\Sigma_0} h^2 \, d\Sigma,$$

ove $h = \text{mod}\, PM$. La variazione del momento d'inerzia di Σ_0 nel passaggio dal piano π al piano $\pi + d\pi$ è

$$\delta I_1 = 2 \int_{\Sigma_0} h \delta h \, d\Sigma = \frac{2}{\cos\alpha} \int_{\Sigma_0} h M d\pi \,.\, d\Sigma\,;$$

e, come nel n. 16, è facile riconoscere che δI_1 rappresenta pure (a meno d'infinitesimi d'ordine superiore) la variazione subìta da I_1 nel passaggio da questo momento d'inerzia di Σ_0, rispetto a π, a quello di $\Sigma_0 + d\Sigma_0$ rispetto a $\pi + d\pi$.

Siccome poi, indicando con $d\sigma$ la proiezione ortogonale sopra π di $d\Sigma$, e con γ l'angolo formato dal piano tangente a Σ in P col piano π, si ha $d\sigma = \cos\gamma \,.\, d\Sigma$, si può pure scrivere

$$\delta I_1 = \frac{2}{\cos\alpha} \int_{\sigma} h M d\pi \,.\, \cos\gamma \,.\, d\sigma = m_4 \,.\, G_4 d\pi\,,$$

essendo $m_4 = \dfrac{2}{\cos\alpha} \displaystyle\int_{\sigma} h \cos\gamma \, d\sigma \neq 0$, e G_4 il baricentro della massa distribuita sopra π in ogni punto M di σ, con densità proporzionale ad $h \cos\gamma$; da cui segue, al solito (n. 2), il teorema enunciato.

IX.

19. — Nel piano si hanno dei teoremi analoghi ai teoremi dei nn. 12, 13, 15, 16, 17, 18, che si possono riguardare ottenuti con una sezione delle figure là considerate e si possono dimostrare con procedimento affatto simile a quello esposto per i corrispondenti teoremi spaziali. Mi limiterò ad enunciarli.

Si abbia in un dato piano una linea Γ *fissa ed una retta variabile* p, *che incontri la linea in due punti* $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$; *sia* P *un punto qualunque dell'arco* Γ_0, *staccato da* p *sopra* Γ; M *il piede della normale condotta a* p *dal punto* P, *ed* h *la distanza (con segno) di* P *da* p.

1° *Se la retta* p *si muove in guisa da limitare con la linea* Γ *una regione* Δ *di piano, di area costante, il punto di contatto di* p *colla linea da essa inviluppata è il punto medio del segmento* $\mathrm{P}_1 \mathrm{P}_2$, *staccato dalla linea* Γ *sopra* p;

2° *Se è costante la lunghezza della corda* $P_1 P_2$, *il punto di contatto di* p *coll'inviluppo è il baricentro dei due punti* P_1, P_2, *con masse proporzionali alle cotangenti degli angoli formati con* p *dalle rispettive tangenti a* Γ *in* P_1 *e* P_2;

3° *Se è costante la lunghezza dell'arco* Γ_0, *staccato sulla linea* Γ *dalla retta* p, *il punto di contatto coll'inviluppo è il baricentro degli estremi* P_1, P_2, *di tale arco, con masse proporzionali alle cosecanti degli angoli formati con* p *dalle rispettive tangenti a* Γ *in* P_1, P_2;

4° *Se è costante il momento d'inerzia rispetto a* p *della superficie* Δ *(limitata da* p *e da* Γ_0*), il punto di contatto di* p *coll'inviluppo è il baricentro della distribuzione di massa fatta sopra* p *in modo che in ogni suo punto* M, *proiezione d'un punto* P *di* Γ_0, *la densità sia proporzionale ad* $h^2 = \overline{PM}^2$, *e sia considerata come positiva o negativa secondochè il segmento da* P *ad* M *è diretto (in* P*) verso l'interno o l'esterno della regione* Δ, *limitata da* Γ_0 *e* p;

5° *Se è costante l'integrale* $\int fz \,.\, dz$ *esteso alla regione (variabile)* Δ, *essendo* z *la distanza d'un punto dalla retta* p, *ed* fz *una funzione intera (continua e finita nella regione indicata), il punto di contatto di* π *coll'inviluppo è il baricentro di una distribuzione di massa, sopra* p, *tale che in ogni punto* M *la densità sia proporzionale a* $+ fh$ *od a* $- fh$, *secondochè il segmento da* P *ad* M *è rivolto verso l'interno o l'esterno di* Δ;

6° *Se è costante il momento d'inerzia, rispetto a* p, *dell'arco finito* Γ_0, *il punto di contatto di* p *coll'inviluppo è il baricentro di una distribuzione di massa sopra* p, *in modo che in ogni punto* M *la densità sia proporzionale al prodotto della distanza* h *per la secante dell'angolo (acuto) formato da* p *colla tangente in* P *alla linea* Γ. *Si suppone che in ogni punto* P, *di* Γ_0, *la linea* Γ *volga la sua concavità verso il segmento* $P_1 P_2$.

Quando per la linea Γ si assumano, ad es., i lati di un angolo fisso, il teorema 1° dà una nota costruzione per punti dell'iperbole inviluppo, avente i detti lati come asintoti; il teorema 3° dà una costruzione semplice, per punti, della parabola inviluppata dalle congiungenti i punti omologhi di due punteggiate eguali, aventi come sostegni i lati dell'angolo dato. Nel caso in cui l'angolo fisso sia retto, il teor. 2° dà una costruzione per punti dell'asteroide.

20. — La Cinematica offre pure una costruzione semplice del punto di p indicato nel teorema 2°, considerando il moto del segmento invariabile $P_1 P_2$ appoggiato a Γ (che risulta così la *roulette* per ciascuno dei punti P_1, P_2). Il centro C d'istantanea rotazione è perciò l'intersezione delle due normali a Γ in P_1 e P_2; ed il punto di contatto G di p coll'inviluppo (com'è noto) è il piede della perpendicolare a p condotta per C. Gli angoli formati da questa perpendicolare con CP_1, CP_2 sono eguali agli angoli α_1, α_2 formati con p dalle tangenti in P_1, P_2 alla linea Γ, e quindi si ha subito $\bmod P_1 G / \bmod P_2 G = \cot \alpha_2 / \cot \alpha_1$, per cui G è il baricentro indicato nel teorema 2°.

Torino, marzo 1916.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 9 Aprile 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE GIAMPIETRO CHIRONI

DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci Carle, Pizzi, De Sanctis, D'Ercole, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza del Socio Schiaparelli.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 26 marzo u. s.

Il Socio Segretario Stampini, annunziando con dolore che il Socio Schiaparelli non può essere presente all'adunanza a causa delle sue condizioni di salute, ne presenta la recentissima pubblicazione, della quale il nostro illustre Consocio volle far gentile omaggio all'Accademia, *La geografia dell'Africa orientale secondo le indicazioni dei monumenti egiziani. Note* (Roma, Tip. della R. Accademia dei Lincei, 1916). In questo bel volume sono raccolte le Note che già apparvero nei rendiconti della Reale Accademia dei Lincei e che rappresentano, come l'autore dichiara nella prefazione, " il risultato di ricerche " lunghe, complesse, e talora difficili circa le cognizioni che " gli antichi Egiziani ebbero sull'Africa orientale, segnatamente

" sulle regioni comprese fra il Tropico, il mar Rosso e l'oceano
" Indiano, l'Equatore, e il Dar-For „.

La Classe ringrazia vivamente il Socio SCHIAPARELLI per il prezioso dono e incarica il Presidente di fargli pervenire anche i suoi caldi auguri per la guarigione.

Il Socio D'ERCOLE, dimostrandone la notevole importanza, presenta, per la pubblicazione negli *Atti*, una prima *Nota* del Prof. Arturo MONI dal titolo *Le prime categorie naturali o i concetti di spazio, tempo, moto, secondo la filosofia hegeliana*.

LETTURE

Le prime categorie naturali o i concetti di spazio, tempo e moto secondo la filosofia hegeliana.

Nota I di ARTURO MONI.

De proprietatibus hujusmodi demonstrationum est ut nullus sensus contradicat unquam.

AVERROES, *De partibus animalium*, lib. II, cap. « de cerebro ».

La considerazione dello spazio, del tempo e del moto, essendo quella delle forme universalissime della natura, non presuppone innanzi a sè altro che lo sviluppo logico dell'Idea, per il quale l'Idea si è fatta ciò ch'essa è come Natura. D'altro lato ogni altra considerazione naturale presuppone, come suo fondamento, la considerazione di queste forme. Quindi è che già in Aristotele la parte generale della filosofia della natura, compresa negli otto libri fisici, si aggira appunto, sostanzialmente, intorno allo spazio, al tempo, al moto e alle loro determinazioni. Oltre a ciò lo spazio è il presupposto della geometria, e il moto, della meccanica finita e dell'astronomia matematica. Quanto al tempo, esso non ha dato, e non può dare, origine ad alcuna scienza dell'intelletto, l'aritmetica avendo per oggetto non già l'istante, ma il semplice schema logico dell'istante, l'istante " paralizzato „ o l'Uno numerico. Per l'immediato contatto che, nell'ordine della deduzione dialettica, queste prime categorie naturali hanno colle determinazioni del pensiero puro, la loro trattazione conserva poi un andamento ancora simile a quello della logica, e costituisce quasi una logica naturale, cioè una scienza dove l'elemento a priori si collega bensì coll'elemento a posteriori, ma dove però quest'ultimo ha una parte così esigua, che appena si rileva. In questa sua generalità la filosofia della natura, che nel suo ulteriore svolgimento deve

ampiamente ricorrere alle scienze empiriche per il materiale da adoperare nelle sue costruzioni, fa ancora, per così dire, da sola.

È noto che la scuola hegeliana sorvolò volentieri sulla parte intermedia dell'enciclopedia filosofica, tanto che i lavori intorno ad essa, che la scuola ha prodotti, sono senza confronto in minor numero e di minore importanza che non quelli intorno alle due altre parti, la logica e la filosofia dello spirito. Cotesto relativo abbandono in cui fu lasciata la filosofia della natura ebbe verosimilmente origine non tanto dalla necessità, in cui quelle ricerche mettevano il soggetto, di procurarsi una massa di cognizioni estranee alla coltura più propriamente filosofica, quanto da qualche oscurità ed incertezza che forse presso alcuni rimase intorno al rapporto fra la considerazione speculativa della natura, procedente dal concetto, e le particolari scienze naturali, che si vantano di non aver altra base che l'esperienza; oscurità ed incertezza che non mancarono di tramutarsi, presso gli avversari della scuola, nella recisa negazione di ogni valore della dialettica fuor del campo del pensiero puro. A guardarvi in fondo, il problema di come possano convivere la filosofia della natura e la fisica empirica non era veramente altro che il problema di come possano trovarsi accanto, *nell'esistenza*, la ragione e l'intelletto, che son le attività, quella della prima, e questo della seconda. Poichè nondimeno parve che si avesse qui un problema di difficile soluzione, mi si perdonerà se metto di nuovo sotto gli occhi del lettore un passo di Michelet, dove il rapporto in questione è delineato con tutta quella precisione e quella chiarezza che in simile argomento si posson desiderare. Dopo aver parlato di quel “ senso della natura „, che in ogni fenomeno sa cogliere il “ fenomeno primitivo „, il fenomeno nella sua configurazione più pura e più semplice, Michelet continua: “ Se ora questa idea, la natura della cosa, venga trovata in un fenomeno non già inconsciamente e quasi per un oscuro istinto, ma seguendo la via precisa del pensiero che si muove ed avanza dialetticamente, avremo il metodo hegeliano, che sviluppa dall'idea logica l'idea dello spazio, del tempo, del moto, della materia, ecc. Benchè queste idee non vengan trovate senza che il filosofo abbia avuto in precedenza l'esperienza di quelle cose, pure esse sono affatto indipendenti da tale espe-

rienza, nè in alcun modo condizionate dal suo contenuto. Giacchè, propriamente parlando, la filosofia non deduce già immediatamente le forme naturali come tali, ma solo certi rapporti di pensiero che convengono alla natura, per i quali cerca poi le corrispondenti intuizioni nella cerchia dei fenomeni naturali. Se ora, nell'assolvere questo secondo còmpito aposterioristico, essa mette in primo luogo lo spazio, ciò avviene perchè l'idea della Natura, sorta dallo sviluppo logico, corrisponde purissimamente, nella sua forma più semplice, a quell'intuizione che noi chiamiamo spazio, senza che nella deduzione aprioristica si fosse già saputo che era l'idea dello spazio quella che doveva venir fuori. Lo stesso *riconoscimento* dei nostri concetti nelle intuizioni si ripete poi quando dall'idea dello spazio noi passiamo alla seconda idea naturale, che corrisponde al tempo, e così via. Qui, dunque, non si può più dire che l'idea sia presa dalla intuizione, perchè se all'idea dello spazio la deduzione avesse fatto tener dietro subito una determinazione di pensiero corrispondente, supponiamo, all'intuizione del moto, oppure a quella della pianta, il filosofo, nella serie delle forme naturali, avrebbe messo immediatamente dopo lo spazio questa, e non il tempo. È certo che, prima di accingersi, in generale, a questa sorta di disquisizioni metafisiche, il filosofo avrà sottoposti i fenomeni naturali a un esame preliminare, affin di valutare la loro maggiore o minor dignità e sviluppo. Ma se il tempo abbia a star prima dello spazio o viceversa, e, in generale, quale ordine sia da stabilire, non potrà risultare che dallo sviluppo dialettico delle idee stesse, poichè nessuno vorrà affermare che sia stata posta dalla natura anche la serie graduale delle forme, quando queste forme, invece, si trovano nella natura tutte insieme in una volta „ (HEGEL's *Vorlesungen über die Naturphilosophie,* II. Aufl., Vorrede des Herausgebers, p. XIII).

Questa pagina di Michelet è degna, credo, di esser riletta e coscienziosamente ponderata da quanti hanno supposto che la filosofia della natura volesse essere una costruzione a priori *dei dati empirici,* da sostituirsi alle particolari scienze naturali. In essa è mostrato che quello con cui la filosofia ha da fare, quando prende a suo oggetto la Natura, è sempre l'Idea. Il concetto non può infatti dedurre altro che sè stesso; nel che non sta già per il concetto un limite (nel senso kantiano), ma

anzi la sua infinità, giacchè, mettendo in evidenza la necessità della Natura, il concetto ha dedotto una volta per sempre, al termine della logica, la forma del suo esser altro, del suo presentarsi a sè come un dato sensibile, onde in cotesto esser altro esso si riferisce soltanto a sè, al di là del suo limite ritrova ancora sè stesso. Tocca piuttosto alla scienza empirica, quando creda di potersi affermare *contro* la filosofia della natura, a fornir la prova che quelle determinazioni ch'essa ottiene dall'analisi del concreto, le leggi, le forze, i generi, siano altra cosa che semplici determinazioni di pensiero, nelle quali perciò il pensiero *che si pensa*, ossia la filosofia, è per così dire in casa propria. Giacchè la scienza empirica non ha nulla di falso in sè stessa, in quanto, elaborando il dato dei sensi, giunge a quelle determinazioni, ma è falsa solo nel suo atteggiamento polemico contro la speculazione. Mentre costituisce infatti una posizione di pensiero superiore a quella della vecchia metafisica intellettuale, cotesto atteggiamento polemico contro una forma di conoscenza con cui il suo còmpito proprio non ha nulla che fare, la rabbassa appunto a metafisica intellettuale. La filosofia non respinge allora gli attacchi della scienza empirica, ma della cattiva metafisica in cui questa si è inconsciamente trasformata. Sottoponendo alla critica le categorie della riflessione delle quali la scienza empirica si serve solo perchè non ne conosce altre (e anche perchè è costituita come scienza empirica appunto per l'uso esclusivo che fa di quelle), la filosofia non dura invero molta fatica a sbarazzarsi di quelle chimere che son le leggi come contrapposte ai fenomeni, le forze come contrapposte alle loro estrinsecazioni, i generi come contrapposti alle specie e agl'individui e via dicendo. Nè è da credere ch'essa faccia così un lavoro inutile. Se il còmpito della scienza, nella più larga accezione di questa parola, è di far risaltare la necessità dell'oggetto, ossia di fornire la dimostrazione *quare*, è facile vedere che questo còmpito, che la scienza empirica non fa che *porre*, è *adempiuto* soltanto dalla filosofia della natura. Un esempio chiarirà meglio la cosa. La meccanica matematico-empirica ha trovato che nella caduta dei corpi gli spazi percorsi stanno fra loro come i quadrati dei tempi. Essa si ferma però alla semplice *constatazione* di questo rapporto, che come così contrapposto, nella sua astratta *universalità*, ad ogni *singolo* fenomeno

di caduta, è la *legge* del fenomeno stesso. Ma il rapporto semplicemente *scoperto* o *constatato* è ancora un rapporto *accidentale*. Certo, anche la scienza matematico-empirica *dimostra* le leggi (se no, non sarebbe addirittura scienza); ma le dimostra soltanto per mezzo di altre leggi più generali, quasi risalendo una catena di cui ogni legge, man mano più generale, fosse un anello, ma senza che si arrivasse però mai al chiodo cui il primo anello è attaccato. Quindi è che le sue dimostrazioni convincono soltanto *noi* (come argomenti semplicemente *persuasivi*) che la cosa sta così, che la legge è quella, ma non giungono mai a necessitar la legge ad esser soltanto quella e non un'altra. E così non mancò chi venne espressamente a dire, per non uscir dall'esempio, che gli spazi percorsi potrebbero star fra loro anche come i cubi o i biquadrati dei tempi, ma che, una tal sorta di moto non trovandosi nella natura, bisogna fermarsi a quella che si è potuta osservare. A questo modo, in ultima analisi, il contenuto della legge, quel determinato rapporto degli spazi ai tempi, resta oggetto, per parte dell'ordinaria meccanica, di una semplice dimostrazione *quia*; si dimostra che, nella caduta, la legge *è quella*, e niente più. Ora il còmpito della filosofia della natura, per contrapposto alla scienza empirica, è appunto di far vedere non già che la legge è quella (poichè questo ce lo ha già insegnato la scienza empirica), ma *che non può essere assolutamente che quella*, col che viene aggiunta alla dimostrazione *quia* la dimostrazione *quare*, e si compie il conoscere. La via, per raggiunger questo intento, è segnata dalla logica. Poichè la logica mostra che la legge non è se non l'altra faccia del fenomeno, o meglio, che fenomeno e legge non sono che le due faccie o i due lati in cui, per la riflessione, si sdoppia *uno stesso* essere, la filosofia della natura, affin di mostrare che la legge della caduta non può essere che quella, non ha che da mettere in evidenza come il fenomeno della caduta non sia che la maniera (non l'unica, ma la più generale) nella quale appare naturalmente il moto accelerato, mentre il moto accelerato, a sua volta, non è che la maniera in cui appare il rapporto fra *lo* spazio e *il* tempo, cioè fra lo spazio e il tempo considerati ciascuno *nel suo concetto*. Così la legge e il fenomeno, per la considerazione speculativa, cessano di esser contrapposti l'uno all'altro, com'erano per la considerazione intellettuale empirica,

e si compenetrano e si fondono insieme, diventando il *concetto* della cosa. Quello che si pensa, quando si pensa la proporzionalità degli spazi percorsi ai quadrati dei tempi, è veramente il moto accelerato, e quello che si pensa, quando si pensa il moto accelerato, è veramente (nella sua forma generale) la caduta. Così si è arrivati al chiodo cui è attaccato il primo anello della catena, e che è semplicemente il pensiero; e il pensiero, a sua volta, si è affrancato da quella soggezione in cui stava di fronte alla natura quando ne scopriva, soltanto ne *scopriva*, le leggi. Egli sa, ora, che il legislatore, che ha dato alla natura quelle leggi, è lui, il pensiero stesso.

Aggiungerò questo, che anche la scienza empirica fa, in certo modo, della filosofia della natura senza saperlo (coll'aggravante, in confronto di M. Jourdain, che lui almeno era ingenuo, mentre la scienza empirica si ostina troppo spesso a credere e a gridar forte che non ha attaccata addosso questa pece della metafisica). Si apra un trattato qualunque, p. es., di fisica. La prima cosa che si vede è che la materia vi è disposta in un certo ordine, passandosi, di solito, dalle classi dei fenomeni più semplici alle classi dei fenomeni più complessi o che presuppongono, pel loro studio, la conoscenza dei primi. Ora di dov'è tolto, torneremo a dire, quest'ordine, dal momento che i fenomeni la natura li presenta tutti insieme alla rinfusa? È dunque vero che " la scienza empirica contien più pensiero ch'essa non creda, cosicchè è migliore, nel fatto, di quel che si figura di essere, oppur peggiore, se il contener pensiero, per cotesta scienza, è un vizio ".

I.

Tutti i rapporti logici venendo ad essere esauriti là dove lo sviluppo logico fa capo nella totalità delle categorie, ossia nell'Idea, l'assoluta irrelatività di questa, ossia l'assoluta impossibilità, per essa, di passare in altro, è, in maniera affatto immediata, il suo puro riferirsi a sè, per cui essa stessa sorge dinanzi a sè od appare a sè come suo altro. L'Idea, che appare così a sè stessa come altro che l'Idea, è la Natura.

L'afferrarsi del logico come logico, cioè il pensarsi l'Idea come Idea (giacchè ciò che pensa l'Idea è soltanto l'Idea, e non semplicemente *noi*), è il suo lasciarsi andare nella certezza di riprendersi, il suo affrancarsi da sè sapendo di rimaner soggetta a sè. Anticipando una categoria spirituale, si può dire che l'eguaglianza Io = Io pone immediatamente l'altra: Io = Non io. La prima eguaglianza è quella della Logica, dove l'Io discorre soltanto con sè stesso; la seconda è quella della Natura, dove l'Io discorre coll'Io come col Non io.

La Natura sta verso l'Idea in quello stesso rapporto in cui stava l'Essenza verso l'Essere, salvo che quello era un rapporto puramente logico, cioè un rapporto interno del pensiero con sè stesso, mentre questo invece è rapporto logico e insieme alogico, essendo il rapporto che ha verso il pensiero quello che, immediatamente, è pensato come altro che pensiero. Perciò il passaggio dalla Logica alla Natura è il *rompersi* della Logica, e quello in cui si passa, la Natura, è la Logica come rotta in sè o diffranta, l'Idea come pluralità d'idee o specie naturali. — Cotesto passaggio sembra necessariamente impossibile da quel punto di vista secondo il quale siamo soltanto *noi* che pensiamo l'Idea, e non già l'Idea stessa che si pensa per mezzo del pensiero che noi abbiamo dell'Idea. La scienza della Logica non è allora che un formalismo, e l'Idea è l'oggetto intorno al quale questo formalismo si dà da fare senza poter mai giungere ad alcun resultato. In questo caso la *nostra* ricerca del vero, per quanto vana, vale ancora meglio di quel vero che si suppone essere il suo scopo irraggiungibile. La correzione del difetto che è in quel punto di vista si può senz'altro ottenere dalla considerazione che l'Idea, comprendendo in sè come suo momento il Conoscere, comprende in sè anche quel *nostro* conoscer l'Idea, e quindi anche la conoscenza che l'Idea ha di sè stessa come esterna a sè, che è appunto la conoscenza della Natura. — La Natura è propriamente la dualità (la Diade), non l'apparire a sè come Dualità. Quando apparirà a sè come tale, questo apparire sarà il suo cessare di esser Natura e il suo farsi Spirito (Triade). I due sono: da un lato, l'Idea in quanto appare, come altro, all'Idea; dall'altro lato, l'Idea come quello cui appare un altro, che non è che essa stessa.

II.

L'esteriorità secondo la quale l'Idea appare a sè come il suo proprio altro, cioè come Natura, è, nella sua astrattissima universalità e assoluta indiscriminatezza, l'esteriorità come semplicemente tale, ossia l'esteriorità come riferentesi soltanto a sè stessa, lo Spazio, e anzitutto la semplice Estensione.

Che lo spazio sia l'astratta universalità dell'esteriorità, ciò non vuol dire altro se non che appunto esso è " una necessaria rappresentazione *a priori*, che sta in fondo a tutte le intuizioni esterne „ e che quindi esso va riguardato come " la condizione della possibilità delle appariscenze, e non come una determinazione dipendente da queste „ (Kant).

III.

L'estensione non è l'esteriorità di altro rispetto ad altro, ma è il rispetto dell'esteriorità a sè stessa, il suo puro continuarsi con sè. Questo continuarsi dell'esteriorità con sè stessa, in quanto è esso stesso un processo esterno, spaziale, è il Punto.

Fra lo spazio e lo spazio non si frappone altro che lo spazio. Perciò lo spazio è assolutamente continuo. Questa continuità non è però lo spazio (in tal caso questo non potrebb'esser *conosciuto* come continuo). Essa è anzi la sua negazione, il punto. Ma, come negazione dello spazio, il punto è esso stesso spaziale, ossia cade nello spazio. Ed è un processo, una mediazione, non essendo soltanto identità, ma identità di dati come diversi (due spazj). — Non è da confondere il punto colla continuità come tale. La continuità come tale è una determinazione puramente logica. Il punto invece è una determinazione fisica (cioè pertinente alla filosofia della Natura), perchè è, non già la semplice continuità, ma l'esteriorità (ossia la spazialità) della continuità. — Nella relazione fra i concetti dello spazio e del punto apparisce per la prima volta quella dualità nella quale consiste la Natura, cioè la reciproca esteriorità o indifferenza in cui stanno fra loro le determinazioni naturali antitetiche. Nella Logica è esatto che l'Essere è il Non essere (appunto perchè sono *assolutamente* diversi). Nella Fisica invece non sarebbe esatta la proposizione: Lo spazio è il punto, perchè il punto come negazione *naturale* (e non soltanto *logica*) dello spazio, è anch'esso spaziale, epperò non essendo *assolutamente* diverso dallo Spazio, non è nemmeno *assolutamente* identico con esso, com'era il Non essere, nella Logica, rispetto all'Essere. In generale, ogni determinazione naturale non *è*, a rigor di termini, la sua negazione (la determinazione opposta), ma soltanto la *comprende* in sè, lasciandola quindi anche sussistere in una indipendenza relativa. Così, qui, lo spazio non è il punto, ma *comprende* il punto.

IV.

Il punto è la determinazione dello spazio solo in quanto è la sua negazione. Il punto nega dunque lo spazio, ossia pone lo spazio fuori di sè. Ma siccome lo spazio comprende il punto, così il punto, nel negare lo spazio, nega il punto. Ora il punto che nega o pone fuori di sè il punto è la Figura, ed anzitutto la Linea.

V.

La generazione della linea è la negazione che il punto fa di sè stesso, ed il suo essere è la negazione di un punto per mezzo di *un altro* punto. La linea è l'universalità della figura.

La linea non *consta* di punti, ma *risulta* dal punto, ossia è il prodotto dell'attività negativa o repulsiva che questo esercita rispetto a sè stesso. Il punto, negandosi o respingendosi, si pone come due punti uno fuori dell'altro, e questi sono le estremità della linea, i due soli punti che, secondo il linguaggio aristotelico, siano *in atto* nella linea, mentre di tutti gli altri che si potrebber segnare fra quei due la linea (che come tale dev'esser terminata da due punti) non è che la semplice *potenza*. Perciò la linea è divisibile all'infinito; ma in quanto *esista* (cioè come linea attuale e non come semplice potenza della linea) non è mai infinita. — Come semplice universalità della figura, cioè dello spazio reale o dello spazio che risorge da quella sua negazione che era il punto, la linea è la *prima dimensione* dello spazio (il suo primo effettivo riferirsi a sè o misurarsi), cioè la lunghezza, o, semplicemente, la Distanza. Quando si definisce la linea retta come quella che segna la distanza più breve fra due punti dati, ciò non viene a dir altro se non ch'essa è, puramente e semplicemente, la *distanza* fra questi due punti. La definizione è difettosa in quanto lascia credere che fra due punti vi possano essere più distanze (più lunghe e più brevi), mentre nel fatto non ve n'è nè ve ne può essere che una sola, cioè la distanza come tale, che è appunto la linea retta, la linea senz'altra determinazione che di esser linea. Ma la geometria, come scienza intellettuale, non possiede il *concetto* della linea. Quindi per essa la linea retta, che è questo concetto come reale e sensibile, non è se non una linea fra le tante linee che si posson dare, e per distinguerla dalle altre bisogna ch'essa ricorra

a una determinazione quantitativa, qual'è quella della *massima* brevità, determinazione che intanto non ha nulla che fare con quello che la linea è *come tale*.

VI.

Lo spazio si nega nel punto. Il punto si nega nella linea. Quindi la linea è lo spazio risorto dalla negazione della sua negazione. Perciò la linea si deve mostrare *come* le due negazioni dalle quali essa risulta. Ora la prima negazione dalla quale la linea risulta è la negazione del punto. Come negazione del punto la linea è dunque il Piano.

Due punti son la determinazione della linea. Un terzo punto come negato dalla linea, cioè come posto fuori di essa, è la determinazione del piano. — Come linea retta non vuol dir altro che linea in generale, cioè concetto della linea, così Superficie piana o semplicemente Piano, non vuol dir altro che superficie in generale. Sono le determinazioni universali che nell'ordine della Natura esistono esse stesse come particolari accanto alle (altre) determinazioni particolari. Così (malgrado l'osservazione fatta di sopra) non ha torto la geometria di riguardare la linea retta come una specie particolare di linea e il Piano come una specie particolare di superficie. Quello che la speculazione ha da aggiungere alla considerazione geometrica, o intellettuale, è che coteste " specie particolari „ sono l'universalità stessa sia della linea sia della superficie, universalità che in quanto esiste esteriormente (ossia è presa come *naturale*) è necessariamente anch'essa una particolarità. — Se la linea era la *prima dimensione* dello spazio reale, cioè la dimensione come semplicemente tale o come semplice distanza o lunghezza, nel piano è sorta la *seconda* dimensione, la linea della linea o la lunghezza della lunghezza, vale a dire la Larghezza. Quindi Larghezza è: due linee (o due lunghezze) che si riferiscono l'una all'altra (s'intersecano, in maniera affatto universale, ossia senza dar luogo ad alcuna differenza, epperò " ad angolo retto „, in un punto). La lunghezza è l'universalità del concetto, alla cui stregua si riportano perciò tutte le altre particolarità (tanto la larghezza come anche, poi, la profondità, si misurano con misure di lunghezza, ossia son lunghezze). La larghezza invece è il concetto come particolarizzato, che presuppone la sua universalità, la lunghezza, ed è questa universalità come sdoppiata, cioè come due lunghezze, la lunghezza propriamente detta e la larghezza.

VII.

Come negazione del punto la linea era il piano. Ma in quanto appariva come negazione del punto, la linea appariva soltanto nella forma della *prima* di quelle due negazioni dalle quali essa (cioè lo spazio reale o la figura) risulta. L'altra negazione consiste in ciò che il punto, negando il quale la linea veniva ad apparire come piano, è esso stesso una negazione. Quindi il piano è veramente esso stesso la negazione di una negazione, ossia la negazione del punto, che come così negato, va a cadere fuori del piano. Questo quarto punto è la determinazione di quello che sorge da ciò che la linea si mostra come la seconda delle negazioni dalle quali risulta, vale a dire come negazione della negazione. Cotesto è il solido.

Quattro punti (ossia il sopravvenire del quarto punto) son la determinazione del solido. Linea, piano, solido, sono i gradi di sviluppo del concetto della figura, cioè del negarsi del punto o del restaurarsi dello spazio. Il concetto della figura appare per la prima volta, come concetto del tutto astratto, nella linea. Ma la linea, come negazione di quello che è già di per sè una negazione (il punto), non è essa stessa reale se non in quanto è per un lato la sua astratta universalità, cioè negazione in generale, e, per l'altro, questa specifica negazione che è la negazione *della negazione*. Ora come negazione in generale essa è il suo semplice respingersi, o uscir da sè, vale a dire il piano; come negazione poi *della negazione*, essa è il negarsi di cotesto suo uscir da sè o farsi piano, vale a dire che è la negazione che il piano fa di sè stesso, cioè il solido. Il solido è perciò la figura compiutamente sviluppata, e la nuova dimensione che vi appare, la Profondità, è anche l'ultima, essendo la dimensione perfetta, la tridimensionalità stessa o la realizzazione del concetto dello spazio. Così la ragione per la quale lo spazio non può avere che tre dimensioni (s'intende lo spazio sensibile, giacchè le finzioni matematiche non entrano nella filosofia della natura), ragione nella cui ricerca si occupò già Aristotele, è nel concetto stesso dello spazio concreto, ossia della figura, che essendo una dualità *naturale*, è *prima* la dualità come genere (epperò come unità: linea), e *poi* la dualità come le due specie (il piano e il solido), mentre il genere restando così da sè, come fuori delle specie, è dal canto suo un'altra specie, compiendosi il numero definitivo di tre. (La difficoltà invece, nella maniera or-

dinaria di considerare la cosa, nasce dal trascurare le differenze essenziali delle tre dimensioni, che si riducon tutte a lunghezza, dimenticando che la larghezza presuppone come diversa da sè la lunghezza ed è perciò una dimensione essenzialmente superficiale o piana, e così pure la profondità presuppone la larghezza e quindi anche la lunghezza, tanto da non poter essere se non la dimensione propria del solido).

VIII.

La figura presenta il processo dello spazio col punto, e in generale col suo limite, soltanto come finito, cioè come avente per resultato soltanto *un certo* spazio (distanza, superficie o volume), nel quale quei due momenti non si trovano uniti che per un lato, mentre per l'altro restano ancora contrapposti come limite e spazio limitato. Il concetto dello spazio non va, nel suo sviluppo, oltre il concetto della figura, e da questo è inseparabile quell'opposizione. Perciò di ogni distanza, superficie o volume si può sempre dare una distanza, superficie o volume sia maggiore, sia minore, vale a dire che lo spazio non è mai nè *la totalità dello spazio* (la distanza, superficie o volume infiniti), nè *la sua totale negazione* (il punto), ma tramezza soltanto, come figura, fra l'una e l'altro. Questa impotenza dello spazio a presentarsi come una realtà adeguata al suo concetto, è la sua contraddizione o il suo difetto, difetto che vien tolto solo in un concetto *nuovo*, ossia in un'altra forma dell'Idea diversa da quella secondo cui essa è la sua propria immediata esteriorità. Quest'*altra* forma è il Tempo.

Lo spazio *dev'essere* infinito, ma non *è* infinito che per mezzo del tempo. Vale a dire che, come spazio, è sempre finito, e che l'infinità dello spazio è soltanto il tempo. Solo in questo infatti si ha come reale quella compiuta compenetrazione o intima unione del limite col limitato, che nel crescere o diminuire della figura, invece (la figura non si può considerar qui che quantitativamente), è una meta che si allontana sempre a mano a mano che si fa più prossima ad esser raggiunta. Le massime distanze di cui parla l'astronomia non offrono al pensiero nulla di più elevato di quel che gli viene già offerto nelle ristrette dimensioni di questa camera. La distanza fra la Terra e quelle ultime nebulose che Herschel scorgeva col suo telescopio di quaranta piedi, e la cui luce egli calcolava dovesse impiegare circa due milioni d'anni per giungere

a noi, è anch'essa una distanza *finita* nè più nè meno di quella che è dalla mia scrivania alla finestra. La finitezza, essendo qui la determinazione fondamentale, non si cancella mai. Lo spazio non è mai l'infinità dello spazio, ma è sempre uno spazio o una distanza finita. Infinito è soltanto il concetto, ma il concetto dello spazio non è lo spazio, ma il tempo. Così ogni forma in cui è l'Idea come in generale esterna a sè, ossia come Natura, accenna ad *un'altra* forma, nella quale è tolta la particolare finitezza, o il particolare *difetto*, della prima. Qui, la finitezza dello spazio nascendo da ciò che, come *astratta* estrinsecità reciproca delle determinazioni del concetto (o dell'Idea rispetto a sè), esso non giunge mai a superare l'opposizione fra la sua universalità (cioè fra sè stesso come estensione) e la sua particolarità (lo spazio come punto), la forma in cui cotesta contraddizione si risolve è quella in cui i due opposti (il limitato e il limite) sono immediatamente identici. Il significato della deduzione non è già che il tempo venga derivato dallo spazio *in maniera esteriore*, ma che l'incapacità dello spazio a soddisfare all'esigenza del concetto accenna ad un'altra forma nella quale tale esigenza si deve trovar soddisfatta; e che *noi* allora, cercando fra le forme naturali, troviamo che questa forma è il tempo. L'osservazione va estesa a tutta quanta la filosofia della natura, che non è quindi ciò che comunemente s'intende per una costruzione *a priori* dell'universo sensibile. Il concetto non costruisce che sè stesso, e soltanto *noi* riconosciamo nelle forme naturali le determinazioni del concetto, ordinando quelle secondo queste. La scienza empirica non opera diversamente; se non che, non essendo guidata dal concetto (cioè dalla logica), lavora a caso.

IX.

Il tempo è l'esser per sè della negatività dello spazio, il limite di questo, che, per esser divenuto identico, mediante il processo della figura, allo spazio ch'esso limitava, si è esso stesso, cotesto limite, affrancato da quella limitazione sua secondo la quale non era che limite *di altro*, cioè dello spazio. In cotesta limitazione esso era in generale il punto. Come limite non più di altro, ma di sè stesso esso è ora l'unità del limitante e del limitato, epperò la scomparsa del limite (come puramente esterno) o, che è lo stesso, il suo riferirsi puramente a sè, la sua interiorità o libertà. *Il tempo è il punto libero.*

Dietro il concetto accennato qui sopra si può vedere come lo spazio non fosse propriamente altro, in sè, che tempo esplicato, mentre che il

tempo, ora, si mostra come lo spazio implicato. Infatti lo spazio era il cader l'uno fuori dell'altro il limite e il limitato, dei quali il tempo è invece l'identità. Questo rapporto della esplicazione alla implicazione verrà poi a manifestarsi in maniera sensibile nel moto accelerato (v. art. XVIII). — L'appetito divoratore di Cronos è il mito in cui si rivela l'essenza del tempo, negativa dell'esteriorità, epperò distruggitrice di ogni cosa che *esista*. Soltanto l'Idea non soccombe al tempo. Come virtualità che produce da sè tanto la sua esteriorità quanto la sua interiorità, l'Idea sorvola sull'infinità dello spazio, e al tempo sopravvive come la sua stessa essenza o il suo eterno concetto.

X.

Nella sua universalità il tempo non è se non cotesta *libertà*, o cotest'autonomia, per cui la negazione, che nello spazio appariva come negazione d'altro, qui appare come negazione di sè stessa, per modo che ciò che là *rimanera negato*, l'estrinsecità reciproca, qui invece, negandosi come negato, si *pone*. Questo porsi, cioè il *farsi*, e non più soltanto l'*essere*, reciprocamente estrinseco, è la semplice universalità, o il semplice concetto del tempo, la Successione.

Val la pena, a proposito di questo primo momento nello sviluppo del nuovo concetto, di riprendere in esame la differenza fondamentale fra il tempo e lo spazio, alla quale non fu dato di sopra che un semplice accenno. Spazio e tempo sono, per la coscienza ordinaria, due rappresentazioni tanto diverse fra loro, tanto disparate, da far sembrare quasi ridicoli gli sforzi che si facciano per trovare fra i due una qualche differenza. Certo non v'è pericolo, per la coscienza ordinaria, di confonder fra loro quelle rappresentazioni. Cotesto però non basta per il pensiero. Il pensiero vuol sapere *qual'è* la differenza fra quelle cose che nell'ordinaria coscienza son date appunto come diverse. E quando si tratti di dover *specificare* in che consista la differenza fra lo spazio e il tempo, allora comincia l'imbarazzo. A toglier questo non servirebbe il dire che si tratta qui, appunto, di due concetti tanto disparati che non è possibile assegnar fra loro alcuna particolare differenza, perchè quando cotesto non debba significare che spazio e tempo sono affatto identici (e la coscienza ordinaria sa che non sono), significherà che non corre tra loro alcun rapporto, mentre invece il loro rapporto ognuno sa che l'abbiamo presente nella velocità. Dunque spazio e tempo non sono nè puramente identici, nè puramente diversi, ma identici e diversi in-

sieme. Cerchiamo di determinar meglio in che consiste la loro differenza e la loro identità. E cominciamo da quest'ultima. Si è veduto che lo spazio era l'estrinsecità reciproca, l'assoluto (ideale) esser fuori di sè. Ora anche il tempo è questa estrinsecità. Infatti, ogni parte del tempo, come ogni parte dello spazio, è fuori di ogni altra, e tutte non sono che lo stesso, sia tempo, sia spazio. In questo dunque coincidono lo spazio e il tempo, che tutti e due son l'essere a sè esterno. Stabilita così l'identità, rimane da trovare la differenza. Ora se noi analizziamo ciò che si racchiude nell'ordinaria rappresentazione dello spazio, vedremo che quello per cui lo spazio si distingue dal tempo, è il *coesistere*, la *simultaneità*, dei reciprocamente estrinseci, ossia delle diverse parti dello spazio. Queste non solo son fuori le une delle altre, ma vi *rimangono*. Lo spazio, di per sè, è immobile, *sta*. Portando invece la nostra attenzione sul tempo, tutti abbiam l'abitudine di dire che *corre*. Ora il *correre* del tempo non è altro che il sostituirsi (in sè nè veloce, nè tardo, come osservò già Aristotele, giacchè velocità e tardità si misurano appunto col tempo) delle sue parti l'una all'altra, vale a dire il loro *succedersi*. E questo *succedersi* è il *non rimanere* le parti del tempo l'una fuori dell'altra, anzi il loro fondersi assieme, — la differenza per cui il tempo si contraddistingue di fronte allo spazio. Così pure quando consideriamo i tre momenti del concetto, l'universalità, la particolarità, e l'individualità, questi, nello spazio, cioè come estensione, punto e figura, stanno fra loro come separati, mentre la loro unità, il loro nesso o rapporto (cioè il concetto generale dello spazio) cade soltanto *in noi*, nella considerazione nostra, e non già *nello spazio*. Così, p. es., quando diciamo che il punto, negandosi, si fa linea, non intendiamo affatto dire che sia il punto stesso come esistente fuori di noi, nello spazio, quello che col suo negarsi o uscir da sè (o " muoversi „ come dicevano già gli antichi geometri) generi la linea. Il punto non esce da sè, nè si muove affatto, nè genera nulla. Esso sta fermo. Quello dunque che intendiamo dire è semplicemente che *noi* non possiamo conoscer la linea altro che come derivato del punto, e che solo perciò, solo per questa esigenza del conoscere *nostro*, noi supponiamo, o diciamo figuratamente, che il punto esca da sè e generi la linea. Ma riguardo al tempo non v'è alcun bisogno di questa restrizione. Quello che per lo svolgimento del concetto dello spazio era supplito da noi, il tempo lo fa da sè. Quindi il nesso, l'unità e l'universalità di quello che si deve svolgere, qui, non è più soltanto in noi, ma nell'oggetto stesso che consideriamo, cioè nel tempo. Così potremo dire che il tempo è l'*oggettivarsi* di quella che prima (ossia rispetto allo spazio) era la deduzione soltanto nostra, o *soggettiva*, dei momenti del concetto uno dall'altro. Nè v'è da preoccuparsi dell'affermazione appunto opposta di Hegel (*Encykl.*, § 258, Anm.)

che quando allo spazio e al tempo si dovessero applicare le determinazioni dell'oggettività e dell'(astratta) soggettività, quello sarebbe la prima e questo la seconda, giacchè Hegel ha in vista, in quel luogo, il processo *come resultato*, e noi invece il resultato *come processo*, cosicchè nel fatto la determinazione a cui si giunge si deve presentar capovolta. Perciò anche, dal punto nostro di vista, dicemmo che il tempo è il punto libero, non intendendo dir altro se non che il tempo è il concetto *in quanto si svolge da sè* (nei suoi momenti) *in quella stessa maniera in cui prima lo svolgevamo soltanto noi*. Questa è l'*autonomia* dello svolgimento che abbiamo messa come base e ora ci servirà di guida nell'analisi o svolgimento che a nostra volta, *soggettivamente*, rifacciamo qui del concetto del tempo. — Perchè la differenza fra lo spazio e il tempo è quella dall'*essere* reciprocamente estrinseco al *farsi* tale, di qui si vede che il nostro passaggio dalla considerazione del primo a quella del secondo è un passaggio dalla considerazione della esteriorità dell'Idea rispetto a sè alla considerazione della sua intimità con sè (entrando così nel punto di vista di Hegel accennato qui sopra). Infatti il *farsi* esterno, come processo, presuppone l'*essere* interno, a quello stesso modo che il *farsi* interno (il passare alla temporalità) presuppone l'*essere* esterno (lo spazio). Quello che è in giuoco, in queste due prime categorie naturali, sono insomma le due categorie logiche dell'Essere e del Divenire, cioè la *calma* e l'*inquietudine*. Il tempo è l'inquietudine dello spazio, e lo spazio è la calma del tempo, il tempo *paralizzato*, indifferente a sè stesso. Così anche se lo spazio era la forma in cui l'Idea appariva a sè *come il suo altro*, il tempo è la forma in cui, come cotesto altro, essa *appare a sè*. Tutte queste determinazioni voglion dire assolutamente lo stesso, e non le ho messe qui che per lumeggiar meglio il concetto fissato già negli articoli. — Il tempo è la prima affermazione della libertà nella Natura, il primo passo che questa dà nel suo ritorno all'Idea, o nel suo farsi Spirito. Come essere reciprocamente estrinseco, la Natura è determinazione d'altro per opera d'altro. In questa determinazione *ab extra* sta la necessità delle cose naturali, la finitezza, il dolore. Ma in quanto la Natura stessa nega l'estrinsecità reciproca, ossia passa dall'essere spaziale all'esser temporale, questa negazione del negativo è la sua prima ancora astrattissima liberazione, il suo primo volgersi dall'esser determinata da altro al determinarsi da sè.

XI.

Dire che il tempo è lo svolgimento *autonomo* del concetto è dire ch'esso contiene in sè stesso tanto il principio quanto il

fine, o resultato, di cotesto svolgimento. Fissato astrattamente come quel principio il tempo è l'Istante.

Come negazione *nello* spazio, e non *dello* spazio, è soltanto in sè, ossia per noi, che il punto si pone come il risorgere dello spazio dalla sua negazione, cioè come figura. L'istante invece, essendo negazione non soltanto *nel* tempo, ma addirittura *del* tempo (cioè non posta semplicemente dal concetto soggettivo, ma dal concetto stesso come reale, oggettivo) passa a negarsi *di per sè*, indipendentemente dalla considerazione nostra. Così rispetto al punto, che è l'istante paralizzato o morto, l'istante potrebbe convenientemente chiamarsi il punto vivente, in quanto entra da sè nel suo sviluppo. La differenza fra il concetto generale del tempo e quello dello spazio appare in modo chiarissimo in questa differenza fra i due indivisibili, temporale e spaziale, dei quali l'uno è fisso, mentre l'altro è la mobilità stessa.

XII.

L'istante, come principio libero o immanente dello svolgimento del concetto che è nella forma del tempo, è essenzialmente il resultato dello svolgimento, cioè il tempo svolto nelle sue dimensioni, o la Durata.

L'istante è essenzialmente *un altro* istante, e così *due* istanti. Essenzialmente, cioè per il suo stesso *esser pensato*. Infatti l'istante in cui l'istante è pensato non è più lo stesso istante che è pensato, ma è un altro. Mentre veniva ad esser pensato, l'istante è fuggito ed ha lasciato che in suo luogo sorgesse, ossia gli *succedesse*, un altro istante, che non è più quello di prima. Così si è prodotto fra i due istanti un certo tempo, e questo tempo compreso fra due determinati istanti è ciò che si chiama “ spazio di tempo „ o durata. Soltanto questo è il tempo come veramente reale, mentre la semplice successione illimitata e l'istante come tale non sono, a petto di esso, che astrazioni, la materia del tempo e la sua forma astratta. — Negatosi nell'istante, il *succedersi* torna a sè, ossia si riproduce, come *durare*. Le cose naturali non esistono se non in quanto, essendo delle figure determinate, *durano* poi come queste figure, ossia sono anche delle determinate durate. Quindi se Cronos, come il tempo in generale, è il divoratore delle cose, noi vediamo ora che le cose ch'egli divora sono quelle appunto in cui si è riprodotto, cioè i suoi figli. L'unico di questi che scampa, e ne rovescia il trono, è il concetto, colui che regna sopra gli Dei e sopra gli uomini, Zeus.

XIII.

Le determinazioni della durata sono i gradi di sviluppo del concetto del tempo, la successione, l'istante e la durata stessa, quali risultano dalla negazione di quella loro unità e universalità che è l'istante. Questo, negandosi, ossia sviluppandosi come durata, si pone: 1° come istante negato, — il Passato; 2° come istante che nega o, appunto, *insta*, — il Futuro; 3° come l'unità di quei due, cioè come il negarsi, *ut sic*, dell'istante, — il Presente. Il rapporto di esteriorità nel quale queste dimensioni temporali, costituenti nel loro insieme lo sviluppo dell'istante, stanno fra loro, è il riaffacciarsi della spazialità dalla sua stessa negazione, un riaffacciarsi il quale non è però esso stesso che istantaneo, poichè le due parti, il Passato e il Futuro, non sono diverse se non in quanto si riferiscono alla loro unità, il Presente, e quindi in quanto, nel loro stesso distinguersi, si confondono.

La durata è veramente uno “ *spazio* di tempo „, cioè l'estensione dell'inesteso. Il tempo non è intuito che come estrinsecità o indifferenza reciproca del Prima, del Poi, e del Mentre. Però questa estrinsecità o indifferenza contraddice al concetto del tempo, consistente in ciò che le determinazioni, succedendosi, si pongono come sostanzialmente identiche. Quindi il tempo è pensato come la sua propria contraddizione, e solo in quanto è pensato come questa contraddizione è pensato come tempo. — Alle qualitativamente e quantitativamente varie figure dello spazio corrisponde, unica figura del tempo, la durata, le cui differenze son soltanto quantitative (di minore o maggiore lunghezza). Ciò accade perchè alla figura propriamente detta, ossia alla figura spaziale, è necessario il *permanere* delle determinazioni nella loro estrinsecità reciproca, mentre questo è quello che appunto viene a mancare nel tempo, le cui determinazioni, essendo già ciascuna in sè quello che son le altre, si sostituiscono a vicenda e non sono, nella loro verità, altro che questo loro vicendevole sostituirsi. Il passato è stato prima futuro e poi presente prima di esser passato; e il futuro sarà presente e poi passato; e il presente, finalmente, è stato fino ad ora un futuro, ed è già passato intanto che lo considero. Questa incapacità delle dimensioni temporali di tenersi ferme le une contro le altre, rende impossibile la figura vera e propria, come quella che è la *stabilità* dei diversi nella loro diversità.

XIV.

Nella durata si riaffacciava, ma in maniera affatto fugace, cioè come partecipante ancora del carattere generale del tempo, quella reciproca estrinsecità delle determinazioni del concetto, nella quale, come nella semplice forma dell'esser altro in cui l'Idea appare a sè stessa, consisteva, immediatamente, lo spazio. Come stabilmente risorta dalla sua negazione, questa estrinsecità ci dà ora il concetto del Moto quale esplicazione effettiva dello spazio dal tempo, epperò come quella unità di queste due categorie nella quale ciascuna di esse riceve immediatamente la sua determinazione dall'altra. L'Idea, che come spazio non era se non la forma della propria esteriorità, e come tempo la negazione di cotesta forma epperò il suo formale, astratto profondarsi in sè od apparire a sè, è quindi come moto il *soggetto unico* nel quale e per il quale, soltanto, appaiono le due forme della spazialità e della temporalità.

Che il moto sia l'unità dello spazio col tempo vien messo in chiaro anche da talune delle ordinarie definizioni che se ne danno nei trattati di meccanica, p. es., da quella secondo cui " un corpo è in moto, quando esso corpo o le sue parti occupano *successivamente* diversi *luoghi* nello spazio „. Ora come tale unità esso non è che il realizzarsi (lo *stabilirsi*) dello spazio per mezzo di quella negazione sua che, apparsa dapprima in una forma del tutto astratta, cioè come spaziale anch'essa, nel punto, si produsse poi, come un concetto opposto a quello dello spazio, nel tempo. Il moto è dunque lo spazio stesso, non però come tale (cioè non com'era stato considerato da principio), ma come in rapporto al tempo, e precisamente come quello che sorge dalla negazione di questo. Di qui si può vedere quanto sia assurda, non essendovi nel concetto del moto nulla che non fosse già implicitamente contenuto nei concetti dello spazio e del tempo, non dico la ricerca della causa del moto, ma addirittura la supposizione ch'esso abbia, come che sia, una " causa „. Infatti lo spazio e il tempo, lungi dal poter essere senza il moto, non sono anzi se non per questa loro unità negativa che, realizzandosi a spese dell'astrattezza di ciascuno di essi, della opposizione dell'uno contro l'altro, presta loro una realtà concreta in sè come nel loro soggetto. — L'ammirabile definizione aristotelica, secondo la quale il moto è l'atto di ciò che è in potenza in quanto è in potenza, non esprime (almeno in quanto

si riferisce al moto locale, che è il solo di cui ci dobbiamo occupare e che del resto dallo stesso Aristotele vien designato come quello che è presupposto da tutti gli altri) se non che lo spazio, come semplice spazio, non *è* affatto spazio, ma *si fa* tale (cioè diventa spazio determinato, ubicazione, Qui) solo per mezzo del moto. (La semplice potenza del Qui è il Non qui; ma il Non qui è potenza del Qui solo in quanto diventa Qui, e questo divenire è appunto il moto). — Al moto occorrono spazio e tempo; eppure esso non è moto se non come negazione dell'uno e dell'altro, vale a dire in quanto, per suo mezzo, vien *percorsa*, epperò sparisce, la distanza e il tempo *passa*. Anche la coscienza popolare viene a toccare il concetto speculativo della negatività del moto in talune espressioni usuali, come, per es., in quella di " divorare (cioè annullare) la strada „ ecc. — Spazio e tempo non sono fenomeni. Son soltanto le condizioni necessarie di ogni fenomeno, i due lati che in ogni fenomeno si devon presentare, in quanto che dev'essere *per lo meno* spaziale e temporale, vale a dire contenere *per lo meno* in sè lo spazio e il tempo. Ma questo *minimum* che è necessario al fenomeno per poter essere un fenomeno, non è più soltanto semplice condizione dei fenomeni, come lo spazio e il tempo presi separatamente. Contenendo in sè tutto quello che abbisogna a produrre la fenomenicità, l'unità di spazio e di tempo è essa stessa il *primo* fenomeno appunto come questa fenomenicità, vale a dire come *generalità*, pura e semplice, di ogni fenomeno. Ed è il moto. Di qui la facilità grandissima con cui tutti i fenomeni si posson *ridurre* a moto, questo essendo infatti il loro genere; facilità di cui non manca di approfittare la scienza empirica, la quale peraltro dimentica che con cotesta *riduzione*, cioè colla " spiegazione „ di un fenomeno per mezzo di vibrazioni, oscillazioni ecc., se ne va la *specialità* del fenomeno stesso (cioè per l'appunto il più interessante), nè più nè meno di come se ne andrebbe la specialità, p. es., del cane quando io pretendessi di farlo conoscere dicendo che è una specie di animale. — La categoria del moto sarebbe suscettibile di uno sviluppo assai ampio, avendo un contenuto ricchissimo. Ma per non sovraccaricare questo semplice schizzo della parte generale o formale della meccanica speculativa con particolarità d'importanza secondaria, mi fermerò soltanto ai momenti principali.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Aprile 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Fusari, Panetti, e Segre, Segretario. — Scusano l'assenza il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe D'Ovidio e il Socio Mattirolo.

Letto e approvato il verbale dell'adunanza precedente, vien comunicata una lettera del Prof. H. N. Morse, il quale ringrazia vivamente per la medaglia Avogadro che gli fu conferita.

Il Socio Guidi offre in omaggio un suo opuscolo su *La trave solidale coi piedritti*.

Vengon presentate, per la pubblicazione negli *Atti*, le seguenti Note:

I. Guareschi, *Alcune osservazioni sulla tirosina.*

F. Balzac, *Sulla presenza di termini clinozoisitici nei giacimenti classici d'Epidoto di Val d'Ala*, dal Socio Parona.

G. Fubini, *I teoremi di Bernstein e Pringsheim per lo sviluppo in serie di Taylor*, dal Socio Segre.

C. Poli, *Un teorema di esistenza per equazioni integrali non lineari*, pure dal Socio Segre.

LETTURE

Alcune osservazioni sulla tirosina.

Nota del Socio I. GUARESCHI.

R. Piria sino dal 1852 (1) raccomandò una reazione colorata della tirosina che poteva servire a riconoscere anche delle piccolissime quantità di questa sostanza. Egli trattava 5-6 milligrammi di tirosina con 1-2 goccie di acido solforico ordinario concentrato, lasciava a sè entro cassulina la miscela scaldata a b. m., per circa $^1/_2$ ora, poi diluiva con acqua, saturava a caldo con carbonato baritico e trattava il filtrato con percloruro di ferro, il quale produceva una bella colorazione violetto-rossa, analoga a quella data dall'acido salicilico.

Io ho sempre fatto, anche in lezione, questa reazione quando descrivevo i caratteri della tirosina. Questa reazione, detta appunto *reazione del Piria*, è una delle migliori per riconoscere la tirosina. Però, anche scaldando direttamente alla fiamma per risparmiare tempo in lezione, occorre sempre, relativamente, molto tempo; e perciò ho pensato che si può semplificare e renderla una reazione comoda da eseguire anche in lezione evitando la neutralizzazione col carbonato baritico e il lungo riscaldamento a b. m.

Si tratta la tirosina, entro tubo da saggio o in cassulina di porcellana, con un poco (1 a 2 piccole goccie) di acido solforico concentrato, e meglio ancora l'acido fumante, a sufficienza per bagnarla; si scalda direttamente su piccola fiamma sino a che appaiano alcuni fumi bianchi, oppure a b. m. bollente per pochi minuti, poi si diluisce con acqua e si tratta con percloruro di ferro direttamente, a poco a poco. Si avrà egualmente bella

(1) A. 1852, t. 82, p. 252.

la reazione. Si può neutralizzare in gran parte l'acidità prima con alcune goccie di soluzione di carbonato sodico. Riesce benissimo non solamente con 5-6 mgr., ma anche con 4 mgr., e pure con 1 mgr. si ha netta la reazione; con $^1/_2$ mgr. si ha ancora una colorazione violetta, ma poco intensa. Si può dunque evitare il lungo riscaldamento a b. m. e la neutralizzazione col carbonato baritico, che in lezione è operazione incomoda.

Coll'acido solforico concentrato contenente 7 $^0/_0$ di anidride la reazione avviene bene egualmente ed anzi più presto. Già a temperatura ordinaria dopo un'ora o poco più si ha la reazione. Se si scalda direttamente un poco di tirosina con pochissimo acido a 7 $^0/_0$ di SO^3 poi diluendo ecc. si ha subito la reazione. A b. m. dopo 1 minuto si ottiene subito, e bellissima, la reazione.

Meglio ancora adoprare, come dissi, l'acido solforico *fumante ordinario* a circa 30 $^0/_0$ di SO^3; la reazione colla tirosina avviene allora già alla temperatura ordinaria dopo 15 minuti e a b. m. bollente anche dopo mezzo minuto.

Ad ogni modo è sempre meglio scaldare a b. m. bollente che non a fuoco nudo.

Se si è un poco ecceduto nella quantità di acido solforico e, dopo diluito il prodotto della reazione, non si produce subito la colorazione violetta, si aggiunga a goccia a goccia una soluzione di carbonato sodico e la colorazione violetta apparirà benissimo.

Molti *aminoacidi ed altri composti organici* non impediscono la reazione della tirosina con acido solforico e percloruro di ferro.

Ho esperimentato con la *glicocolla* unita alla tirosina e la reazione avviene benissimo.

Colla *alanina* mista a pesi uguali con la tirosina la reazione di questa riesce benissimo.

La *leucina* anche in quantità notevole relativamente alla tirosina, non impedisce, non ostacola la reazione di questa.

La tirosina mescolata con una o due volte il proprio peso di *acido glutaminico* dà ancora benissimo la reazione, specialmente coll'acido fumante.

L'*acido urico* anche in quantità relativamente notevole non ostacola la reazione.

Così pure riesce bene la reazione anche in presenza di

creatina o di *taurina*. Avvertendo sempre di mettere poco acido solforico, sia ordinario oppure fumante; basta una piccola goccia.

La *colesterina* non impedisce nè ostacola la reazione; scaldando la miscela di colesterina e di tirosina con poco acido solforico si ha una massa bruna che coll'acqua e filtrando fornisce un liquido il quale col cloruro ferrico dà la reazione della tirosina, e se non la produce subito per l'acido solforico aggiunto in eccesso, si aggiunga a poco a poco la soluzione di carbonato sodico e la colorazione violetta si manifesta nettamente. Dunque la colesterina non ostacola la reazione.

Colla *inosite* la reazione non riesce bene quando si scalda a fuoco diretto, perchè il liquido rimane allora molto bruno anche quando, dopo diluito con acqua, si filtra. Ma se la mescolanza di inosite e tirosina (anche circa a parti eguali o più) si scalda per pochi minuti a b. m. bollente con un poco di acido al 7 $^0/_0$ di SO^3 oppure fumante, allora il liquido rimane quasi incoloro e la reazione della tirosina riesce bene; tanto più se si toglie l'eccessiva acidità con poche goccie di carbonato sodico. Dunque anche l'inosite non ostacola la reazione.

La tirosina mista anche con *bromoformio*, con *bibromobenzene*, dà ancora nettamente la sua reazione. In presenza di *glutarimide*, benchè meno bella, produce ancora la reazione; come pure la *dimetilgliossima* non disturba la reazione.

Mescolata con *ossamide* e scaldando con acido solforico sino ad imbrunimento, la tirosina dà ancora la reazione; però il color violetto è meno bello.

La *caseina* mista a parti eguali, ed anche più, con tirosina non ostacola la reazione se si scalda per pochi minuti a b. m. bollente con 1-2 goccie di acido solforico fumante. Colla sola caseina non si ha nessuna reazione.

Il *glucosio* e l'*urotropina* invece ostacolano la reazione; la massa annerisce e si carbonizza: il liquido diluito e filtrato non dà ben netta la reazione della tirosina.

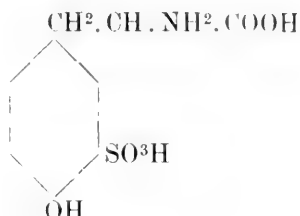
Städeler (1) studiò l'azione dell'acido solforico sulla tirosina e ottenne un acido tirosinmonosolfonico $C^9H^{10}(SO^3H)NO^3 + 2H^2O$ ed altri solfoacidi, non ancora ben studiati, i cui sali tutti si

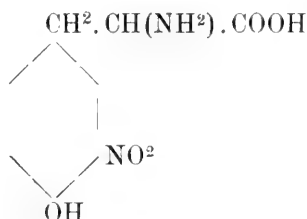
(1) A. 116, p. 91.

colorano in violetto col percloruro di ferro. Probabilmente l'acido tirosinsolfonico è un derivato *orto*:

$$CH^2.CH.NH^2.COOH$$

$$SO^3H$$

$$OH$$

e quindi si comporta analogamente all'acido salicilico ed agli acidi fenolsolfonici.

Anche nella nitrotirosina l'introduzione del gruppo NO^2 ha luogo in posizione orto relativamente al gruppo fenolico:

Fra le diverse reazioni per riconoscere la tirosina è molto bella quella indicata da Mörner (1): se si scalda la tirosina con alcuni centimetri cubi di una miscela di 1 vol. di formalina, 45 vol. di acqua e 55 vol. di acido solforico, si manifesta una bella colorazione azzurro-verde.

Coll'aldeide acetica in condizioni analoghe si ha colorazione rossa (Denigès).

Sostituendo la formalina e l'aldeide acetica col *metilale* e rispettivamente coll'*acetale* io ho notato che si manifestano le stesse reazioni.

Torino, R. Università, marzo 1916.

---

(1) Mörner, " Zeits. f. physiol. Chem. ", 1902, t. 37, p. 86.

I teoremi di Bernstein e Pringsheim per lo sviluppo in serie di Taylor.

Nota di GUIDO FUBINI.

In una notevole Memoria del tomo 75 dei " Mathem. Annalen „ il Bernstein trova sotto forma molto elegante le condizioni necessarie e sufficienti per la sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor. Volendo esporre tali risultati in un corso di analisi, mi sono accorto che la dimostrazione del Bernstein può forse dar luogo a qualche dubbio; perciò in questa Nota mi permetto riprodurre tale dimostrazione con metodo immune da ogni obiezione, tanto più che se ne deduce, tra l'altro, col metodo più semplice anche il classico risultato del Pringsheim.

Teorema 1° (Bernstein). *Condizione necessaria affinchè* $f(x)$ *sia sviluppabile in serie di Taylor nell'intervallo* $0 \leq x < R$ *è che* $f(x)$ *sia in tale intervallo differenza di due funzioni* $\varphi_1(x)$ *e* $\varphi_2(x)$, *che ivi sono non negative insieme a tutte le loro derivate.*

Infatti, se $f(x) = \sum_n a_n x^n$, si può indicare con $\varphi_1(x)$ [*con* $-\varphi_2(x)$] rispettivamente la somma di quei termini della nostra serie, che hanno coefficiente positivo [*negativo*]; oppure porre

$$\varphi_1(x) = \sum |a_n| x^n, \qquad \varphi_2(x) = \sum (|a_n| - a_n) x^n.$$

Teorema 2° (Bernstein). *La precedente condizione necessaria è anche sufficiente.*

Sia infatti $\varphi(x)$ una funzione positiva in $0 \leq x < R$ con tutte le sue derivate. Se $0 < h < R$, nell'intervallo $h \leq x < R$ si avrà

$$\varphi^{(n)}(x) \geq \varphi^{(n)}(h) \qquad (\text{perchè } \varphi^{(n+1)} \geq 0),$$

donde, integrando

$$\varphi^{(n-1)}(x) \geq \varphi^{(n-1)}(x) - \varphi^{(n-1)}(h) \geq (x-h)\,\varphi^{(n)}(h)$$

$$\varphi^{(n-2)}(x) \geq \varphi^{(n-2)}(x) - \varphi^{(n-2)}(h) \geq \frac{(x-h)^2}{|2}\,\varphi^{(n)}(h)$$

. . . .

$$\varphi''(x) \quad \geq \qquad\qquad \geq \frac{(x-h)^{n-2}}{|n-2}\,\varphi^{(n)}(h).$$

Cioè, posto $\frac{h}{x} = \theta$, dove θ è compreso tra 0 ed 1, sarà:

$$\varphi^{(n)}(\theta x) \leq \frac{\varphi''(x)}{(1-\theta)^{n-2}\,x^{n-2}}\,|n-2.$$

Posto

$$\Phi_n(\theta, x) = x^n \frac{(1-\theta)^{n-1}}{|n-1}\,\varphi^{(n)}(\theta x),$$

si ha (*Cauchy*) che (per un valore, generalmente ignoto, di θ) la $\Phi_n(\theta, x)$ rappresenta il resto della serie di Taylor relativa alla funzione $\varphi(x)$. Ora, per il nostro risultato,

$$\Phi_n(\theta, x) \leq x^2\,\varphi''(x)\,\frac{1-\theta}{n-1}$$

e tende per $n = \infty$ a zero (ciò che basta ad assicurare la sviluppabilità di $\varphi(x)$ in serie di Taylor). Essendo $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ sviluppabili in serie di Taylor, altrettanto avverrà di

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Anzi il resto della corrispondente serie di Taylor, scritto nella forma di Cauchy, sarà uguale alla differenza tra le $\Phi_n(\theta, x)$ corrispondenti a $\varphi_1(x)$ ed a $\varphi_2(x)$.

Tale *resto di Cauchy* sarà dunque minore di

$$x^2\,\frac{1-\theta}{n-1}\,[\varphi_1''(x) + \varphi_2''(x)] \leq$$

$$\leq \frac{r^2}{n-1}\,(1-\theta)\,[\varphi_1''(r) + \varphi_2''(r)] \quad (\text{se } x \leq r < R)$$

e convergerà pertanto uniformemente a zero, quando x *varia in un qualsiasi intervallo* $0 \leq x \leq r$, *dove* $r < R$, *e* θ *varia arbitrariamente nell'intervallo* $(0, 1)$.

Questo è il teorema di Pringsheim.

A questi teoremi si può anche dare una delle forme seguenti:

1° *Se* $f(x)$ *è positiva o nulla per* $x = 0$ *insieme a tutte le sue derivate, essa è sviluppabile per* $x \geq 0$ *in serie di Taylor nel massimo intervallo* $0 \leq x < R$, *dove essa e le sue derivate non sono negative, e soltanto in tale intervallo* (cosicchè se $R = 0$, la $f(x)$ non è sviluppabile in serie di Taylor).

2° *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione* $f(x)$ *sia sviluppabile in serie di Taylor nell'intervallo* $0 \leq x < R$ *è che si possa trovare una serie di potenze* $\psi(x)$ *tale che* $f(x) + \psi(x)$ *sia positiva con tutte le sue derivate in tale intervallo* (o, ciò che è lo stesso, che converga quella serie $-\varphi(x)$ ottenuta dallo sviluppo formale di $f(x)$ in serie di Taylor sopprimendone i termini a coefficienti positivi, e che $f(x) + \varphi(x)$ sia nell'intervallo $0 \leq x < R$ non negativa con tutte le sue derivate).

3° *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $f(x)$ **non** *sia sviluppabile in serie di Taylor in alcun intorno destro del punto* $x = 0$, *è che, scelto ad arbitrio un polinomio o una serie di potenze* $p(x)$, *in ogni intorno destro del punto* $x = 0$ *cadano infiniti punti, ove almeno una delle derivate di* $f(x) + p(x)$ *o non esiste, o non è positiva.*

4° *Se* $f(x)$ *è nulla con tutte le sue derivate per* $x = 0$, *e se essa e le sue derivate sono non negative per* $0 \leq x < R$, *la* $f(x)$ *è identicamente nulla in questo intervallo* $0 \leq x < R$.

Sulla presenza di termini clinozoisitici nei giacimenti classici di epidoto di Val d'Ala (1).

Nota di FAUSTA BALZAC.

(Con 1 tavola).

Fin da quando il numero di analisi esatte conosciute di epidoto è andato diventando notevole, è stato facile il constatare come, in questo minerale, il tenore in ferro ferrico era discretamente variabile. Solo abbastanza recentemente, però, sono stati analizzati dei termini così poco ferriferi, da far ritenere di aver ritrovato pressochè puro, in natura, uno dei due composti estremi che costituiscono l'epidoto propriamente detto, e precisamente il composto di alluminio eteromorfo con la zoisite. A questo composto, la cui formula si può scrivere $H_2Ca_4Al_6Si_6O_{26}$, intendendosi che una assai piccola parte dell'alluminio sia sostituita dal ferro trivalente, fu, dal Weinschenk, che lo ritrovò quasi puro nei cristalli della Gosler Wand, assegnato il nome di clinozoisite, veramente felice, perchè indica senz'altro le relazioni che passano fra il nuovo minerale e la zoisite rombica.

Dopo le ricerche del Weinschenk, la clinozoisite fu sovente rinvenuta come costituente microscopico di varie roccie metamorfiche e, più specialmente, nei gabbri in via di trasformarsi in prasiniti ed in queste ultime rocce. In Italia, i rilevatori dell'Ufficio Geologico, e sopratutto fra di essi, l'Ing. Franchi, ne studiò le proprietà e ne fece conoscere la diffusione nelle Alpi Piemontesi: Artini e Melzi (2) descrissero con gran cura la clinozoisite delle prasiniti e di altre rocce di Val Sesia e lo Zambonini, infine, studiò cristallograficamente ed otticamente questo minerale da lui osservato in individui microscopici assai

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal Prof. F. Zambonini.

(2) *Ricerche petrografiche e geologiche sulla Valsesia.*

nitidi nei gabbri e nelle prasiniti della Rocca Bianca in Val di Susa (1).

Giacimenti con cristalli macroscopici di clinozoisite, o, in genere, di epidoti assai poco ferriferi, sono rimasti, invece, assai rari. Ricorderò i cristalli del Rothenkopf nello Zillerthal, quelli di Huntington nel Massachussets, mentre, in Italia, grazie alle ricerche del Millosevich, vennero fatti conoscere di St. Barthélemy in Valle d'Aosta e di Campo a Peri nell'Isola d'Elba.

Pure sembrerebbe, a prima vista almeno, che gli epidoti clinozoisitici dovrebbero essere molto più frequenti di quanto finora risulta. Ed invero, nelle collezioni sono assai frequenti, oltre ai cristalli di colore verde cupo o quasi nero, che rappresentano gli epidoti più ricchi in $H_2Ca_4Fe_6Si_6O_{26}$ finora noti, anche altri cristalli di colore giallo scuro, pure molto ricchi in ferro, come dimostrano le analisi, i quali, alle volte nello stesso giacimento, passano per gradi insensibili ad altri di colore molto più pallido che, presumibilmente, devono essere poco ferriferi e prossimi, pertanto, alla clinozoisite.

Uno dei giacimenti nei quali si verifica appunto questo fatto della grande variabilità nella intensità della colorazione, è quello classico del Colle del Paschietto, che ha fornito esemplari splendidi ai Musei di tutto il mondo, considerati da tutti come appartenenti all'epidoto tipico.

Per consiglio del Prof. Zambonini, ho preso in esame alcuni dei campioni di epidoto meno intensamente colorati, provenienti dalla regione del Colle del Paschietto, e conservati nel Museo Mineralogico della R. Università di Torino, per stabilire se essi rappresentavano o meno dei termini prossimi alla clinozoisite.

Le ricerche da me eseguite hanno condotto a stabilire che alcuni dei cristalli dei campioni studiati sono realmente da riferire a cristalli misti poco ferriferi della serie clinozoisite-epidoto, venendo, così, a far conoscere l'esistenza di termini vicini alla clinozoisite in bei cristalli macroscopici, ricchi di forme, anche nella regione del Colle del Paschietto.

I campioni da me studiati non provengono tutti dal Colle del Paschietto propriamente detto, ma, com'è il caso, del resto,

(1) Zambonini, *Ueber den metamorphosierten Gabbro der Rocca Bianca im Susa-Tale*. " Neues Jahrbuch für Mineralogie ,, 1906, II, 105.

per la maggior parte degli esemplari sparsi nei Musei, dalla regione circostante, nella quale sono frequenti i banchi con cristalli di epidoto, se pure non sempre così grandi e belli come quelli tipici del Colle.

Io mi limiterò a descrivere brevemente alcuni dei cristalli più notevoli fra quelli che ho trovato riferibili a termini clinozoisitici, e precisamente quattro unici ed uno geminato secondo la solita legge: asse di geminazione la normale a {100}.

Cristallo N. 1 (Fig. 1). — È stato isolato dal campione contrassegnato col N. 6032, il quale è costituito da epidoto massiccio e bacillare, in cui si apre una drusa con bei cristalli, impiantati sempre per una estremità di *b*, di colore giallo assai chiaro, di intensità variabile però da individuo ad individuo. Questi cristalli sono abbastanza grandi, poichè arrivano a misurare fino a 3 cm. secondo l'asse *b*, ve ne sono però di molto più piccoli che raggiungono soltanto pochi millimetri nella direzione stessa, e che sono di colore giallo chiarissimo. È uno di questi ultimi, quello del quale segue la descrizione, e che è stato riconosciuto di natura clinozoisitica, mentre, in realtà, i cristalli grandi più intensamente colorati, appartengono già decisamente all'epidoto propriamente detto.

Il cristallo in questione è discretamente tabulare secondo {100}, allungato secondo l'asse *b*, nella qual direzione raggiunge la dimensione di 3 mm.

Le forme osservate sono le seguenti:

M {001}	*T* {100}	ψ {401}	ψ_1 {702}	*f* {301}
l {$\bar{2}$01}	*i* {$\bar{1}$02}	*z* {110}	*o* {011}	𝔟 {023}
k {012}	ν {112}	*n* {111}	*b* {$\bar{2}$33}	

delle quali {$\bar{7}$02} è nuova per il giacimento: essa è stata trovata la prima volta da Bücking (1) nell'epidoto del Sulzbachthal ed in quello di Guttannen

$$(001) : (\bar{7}02) = 101^\circ\ 4' \text{ mis.} \qquad 101^\circ\ 12' \text{ calc.}$$

(1) H. Bücking, *Ueber die Krystallformen des Epidot.* " Zeit. für Kryst. ", II, 329.

Nella zona [010] fra tutte più estese sono le facce di }100{ e di }201{ le quali dànno immagini assai buone, come pure quelle di }001{, meno sviluppate. Come si vede dalla Fig. 1, i pinacoidi i, ψ, ψ_1 e f non possiedono che una sola faccetta, che in tutti i casi ha permesso misure precise, essendo la striatura parallela all'asse della zona [010] pochissimo pronunciata.

Le facce laterali sono abbastanza numerose: anche qui è notevole il fatto che non tutte presentano le due facce che dovrebbero possedere: così v, q e $\mathfrak{b}$ non ne hanno che una. Le due facce di z e di n hanno grandezza diversissima, sicchè si può dire che, tra le facce terminali, le più estese, quelle che caratterizzano in certo modo il cristallo, sono una di }111{ ed una di }110{. Tutte sono piane e splendenti, ed hanno fornito ottime misure.

In questo cristallo ho eseguito una determinazione dell'indice β di rifrazione, ottenendo, per la luce del sodio,

$$\beta = 1.7113.$$

Cristallo N. 2 (Fig. 3). — Un secondo cristallo fu staccato dallo stesso campione del primo. Di colore giallo verdastro chiaro, si presenta tabulare secondo }001{ e raggiunge nella direzione dell'asse b una lunghezza di 6 mm.

Osservai in esso le forme seguenti:

M }001{	T }100{	f }301{	l }$\bar{2}01${	r }$\bar{1}01${
e }101{	m }102{	z }110{	k }012{	}0.41.83{
}0.18.35{	$\mathfrak{b}$ }023{	o }011{	n }$\bar{1}11${	ε_1 }6.6.17{

delle quali }0.41.83{, }0.18.35{, }6.6.17{ sono tre forme vicinali, nuove per l'epidoto in genere. Di esse le due prime sono vicinali alla }012{, frequentissima nell'epidoto anche di Val d'Ala. Sono tutte e due nitidissime, piane e regolari, e le loro faccette, che nella figura non portano lettere, hanno permesso ottime misure:

(001) : (0.41.83) = 38° 51′ mis. 38° 51′ 1/2 calc.

(001) : (0.18.35) = 39° 59′ „ 39° 59′ 1/2 „

Si tratta, evidentemente, di due faccette che sostituiscono {012}, per la quale si calcola (001) : (012) = 39° 12′. La prima ha quasi la posizione di {012}, poichè non ne dista che di 21′, mentre di più se ne allontana la seconda (47′).

ε_1 {6.6.17} è una vicinale a {113}. È rappresentata, nel cristallo, da un'esile, ma nitida faccetta, che ha fornito misure buone:

(001) : (6.6.17) = 29° 43′ mis. 29° 44′ calc.

Per {113} si calcola (001) : (113) = 28° 57′: si ha, cioè, fra questo valore e quello misurato per ε, una differenza di 46′ molto superiore a quella rappresentata dall'incertezza della misura, che non supera i 2′. È noto, del resto, che il prisma {113} presenta non di rado nell'epidoto la tendenza ad essere sostituito da facce vicinali. Così, il Brugnatelli (1), in alcuni cristalli di località sconosciuta, trovò delle faccette di un {*h h l*} che formavano con la base degli angoli variabili fra 30° 12′ e 30° 51′, per la posizione media delle quali si può calcolare il simbolo {4.4.11}. La faccetta da me osservata costituisce un termine di passaggio fra {113} e quelle notate dal Brugnatelli. Mentre le faccette osservate da Brugnatelli e da me formano con la base un angolo più elevato di quello formato da {113}, Bücking ha trovato, in un cristallo del Sulzbachthal, una faccetta meno inclinata sulla base, per la quale ha calcolato il simbolo {3.3.10}. In complesso si tratta di faccette di posizione variabile, oscillante di poco intorno a quella che spetta a {113}.

Nella zona [010] è di gran lunga predominante {001}, seguono poi, in ordine di grandezza, {100}, {$\bar{3}$01}, {$\bar{2}$01} e, infine, {101} e {102}. Le due prime sono splendenti e dànno buone misure, {101} ha una sola esilissima faccia che dà immagine diffusa, mentre {102}, altrettanto esile, ma splendente, dà una sola immagine nitida.

Tra le forme laterali, domina {$\bar{1}$11}, mentre tutte le altre sono affatto subordinate. Tutte, però, permettono buonissime misure, essendo piane e splendenti.

(1) *Beitr. zur Kenntniss des Epidot.* " Zeit. für Krist. ", 1890, XVII, 529.

Cristallo N. 3 (Fig. 5). — Pur appartenendo allo stesso campione, presenta un *habitus* completamente diverso da quello dei due cristalli sopra descritti. Ancora allungato secondo l'asse *b*, nella quale direzione raggiunge la lunghezza di 3 mm., si presenta quasi tabulare secondo $\}100\{$. È cristallo povero di forme; le osservate sono:

$M\ \}001\{$ $T\ \}100\{$ $\mathfrak{l}\ \}20\bar{1}\{$ $l_1\ \}23.0.\bar{1}\bar{2}\{$ $e\ \}101\{$

$i\ \}10\bar{2}\{$ $z\ \}\bar{1}10\{$ $\mathfrak{b}\ \}023\{$ $o\ \}01\bar{1}\{$ $k\ \}012\{$

$n\ \}111\{$,

di esse, la vicinale $l_1\ \}23.0.12\{$ sarebbe nuova per l'epidoto. Si presenta sotto forma di una esile faccettina, che ha fornito una discreta misura:

$$(001) : (\bar{2}\bar{3}.0.12) = 88^\circ\, 34' \text{ mis.} \qquad 88^\circ\, 35' \text{ calc.}$$

Come è noto, $\}201\{$ presenta una grande tendenza, nell'epidoto, ad essere accompagnata o sostituita da vicinali: quella da me osservata ha una posizione intermedia fra quella che spetta a $\}\bar{2}01\{$ e quella che compete alla $\}\bar{1}\bar{3}.0.17\{$ di Bücking.

Nella zona [010] le due forme più sviluppate sono $\}100\{$ e $\}001\{$, delle quali la prima è un po' più grande della seconda. Tutte le altre forme di questa zona non presentano che faccette molto esili.

Le forme terminali hanno tutte facce bellissime: notevole è, però, lo sviluppo del tutto irregolare del cristallo. Così, $o\ \}011\{$ non possiede che una sola grande faccia, e le due di $k\ \}012\{$ sono di grandezza diversissima: anche $\}111\{$ ha una sola faccia abbastanza grande.

Cristallo N. 4 (Fig. 4). — Dallo stesso campione estrassi un altro cristallo, piccolo, debolmente colorato in giallo, il quale presenta un certo interesse pel numero considerevole di forme che presenta e più ancora per possederne alcune assai rare nell'epidoto in genere. Per quanto esse siano pochissimo sviluppate, dànno immagini così nette, che le misure relative ad esse sono molto prossime ai corrispondenti valori calcolati per l'epidoto.

Come il precedente, questo cristallo, si presenta tabulare secondo $\{100\}$ ed allungato nella direzione dell'asse *b*.

Le forme che ho potuto osservare sono le seguenti:

M $\{001\}$	*T* $\{100\}$	*P* $\{010\}$	*h* $\{201\}$	$\{17.0.7\}$
$\{504\}$	*e* $\{101\}$	Ω $\{105\}$	$\{506\}$	*r* $\{\bar{1}01\}$
l $\{\bar{2}01\}$	$\{\overline{17}.0.5\}$	*z* $\{110\}$	*o* $\{011\}$	*d* $\{111\}$
n $\{\bar{1}11\}$	*g* $\{144\}$	ε $\{113\}$	*X* $\{213\}$	*H* $\{\bar{7}32\}$
b $\{\bar{2}33\}$				

delle quali $\{\bar{5}06\}$, $\{17.0.5\}$, $\{17.0.7\}$, $\{504\}$ sono nuove per il giacimento.

$\{\bar{5}06\}$ e $\{\overline{17}.0.5\}$ trovate già da Bücking nei cristalli di Sulzbachthal, si presentano ciascuna con una faccetta esile, ma piana, che dà un'immagine discreta:

(001) : ($\bar{5}$06) = 55° 37′ mis. 55° 38′ calc.

(001) : ($\overline{17}$.0.5) = 100° 30′ „ 100° 45′ „

$\{17.0.7\}$ scoperta da Gränzer nei cristalli dello Habachtal, possiede una esile ma nitida faccetta: lo stesso si verifica per $\{504\}$, trovata la prima volta da Artini nei cristalli di Mortigliano (Isola d'Elba):

(001) : (17.0.7) = 48° 53′ mis. 49° 7′ calc.

(001) : (504) = 38° 38′ „ 38° 39′ „

Nella zona [010] dominano le forme $\{100\}$ e $\{201\}$, che hanno grandezza poco diversa: tra le forme terminali le più estese sono $\{110\}$ e $\{\bar{1}11\}$.

Cristallo N. 5 (Fig. 2). — Un quinto cristallo di aspetto diverso proviene dal campione contrassegnato col N. 6022. I cristalli di epidoto, di colore giallo vino chiaro a giallo miele, bellissimi, e che raggiungono nella direzione dell'asse *b* fino 15 mm. di lunghezza, tappezzano una fenditura di un gabbro in via di prasinitizzazione, nel quale è ancora riconoscibile la

struttura gabbrica, ma il diallagio è trasformato in anfibolo ed il plagioclasio è saussuritizzato profondamente.

Questi cristalli sono più ferriferi di quelli precedentemente descritti.

Descriverò un geminato secondo la solita legge: asse di geminazione la normale a $\{100\}$, tabulare secondo $\{100\}$, e di colore giallo vino chiaro.

I due individui che lo costituiscono presentano le seguenti forme:

il 1° di sinistra:

$M\ \{001\}$	$T\ \{100\}$	$e\ \{101\}$	$l\ \{\bar{2}01\}$	$\psi_1\ \{\bar{7}02\}$
$z\ \{110\}$	$u\ \{210\}$	$o\ \{011\}$	$d\ \{111\}$	$\varepsilon\ \{113\}$
$X\ \{213\}$	$b\ \{233\}$	$n\ \{111\}$:		

il 2° di destra:

$M\ \{001\}$	$T\ \{100\}$	$P\ \{010\}$	$e\ \{101\}$	$l\ \{\bar{2}01\}$
$s\ \{\bar{2}03\}$	$\{13.0.20\}$	$i\ \{\bar{1}02\}$	$\{\bar{6}.0.25\}$	$\{104\}$
$z\ \{110\}$	$u\ \{210\}$	$o\ \{011\}$	$\varepsilon\ \{113\}$	$X\ \{213\}$
$n\ \{\bar{1}11\}$	$I\ \{\bar{1}51\}$	$\iota\ \{\bar{1}71\}$	$q\ \{\bar{2}21\}$	$b\ \{\bar{2}33\}$
$F_1\ \{\bar{2}.13.2\}$.				

Di queste $\psi_1\ \{\bar{7}02\}$, $\iota\ \{\bar{1}71\}$ e $F_1\ \{\bar{2}.13.2\}$ sono nuove per la località. ψ_1 è stata già trovata nel cristallo N. 1: in questo si presenta con una nitida faccia, non molto piccola, che ha dato buone misure:

$$(001):(\bar{7}02) = 101^\circ\ 6' \text{ mis.} \qquad 101^\circ\ 12' \text{ calc.}$$

$\{\bar{1}3.0.20\}$ e $\{\bar{6}.0.25\}$, trovata l'una da Bücking nei cristalli di Sulzbachthal, l'altra da Flink in quelli di Nordmarken, possiedono ciascuna una esile faccetta, che ha dato immagini nitide, ma pallide:

$$(001):(\bar{1}3.0.20) = 44^\circ\ 44' \text{ mis.} \qquad 44^\circ\ 32' \text{ calc.}$$

$$(001):(\bar{6}.0.25) = 16^\circ\ 9' \quad „ \qquad 15^\circ\ 41' \quad „$$

Per quest'ultima, la differenza fra il valore trovato e quello calcolato è sensibile, ma dato che la misura non è esattissima, non ho creduto di calcolare un nuovo simbolo.

$\{\bar{1}71\}$ è una forma rara nell'epidoto, stata scoperta da Bücking, nei cristalli del Sulzbachthal; in uno dei due individui del geminato che descrivo si è osservato con una stretta, ma nitida faccetta, che ha permesso buone misure:

$$(010):(\bar{1}71) = 5^{\circ}\,43' \text{ mis.} \qquad 5^{\circ}\,45' \text{ calc.}$$

Anche $\{\bar{2}.13.2\}$ è stata per la prima volta rinvenuta da Bücking nei cristalli del Sulzbachthal: nel mio cristallo presenta una esile faccia, piana e splendente:

$$(010):(\bar{2}.13.2) = 6^{\circ}\,20' \text{ mis.} \qquad 6^{\circ}\,11' \text{ calc.}$$

Quanto alle altre forme presenti in questo geminato, non presentano nulla di notevole, e la Fig. 2 ne mostra lo sviluppo relativo.

L'indice di rifrazione β, determinato per la luce del sodio, è:

$$\beta = 1.7209.$$

Nella tabella seguente ho posto a confronto gli angoli misurati per le forme già note per la località, coi calcolati in base alle costanti di Kokscharow per l'epidoto in genere:

Angoli	Numero delle misure	Limite delle misure	Medie	Valori calcolati colle costanti di Kokscharow	Differenze
001 : 100	11	64°22′ - 64°48′	64°37′	64°36′	1′
001 : 201	1	—	46 8	46 11	3
001 : 504	1	—	38 38	38 39	1
001 : 101	4	34 43 - 34 50	34 46	34 42	4
001 : 105	1	—	10 21	10 39	18
001 : $\bar{1}01$	3	63 41 - 63 49	63 44	63 42	2
001 : $\bar{5}06$	1	—	55 35	55 28	7
001 : $\bar{1}04$	1	—	16 9	16 23	14
001 : $\bar{1}02$	4	34 21 - 34 29	34 25	34 21	4
001 : $\bar{2}03$	1	—	45 35	45 37	2
001 : 201	7	89 30 - 89 35	89 32	89 27	5
001 : $\bar{3}01$	2	98 33 - 98 34	98 33 1/2	98 38	4 1/2
001 : $\bar{7}02$	2	101 3 -101 7	101 5	101 12	7
001 : $\bar{4}01$	1	—	102 57	103 6	9

001 : 012	3	38 59 - 39 32	39 22	39 12	10
001 : 023	5	47 19 - 47 36	47 27	47 24	3
100 : 011	1	—	76 50	77 3	13
100 : 010	1	—	89 53	90 0	7
001 : 113	2	28 53 - 29 9	29 1	28 57	4
001 : 111	3	52 5 - 52 24	52 17	52 20	3
100 : 111	1	—	49 54	49 53	1
100 : 144	2	69 3 - 69 8	69 5 1/2	69 3	2 1/2
001 : 111	7	75 12 - 75 20	75 15	75 12	3
110 : 111	1	—	28 58	29 3	5
$\bar{2}$01 : 111	2	58 46 - 58 48	58 47	58 43	4
001 : 221	1	—	90 16	90 6	10
010 : 151	1	—	7 52	8 2	10
010 : 171	1	—	5 43	5 45	2
100 : 111	7	69 1 - 69 6	69 3 1/2	69 4	1/2
100 : 233	3	79 55 - 79 57	79 56	79 53	3

***

Che i cristalli da me descritti rappresentino effettivamente dei termini clinozoisitici risulta chiaramente, in primo luogo, dalle determinazioni, già riferite, dei valori trovati per l'indice di rifrazione β. Si ha infatti:

Cristallo N. 1	$\beta = 1.7113$
„ „ 5	$\beta = 1.7209$,

mentre nella clinozoisite, riconosciuta sicuramente tale in base all'analisi chimica quantitativa, vari studiosi hanno trovato:

	β	
Clinozoisite di Campo a Peri .	1.7140	(Millosevich)
„ della Gosler Wand .	1.7195	(Weinschenk)
„ di St. Barthélemy .	1.7200	(Millosevich)
„ passante all'epidoto di Huntington . .	1.7245	(Forbes).

Come si vede, i valori da me ottenuti sono vicinissimi a quelli dati per le clinozoisiti tipiche, e molto inferiori già al valore trovato da Forbes nei cristalli di Huntington, che contengono soltanto 5.67 % Fe_2O_3.

L'appartenenza alla clinozoisite dei miei cristalli risulta, poi, provata dalle determinazioni di peso specifico. Per la clinozoisite tipica della Gosler Wand, Weinschenk dà 3.372, mentre Westergård avrebbe trovato un valore più basso, e, precisamente, 3.344: Millosevich per la clinozoisite di Campo a Peri dà 3.339.

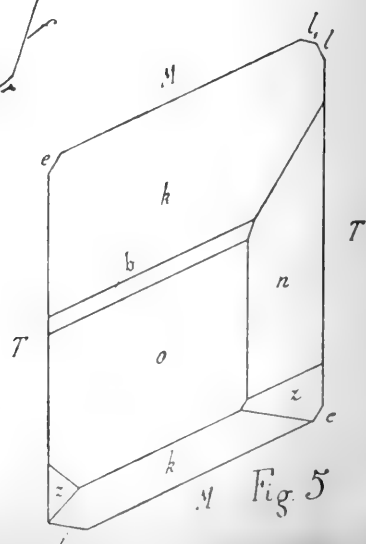
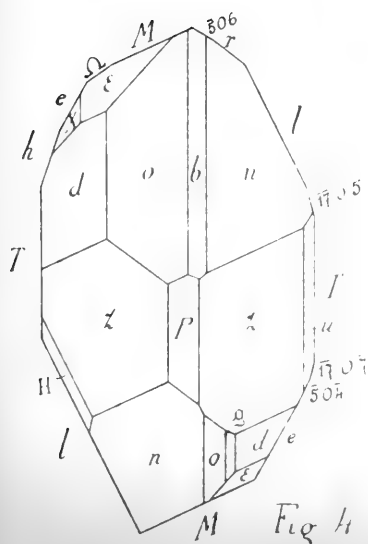
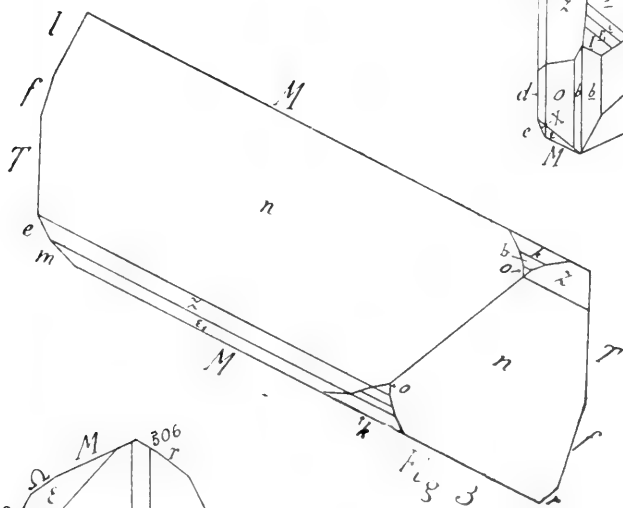
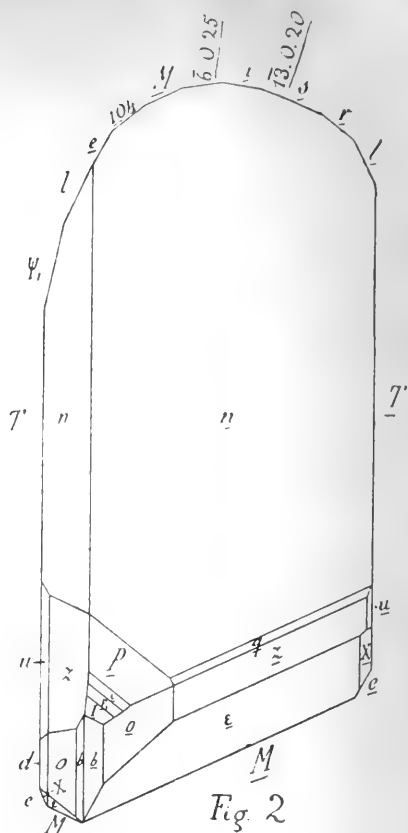
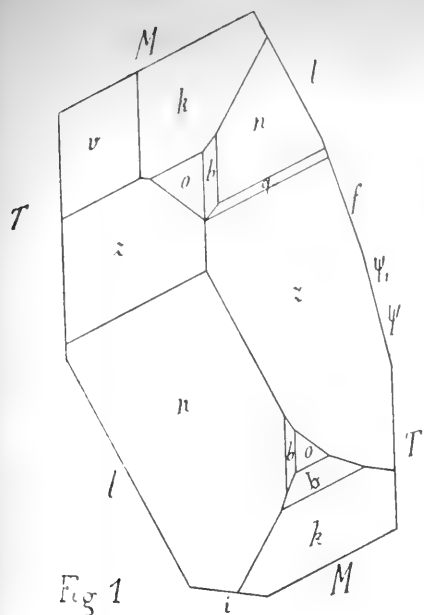
Queste determinazioni sono state eseguite mediante il picnometro. Sciogliendo dello jodoformio nello joduro di metilene. è, però, possibile eseguire la determinazione del peso specifico degli epidoti clinozoisitici col metodo della sospensione, che conduce a risultati, come è noto, assai esatti. Ho creduto opportuno rideterminare il peso specifico della clinozoisite classica della Gosler Wand.

Fig 1

Fig. 2

Fig 3

Fig 4

Fig. 5

Ho impiegato tre piccoli cristallini, di colore roseo chiarissimo, quasi incolori, perfettamente limpidi e trasparenti, senza traccia di inclusioni, che furono staccati da un frammento di uno dei campioni originali del Weinschenk, stato donato anni indietro dall'illustre Prof. P. von Groth al Prof. Zambonini. Tutti e tre questi cristallini hanno fornito lo stesso valore per il peso specifico, e, cioè:

3.369 (a + 17° C.).

Questo valore conferma quello di Weinschenk e dimostra che quello fatto conoscere da Westergård è troppo basso.

Nei cristalli da me studiati della regione del Colle del Paschietto, io ho trovato:

Cristallo N.	5	peso spec.	3.379	a + 16° C.
" "	1 e 2	" "	3.380	
" "	4	" "	3.383	
" "	2	" "	3.385	

Questi valori sono lievemente più elevati di quello che spetta alla clinozoisite classica della Gosler Wand, ma sono assai più bassi di quelli che competono agli epidoti propriamente detti, nei quali il ferro trivalente è contenuto in quantità notevoli: in quello ben noto della Knappenwand si è trovato, infatti, 3.491.

Nel chiudere il mio breve studio, mi è gradito esprimere i sensi più vivi della mia riconoscenza al Prof. Zambonini, il quale, oltre ad offrirmi larga ospitalità nel laboratorio da lui diretto, e concedermi in istudio materiale rarissimo, di sua proprietà, con insegnamenti e consigli illuminati, mi fu guida preziosa nelle mie ricerche.

Un teorema di esistenza per equazioni integrali non lineari.

Nota di CINO POLI.

1. — In questa Nota dimostrerò l'esistenza di una soluzione per alcuni tipi di equazioni integrali non lineari, che si possono ottenere da problemi di variazione di integrali definiti.

Notevoli risultati sono stati ottenuti in questo campo in due differenti indirizzi. Da una parte i noti metodi di calcolo funzionale di V. Volterra (1) permettono di ottenere teoremi di esistenza per equazioni funzionali di tipo assai generale: la loro applicazione importa però condizioni restrittive sulle funzioni che si considerano. Il metodo delle successioni minimizzanti invece (2) è stato applicato finora solo a tipi particolari di equazioni funzionali, ma permette una generalità notevole per le funzioni da considerare.

Con questo metodo Holmgren (3) ha ritrovato il teorema di Hilbert sull'esistenza di una soluzione dell'equazione integrale lineare omogenea. G. Fubini (4) ha dimostrato l'esistenza di una f che soddisfà all'equazione non lineare

$$fx = \lambda \int_0^1 \int_0^1 K(x, y, z)(fy)(fz)\, dy\, dz$$

(1) V. Volterra, *Leçon sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Paris, 1913.

(2) D. Hilbert, *Ueber das Dirichlet'sche Prinzip*, Göttingen, 1901; "Mathem. Annalen „, 59 (1904), pp. 161-186.

(3) F. Holmgren, *Sur la théorie des équations intégrales linéaires*, "Arkiv för matematik, astr. och fysik „, 3 (1906), n. 1.

(4) G. Fubini, *Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali*, "Annali di matematica „, (3), 20 (1903), pp. 217-254, § 2.

risolvendo il problema di rendere minimo

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 K(x, y, z)(fx)(fy)(fz)\,dx\,dy\,dz$$

colla condizione

$$\int_0^1 (fx)^2\,dx = 1.$$

Un teorema generale sulle successioni di funzioni dato dallo stesso Autore (ma di cui egli non aveva fatto uso), mi ha permesso di dimostrare l'esistenza di una funzione φ che rende minimo o massimo

$$(1)\qquad \int_0^1 \dots \int_0^1 F(x_1 \dots x_r)(\varphi x_1)\dots(\varphi x_r)\,dx_1\dots dx_r$$

e di una che rende massimo

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \dots \int_0^1 F_i(x_1 \dots x_{2i})(\varphi x_1)\dots(\varphi x_{2i})\,dx_1\dots dx_{2i}$$

colla condizione

$$\int_0^1 (\varphi x)\,dx = 1,$$

in un modo che non manca, parmi, di rapidità e di eleganza.

Da questi risultati discende facilmente l'esistenza di una soluzione per le equazioni integrali non lineari

$$(3)\qquad \lambda\varphi x + \int_0^1 \dots \int_0^1 F(x, y_1 \dots y_r)(\varphi y_1)\dots(\varphi y_r)\,dy_1\dots dy_r = 0,$$

$$(4)\qquad \lambda\varphi x + \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \dots \int_0^1 F_i(x, y_1 \dots y_{2i-1})(\varphi y_1)\dots(\varphi y_{2i-1})\,dy_1\dots dy_{2i-1} = 0.$$

2. — Le funzioni che considero sono definite per tutti i valori delle variabili compresi fra 0 ed 1, i loro quadrati sono integrabili (secondo Lebesgue), e gli integrali sono sempre estesi da 0 ad 1.

Sovente scrivo $\int fp\,dp$ invece di $\int\dots\int f(x_1 \dots x_r)\,dx_1\dots dx_r$, indico cioè con p il complesso $(x_1, \dots, x_r)$.

TEOREMA. — *Sia* $u_1, u_2, \ldots$ *una successione di funzioni di* r *variabili, tale che* $\int (u_n p)^2 dp$ *abbia un limite superiore finito* H^2.

Esiste una successione $v_1, v_2, \ldots$ *etc. contenuta nella precedente, ed una funzione* w, *tali che* $\int (wp)^2 dp$ *esiste ed è* $\leq H^2$, *ed inoltre*

$$\lim_{n=\infty} \int (fp)(v_n p)\, dp = \int (fp)(wp)\, dp$$

qualunque sia la funzione f *purchè integrabile al quadrato* (¹).

La w si dirà funzione *quasi-limite* delle v.

Sia $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \ldots$ un sistema completo di funzioni ortogonali normali nell'intervallo $0 \vdash 1$; cioè:

$$\int (\varphi_i x)^2\, dx = 1\ ; \qquad \int (\varphi_i x)(\varphi_h x)\, dx = 0\ , \qquad i \neq h.$$

La u_n è individuata dalle sue coordinate in questo sistema, cioè dai valori delle costanti

$$a_{ni} = a_n(i_1, i_2, \ldots i_r) = \int\int \ldots \int u_n(x_1, x_2, \ldots x_r)(\varphi_{i_1} x_1)(\varphi_{i_2} x_2) \ldots \ldots (\varphi_{i_r} x_r)\, dx_1 \ldots dx_r\,. \tag{1}$$

L'insieme dei complessi $i = (i_1, i_2, \ldots i_r)$ può esser posto in corrispondenza biunivoca coi numeri interi, e quando questo si supponga fatto una volta tanto, posso indicare le coordinate di u_n con b_{nh} dove h è un intero.

Ciò posto, quando n tende ad ∞, b_{n1} ha un limite superiore d'indeterminazione finito β_1 (²). Cioè dato n esiste un $m > n$ tale che

$$|b_{m1} - \beta_1| < 1/n\,. \tag{2}$$

Chiamo $v_{1,n}$ quella u_m soddisfacente alla (2) in cui m è minimo, e $d_{1,n,h}$ le rispettive coordinate; quindi qualunque sia n

$$|d_{1,n,1} - \beta_1| < 1/n. \tag{3}$$

(¹) Cfr. G. FUBINI, loc. cit. La prima parte della dimostrazione seguente, cioè la dimostrazione dell'esistenza di una successione di u le cui coordinate tendono a limiti finiti e determinati, è affatto originale. Essa *non* fa uso del postulato di Zermelo. La seconda parte invece è calcata su quella del Prof. Fubini.

(²) Poichè $\sum b_{ni}^2 = \int (u_n p)^2\, dp \leq H^2$.

Analogamente le $d_{1,n,2}$ hanno un limite superiore d'indeterminazione β_2, e dato n esiste un $m > n$ tale che

$$|d_{1m2} - \beta_2| < 1/n \tag{4}$$

e chiamo $v_{2,n}$ quella $v_{1,m}$ che soddisfa alla (4) in cui m è minimo, e $d_{2,n,h}$ le sue coordinate. È chiaro che

$$|d_{2,n,2} - \beta_2| < 1/n$$

e

$$|d_{2,n,1} - \beta_1| = |d_{1,m,1} - \beta_1| < 1/m < 1/n.$$

In generale, supposto definiti $v_{r,n}$ e $d_{r,n,h}$ e avendo

$$|d_{r,n,i} - \beta_i| < 1/n \qquad (i \leq r) \tag{5}$$

osservo che $d_{r,n,r+1}$ ha per $n = \infty$ un limite superiore d'indeterminazione β_{r+1}, pel quale, dato n esiste un $m > n$ tale che

$$|d_{r,m,r+1} - \beta_{r+1}| < 1/n \tag{6}$$

e chiamo $v_{r+1,n}$ quella $v_{r,m}$ che soddisfa alla (6) e per la quale m è minimo, e $d_{r+1,n,h}$ le sue coordinate. È chiaro che

$$|d_{r+1,n,r+1} - \beta_{r+1}| < 1/n,$$

e anzi in virtù di (5)

$$|d_{r+1,n,i} - \beta_i| < 1/n \qquad (i \leq r+1). \tag{7}$$

Così restano definite per induzione completa le funzioni $v_{r,n}$ $(r, n = 1, 2, ...)$ estratte dalla successione data dalle u, e i numeri β_r $(r = 1, 2, ...)$ legati alle coordinate delle v dalla (7).

Pongo ora $v_n = v_{n,n}$, $B_{n,h} = d_{n,n,h}$. La (7) dà

$$|B_{n,h} - \beta_h| < 1/n \qquad (n \geq h).$$

Dunque, qualunque sia h,

$$\lim_{n=\infty} B_{n,h} = \beta_h.$$

Se ora i è il complesso corrispondente all'intero h, pongo

$$A_{n,i} = B_{n,h}, \qquad \alpha_i = \beta_h$$

e sarà

$$A_{n,i} = \int \dots \int v_n(x_1 \dots x_r)\, \varphi_{i_1}(x_1) \dots \varphi_{i_r}(x_r)\, dx_1 \dots dx_r$$

$$\lim_{n=\infty} A_{n,i} = \alpha_i . \tag{8}$$

Dunque ho trovato una successione $v_1, v_2 \dots$ contenuta in quella data delle u, tale che le coordinate delle r tendono a limiti finiti e determinati α.

Queste α saranno a lor volta coordinate di una funzione integrabile al quadrato, se è convergente la serie multipla $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2$. Ora si dimostra facilmente che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \leq H^2. \tag{9}$$

Infatti se ciò non fosse esisterebbe un complesso finito p tale che

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 > H^2.$$

ma per (8) si potrebbe trovare un n abbastanza grande per modo che

$$\left| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 - \sum_{i=1}^{p} A_{ni}^2 \right| < \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 - H^2,$$

onde

$$\sum_{i=1}^{p} A_{ni}^2 > H^2$$

contrariamente alla definizione di H.

Dunque le α sono coordinate di una funzione w per la quale

$$\int (wp)^2\, dp \leq H^2. \tag{10}$$

Dimostrerò ora che qualunque sia la f

$$\lim_{n=\infty} \int (fp)(v_n p)\, dp = \int (fp)(wp)\, dp. \tag{11}$$

Posto

$$\varphi_i p = (\varphi_{i_1} x_1)(\varphi_{i_2} x_2) \dots (\varphi_{i_r} x_r)$$
$$b_i = \int (fp)(\varphi_i p)\, dp$$

esiste un complesso k tale che

$$\int (fp - \sum_{i=1}^{k} b_i \varphi_i p)^2\, dp \leq \epsilon^2.$$

Per la disuguaglianza di Schwarz

$$|\int (wp)(fp)\, dp - \int wp \sum_{i=1}^{k} b_i \varphi_i p\, dp| \leq \epsilon \sqrt{\int (wp)^2\, dp} \leq \epsilon H$$

$$|\int (v_n p)(fp)\, dp - \int v_n p \sum_{i=1}^{k} b_i \varphi_i p\, dp| \leq \epsilon \sqrt{\int (v_n p)^2\, dp} \leq \epsilon H,$$

ed inoltre esiste un m tale che per $n > m$

$$|\int (v_n p) \sum_{i=1}^{k} b_i \varphi_i p\, dp - \int wp \sum_{i=1}^{k} b_i \varphi_i p\, dp| \leq \epsilon H.$$

onde

$$|\int (wp)(fp)\, dp - \int (v_n p)(fp)\, dp| \leq 3\epsilon H,$$

ossia resta dimostrata la (11).

In particolare se $fp = 1$ si ha

$$\lim_{n=\infty} \int v_n p\, dp = \int wp\, dp. \tag{12}$$

Terminerò con una osservazione che sarà utile nel seguito. Sia $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ una successione di funzioni di una sola variabile, che definisce una funzione quasi-limite ψ. La successione delle

$$u_n(x_1 \dots x_i) = (\varphi_n x_1)(\varphi_n x_2) \dots (\varphi_n x_i)$$

ha per funzione quasi-limite precisamente la

$$w(x_1 \dots x_i) = (\psi x_1)(\psi x_2) \dots (\psi x_i).$$

Infatti se $a_{n,h}$ è la h-esima coordinata di φ_n, e $a_h = \lim_{n=\infty} a_{n,h}$ quella di ψ, le coordinate di u saranno

$$A_{h_1, h_2, \dots h_i} = a_{n,h_1}\, a_{n,h_2} \dots a_{n,h_i},$$

ed avranno dei limiti determinati e finiti

$$A'_{h_1 h_2 \ldots h_i} = \alpha_{h_1} \alpha_{h_2} \ldots \alpha_{h_i} ,$$

che sono precisamente le coordinate di w.

Dunque sarà

$$\lim_{n=\infty} \int \ldots \int f(x_1 \ldots x_i)(\varphi x_1) \ldots (\varphi x_i)\, dx_1 \ldots dx_i =$$
$$= \int \ldots \int f(x_1 \ldots x_i)(\psi x_1) \ldots (\psi x_i)\, dx_1 \ldots dx_i$$

qualunque sia la f.

3. — Sia fp una funzione del complesso p d'ordine r e sia

$$\int (fp)^2\, dp = K^2. \tag{1}$$

Chiamo U l'insieme delle funzioni up di p tali che

$$\int (up)^2\, dp = 1. \tag{2}$$

Esiste una funzione U *che rende massimo o minimo l'integrale*

$$Iu = \int (fp)(up)\, dp. \tag{3}$$

Anzitutto per la disuguaglianza di Schwarz

$$|Iu| \leq K, \tag{4}$$

quindi il limite superiore L di $|Iu|$ in U è finito. Esisterà in U una successione $u_1\, u_2 \ldots$ tale che

$$\lim_{n=\infty} |Iu_n| = L, \tag{5}$$

e per il teorema del n. 2 vi è una successione $v_1 \ldots$ contenuta nella precedente che definisce una funzione quasi-limite w. E si avrà

$$\int (wp)^2\, dp \leq 1 ; \qquad \lim_{n=\infty} |Iv_n| = L \tag{6}$$

e per il teorema del n. 2

$$\lim_{n=\infty} \int (fp)(v_n p)\, dp = \int (fp)(wp)\, dp ,$$

quindi

(7) $$|Iw| = L.$$

Ma se pongo

$$up = \frac{wp}{\int (wp)^2 \, dp}$$

ho $\int (up)^2 \, dp = 1$ e

$$|Iu| = \frac{|Iw|}{\int (wp)^2 \, dp} = \frac{L}{\int (wp) \, dp},$$

onde non potendo $|Iu|$ superare L e tenendo presente la (6), ho

$$\int (wp)^2 \, dp = 1.$$

Cioè w appartiene ad U e quindi la (7) dimostra l'esistenza del massimo di $|I|$.

È chiaro inoltre che in virtù dell'osservazione fatta in fine al n. 2, il ragionamento precedente resta valido quando U sia l'insieme delle funzioni u della forma

$$up = u(x_1 \dots x_r) = (\varphi x_1)(\varphi x_2) \dots (\varphi x_r).$$

Cioè che fra le funzioni φ di una sola variabile tali che $\int (\varphi x)^2 \, dx = 1$, ne esiste una ψ che rende massimo o minimo

(8) $$I\varphi = \int \dots \int f(x_1 \dots x_r)(\varphi x_1) \dots \varphi(x_r) \, dx_1 \dots dx_r.$$

La funzione ψ ora definita soddisfà ad una equazione integrale non lineare.

Pongo

(9) $$\varphi = \lambda\psi + \mu\chi,$$

dove χ è una funzione arbitraria. La condizione

(10) $$\int (\varphi x)^2 \, dx = \lambda^2 + 2\lambda\mu \int (\psi x)(\chi x) \, dx + \mu^2 \int (\chi x)^2 \, dx = 1$$

determina λ in funzione di μ in un intorno di $\mu = 0$ e per modo che per $\mu = 0$, $\lambda = 1$, $\varphi = \psi$. Dunque

$$I\varphi = I(\lambda\psi + \mu\chi)$$

è una funzione di μ che ha un massimo o un minimo per $\mu = 0$, perciò

$$(11) \qquad \left[\frac{d}{d\mu} I(\lambda\psi + \mu\chi)\right]_{\mu=0} = 0.$$

Posto per brevità

$$(12) \quad I(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_r) = \int \dots \int f(x_1 \dots x_r)(\varphi_1 x_1)(\varphi_2 x_2) \dots (\varphi_r x_r)\, dx_1 \dots dx_r,$$

e supposta la $f(x_1 \dots x_r)$ invariante per sostituzioni circolari sulle x (¹), trovo

$$(13) \quad I(\lambda\psi + \mu\chi) = \lambda^n I(\psi \dots \psi) + n\lambda^{n-1}\mu I(\chi, \psi \dots \psi) + \dots + \mu^n I(\chi, \dots \chi),$$

e osservando che dalla (10) ho

$$(14) \qquad \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)_{\mu=0} = -\int (\psi x)(\chi x)\, dx,$$

risulta

$$(15) \quad \left(\frac{dI}{d\mu}\right)_{\mu=0} = -I(\psi \dots \psi)\int (\psi x)(\chi x)\, dx + I(\chi, \psi \dots \psi) = 0,$$

ossia

$$\int \chi z \left[\int \dots \int f(z, x_1, \dots x_{r-1})(\psi x_1) \dots (\psi x_{r-1})\, dx_1 \dots dx_{r-1} - L\psi z\right] dz = 0.$$

Dall'arbitrarietà di χ deduco

$$\int \dots \int f(z, x_1, \dots x_r)(\psi x_1) \dots (\psi x_{r-1})\, dx_1 \dots dx_{r-1} = L\psi z.$$

Posso dunque enunciare il teorema:

Se f *è una funzione di* r + 1 *variabili, integrabile al quadrato, esiste almeno un valore reale del parametro* λ *pel quale la equazione integrale non lineare in* φ

$$(16) \qquad \lambda \varphi x + \int \dots \int f(x, y_1, \dots y_r)(\varphi y_1) \dots (\varphi y_r)\, dy_1 \dots dy_r = 0$$

ammette una soluzione diversa da zero.

(¹) Questa ipotesi non è restrittiva. Potrei supporre ancora le f qualunque, e troverei che la ψ soddisfà ancora ad una equazione integrale in cui invece di f compare un nucleo formato con essa e che gode dell'invarianza per sostituzioni circolari.

4. — Sia ancora U l'insieme delle funzioni φ di una variabile reale tali che $\int (\varphi x)^2 \, dx = 1$ e consideriamo l'espressione

$$(1) \quad J\varphi = \sum_{i=1}^{n} \int \dots \int F_i(x_1 \dots x_{2i}) (\varphi x_1) \dots (\varphi x_{2i}) \, dx_1 \dots dx_{2i} = \sum_{i=1}^{n} I_i \varphi ,$$

dove le F_i sono tali che $I_i \varphi \geq 0$ qualunque sia la φ (anche non di U).

Generalizzando il metodo del n. 3 si dimostra l'esistenza di un massimo di Ju in U. Anzitutto, posto

$$(2) \qquad \int \dots \int [F_i(x_1 \dots x_{2i})]^2 \, dx_1 \dots dx_{2i} = H_i^2,$$

applicando la disuguaglianza di Schwarz ad ogni singolo $I_i \varphi$ (φ essendo in U) e sommando, trovo

$$(3) \qquad J\varphi \leq \sum_{i=1}^{n} H_i ,$$

quindi è finito il limite superiore L di $J\varphi$.

Scelta allora una successione φ_n in U, tale che

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} J\varphi_n = L ,$$

esiste una successione χ_n contenuta in essa, che definisce una funzione quasi-limite ψ. Cioè si avrà

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} I_i \chi_n = I_i \psi ; \qquad \int (\psi x)^2 \, dx \leq 1 ,$$

e quindi per (4)

$$(6) \qquad J\psi = L.$$

Dunque ψ sarà precisamente la funzione massimante J se appartiene ad U. Ora pongo

$$m = \int (\psi x)^2 \, dx \qquad \varphi x = \frac{\psi x}{m}$$

ed ho

$$J\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m^{2i}} I_i \psi \geq \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{n} I_i \psi = \frac{L}{m^2} ,$$

poichè $I_i \psi \geq 0$. Se dunque fosse $m < 1$ avrei il risultato assurdo $J\varphi > L$.

E anche ora si dimostra facilmente che la ψ che rende massimo J soddisfà ad una equazione integrale.

Supposto che le F_i siano invarianti per sostituzioni circolari sulle variabili, pongo come al n. 3, $\varphi = \lambda\psi + \mu\chi$ colla condizione (10), e tenendo presenti le (11), (12), (13) trovo

$$J(\lambda\psi + \mu\chi) = \sum_{i=1}^{n} I_i(\lambda\psi + \mu\chi) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\lambda^{2i} I_i(\psi \ldots \psi) + 2i\lambda^{2i-1}\mu I_i(\chi, \psi \ldots \psi) + \ldots + \mu^{2i} I_i(\chi \ldots \chi)],$$

$$\left[\frac{dJ(\lambda\psi + \mu\chi)}{d\mu}\right]_{\mu=0} = \sum_{i=1}^{n} [- I_i(\psi \ldots \psi) \int (\psi x)(\chi x)\, dx + I_i(\chi, \psi \ldots \psi)] =$$

$$= \int \chi z \left[\sum_{i=1}^{n} \int \ldots \int F_i(z, x_1 \ldots x_{2i-1})(\psi x_1) \ldots (\psi x_{2i-1})\, dx_1 \ldots dx_{2i-1} - \right.$$

$$\left. - (\psi z) J\psi\right] dz.$$

Poichè per $\mu = 0$ $J(\lambda\psi + \mu\chi)$ è massimo, l'espressione ottenuta è nulla, e ricordando che χ è arbitraria e che $J\psi = L$, ho

$$\sum_{i=1}^{n} \int \ldots \int F_i(z, x_1 \ldots x_{2i-1})(\psi x_1) \ldots (\psi x_{2i-1})\, dx_1 \ldots dx_{2i-1} = L\psi z.$$

Questo risultato dimostra che *esiste almeno un valore reale del parametro* λ *pel quale l'equazione integrale non lineare in* φ

$$\lambda\, \varphi x + \sum_{i=1}^{n} \int \ldots \int F_i(x, y_1 \ldots y_{2i-1})(\varphi y_1) \ldots (\varphi y_{2i-1})\, dy_1 \ldots dy_{2i-1} = 0$$

ammette una soluzione non nulla.

Torino, 7 marzo 1916.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 30 Aprile 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci Carle, Ruffini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 9 aprile.

Il Presidente S. E. Boselli comunica, con parole di vivo compianto, la morte dell'insigne letterato siciliano Senatore Giuseppe Pitrè, e propone siano espresse le condoglianze alla Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Palermo che inviò l'annunzio della perdita dolorosa. La Classe approva.

Il Presidente annunzia pure che, facendosi interprete presso il Ministero della Istruzione del voto unanime espresso dalla Classe nella sua adunanza del 27 febbraio, ha ottenuto che l'antico fiorino d'oro battuto dall'Ordine di Rodi, e sul quale è effigiato genuflesso Deodato di Gozono, gran maestro di quell'Ordine di Cavalieri, essendo stato trovato in Piemonte e precisamente nell'antica casa dei Provana, alcuni de' quali appartennero a quell'Ordine, sia conservato nel Museo Civico della nostra Città. Il Socio Vesme conferma che, come sopraintendente alle Gallerie e ai Musei medioevali e moderni del Piemonte, ha

già ricevuto l'invito a fare la consegna del fiorino al Museo Civico, e ritiene che di questo fatto sarà lieta non solo Torino ma tutta la regione Piemontese. E la Classe delibera sia ringraziato il Ministero per la presa deliberazione.

Il Presidente inoltre presenta alla Classe il recentissimo libro di Michele SCHERILLO " Niccolò Machiavelli *Il Principe e altri scritti minori* ", che fa parte di quella " Biblioteca Classica Hoepliana " di cui già non pochi volumi ebbero le dotte cure dello SCHERILLO che si compiacque farne omaggio all'Accademia insieme col benemerito editore Ulrico Hoepli per mezzo del Socio RUFFINI. Di questa nuova pubblicazione, cui aggiunge interesse e pregio una lettera di S. E. Antonio SALANDRA, discorre con rapida analisi il Presidente, facendo notare la dottrina, l'abilità, la profonda conoscenza degli scritti del Machiavelli, che si appalesano non solamente nel *saggio* introduttivo *La mente e l'opera di Niccolò Machiavelli*, ma anche nelle note, in cui si contengono preziosi riscontri fra pensieri e parole del *Principe* e degli altri scritti compresi nel volume, dei quali rileva e loda la scelta, e pensieri e parole di altre opere del Segretario fiorentino e del Guicciardini, non che di altri scrittori antichi e moderni, latini, italiani e stranieri. Al quale proposito il Presidente, dopo essersi intrattenuto a discorrere degli scritti più notevoli che concernono il Machiavelli, e dei quali si giovò lo SCHERILLO, pur conservando all'opera sua un'impronta propria e originale; e dopo aver fatta perciò menzione di quanto al riguardo fu dettato, fra altri, dalla penna dello Zambelli, del Macaulay, del Mancini, del Gioda e, segnatamente, del Villari e del Tommasini, autori delle due opere fondamentali e capitali per la conoscenza del Segretario fiorentino; ed essersi soffermato sulle polemiche cui il Tommasini vittoriosamente e argutamente rispose a sostegno del suo erudito, poderoso e compiuto lavoro; altamente si compiace che lo SCHERILLO, nella lettera, che serve di prefazione, a Sua Eccellenza Antonio SALANDRA, abbia preso le mosse da una recente ingiusta e ingiuriosa rievocazione del " gran nome del

nostro sommo statista, per gettarlo in viso al Governo d'Italia „.
Il Machiavelli non fu il freddo, il cinico maestro e banditore di una massima crudele e spietata da porsi in atto per opprimere l'indipendenza dei popoli deboli, per considerare come carta straccia i trattati che guarentiscono i diritti delle nazioni; ma egli, il maggior storico del suo tempo, egli creatore del metodo con cui si studiano i fatti e i loro moventi, egli fondatore della scienza ossia della filosofia della storia, fu ad un tempo maestro di dottrina politica rivolta interamente ad un grandissimo, nobilissimo scopo, la liberazione dell'Italia dall'oppressione interna ed esterna, la sua riunione in un sol corpo di nazione sotto un Principe italiano. Non fu politica che insegnasse a opprimere le nazioni deboli e pacifiche; fu politica che additava agli Italiani il modo di crearsi una patria secondo lo spirito nazionale. Di sentimento italiano più assoluto forse, più esclusivo che non fosse Dante, il quale pensava ad un'Italia unita sotto Alberto tedesco, il Machiavelli, che già aveva sperato nel Duca Valentino, si volgeva ad un Principe di Casa Medici perchè redimesse l'Italia " dalle crudeltà e insolenzie barbare „, perchè l'Italia vedesse " dopo tanto tempo un suo redentore „. Che se il Machiavelli, anzichè ne' tempi di Carlo III il Buono, fosse vissuto in quelli del figlio Emanuele Filiberto, del Principe che primo ordinò le milizie piemontesi appunto secondo gl'insegnamenti del " libro dell'arte della guerra „, e avesse perciò potuto conoscere il Piemonte e il grande guerriero e riformatore che vi regnava, ragion vuole si creda che al Principe piemontese sarebbero state rivolte le parole della " Esortazione a pigliare l'Italia, e liberarla dalle mani dei barbari „, che nessun Italiano può leggere senza viva, profonda commozione e gratitudine verso la memoria dell'immortale Fiorentino. Ben si comprende che la fama di Lui sempre più cresca nell'Italia presente liberata e unificata, e che cresca dovunque per l'indirizzo ch'egli diede alla scienza politica. — La Classe ringrazia, rallegrandosi vivamente, il Prof. Scherillo.

Il Socio Prato presenta il suo libro, nella traduzione francese di Georges Bourgin e nella seconda edizione (Paris, 1916), *L'Occupation Militaire dans le Passé et dans le Présent. Barbarie ancienne et civilisation moderne.* In questo libro si fa il confronto dei metodi di guerra dei secoli XVII e XVIII e delle consuetudini allora vigenti nella occupazione militare del paese invaso con quelli praticati nella guerra presente. — La Classe ringrazia il Socio Prato.

Il Socio Stampini presenta il discorso, inviato in dono alla Accademia, che S. E. Ugo Da Como tenne con dotta, elegante, efficace, calda parola per l'inaugurazione dell'anno accademico dell'Ateneo di Brescia, di cui è Presidente, e che porta per titolo *Mentre si combatte.* Al patriottico e sapiente discorso è premessa una lettera del nostro Presidente S. E. Boselli, che esprime il suo plauso e la caldissima ammirazione. — La Classe ringrazia S. E. Da Como.

In secondo luogo il Socio Stampini presenta la monografia del Socio corrispondente Giuseppe Zuccante, stampata nei *Rendiconti* del Reale Istituto Lombardo, in cui il chiarissimo storico della filosofia illustra, con la consueta diligenza, dottrina e finezza, la figura di *Antistene,* da cui la monografia s'intitola, " fondatore della scuola che chiamarono dei *Cinici* e Aristotele " diceva degli *Antistenei* ", e la sua dottrina. Di questo scritto sarà complemento un altro che avrà per oggetto Antistene nei dialoghi di Platone. — La Classe ringrazia il Prof. Zuccante.

In fine il Socio Stampini presenta il primo volume della recentissima edizione critica delle epistole morali di Seneca, curata dal Prof. Achille Beltrami della R. Università di Genova, col titolo *L. Annaei Senecae ad Lucilium Epistularum moralium libros I-XIII ad codicem praecipue Quirinianum recensuit . . . . .* (Brixiae, MCMXVI). Scopritore del codice Quiriniano di quell'opera di Seneca, già ampiamente illustrato con dotti articoli nella " Rivista di filologia e d'istruzione classica " da lui stesso e, per l'importanza paleografica, anche da Carlo Cipolla nella

medesima Rivista, il BELTRAMI ci dà ora, dopo parecchi anni d'intenso lavoro, la prima parte di una edizione critica, condotta specialmente su quel codice, la quale può stare a pari coi migliori lavori di tal genere e fa onore, non solo all'autore, ma anche all'Ateneo di Brescia che ha sostenuto le non lievi spese di stampa. Il BELTRAMI fa uso, così nella *Praefatio* come nelle annotazioni critiche, della lingua latina con facilità e sicurezza; ed anche per questo gli si deve uno speciale elogio. Il referente poi prende occasione da questa presentazione per augurarsi che in Italia non si metta mano a pubblicare testi così detti critici de' classici greci e latini, se non per dare edizioni in cui si abbia, come in quella del BELTRAMI, anche se in proporzioni più modeste e ristrette, il risultato di un lavoro proprio, di ricerche, confronti, congetture proprie, e che non siano già, per contrario, semplici riproduzioni, come pur troppo è già avvenuto, di edizioni straniere, con pochissima o anche nessuna traccia di un vero nuovo lavoro personale e con poco decoro degli studi italiani. — La Classe ringrazia e si rallegra col Prof. BELTRAMI.

Il Socio D'ERCOLE presenta, per la pubblicazione negli *Atti*, una seconda ed ultima *Nota* del Prof. Arturo MONI su *Le prime categorie naturali o i concetti di spazio, tempo, moto, secondo la filosofia hegeliana*.

LETTURE

Le prime categorie naturali o i concetti di spazio, tempo e moto secondo la filosofia hegeliana.

Nota II di ARTURO MONI.

XV.

Immediatamente, il moto è il rapporto dello spazio al tempo, cioè la Velocità. La velocità è la determinazione, uno per mezzo dell'altro, dei due termini che, uniti, fanno il moto. Però, appunto perchè ciascuno di cotesti termini è determinato nella velocità solo per mezzo dell'altro, nessuno dei due vi è determinato di per sè di fronte all'altro. Quindi è che la velocità non è, come rapporto dello spazio al tempo, un rapporto *determinato*, ma soltanto l'*universalità* del rapporto, ossia la semplice *possibilità* di tutti i rapporti effettivi. Una tal semplice possibilità è intanto l'opposto del moto, cioè la Quiete.

Spazio e tempo sono, come si è veduto, determinazioni opposte. Ora la velocità dice soltanto che coteste determinazioni stanno fra loro in un certo rapporto, ma non dice *quale sia* questo rapporto. Data una certa velocità, dallo spazio percorso (cioè dal *quanto* spaziale) si ricava il tempo impiegato a percorrerlo (il *quanto* temporale) e viceversa. Ma, appunto, la velocità è *data*, ossia noi la *presupponiamo*, per quel calcolo. Questo è il difetto della velocità come tale, di esser soltanto un *dato*, di non essere ancora determinata di per sè stessa, dal suo concetto, di non valere ancora come ragione delle diverse velocità effettive, di non essersi ancora elevata fino ad essere il principio della sua propria differenziazione. A cagione di cotesto difetto la determinazione della velocità, venendo dal di fuori, è accidentale; e la velocità stessa, dal canto suo, non riesce ad esprimere *il* rapporto dello spazio al tempo, cioè il moto, che in una maniera affatto indeterminata: come *proporzionalità* degli spazi percorsi ai tempi impiegati a percorrerli. Questa proporzionalità non è altro, infatti, che la pura e semplice identità del rapporto con se stesso, il suo rimanere eguale a sè, ossia, appunto,

com'è detto nell'articolo, la sua *universalità*. (La proporzione rimane ferma in tutte le velocità possibili, o qualunque sia il rapporto che leghi fra loro lo spazio e il tempo). Perciò, mentre spazio e tempo, come opposti (epperò determinati l'uno rispetto all'altro), *debbono* star fra loro in un rapporto determinato, la velocità in quanto non è che il loro generico riferirsi l'uno all'altro, non *specifica* cotesto rapporto; quindi non soddisfa all'*esigenza* che è posta dal concetto del moto. La velocità è, sì, immediatamente, *una certa* velocità, ma non dipende dal suo concetto, che sia questa piuttosto che quella. Non essendo allora specificato il rapporto, non è specificato nemmeno il *quanto* (che appunto dev'esser *rispettivo*) dei termini. Così, tutto restando abbandonato alla determinazione *ab extra*, quel calcolare in base a una velocità *data* non è che un puro formalismo, che non fa conoscer nulla di ciò che il moto è come realtà naturale. — Il concetto della velocità si sviluppa per tre momenti, che sono la Velocità come tale, la Tardità, e la Costanza (dell'una o dell'altra), cioè l'equabilità o uniformità del moto. La velocità come tale e la tardità non sono che le due forme, immediatamente opposte ed identiche, dell'universalità del rapporto fra spazio e tempo. Quella è il rapporto come rapporto del primo al secondo; questa il rapporto cosiddetto inverso o reciproco, cioè come del secondo al primo. (Ogni rapporto è infatti doppio, a seconda del punto di vista che vien scelto). A cagione pertanto dell'assoluta vuotezza di cotesta differenza fecero bene i matematici, per i quali non si trattava che di misurare e calcolare, a non considerare in particolare la categoria della tardità (come poi nemmeno quella del moto uniformemente ritardato), giacchè il *quanto* di questa si desume immediatamente dal *quanto* della velocità. (Sette gradi di velocità sono un settimo di grado di tardità, e l'una espressione non presenta al pensiero nulla di diverso dall'altra). Velocità e tardità cadono quindi assolutamente insieme, ossia sono una medesima *costanza*. Quanto a questa, poi, essa non è, considerata di per sè, se non l'astratta identità, appunto, di quei due opposti, la velocità e la tardità. Quindi è che l'espressione di " velocità *costante* ", colla quale si crede di dire qualcosa di più che non con quella, pura e semplice, di " velocità ", dice invece precisamente lo stesso. L'epiteto non aggiunge nulla al sostantivo, dal punto di vista del concetto. Per questo, infatti, *la* velocità (o tardità — che è lo stesso) è costante per la sua stessa natura, giacchè, se non fosse tale, non sarebbe *una* velocità, ma *molte diverse* (e la diversità, qui, il concetto non l'ha ancora *posta*, ma è soltanto *data a noi* dalle osservazioni che facciamo). In generale, il durare di una cosa non aggiunge nulla alla cosa stessa, a *quello che* essa è. Ora la costanza non è appunto altro, per la velocità, che il suo durare, la sua semplice identità con sè, il suo essere. Perciò

il moto equabile o uniforme è il moto come semplice universalità del moto, la velocità senz'altro, e non già soltanto una *specie* di moto. Nei trattati di meccanica si suol leggere: Il moto è uniforme o vario; come se coteste fossero due specie di pari dignità. Ma il vero è che il moto uniforme non è, come specie di moto, altro che l'universalità o il genere del moto, in quanto viene a contrapporsi alla sua particolarità o al moto vario. Qui sta il fondamento della riduzione del moto vario a un numero infinito d'infinitamente brevi moti equabili, riduzione del tutto analoga a quella che vien fatta della curva a un numero infinito di rette infinitamente piccole. Come la linea retta non è che la linea *sic et simpliciter*, cioè l'universalità stessa della linea, in quanto *esistente*, così il moto equabile è equabile solo perchè è semplicemente moto, e non ancora differenza o particolarità del moto. Se coteste, del moto equabile e della linea retta, fossero soltanto specie, o, come si dice, " casi particolari ", la riduzione anzidetta non avrebbe senso. Ma essa ha un senso in quanto presuppone quello a cui vien fatta la riduzione, od in cui viene operata la risoluzione, come l'universale, in sè, di quello che vien ridotto o risoluto. Certo, questo universale non si può avere nella natura, ossia non *esiste*, che sotto la forma di un particolare contrapposto a un altro particolare, ma ciò non toglie che sia, epperò debba anche esser riconosciuto, come l'universale. — La riflessione estrinseca, propria della scienza empirico-matematica, non conosce (secondo il concetto) nè lo spazio, nè il tempo, nè il moto, ma presuppone soltanto le rappresentazioni che di essi si trovano già nell'ordinaria coscienza, e che bastano al còmpito suo di misurare e calcolare. " Tempus, Spatium, Locum et Motum — dice Newton — *ut omnibus notissima*, non definio " (*Philosophiae naturalis principia mathematica. Schol. ad. Def.* VIII). " On ne définit ni le temps ni l'espace, mais il suffit à la Géométrie et à la Dynamique que nous puissions mesurer les dimensions des corps et les durées de leurs mouvemens " (POISSON, *Traité de Mécanique*, 2e éd., tome I, pag. 204). Ora la proposizione che il moto in generale, cioè la velocità, non differisca dalla quiete urta cotesta riflessione appunto perchè questa, mentre da un lato ritiene esaurita, in tali rappresentazioni, la universale conoscenza di quegli oggetti che considera, dall'altro lato, ogni qualvolta si parli di spazio, tempo, o velocità, intende sempre uno spazio, un tempo e una velocità determinati, cioè un *quanto* di ciascuno. Se non che nella proposizione anzidetta non è questione di *una certa* velocità (cioè del rapporto di *un certo* spazio a *un certo* tempo), ma semplicemente *della* velocità (proprio come l'Essere, che la logica mostra identico al Nulla, non è l'Essere determinato, il Qualcosa, — i cento talleri di Kant —, ma soltanto l'Essere come tale). L'unica cosa da fare quindi, per l'intelletto,

è anche qui di pensare l'oggetto in sè e per sè, rimovendone quelle determinazioni senza le quali, certo, l'oggetto non è nulla di reale, ma che intanto però mutano senza che muti la sua natura. Non soddisfacendo l'intelletto a questa esigenza, le obbiezioni sue contro la legittimità del passaggio dal concetto di velocità a quello di quiete cadon da sè, in quanto che prendon di mira tutt'altra cosa da quella di cui, soltanto, s'intendeva parlare. — Per la stessa riflessione estrinseca quello che è il concetto, come tale, della velocità, la proporzionalità degli spazi ai tempi, non suol valere che come " legge „ del moto equabile, ossia piglia l'aspetto di esser *una*, soltanto, fra le determinazioni che il concetto pone. In geometria non si riguarderebbe come una *proprietà* del triangolo, di aver tre angoli, questa essendo senz'altro la sua definizione data nella parola stessa, ma si riserba giustamente il nome di *proprietà* ad altre determinazioni non contenute *in maniera immediata* nel concetto, come, p. es., a quella che ogni angolo esterno sia eguale alla somma dei due interni opposti, ecc. Qui invece la mania di voler aver tutto come un resultato dell'indagine *a posteriori* ha fatto chiamar " legge „ anche quello da cui cotesta indagine stessa prende le mosse, vale a dire il concetto, o la definizione, della cosa. — Finalmente, a proposito di un accenno già dato qui sopra, si può notare che anche il *passaggio* dal concetto di velocità a quello di quiete (almeno nella maniera com'è stato esposto) è affatto analogo a quello che si compie, nella logica, dall'Essere al Non essere. In ambedue i casi, infatti, è l'indeterminatezza quella che apre la via. Nel caso presente la velocità, per esser *qualunque* rapporto dello spazio al tempo, *non ne è alcuno*, ossia è quella irrelatività tra spazio e tempo, quell'indipendenza di ciascuno di essi dall'altro, nella quale consiste appunto la quiete.

XVI.

Poichè il moto come semplice moto, ossia la velocità, non è che quiete, la quiete è il moto in quanto si presuppone come il proprio altro, affin di potere, mediante la negazione di questa sua negazione, esser concretamente per sè come moto. Lo spazio e il tempo, di cui il moto era, come loro rapporto, anzitutto l'unità, cadono quindi, nella quiete, di nuovo uno fuori dell'altro, ossia tornano ad essere reciprocamente indifferenti o irrelativi. La quiete è questa loro indifferenza o irrelatività.

Che la quiete sia la reciproca irrelatività dello spazio e del tempo si può vedere anche dalla semplice considerazione che nella quiete lo

spazio percorso essendo nullo, questa nullità rende nullo l'intero rapporto (ossia gli dà il valore zero). Viceversa: quando la velocità è nulla, anche lo spazio percorso è nullo, epperò non si dà alcun rapporto dello spazio percorso al tempo. — La velocità era la contraddizione secondo la quale i punti sono nella traiettoria come *molti*, e insieme anche come *uno stesso* (in quanto la traiettoria vien percorsa, ossia si distrugge la reciproca esteriorità dei punti che contiene). La quiete è ora l'astratta o immediata soluzione di questa contraddizione, in quanto l'esser l'uno fuori dell'altro i punti (cioè lo spazio), e il loro essere uno stesso (cioè il tempo) non sono più *insieme*, non costituiscono più una stessa determinazione (dal che nasceva la *contraddizione*), ma si presentano come due determinazioni diverse (onde la contraddizione cessa). Queste due determinazioni, come diverse, sono spaziali, esistono, cioè, una fuori dell'altra nello spazio, come una linea e un punto che è fuori di essa linea ed a cui questa si riferisce (più in particolare come periferia e centro). Onde la quiete è rispetto al moto quello stesso che era, rispetto alla figura, la linea della linea, vale a dire il piano (triangolo, e più in particolare, settore). Tutto questo si può ricavare anche dalla volgarissima osservazione che per giudicare quale di due corpi sia in moto e quale in quiete, non bastano questi due corpi, che rappresentano soltanto i punti estremi della linea o della traiettoria che si vien sviluppando, ma occorre un punto di riferimento in un terzo corpo. Questo terzo corpo è allora la quiete che *appare*, ossia si è data una esistenza sensibile, spaziale, come quello per cui il moto si distingue dalla quiete stessa, o si fa moto *conosciuto come moto.* O, in altre parole, in cotesto corpo si ha l'identità dei *molti* punti della traiettoria, estrinsecatasi essa stessa, cotesta identità, sotto la forma di un altro punto che è *fuori* della traiettoria. Così in astronomia la quiete è il predicato del corpo centrale. — Per l'analogia che ha la relazione della quiete verso il moto con quelle dell'istante verso il tempo e del punto verso lo spazio potè Zenone supporre (come credeva che il tempo si componesse d'istanti e quindi necessariamente anche lo spazio di punti) che il moto si componesse di quieti, epperò *non fosse.* Ma l'opposizione dell'Ora e del Non ora, del Qui e del Non qui, sulla quale si basa il terzo argomento di Zenone in quanto suppone che la freccia *sia* (senza che insieme *non sia*) in un certo istante in un certo punto, è proprio quella dalla cui negazione, soltanto, risulta il concetto del moto, il quale non può quindi esser pensato, ossia vien negato dal pensiero, fintantochè questo, attaccandosi a quell'opposizione e tenendola ferma, respinge da sè e dall'opposizione il contrario dell'opposizione stessa, cioè l'identità secondo la quale così il Qui come l'Ora sono assolutamente universali (dappertutto è qui, e sempre è ora). Argomentazioni dalla posizione del punto alla

negazione dello spazio, o dalla posizione dell'istante alla negazione del tempo, simili, cioè, all'argomentazione zenoniana dalla posizione della quiete alla negazione del moto, non sarebbero possibili; perchè nè il punto nè l'istante (malgrado l'analogia anzidetta della loro relazione verso lo spazio e il tempo con quella della quiete verso il moto) son *di natura diversa*, rispettivamente, da quella di coteste due universalità alle quali si riferiscono. Rimangono infatti, anche come negazioni, la semplice identità con sè sia dell'una sia dell'altra di quelle due astrazioni che si chiamano spazio e tempo. Quindi il punto, pur essendo negazione dello spazio, non nega però lo spazio *completamente*, perchè anzi è esso stesso nello spazio, e non sarebbe se questo non fosse; e così anche l'istante rispetto al tempo. Ma il paralogismo (*Ζήνων δὲ παραλογίζεται*, dice Aristotele) doveva venir fuori a proposito del moto, perchè il moto essendo il ritorcersi di ciascuna di quelle opposte astrazioni contro sè stessa, epperò il loro unirsi in un concreto che le lega, l'intelletto, che non trova difficoltà a pensare astrattamente, o separatamente, le due astrazioni, deve, per pensare il concreto, disfarsi di quella sua astratta maniera di pensare, mentre questo non può aver luogo (dico questa *disintellettualizzazione* dell'intelletto) se non in quanto l'intelletto continui ancora, per un lato, a pensare astrattamente, negando il concreto, ossia paralogizzando, con Zenone, contro il moto. La difficoltà, che allora mette nell'imbarazzo l'intelletto, non è altra da quella per cui, nella logica, riesce malagevole di afferrare il concetto dell'*unità negativa*, cioè, in generale, del Divenire. Il concreto è soltanto per il concreto, non per l'astratto, epperò il moto non è per l'intelletto (Zenone), ma o per la semplice intuizione (Diogene che passeggia nella scuola) oppure per la ragione (Aristotele).

XVII.

Il difetto della quiete è che, come ogni opposizione, essa non si sostiene se non in grazia di quell'unità ch'essa nega. Ma l'unità che vien negata dalla quiete è il moto. Perciò la quiete non è quello in cui il moto come semplice velocità si risolve, se non in quanto è essa stessa, a sua volta, quello che si risolve nel moto. Ora il moto che risorge così dalla quiete non è più l'astratta universalità del moto, la semplice velocità; è il moto che si riproduce in sè stesso come negazione della sua negazione. In questo riprodursi, o in questa nuova immediatezza mediata dal togliersi via la negazione, il moto rigetta da sè

come sue morte e ormai indifferenti esteriorità tanto la quiete quanto la velocità, ed è per sè come moto nell'Accelerazione.

Come negazione *del rapporto* fra spazio e tempo, la quiete non è altro che cotesto rapporto stesso posto come negativo. Vale a dire che dove lo spazio e il tempo cadono uno fuori dell'altro, o sono irrelativi, essi stanno fra loro appunto nel rapporto di questa irrelatività, di questa indipendenza di ciascuno di essi dall'altro. Perciò la quiete non è già soltanto l'opposto del moto, ma è addirittura *il moto* in quanto si oppone a sè stesso, uscendo dalla sua astratta universalità per entrare nella sua particolarità. Essa è così il *limite della velocità*, e ciò tanto come velocità *infinita* quanto come *infinita* tardità, secondo che si sia preso per base, in questa irrelatività, lo spazio oppure il tempo. Così se il moto è per la quiete, la quiete a sua volta è per il moto. Moto e quiete son dunque due astrazioni ciascuna delle quali esiste, ossia ha l'essere concreto, solo come negazione dell'altra. Quindi è che non si può pensar soltanto la quiete, nè soltanto il moto, ma ciascuno è pensato solo in relazione al suo opposto. Il moto, infatti, come negazione *della distanza*, abbisogna di questa, che, in quanto persiste, o si sostiene contro quella sua negazione, è la quiete. Ma viceversa la distanza non *si sostiene* contro quella sua negazione, la reciproca esteriorità dello spazio non *dura*, se non per la presupposizione di quella sua negazione o di quel suo *passare*, che è il moto. L'accelerazione è ora appunto questo risolversi del moto nella quiete e della quiete nel moto, la realizzazione del concreto come negazione dell'un'astrazione per mezzo dell'altra, e così il *moto del moto*, un Divenire dove il lato del Non essere è rappresentato dalla quiete, e quello dell'Essere, dal moto.

XVIII.

Come rapporto ancora indeterminato, o generalità di ciò che lo spazio si riferisce, così semplicemente, al tempo, la velocità non era, nel fatto, se non l'assoluta irrelatività di ciascuno di quei termini rispetto all'altro, la loro reciproca indipendenza, la quiete. Ma nell'accelerazione, quale unità della velocità colla quiete, il rapporto dello spazio al tempo si determina come rapporto di quella generalità alla sua negazione, o alla irrelatività, cioè come rapporto del moto in generale alla quiete. Quindi l'accelerazione è il determinarsi la velocità di per sè stessa, in quanto sorge come negazione della sua nega-

zione. Il moto si è così compiutamente realizzato nel suo concetto, secondo cui esso non è già semplicemente quel *qualunque* rapporto dello spazio al tempo, ma *il* rapporto in cui spazio e tempo si riferiscono l'uno all'altro *secondo la propria natura di ciascuno di essi*, ed in cui pertanto il primo figura come il positivo, l'esplicato, il Quadrato, il secondo invece come il negativo, l'implicato, la Radice.

Di quelle che si assegnano come " leggi " del moto (uniformemente) accelerato, la prima, cioè che le velocità crescono proporzionalmente ai tempi, non è, al solito (v. la nota all'art. XV), che la definizione stessa di quello di cui si tratta, e la seconda, cioè che gli spazi stan fra loro come i quadrati dei tempi, ne è la conseguenza immediata. Noi avemmo prima di tutto lo spazio astratto, poi la sua negazione, particolarizzazione o determinazione parimente astratta, il tempo, e infine l'unità concreta dell'uno coll'altro, il moto. Solo in quest'ultimo lo spazio e il tempo appaiono come determinati, ossia valgono respettivamente come spazio *percorso* e tempo *impiegato* a percorrerlo; fuori del moto, invece, essi non erano che generalità vuote, le due forme naturali, continua e discreta, della *quantità* pura, che non valevano ancora come *quanti* spaziali e temporali. Se ora si domandi in che consiste una tale unità dello spazio col tempo, cotesto equivarrà a domandare qual è il rapporto dello spazio come *percorso* al tempo come *impiegato*. E la risposta sarà che un tal rapporto, così *in generale*, cioè prescindendo da *quello che sono* lo spazio e il tempo l'uno rispetto all'altro, è anch'esso un'astrazione, una semplice generalità, la velocità. Se non che considerare un rapporto *in generale* non è considerarlo come rapporto, giacchè nella generalità va perduta la differenza, senza la quale il rapporto non è *rapporto*. Noi non possiamo dunque prescindere, nel considerare il moto, da *ciò che sono*, l'uno rispetto all'altro, i due elementi dalla cui unione esso risulta, giacchè facendo così abbiamo anzi la negazione del rapporto, l'irrelatività. Perciò la velocità, in cui la differenza essenziale o *rispettiva* dello spazio dal tempo e viceversa è trascurata, non è la vera, adeguata espressione del loro rapporto, non è il *vero moto*, ma noi dobbiamo passare, attraverso la negazione di quell'espressione, cioè attraverso l'irrelatività o la quiete, all'espressione *nuova*, che sola è *vera*: l'accelerazione. Quello che è il tempo astratto rispetto allo spazio astratto, è la quiete rispetto al moto, cioè la determinazione; e quello che è il moto in generale rispetto allo spazio, è il moto quale accelerazione rispetto al moto qual velocità, vale a dire il determinato. Nell'accelerazione dunque (ossia nel *moto del moto*) lo spazio si riferisce doppiamente al tempo, una volta come spazio astratto al

tempo astratto, in quanto l'accelerazione, come moto, è anzitutto il rapporto di queste due generalità, e un'altra volta come moto alla quiete, poichè nel moto è contenuto lo spazio, e l'accelerazione è in particolare il moto come relazione del moto (epperò di nuovo dello spazio) a cotesta sua negazione (che è insieme anche negazione dello spazio, ossia tempo). Da questa considerazione *qualitativa* del rapporto in cui sta, nell'accelerazione, lo spazio verso il tempo ci riuscirà ora facile vedere perchè, *quantitativamente*, cotesto rapporto abbia ad esser quello del Quadrato alla Radice. È che nel rapporto *aritmetico* (nel semplice senso di " numerico ") del quadrato alla radice, si ha, come nel rapporto *meccanico* del moto alla quiete, il doppio riferirsi dell'universalità (numero o spazio) alla determinazione (unità o tempo). Come infatti qui, nell'accelerazione, lo spazio si riferisce doppiamente al tempo, in quanto gli si riferisce come il moto alla quiete, così là, nel rapporto del quadrato alla radice, il numero, l'universalità del quanto, si riferisce doppiamente all'unità. Giacchè il quadrato è il numero che si riferisce all'unità una volta come alla determinazione universale del numero (per il che da astratta o indefinita pluralità diventa questo certo numero determinato), e un'altra volta come alla particolare determinazione sua che lo distingue, come numero determinato, da ogni altro (per il che il numero si moltiplica per sè, ossia appunto si quadra). E la radice quadrata, viceversa, è il numero che è preso *doppiamente* nel rapporto alla determinazione universale, ossia che è medio proporzionale fra sè come quadrato e l'unità, a quel modo stesso che la quiete è il tempo in quanto è *per la seconda volta*, nell'accelerazione, negato dallo spazio. La cosiddetta legge che gli spazi percorsi son proporzionali ai quadrati dei tempi impiegati a percorrerli, non è dunque se non l'espressione *matematica* (di quello di cui qui si mostra la necessità *logica*, che cioè lo spazio (il quale come realizzato nel moto, o come *percorso*, è ormai divenuto suscettibile della determinazione quantitativa) sta al tempo (determinato anch'esso quantitativamente) nel preciso rapporto del Quadrato alla Radice. Messa così in rilievo l'identità del rapporto *meccanico* dello spazio che si riferisce al tempo qual moto alla quiete col rapporto *aritmetico* del numero che si riferisce all'unità qual quadrato alla radice (ossia rilevata la pura *formalità* della differenza fra i due rapporti), cessa il bisogno di " provare " la legge (la quale perciò cessa anche di essere, rigorosamente parlando, una " legge "). Non essendovi nulla, qui, che sfugga al pensiero conducentesi semplicemente come pensiero (cioè come pura ragione *logica*), non v'è nemmeno nulla che debba per avventura abbandonarsi al cieco meccanismo del calcolo, o alla riflessione estrinseca di una dimostrazione *more geometrico*, senza nemmeno parlare degli esperimenti per mezzo di macchine. Quando la necessità della propor-

zionalità degli spazi ai quadrati dei tempi (per aver la quale si ricorreva appunto alla " prova „) non risultasse chiara dai *concetti* dianzi esposti di ciò che sono spazio, tempo, moto, quiete, e accelerazione, cotesta necessità si troverebbe del resto nella considerazione che se la velocità è *in generale* (cioè come semplice velocità o velocità costante) il rapporto dello spazio al tempo, là dov'essa *si particolarizza*, ossia dove quel rapporto diventa proporzionale al tempo, lo spazio entra necessariamente verso di questo nella duplicata proporzione, ossia varia in ragione del quadrato del tempo. E così pure si troverebbe, cotesta necessità, anche nell'altra considerazione, che se lo spazio, nel moto equabile, è in ragione composta della velocità e del tempo, bisogna che sia come il moltiplicarsi per sè tanto dell'una quanto dell'altro, quando quella venga a crescere in ragione di questo, ossia quando tutti e due acquistino verso le loro unità una sola e medesima ragione. Tali son le semplicissime considerazioni sulle quali si basa la deduzione della cosiddetta legge del moto accelerato dal *concetto* dell'accelerazione, considerazioni che nondimeno, con tutta la loro semplicità, non sembra siano state intese, recentemente, da un matematico d'altronde apprezzato per i lavori relativi alla sua scienza, il Prof. Enriquez di Bologna. Egli non avrebbe infatti parlato così leggermente, nel suo scritto intorno a Hegel (pubblicato dalla *Revue de Métaphysique et de Morale*), della " pretesa dimostrazione „ che questi aveva dato della legge della caduta, se, intendendo quelle considerazioni, avesse potuto anche accorgersi ch'eran proprio quelle medesime in cui (tolto via l'apparato intellettualistico) stava tutta la sostanza e il nerbo della stessa dimostrazione galileiana. " Verum in quarta propositione primi libri — dice infatti Galileo — demonstratum est, mobilium æquabili motu latorum spatia peracta habere inter se rationem compositam ex ratione velocitatis, et ex ratione temporum: *hic autem ratio velocitatum est eadem cum ratione temporum* [e questo vien da sè dalla definizione, senza bisogno di figura]; *ergo ratio spatiorum peractorum dupla est rationis temporum* „.

Come unità negativa del moto e della quiete l'accelerazione è il loro porsi come contrapposti l'uno all'altro, ossia è lo scindersi del concetto del moto nei suoi due momenti di universalità e particolarità. Il moto che pur come moto è quiete rispetto a un altro moto, è la velocità rabbassata a semplice velocità *iniziale*, da cui, come dalla quiete, *comincia* il moto quale accelerazione. Viceversa il moto che ha tolta da sè cotesta contraddizione secondo la quale esso non era ancora, come moto, che nella forma della quiete, è il moto come velocità *acquistata*, in cui, come nella quiete, il moto quale accelerazione *finisce*, mentre l'unità della velocità iniziale coll'acquistata, ossia l'*acquisto* della velocità, per cui insieme si realizzano le due velocità come contrapposte

l'una all'altra, è l'accelerazione stessa, il moto del moto, o il suo *divenire*. Ma se l'accelerazione è il porsi della differenza fra il moto che è per sè come quiete e il moto che è per sè come moto (il realizzarsi cioè delle due velocità, iniziale ed acquistata, come diverse l'una dall'altra), essa è anche *in sè* il togliersi di cotesta differenza, essendo appunto, come accelerazione, l'unità delle due forme di quiete e moto. Questa negazione di sè stessa che l'accelerazione è *in sè*, è quella che *appare* o si *realizza*, come passaggio dell'accelerazione nell'opposto di ciò ch'essa è immediatamente, vale a dire come passaggio nel Ritardamento, o nel processo per cui va cancellandosi quella differenza fra la velocità iniziale e l'acquistata, nel cui sorgere era consistita l'accelerazione. Ma siccome il ritardamento ha per risultato la quiete, e per quiete noi non possiamo ormai più intendere la quiete astratta (astrattamente identica al moto), ma soltanto la forma della velocità iniziale, cioè quello da cui comincia l'accelerazione, così anche il ritardamento non è, a sua volta, se non un passar nel suo opposto, che è l'accelerazione. Perciò l'accelerazione è essenzialmente accelerazione verso il ritardamento, e il ritardamento, ritardamento verso l'accelerazione. Ciascuno dei due opposti, attraverso l'altro, torna a sè e si conclude con sè. Questo concludersi è la loro vera infinità, non esclusiva della loro finità, cioè del loro limitarsi l'un l'altro per il proprio concetto di ciascuno. L'immaginazione invece, quando prende l'accelerazione e il ritardamento come *semplicemente* infiniti (o senza limite), li ha nel fatto soltanto come finiti, in quanto che prescindendo da ciò che il limitarsi reciprocamente è il proprio concetto di ciascuno, li fissa l'uno fuori dell'altro, epperò lascia che ciascuno venga *realmente* limitato dal suo opposto. (Anche qui, come altrove, *vera* infinità è soltanto l'*idealità* del limite). L'accelerazione e il ritardamento, pertanto, essendo ciascuno quello stesso che è l'altro, questa medesimezza, il loro reciproco limitarsi, è ciò che s'intende sotto il nome di Periodicità. Noi abbiamo dunque l'accelerazione come tale, il ritardamento e la periodicità, come i tre momenti attraverso ai quali si sviluppa e si realizza il concetto dell'accelerazione. La parallelia di questo sviluppo collo sviluppo del concetto di velocità in velocità come tale, tardità, costanza (v. nota all'art. XV), è di per sè abbastanza evidente. (Son gli stessi tre momenti, trasportati dalla categoria dell'Essere in quella del Divenire). Quello che importa è quindi piuttosto di fissar bene la differenza, la quale, in breve, è questa. Nello sviluppo della velocità non si aveva da fare che con astrazioni (relativamente a ciò che seguì poi, e non a ciò che aveva preceduto). Perciò, la velocità cadendo immediatamente nella tardità e questa in quella (per essere la loro differenza soltanto formale, o dipendente unicamente dal punto di vista da cui *noi* guardavamo il rapporto), la loro unità,

la costanza, o l'equabilità del moto, era solo una identità *secca*, vale a dire esclusiva di ogni differenza reale. Qui invece tanto l'accelerazione quanto il ritardamento son determinazioni concrete, *moti reali*, poichè ciascuno di essi è già in sè unità di moto e quiete. La conseguenza è dunque che la periodicità, come unità di *realmente diversi*, non può più essere quello che era la costanza, una identità *secca*, ma, pur come unità, deve includere in sè anche la *differenza* per cui ciascuno dei lati da cui essa risulta *non è* l'altro, la differenza cioè per cui il moto accelerato e il moto ritardato esistono l'uno *accanto* all'altro, mentre la velocità e la tardità, invece, esistevano *insieme*. Così abbiamo che la periodicità è costanza solo come *costanza dell'incostanza*, ossia non già come l'*esser* tardo nell'*esser* veloce e l'*esser* veloce nell'*esser* tardo, ma come il *ritardarsi* verso l'accelerazione *compensato* dall'*accelerarsi* verso il ritardamento, che è precisamente ciò che intendiamo quando la chiamiamo il " ritorno delle identiche variazioni „. La periodicità è la forma assoluta dell'accelerazione, epperò anche del moto in generale. Essa appare nel moto del pendolo (in parte), nel moto dei corpi celesti (assolutamente), nelle oscillazioni e vibrazioni a cui vengono ricondotti i fenomeni acustici, luminosi, elettrici, ecc.

XIX.

Nell'accelerazione è esaurito, insieme collo sviluppo del moto, lo sviluppo dell'intiera prima sfera della meccanica. Essendo il processo per cui il moto si compenetra colla quiete e la quiete col moto, l'accelerazione ha per risultato il prodotto *neutro* rispetto al quale il moto e la quiete, rigettati (in quanto opposti l'uno all'altro) all'esterno, non son più che i suoi " stati „, o le sue determinazioni *indifferenti*. Questo prodotto, che è ciò che s'intende per Materia *inerte*, è il soggetto della seconda sfera della meccanica, la meccanica *reale*, per contrapposto alla quale, ora, alla prima sfera, di cui questo è il termine, vediamo convenire il nome di meccanica *formale*.

Il passaggio dal concetto del moto a quello di materia fu già riconosciuto da Hegel per uno di quelli che necessariamente debbon riuscire più duri all'intelletto. Recentemente però sembra che anche da parte della scienza empirica si sia sentita meno questa difficoltà, a giudicar dal favore con cui sono state accolte, negli ultimi anni, alcune cosiddette teorie intorno all'intima costituzione della materia, nelle quali,

certo, non si potrà mai troppo applaudire allo sforzo che l'intelletto fa per raggiungere la veduta razionale, cioè idealistica, della questione. Quanto poi a quello che la materia dovrebb'essere *soltanto per noi*, la cosa sembra essere stata messa ancora più in chiaro. Tolgo il passo seguente dal succoso libro del Professore D.r Felice Auerbach, intitolato *Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre* (Leipzig, Teubner, 1910), p. 3, seg.: " Diese Grundlage — cioè la base consistente nello spazio e nel tempo — erscheint uns zu leer, zu formal; wir haben Verlangen nach etwas Realerem. Es ist allerdings richtig: alles, was wir wahrnehmen, ist räumlich, ist Mannigfaltigkeit von Form und Farbe, wenigstens solange wir uns einmal auf die Wahrnehmung mit dem Auge, diesem vorzüglichsten unserer Sinnesorgane, beschränken. Aber diese Formen und Farben ändern sich mit der Zeit, bald schnell, bald nur ganz allmählich; das Bild, das uns die Aussenwelt darbietet, nimmt fortwährend andere Züge an. Und doch gibt es eine Menge Gruppen oder, wie wir sie nennen wollen, eine Menge Konfigurationen, die sich anscheinend gar nicht oder doch nur sehr langsam verändern; so langsam, dass wir sie immer wiedererkennen, auch wenn wir sie eine Zeitlang gar nicht gesehen haben. Solche *Dauerkonfigurationen* nennen wir Gegenstände, und das, was ihnen allen gemeinsam sein soll, nennen wir *Stoff* oder *Materie*. Materie ist also eigentlich nichts anderes wie Dauerkonfiguration sinnlicher Eindrücke „. Nell'articolo qui sopra non si è dato che un semplice accenno al passaggio dalla *formalità* alla *realtà*, giacchè il còmpito di mostrare in qual modo la materia *resulti* da quell'unione dello spazio col tempo che si verifica nel moto, e in che senso perciò si possa dire che la materia è *la figura che dura*, apparteneva più propriamente alla nuova sfera della meccanica, ed eccedeva quindi i limiti dentro cui doveva rimanere questo scritto.

RIASSUNTO SCHEMATICO

I. — **Lo Spazio.**

A. Lo Spazio come tale, o l'Estensione.

B. Il Punto.

C. La Figura.

1° La Linea o la prima dimensione.

2° Il Piano o la seconda dimensione.

3° Il Solido o la terza dimensione.

II. — **Il Tempo.**

A. Il Tempo come tale, o la Successione.
B. L' Istante.
C. La Durata.
   1° Il Passato.
   2° Il Futuro.
   3° Il Presente.

III. — **Il Moto.**

A. Il Moto come tale, o la Velocità.
   1° La Velocità come tale.
   2° La Tardità.
   3° La Costanza, ossia il Moto equabile.
B. La Quiete.
C. L'Accelerazione.
   1° L'Accelerazione come tale.
   2° Il Ritardamento.
   3° La Periodicità.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 7 Maggio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Naccari, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Fusari, Balbiano, Panetti, e Segre, Segretario. — Scusano l'assenza il Vice-Presidente Camerano e il Socio Somigliana.

Dopo letto e approvato il verbale della precedente adunanza, il Presidente partecipa, con profondo rammarico, la morte del Socio corrispondente Francesco Bassani, avvenuta a Capri il 26 aprile scorso. Apparteneva il Bassani alla nostra Classe dal 14 giugno 1903. Il Socio Parona ne fa una breve commemorazione, che verrà unita agli *Atti*. La Classe prega il Presidente d'inviare le proprie vivissime condoglianze alla famiglia.

Il Socio corrispondente Boffito ha inviato in omaggio un fascicolo di lui e di P. Niccolari, facente parte di una *Bibliografia dell'aria*; e S. E. P. Leonardi-Cattolica ha, similmente, inviato in omaggio una sua commemorazione di *Emanuele Fergola*.

Vengono poi ancora offerti: dal Socio Foà un volume di *Lavori dell'Istituto di Anatomia patologica della R. Università di Torino* (anni scolastici 1913-1915); dal Socio Mattirolo un proprio opuscolo *Sulla coltivazione e sul valore delle Artemisie usate nella fabbricazione dei Vermouths*, ed uno della Dott. Fausta

Balzac su *Le Artemisie dei Vermouths e dei Génépis*; dal Socio Panetti un opuscolo su *I progressi della Dinamica nella tecnica dell'ingegnere.*

Per la stampa negli *Atti* son presentate le seguenti Note:

I. Guareschi, *Azione dell'acido solfidrico sulle miscele delle terre alcaline cogli alcali e cogli ossidi dei metalli pesanti.* Nota II;

C. F. Parona, *Nuovi fossili del Miocene di Rosignano Piemonte*;

A. C. Bruni, *Appunti sullo sviluppo del sistema nervoso simpatico negli Amnioti,* dal Socio Fusari;

G. Albenga, *Sulla trave continua inflessa e sollecitata assialmente,* dal Socio Guidi;

C. Rosati, *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica,* dal Socio Segre.

LETTURE

FRANCESCO BASSANI

Cenno necrologico del Socio C. F. PARONA.

All'annunzio dato dalla Presidenza della dolorosa perdita fatta dall'Accademia nella persona del Socio Corrispondente Francesco Bassani mi si conceda di aggiungere poche parole di rimpianto, quali mi sono suggerite dalla fraterna amicizia che mi legava a Lui dall'inizio della nostra non breve carriera scientifica e della grande stima ch'io aveva della sua rettitudine e della serietà e importanza della sua opera scientifica. Un esame più ponderato della vita scientifica e del prodotto degli studi del Bassani mi darebbe certamente modo di dire più a lungo e meglio dei suoi meriti: ma preferisco non indugiare a rendere omaggio alla sua memoria in nome dell'Accademia, alla quale apparteneva fin dal 1903. È d'altronde omaggio doveroso allo scienziato che ha pure contribuito alla geologia e paleontologia piemontese con due notevoli lavori: l'uno sull'ittiofauna del calcare di Gassino, che valse a definire una lunga questione scientifica sull'età di questo tanto discusso giacimento: l'altro sulla scoperta di un bericide nel Miocene di Rosignano Monferrato, che giovò a meglio chiarire le corrispondenze della *pietra da cantoni,* di nota importanza industriale oltre che scientifica, colle rinomate *pietre* di Lecce e di Malta.

Francesco Bassani, nato a Thiene (Vicenza) nel 1853, studiò e si laureò a Padova sotto la guida del geologo lombardo G. Omboni, del quale fu assistente; e a Vienna ed a Parigi seguì i corsi di perfezionamento, specializzandosi, fin dai primi suoi studi, nelle ricerche sui pesci fossili. Ritornato in patria, fu per qualche tempo insegnante nelle scuole medie a Padova e a Milano: utile preparazione allo insegnamento universitario, al quale

fu chiamato nel 1887, colla nomina alla cattedra di Geologia e di Paleontologia nell'Università di Napoli, succedendo a G. Guiscardi.

L'attività scientifica del BASSANI si esplicò specialmente nel campo paleontologico: tuttavia i suoi doveri di docente per la geologia, e la tendenza ad applicare alla geologia stratigrafica i risultati dei suoi studi, lo portarono necessariamente a trattare talune questioni geologiche, nel modo stesso che il soggiorno nella classica regione vulcanica lo indussero ripetutamente ad occuparsi di vulcanismo. Così furono geologiche le sue ricerche sui calcari cretacici di Pignataro Maggiore in provincia di Caserta e di Pietraroia nel Beneventano, e quelle in collaborazione col De Lorenzo sulla penisola di Sorrento e sul M. Consolino di Stilo. Sue e del Galdieri sono le relazioni geologiche sulla sorgente minerale di Valle di Pompei e sugli scavi in Capri, diretti a verificare i rapporti cronologici fra gli avanzi di mammiferi e i manufatti preistorici di selce e quarzite scoperti nell'isola. Egli contribuì alla vulcanologia flegrea con notizie su manifestazioni recenti della Solfatara di Pozzuoli, rilevando anzi l'opportunità di uno studio sistematico di questo cratere e dei lenti movimenti del suolo presso il Serapeo, proponendo col Chistoni i mezzi più opportuni per attuarlo. Nè gli sfuggì l'opportunità di studio che si offrì colla grande eruzione vesuviana dell'aprile 1906: raccolse notizie e ricercò col Galdieri la spiegazione più verosimile delle varie forme di rotture, e specialmente dei fori subcircolari, nei vetri di Ottajano, ritenendole dovute all'urto di lapilli deviati dal vento. Fece inoltre parte delle Commissioni scientifiche, che con apposite relazioni riferirono sulle conseguenze arrecate alle campagne ed alle colture dall'eruzione ora ricordata, e sulle ricerche delle norme edilizie per le regioni sismiche.

Ma il campo nel quale le sue indagini scientifiche segnarono veramente orma profonda e duratura fu quello della paleoittiologia: e furono i terreni del nostro paese, quasi esclusivamente, che gli fornirono gli avanzi fossili di pesci illustrati da numerose pubblicazioni. Come giustamente scrisse, annunciandone la morte, il De Lorenzo, " egli era il più grande specialista vi- " vente di Paleoittiologia: ed a lui perciò ricorrevano tutti i " paleontologi di Europa e d'America „. Un cenno anche som-

mario dei suoi lavori, raggruppandoli in ordine di cronologia geologica, basta per far apprezzare la vastità del campo esplorato.

Prima ch'Egli se ne occupasse, poco si conosceva della fauna ittiologica del Trias italiano. Con due Note su avanzi raccolti nei calcari marnosi del Trias superiore di Laveno in Lombardia e di Dogna in Friuli, portò nuovi argomenti alla conferma delle affinità organiche fra Keuper e Retico; e con una Memoria storico-critica preliminare avviò su più sicura via lo studio della complessa fauna a rettili, pesci, ammoniti degli scisti bituminosi triassici di Besano, in confronto con quella di Perledo: studio ripreso poi dal De Alessandri e dall'Airaghi. Ma più del Trias delle Prealpi e del Golfo della Spezia, che pure gli prestò materiale di studio, Egli si occupò con particolare amore degli scisti bituminosi di Giffoni e della Dolomia di Mercato S. Severino in provincia di Salerno, anche del Trias superiore (parte superiore della Dolomia principale), illustrandone magistralmente la fauna ittiologica, e appoggiando lo studio dei pesci degli scisti con quello degli altri fossili della Dolomia.

Non è da trascurare il contributo portato alla conoscenza dei pesci del Giurassico superiore veronese e trentino, anche per le notizie sulla probabile esistenza del genere *Charcarodon* nel mare di quel periodo. Ma impulso senza confronto maggiore ebbe dai suoi studi la conoscenza della fauna cretacica per le ricerche istituite sulle ittiofaune della regione alpina veneta, dell'Istria, della Dalmazia e del Capo d'Orlando presso Castellammare di Napoli, sia per l'abbondanza del materiale esaminato, sia, specialmente, per il numero e l'importanza delle pubblicazioni relative. Fra queste meritano particolare menzione la grande monografia sui pesci fossili di Lesina, con 16 tavole, pubblicata nel 1883 dall'Accademia delle Scienze di Vienna e quella, in collaborazione col suo allievo D'Erasmo, sulla fauna di Capo Orlando, nella quale viene alla importante conclusione che questa fauna, come quella di Pietraroia, della Dalmazia e dell'Istria, e forse degli scisti bituminosi a pesci dell'Appennino Centrale e del Veneto e dei calcari con ittioliti di Terra d'Otranto, è di età cenomaniana.

Ancora più estesa fu la sua esplorazione nei terreni ittiolitiferi dei successivi piani della serie cenozoica. Per l'Eocene, oltre la Monografia già menzionata sulla fauna di Gassino, sono

da ricordare, fra le diverse Note sui pesci del Veneto, la descrizione di un nuovo genere di Fisostomi e il primo lavoro, in data del 1876, del nostro compianto collega, col titolo: *Annotazioni sui pesci fossili del calcare eocene del monte Bolca*. — Oligocenici sono gli avanzi di pesci delle marne del bacino di Ales in Sardegna, illustrati da brevi Note. — Per il Miocene sono numerosi gli scritti, oltre quello dianzi citato per il calcare di Rosignano Monferrato, sui pesci raccolti nella serie di questo periodo delle Prealpi venete, della provincia di Roma, delle Tremiti, di Terra d'Otranto, della Sardegna: e classiche rimarranno le ricerche sui pesci fossili di Chiavon, illustrati in 18 tavole, il contributo alla paleontologia della Sardegna e la ittiofauna della pietra leccese, ultimo dei suoi lavori (1915), preceduto da uno studio in collaborazione col Misuri, sopra un delfinorinco (*Ziphiodelphis Abeli* Dal Piaz) della stessa pietra.

Brevi sono le Note su pesci fossili pliocenici della Toscana e della Basilicata, ma interessanti per la conclusione d'ordine generale, che la fauna ittiologica pliocenica risulta in grandissima parte di specie viventi e che non vi sono rappresentate specie mioceniche o mesozoiche. Nè meno interessanti sono i risultati ai quali giunge il nostro Autore nella Memoria sulla ittiofauna delle argille pleistoceniche della Terra d'Otranto, avendone Egli verificato la perfetta corrispondenza con quella dei mari attuali e precisamente del Mediterraneo, in cui vivono tutte le specie che la compongono.

A parte le pubblicazioni geologiche e di vulcanologia, le necrologie e altri scritti di argomenti vari, i lavori di paleoittiologia si avvicinano alla cinquantina. È dunque una ben lunga serie di lavori, dei quali meglio si apprezza l'importanza e il merito quando se ne consideri l'insieme, che ci si presenta come il risultato dello studio coordinato, descrittivo e critico, della fauna ittiologica italiana nel suo sviluppo evolutivo attraverso l'enorme spazio di tempo dal Trias al periodo recente ed attuale. E non fa meraviglia che con così vasta, continua e diligente indagine abbia acquistato una riconosciuta competenza in questo difficile ordine di studi. Caratteristiche degli accuratissimi scritti del Bassani sono: la larghezza dei confronti, confortati da critica sicura, usata colla padronanza dello specialista sperimentato; lo scrupolo scientifico spinto talvolta quasi alla diffidenza verso

l'interpretazione propria; la serena e riguardosa considerazione dell'opera altrui.

Egli fu inoltre un valente insegnante. Io non ebbi la fortuna di assistere a sue lezioni, ma il mio giudizio si appoggia alle testimonianze degli allievi ed anche alle ripetute, spontanee sue affermazioni riguardo al piacere che provava nel fare lezione. Evidentemente questo piacere non era che il riflesso dell'attenzione e dell'interessamento che dimostrava l'uditorio, conquistato dalla sua parola dotta, ornata e chiara. L'efficacia del suo insegnamento è del resto nel miglior modo dimostrata dal numero e dalla valentia dei suoi allievi geologi, dei quali ricordo, in ordine di tempo, il Meschinelli, il Matteucci, il De Lorenzo, il Galdieri e il D'Erasmo, suo collaboratore in questi ultimi anni, che promette di seguire degnamente l'indirizzo del Maestro, continuandone le ricerche paleoittiologiche. Il Senatore De Lorenzo scrive che questi e tanti e tanti altri discepoli apprenderanno con dolore la perdita precoce del maestro impareggiabile, del quale, egli soggiunge, " anch'io sono stato scolaro: il " più amato dei suoi scolari ".

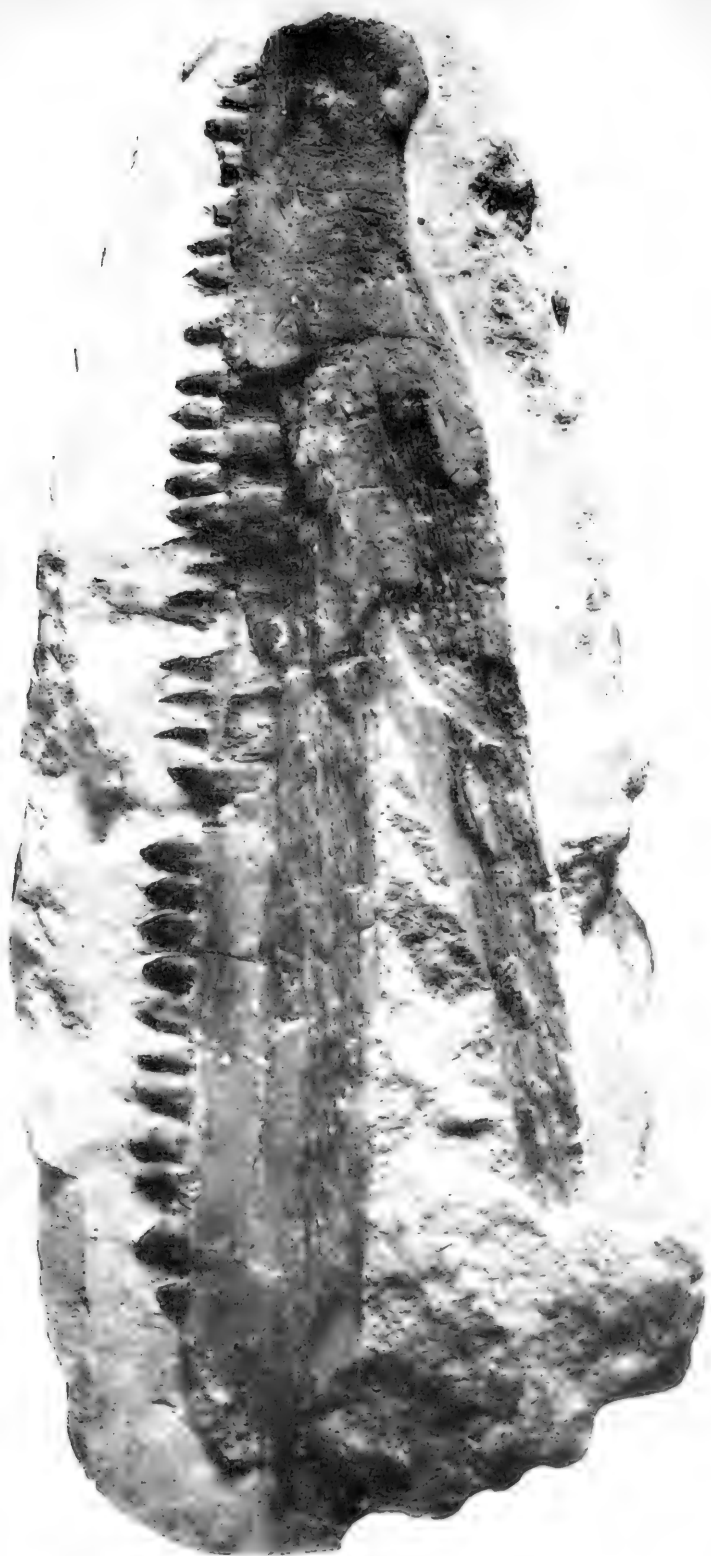
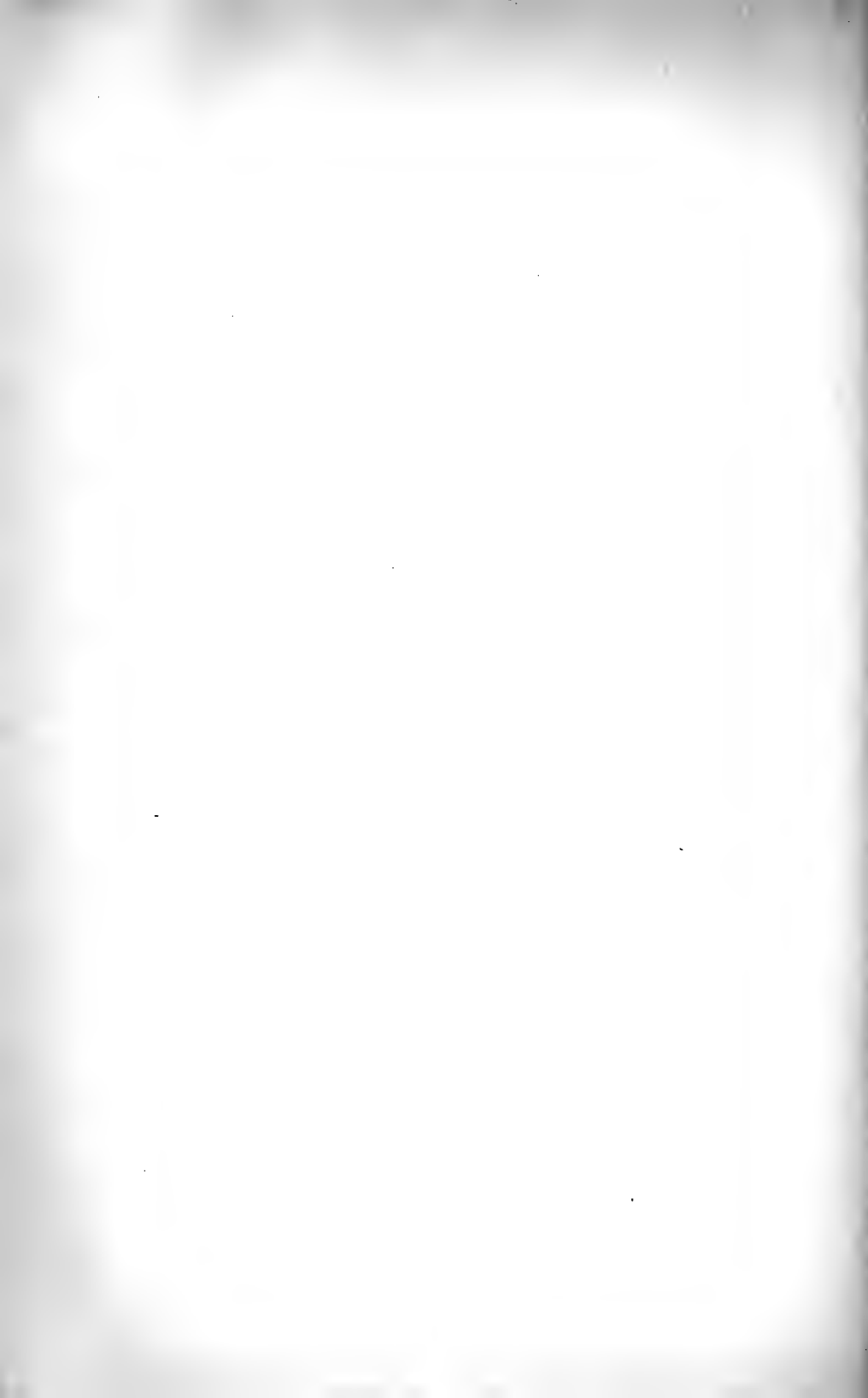
I meriti del Bassani, le sue benemerenze erano riconosciute, anche fuori della scuola, nel mondo scientifico: fu infatti chiamato a far parte di numerose istituzioni scientifiche italiane e straniere, e, per limitarmi alle principali italiane, ricorderò ch'Egli fu membro del R. Comitato Geologico, Socio nazionale dei Lincei, uno della Società dei XL, Membro della Società Reale di Napoli, della quale fu Presidente e con tale qualità presiedette nel 1910 le onoranze (nel primo centenario della nascita) alla memoria di Arcangelo Scacchi, che lo aveva avuto collega carissimo. Era Socio corrispondente, oltre che della nostra Accademia, del R. Istituto Lombardo e di quello Veneto, e fu Presidente della Società Geologica Italiana nel 1898, nel quale anno organizzò col De Lorenzo il riuscitissimo convegno della Società a Lagonegro in Basilicata.

Francesco Bassani è veramente degno di rimpianto, perchè fu un uomo buono nel senso più puro e nobile della parola; di alto sentire, modesto e simpatico anche per il suo tratto abitualmente affabile e per la spontaneità cortese e premurosa colla quale si prestava a vantaggio di chi lo richiedeva, amici, colleghi, studenti, di consiglio e di aiuto. Visse per la scienza, per

la scuola e per la famiglia, e in questa e in quelle cercò e trovò negli ultimi anni conforto e sollievo alle sofferenze.

Dopo una grave crisi superata nello scorso anno, confidavano gli amici che il male insidioso gli concedesse tregua, ed Egli pure si illudeva di star meglio: e in questo senso mi scrisse prima di recarsi a Capri, per passarvi la vacanza di Pasqua, avvertendomi che al ritorno in Napoli avrebbe esaminato certi fossili, che mi sollecitava a spedire nel frattempo. Si spense in Capri il 26 aprile, lontano dai due figli, chiamati alla guerra dal sacro dovere verso la patria: ma non gli mancò il dolce conforto dell'assistenza pietosa della diletta consorte Everdina Douwes-Dekker, figlia di illustre scrittore olandese; gentile e colta signora ed esimia disegnatrice, che legò il suo nome all'opera scientifica del marito, avendo disegnato le tavole che, aumentandone il pregio, corredano e fedelmente documentano i lavori di Lui.

Alla vedova ed ai figli, agli allievi, ai nostri colleghi dell'Università e dell'Accademia di Napoli giungano ben accette le condoglianze dell'Accademia delle Scienze di Torino, come espressione di sincero cordoglio per la perdita del virtuoso cittadino, che onorò sè stesso e fece onore alla patria applicando nel modo migliore le sue rare doti di studioso e di insegnante, con tanto profitto della scienza e vantaggio della scuola!

7 maggio 1916.

Azione dell'acido solfidrico sulle miscele delle terre alcaline con gli alcali e con gli ossidi dei metalli pesanti.

Nota II del Socio ICILIO GUARESCHI.

Nella mia prima Nota [1] su questo argomento, io ho dimostrato che la miscela di alcali terrosi, quali la calce e la barite semplicemente mescolate con idrato potassico o idrato sodico in determinate condizioni, con acido solfidrico e corrente d'aria, producono il fenomeno della *incandescenza viva* di tutta la massa, come si ha colla calce sodata. Mi si affacciò il dubbio che la pronta incandescenza dipendesse dalla formazione di un poco di perossido alcalino, il quale promovesse la vivacità della reazione.

I.

Esperienze con perossidi.

Perciò ho voluto fare alcune esperienze coll'aggiungere del perossido di sodio Na^2O^2, o anche dell'*ossilite*, alla calce od alla barite; e così con altri perossidi.

Esp. 35ª [2]. — 10 gr. di calce viva bianca (C^1) mescolo con 0,5 di perossido di sodio, poi faccio passare una corrente di H^2S puro, il quale annerisce alquanto la miscela, poi successivamente una corrente d'aria. La miscela si scalda, sviluppa acqua, ma *non* produce incandescenza.

---

[1] *Esperienze ed osservazioni sulle miscele delle terre alcaline con gli alcali*, in "Atti R. Accad. delle scienze", 1915-1916, vol. LI, p. 27.

[2] Seguito la numerazione delle esperienze come nella Nota I.

Esp. 36ª. — Rifaccio l'esperienza con 10 gr. della stessa calce (C^1) mescolata con 0,5 di Na^2O^2, poi faccio passare 1 litro di H^2S insieme a corrente d'aria. La miscela sviluppa calore, ma *non* si ha incandescenza.

Esp. 37ª. — Mescolo 20 gr. di barite con 0,5 di Na^2O^2 e ottengo nulla.

Esp. 38ª. — 25 gr. di barite con 0,5 di KOH quasi tutto in polvere. Con acido solfidrico ed aria si produce *incandescenza* viva ed il tubo si ruppe.

Dunque anche nel rapporto di 50 BaO per 1 di KOH si ha incandescenza.

Esp. 39ª. — 25 gr. di barite con 2 gr. di Na^2O^2, poi 1 litro di H^2S e corrente d'aria. *Vivissima incandescenza*, subito, violenta. Non esplosione.

Esp. 40ª. — 25 gr. di BaO con 0,5 Na^2O^2 (1). Vivissima *incandescenza*.

Esp. 41ª. — 25 gr. BaO + 0,10 Na^2O^2. Poi al solito 1 litro di H^2S ecc. Si ha qualche scintilla, molto calore, ma *non* incandescenza.

Esp. 42ª. — 25 gr. di barite con 0,5 di MgO^2, poi corrente di acido solfidrico ed aria. Nulla: nemmeno sviluppo di calore.

Esp. 43ª. — 15 gr. di calce viva (C^1) con 0,25 di Na^2O^2; qualche scintilla, calore, ma non incandescenza.

Esp. 44ª. — 15 gr. di calce viva (C^1) con 0,5 di Na^2O^2, cioè nel rapporto 30 : 1. Non si ha incandescenza.

Esp. 45ª. — 15 gr. di calce grigio-bruna (A) mescolati con 0,5 di Na^2O^2. Non si ha incandescenza.

Esp. 46ª. — 15 gr. idem + 0,5 Na^2O^2; molto calore, qualche scintilla, ma non incandescenza. Invece con:

Esp. 47ª. — 15 gr. calce bruna (A) con 1 gr. Na^2O^2 si ha *viva incandescenza*, intensa, prolungata.

Esp. 48ª. — 25 gr. di barite con 2 gr. BaO^2 idrato, poi al solito con 1 litro di H^2S e corrente d'aria. Si scalda, annerisce,

---

(1) Il perossido prima adoperato era stato lungo tempo in un vaso che non era ben chiuso.

sviluppa calore ed acqua; diventa rossastra, ma non produce incandescenza.

Esp. 49ª. — 15 gr. di calce bianca (C^1) mescolati con 0,5 di *ossilite*, poi al solito faccio passare 1 litro di H^2S in corrente d'aria. Imbrunisce, si scalda, sviluppa acqua, poi fa *incandescenza* come se fosse potassa o soda. Però agisce meglio del Na^2O^2 (V. esper. 44ª).

Esp. 49ª bis. — 20 gr. di BaO in granelli di 1 a 2 mm. con 0,5 di ossilite; poi faccio passare H^2S in corrente d'aria. La miscela si riscalda molto, sviluppa acqua, ma *non* si ha incandescenza.

Esp. 50ª. — Ho fatto questa esperienza con barite e perossido di piombo PbO^2, ma non si ebbe riscaldamento e tanto meno incandescenza.

Come si scorge dalle esperienze precedenti, l'incandescenza nel caso delle miscele di calce o barite con potassa o soda, non può essere attribuita alla presenza di piccole quantità di perossidi nella calce sola o nelle miscele, perchè sia la calce o la barite nelle stesse condizioni producono l'incandescenza tanto colla soda quanto colla KOH, oppure col Na^2O^2 o coll'ossilite. Si direbbe anzi che la KOH agisca più energicamente.

Si noterà che in tutte queste esperienze l'acido solfidrico viene poco assorbito e che passa oltre già fino da principio dell'esperienza. Il che non succede colla calce sodata che avidamente lo assorbe tutto subito.

II.

Esperienze con la stronziana e con la litina.

Ho fatto anche alcune esperienze con l'ossido di stronzio SrO e con litina LiOH, ma i risultati furono poco soddisfacenti.

Esp. 51ª. — Gr. 15 di SrO in piccoli granelli furono mescolati con 1 gr. di KOH, poi trattati come al solito con acido solfidrico in corrente d'aria. Si sviluppò molto calore ed acqua, parte dell'acido solfidrico passò oltre, *non* si ebbe incandescenza.

Esp. 52ª. — Eguale risultato con 23 gr. di SrO e 5 gr. di NaOH.

Esp. 53ª. — Un miscuglio di 10 gr. di CaO con 5 gr. di litina commerciale, fu trattato come sopra, ecc. Si scalda poco e *non* produce incandescenza.

Esp. 54ª. — Eguale risultato con 19 gr. di BaO e 5 gr. di litina.

Esp. 55ª. — Rifacendo di confronto l'esperienza con barite e idrato sodico si ebbe con H^2S *viva incandescenza.*

Esp. 56ª. — La miscela di 25 gr. di BaO e 5 gr. di LiOH (recentemente arroventata) trattata come sopra si scalda ben poco e *non* produce affatto incandescenza.

Esp. 57ª. — La miscela di 17 gr. di SrO (recentemente calcinata) e 4 gr. di NaOH in grani e parte in polvere, produce con H^2S in corrente d'aria molto calore, ma *non* incandescenza. Anche qui subito, sin da principio, parte di H^2S passa inalterato.

Da queste esperienze risulterebbe che la *stronziana* e la *litina* agiscono meno energicamente che non la barite e la calce, e la soda e potassa.

III.

Azione dell'acido solfidrico sugli ossidi dei metalli pesanti in presenza delle terre alcaline.

Ho voluto vedere se nei miscugli precedenti, sostituendo agli idrati di sodio o di potassio gli ossidi di metalli pesanti quali sono: HgO, NiO, PbO, CuO, Cu^2O, Fe^2O^3, si avevano fenomeni analoghi o diversi; e specialmente venire a conoscere quali di questi ossidi producevano il fenomeno dell'incandescenza.

Esperimentai prima coll'ossido mercurico ed ottenni ottimi risultati. In queste esperienze, come nelle precedenti, l'aspirazione della corrente d'aria era ottenuta mediante un aspiratore semplicissimo, costituito da una grossa boccia di circa 15 litri, piena d'acqua e con tubulatura alla base. Precedeva questo aspiratore una boccia di Habermann per regolare la corrente. La miscela da far reagire col gas solfidrico era contenuta in un piccolo tubo ad U, del diametro interno di 1,2 a 1,5 ed alto 15 cm. circa.

Le notizie che si hanno intorno all'azione dell'acido solfidrico sull'ossido di mercurio sono poche. Schumann nella sua Memoria: *Ueber die affinität des Schwefels und des Sauerstoff zu den Metallen* (¹) riguardo all'ossido di mercurio, si limita a dire che coll'acido solfidrico si scalda molto, con sviluppo di acqua e di solfo, e fornisce solfuro nero di mercurio. Non dice se l'ossido impiegato era il *rosso* od il *giallo*.

Esp. 1ª. — Gr. 10 di calce viva bianca, comune, molto buona e conservata in vasi chiusi alla lampada, mescolati con gr. 6 di *ossido mercurico giallo* (che da lunghissimo tempo era stato preparato in questo laboratorio), furono trattati con 1 litro di gas H^2S e corrente d'aria. La massa annerisce; una parte del solfidrico passa subito oltre nella boccia di Habermann e nel boccione che serve da aspiratore. Si produce molto calore e poco dopo si manifesta una *vivissima incandescenza* (²) con produzione di molto gas solforoso. La temperatura è tale che il vetro del tubo ad U si rammollisce. L'acqua della boccia di Habermann diventa lattiginosa per solfo colloidale che si forma tra H^2S e SO^2 e lo solfo pure colloidale si deposita entro il boccione, producendo un curioso fenomeno di precipitazione di solfo minutissimo in forma di arborescenza che cade dalla superficie dell'acqua e va al fondo in spirali, ognuna delle quali è terminata da un anello, che sembra un anello di Tait: al centro del vaso, o per meglio dire al centro della superficie dell'acqua, non si deposita solfo, se tutto rimane in quiete. La vista della caduta di questo solfo colloidale lattiginoso a guisa di grappoli o di stalattiti è bellissima. Nel tubo ad U si trova del mercurio ridotto a specchio metallico e del solfuro di mercurio.

I fumi bianchi che si formano dunque nell'interno dell'apparecchio sono costituiti in questo caso da minute particelle di solfo colloidale, provenienti dalla reazione fra l'acido solfidrico ed il gas solforoso che si produce durante l'incandescenza e che non può venire assorbito dalla calce o dalla barite (perchè l'in-

(¹) A. 1877, t. 187, p. 311.

(²) Si noterà che HgO è fra gli ossidi che sviluppano più calore per l'azione dell'acido solfidrico: circa 45.300 cal. secondo Thomsen (" J. pr. Chem. ", 1879 (2), t. 19, p. 17) e 48.700 secondo Berthelot (" C. R. ", 1874, t. 78, p. 1176).

candescenza, come vedremo, avviene anche colla barite e l'ossido mercurico); invece i fumi o nebbia che si osservano colla calce sodata e l'acido solfidrico sono di natura affatto diversa; questa nebbia non contiene solfo, perchè tanto l'acido solfidrico quanto l'acido solforoso prodotto durante l'incandescenza, vengono assorbiti dalla calce sodata, che si distingue dai miscugli appunto pel suo straordinario potere assorbente; ed invero l'acqua della boccia Habermann, come quella dell'aspiratore, col riposo ridiventa limpidissima.

Esp. 2ª. — Ripetei l'esperienza con 10 gr. di calce viva e 2 gr. dello stesso HgO, ma *non* si ebbe incandescenza. Annerimento e poco calore.

Esp 3ª. — 10 gr. dello stesso ossido di calcio con 3 gr. di HgO. Annerimento, poco calore; *non* incandescenza.

Esp. 4ª. — 10 gr. di calce e 5 gr. di HgO. *Incandescenza vivissima.*

Esp. 5ª. — 10 gr. di calce + 2 gr. HgO precip. di Kahlbaum. *Nessuna incandescenza.*

Esp. 6ª. — Mescolo 10 gr. di CaO con 4 gr. HgO giallo del laboratorio, come prima, poi 1 litro di H^2S, ecc. Annerisce, si scalda, poi manifesta *viva incandescenza* e solfo lattiginoso e nel boccione si ripete il bel fenomeno della caduta dello solfo colloidale. Però dopo pochi istanti avvenuta l'incandescenza si produce una *forte esplosione* nella boccia contenente l'acido solfidrico. Vi ha riduzione di HgO e formazione di SO^2.

Esp. 7ª. — 10 gr. di CaO con 4 gr. HgO precipitato di Kahlbaum. Annerisce, si scalda poco, *non* si ha incandescenza. Perchè?

I due ossidi gialli adoperati sembrano identici; non contengono tutte due che traccie minime di acqua; si sciolgono completamente nell'acido nitrico e dimostrano di non contenere cloro, oppure delle minime traccie tutte due; con acqua dànno reazione neutra. Scaldati, lasciano una minima traccia di residuo; però il mio in alcuni punti durante il riscaldamento diventa quasi bianco e poi scompare anche questo. Così non fa quello di Kahlbaum (V. esper. 27ª).

Preparai io stesso dell' HgO purissimo per precipitazione; fu ben lavato e disseccato a 15°-20° e poi sul cloruro di calcio.

Esp. 8ª. — Gr. 10 di CaO, stata ben conservata entro matraccio chiuso alla lampada, mescolai con 5 gr. di questo mio ossido purissimo e poi ho proceduto come sopra. Dopo pochi momenti *vivissima incandescenza* ed il fenomeno della caduta dello solfo colloidale, ecc. Il tubo si va a poco a poco ostruendo. La calce nel mezzo ridiventa bianca, ma in alto e in basso della colonna di calce si ha una massa nera.

Sostituisco alla calce la barite BaO.

Esp. 9ª. — Gr. 15 di BaO in granelli di 1 mm., di color violaceo, mescolo con 4 gr. di HgO precipitato, da me preparato, poi tratto come al solito con 1 litro di H^2S, ecc. Annerisce subito, sviluppa molto calore e si nota rapida e *vivissima incandescenza* e poi successiva (dopo nemmeno $^1/_2$ minuto) forte *esplosione* nella boccia a solfidrico. Anche in questo caso si nota la caduta nell'acqua dello solfo colloidale. Anche colla barite si ha dunque una viva e bella reazione, benchè il rapporto fra BaO e HgO sia minore: 15 : 4.

Esp. 10ª. — Gr. 15 di BaO + 1 gr. di HgO (rapporto 1 : 15). Anche in questo caso si ha l'*incandescenza viva*, senza però l'esplosione, forse per la più rapida corrente d'aria sino da principio.

Mentre 10 gr. di calce con 2 e anche con 3 gr. di HgO non produssero incandescenza; colla barite si ha l'incandescenza anche nel rapporto di 1 : 15.

Evidentemente, come sempre, la barite è più attiva.

Esp. 11ª. — Gr. 15 di BaO + 4 gr. di HgO in corrente di gas H^2S schietto; la miscela annerisce, sviluppa calore molto, ma parte del mercurio è ridotta a specchio metallico; facendo passare dopo una corrente di aria, si sviluppa moltissimo calore, ecc., ma *non* si ha incandescenza.

Visti questi risultati con l'ossido di mercurio, ho voluto provare con l'ossido nero di nickel NiO.

Esp. 12ª. — Gr. 20 di BaO misti con 3 gr. di NiO furono sottoposti all'azione di 1 litro di H^2S in corrente d'aria come al solito. Si nota sviluppo di moltissimo calore e poco dopo *vivissima incandescenza*.

Esp. 13ª. — Gr. 20 di BaO con 1 gr. di NiO nelle stesse condizioni precedenti: *non* si ha incandescenza.

Esp. 14ª. — Gr. 20 di BaO + 2 gr. NiO, ecc., si sviluppa molto calore e, poco dopo, *vivissima incandescenza.* Rapporto 1:10.

Esp. 15ª. — Gr. 30 di barite + 1,5 (rapp. 1 : 20), si scalda molto, ma *non* fa incandescenza, nemmeno dopo un secondo litro di gas acido solfidrico.

Esp. 16ª. — Gr. 20 BaO + 1,5 NiO (rapp. 1 : 15), si riscalda molto, ma *non* incandescenza.

Dunque in queste condizioni per avere l'incandescenza occorre il rapporto fra BaO e NiO di 1 : 10. Con 1 : 7 si ha ancora più facilmente l'incandescenza.

L'ossido di nickel agisce bene quasi come l'ossido mercurico; ma l'HgO è più attivo; agisce nel rapporto di 1 : 15, mentre quello di nickel nel rapporto di 1 : 10.

Esp. 17ª. — Gr. 20 di BaO furono mescolati con 3 gr. di PbO (litargirio puro) e trattati nelle stesse condizioni precedenti; non si sviluppa calore, o almeno pochissimo, e *non* si ha affatto incandescenza.

Esp. 18ª. — Gr. 20 BaO + 3 gr. Fe^2O^3 purissimo. *Non* incandescenza.

Esp. 19ª. — Gr. 20 BaO + 3 gr. di CuO nero in polvere finissima. Nulla.

Esp. 19ª bis. — Gr. 10 di CaO bianca buonissima, con 5 gr. Cu^2O. Poco riscaldamento e *non* incandescenza.

Dunque, coll'ossido di bario BaO, di sei ossidi dei metalli pesanti che ho esperimentato in mescolanza (HgO, NiO, PbO, CuO, Cu^2O e Fe^2O^3), solamente i due primi reagiscono vivamente coll'acido solfidrico e producono l'incandescenza della barite; gli altri quattro in queste condizioni non agiscono.

Ho voluto fare anche alcune esperienze coll'ossido di calcio e il nickel e anche cogli alcali e l'ossido di mercurio.

Esp. 20ª. — Gr. 15 di CaO bianca, buona, comune + 2 gr. NiO; si scalda molto, ma *non* dà incandescenza.

Esp. 21ª. — Gr. 10 di CaO idem + 2 gr. NiO; non si ha incandescenza.

Esp. 22ª. — Gr. 10 di CaO + 4 gr. di NiO; si sviluppa molto calore, ma non si ha incandescenza.

Colla calce dunque in queste condizioni non sono riuscito ad avere incandescenza coll'ossido di nickel.

Esp. 23ª. — 15 gr. di CaO grigio scura, misti con 5 gr. di NiO; si sviluppa molto calore, ma *non* si ha incandescenza.

Esp. 24ª. — Gr. 10 di BaO + 2 gr. di nickel metallico in polvere finissima. Non si sviluppa calore e tanto meno incandescenza.

Esp. 25ª. — Gr. 10 di KOH, in grani, + 4 gr. HgO, con 1 litro di H^2S, ecc., come al solito: si sviluppa *molto calore* e acqua; tutta la massa prima nera ridiventa bianca, ma il tubo si ostruisce. La KOH conteneva forse troppa acqua. L'ho disseccata bene tenendola fusa in crogiuolo d'argento.

Esp. 26ª. — Gr. 10 di questa KOH + 4 gr. di HgO e 1 litro di gas solfidrico, ecc.; la miscela sviluppa molto calore, la massa fonde ed il gas gorgoglia nella massa fusa; *non* si ha incandescenza.

Esp. 27ª. — Ho voluto rifare una esperienza con la calce e l'ossido di mercurio:

Gr. 10 di calce buona furono mescolati con 5 gr. HgO (speciale collezione Kahlbaum), poi trattati con 1 litro di gas solfidrico e corrente d'aria. La massa annerisce, produce un riscaldamento enorme e poco dopo *vivissima incandescenza* e nell'acqua dell'aspiratore, non nel centro, ma verso la periferia, si vede lo solfo colloidale cadere in forma arborescente e ad anelli di Tait. È sempre un bel fenomeno.

Perchè in questo caso come in altri analoghi lo solfo si deposita in questo modo? Vi ha influenza la forma del vaso?

Ho voluto fare anche una esperienza in bianco con solo ossido mercurico misto con quarzo.

Esp. 28ª. — Gr. 15 di quarzo in granelli furono mescolati con 7,5 gr. di HgO (precip. purissimo), poi al solito con 1 litro di H^2S e corrente d'aria. Annerisce, si scalda molto, ma *non* si produce incandescenza.

Nelle precedenti esperienze io ho adoperato l'acido solfidrico non disseccato, cioè quale esce dall'apparecchio di preparazione e ben lavato, poi passato in una boccia di un litro.

Ho voluto fare, come avevo già fatto per la calce sodata, una esperienza anche con acido solfidrico ben disseccato col cloruro di calcio.

Esp. 29ª. — Gr. 10 di CaO, bianca, buona (come quella dell'esperienza 4ª), furono mescolati con 5 gr. di HgO precip. purissimo, poi 1 litro di gas e corrente d'aria pure ben disseccata. Anche in questo caso si osserva *viva incandescenza*; anzi vivissima, al punto che il tubo di vetro si rammollisce e rimane contorto.

Nella mia Nota I (esp. 5ª) ho detto che la CaO dal marmo mista colla soda caustica in granelli e polvere, produce incandescenza per l'azione dell'azione solfidrico. E qui è da osservare che dei campioni di calce sodata, preparata con CaO dal marmo, assorbiva poco il solfidrico e non dava punto incandescenza. Perchè?

Ho voluto perciò provare la CaO dal marmo anche coll'ossido mercurico e vedere se produceva incandescenza.

Esp. 30ª. — Gr. 10 di CaO dal marmo, bianchissima, in granelli di circa 1-2 mm., mescolati con 5 gr. di HgO purissimo, furono trattati con 1 litro di gas H^2S e corrente d'aria come al solito. Si ebbe bellissima *incandescenza*, anche con questa calce. Bellissima poi la caduta dello solfo colloidale; l'acqua del boccione aspiratore era perfettamente tranquilla.

Ho voluto esaminare se la porosità della pomice potesse facilitare la incandescenza dell'ossido mercurico coll'acido solfidrico ed ho fatto l'esperienza seguente:

Esp. 31ª. — Gr. 5,5 di pomice, ben lavata con acido cloridrico, poi con acqua, e calcinata, furono mescolati con 5 gr. di HgO purissimo, giallo e trattai il tutto con 1 litro di H^2S in corrente d'aria, ecc. La massa si scaldò molto, si produsse un poco di gas solforoso, l'acqua della boccia di Habermann diventò lattiginosa e si notò la formazione di mercurio ridotto; ma *non* incandescenza.

Sulla separazione dello solfo colloidale. — Mediante un aspiratore a caduta d'acqua, in forma di grossa boccia con tubolatura al fondo, ho fatto passare una corrente dei due gas H^2S e SO^2 contenuti in due boccie diverse, una di circa 1 litro di H^2S e l'altra di $^1/_2$ litro di SO^2. Quando i due gas entrano nel boccione reagiscono appena in contatto dell'acqua, la quale devesi fare scolare con getto moderato dalla tubolatura in basso, munita di un tubo di vetro e pinza. Così si produce dello solfo colloidale di un bel colore *azzurro celeste*, quasi si direbbe fluorescente, a forma di glomeruli terminati ad anello come quelli di Tait. Se l'acqua del boccione non è perfettamente tranquilla ed ha, ad esempio, un lieve movimento rotatorio o giratorio da sinistra a destra, allora lo solfo si precipita lentamente quasi come in sottili fili di cotone azzurrognolo. In un modo o nell'altro il fenomeno è molto bello e può essere una elegante e persuasiva esperienza di lezione sullo solfo colloidale e sul modo di separarsi quando l'acqua è in leggero movimento dall'alto al basso, o rotatorio.

CONCLUSIONI

1) Quando la calce e la barite caustiche sono semplicemente *mescolate* con idrato di potassio o di sodio, l'attività di queste basi relativamente all'azione dell'acido solfidrico è straordinariamente aumentata, come, o quasi colla calce sodata, ed il miscuglio in determinati rapporti dà luogo ad una *viva incandescenza*. Tutto questo risultava già dalle esperienze esposte nella Nota I.

2) L'ossido di stronzio e l'idrato di litio, nelle condizioni da me indicate, agiscono molto meno energicamente e con queste basi non sono riuscito ad ottenere incandescenza.

3) L'incandescenza ottenuta colle miscele accennate in 1) e l'acido solfidrico non può attribuirsi alla presenza o formazione di *perossidi*. I perossidi alcalini agiscono pressochè come gli idrati di sodio e di potassio; i perossidi di bario, magnesio, piombo non agiscono. Debbo però dire che non ho potuto fare delle esperienze con perossidi alcalini di recentissima preparazione.

4) L'acido solfidrico è fissato solo in parte dalla miscela delle terre alcaline cogli alcali, in parte passa inalterato; la parte fissata è quella che poi produce l'incandescenza. Questa è forse la differenza principale fra il modo di agire della calce sodata coll'acido solfidrico e dei miscugli delle terre alcaline cogli alcali (ed anche degli ossidi dei metalli pesanti); in questo secondo caso parte dell'acido solfidrico passa subito oltre, mentre colla calce sodata viene subito tutto fissato, e poi produce la incandescenza.

5) Le miscele degli ossidi di calcio o di bario con gli ossidi di mercurio. e di nickel, reagiscono assai vivamente coll'acido solfidrico, al punto che quando sono in determinati rapporti ha luogo una *viva incandescenza*, e talora anche *esplosione*.

Non agiscono invece: l'ossido ferrico, gli ossidi rameico e rameoso, l'ossido di piombo o litargirio.

6) Il fenomeno della incandescenza ha luogo tanto coll'acido solfidrico umido quanto col gas acido solfidrico disseccato.

7) L'incandescenza ha luogo anche adoperando la calce viva dal marmo invece della calce viva ordinaria.

8) Quando si ha incandescenza coll'ossido di mercurio si produce dell'anidride solforosa, la quale, reagendo coll'acido solfidrico, forma dello solfo colloidale che precipita dall'acqua in forma speciale e di colore azzurrognolo.

9) La pomice coll'ossido mercurico non produce incandescenza.

In un'altra Nota esporrò le esperienze fatte intorno al potere assorbente delle miscele di terre alcaline con alcali (o con ossidi di metalli pesanti) relativamente ad altri gas che non siano l'acido solfidrico, quali l'*ossicloruro di carbonio*, l'*anidride carbonica*, il *gas solforoso*, ecc., in confronto con il grande potere assorbente che dimostra la calce sodata.

Torino, R. Università, Marzo 1916.

Nuovi fossili del Miocene di Rosignano Piemonte.

Nota del Socio C. F. PARONA.

(Con una Tavola).

Il benemerito Dott. Fedele Bruno di Biella, valente chirurgo e dapprima assistente al R. Orto Botanico di Torino, destinò per testamento una cospicua somma a vantaggio di parecchi nostri istituti universitari, compreso il Museo di Geologia e Paleontologia, coll'obbligo di impiegare la quota spettante al Museo stesso nell'acquisto di fossili. Questo legato ha dato modo alla Direzione di fare un acquisto quale non gli sarebbe stato possibile colla dotazione ordinaria e di impedire la dispersione o la vendita all'estero di una ricca collezione di fossili piemontesi, assicurandone il possesso al Museo di Torino.

Questa collezione fu adunata in molti anni di diligenti ricerche e con spese rilevanti dal compianto Avv. Filippo Cantamessa, appassionato studioso della Paleontologia piemontese. Il nome del Cantamessa non è nuovo ai paleontologi, avendo egli pubblicato fin dal 1891, nelle Memorie della nostra R. Accademia delle Scienze (ser. II, vol. XLI), una accurata monografia sui resti del Mastodonte di Cinaglio d'Asti, corredata da due belle tavole, e più recentemente, nel 1898, un'operetta di volgarizzazione dal titolo: *I fossili* (Torino, U. T. E.), colla quale, in forma originale ed attraente raggiunge il modesto scopo propostosi della " diffusione di alcuni primi elementi di Paleontologia ", mentre offre prova evidente e spontanea del suo amore ai nostri studi e dell'appassionato interessamento per le raccolte paleontologiche e per il loro incremento.

Gli avanzi di grandi vertebrati della collezione Cantamessa furono ceduti dallo stesso proprietario fin dal 1890 al R. Museo

Geologico di Bologna, e sono oggi fra i più pregevoli ornamenti del " Museo G. Capellini „ (1).

La collezione ora passata in proprietà del Museo di Torino raccoglie fossili di varie provenienze, ma la parte maggiore, e più interessante come materiale di studio, consta di fossili dei terreni cenozoici del Piemonte, ed essenzialmente di fossili del Miocene della Collina di Torino e di Rosignano Monferrato e dell'Eocene di Gassino. Le raccolte di Gassino e di Rosignano arricchiscono opportunamente quelle che erano troppo modeste delle stesse località, già possedute dal Museo; e la raccolta di fossili miocenici dei dintorni di Torino, segnatamente delle località prossime a Baldissero Torinese e a Pino Torinese, arricchisce di oltre 10.000 esemplari quella che era già la più ricca collezione del Museo, accrescendone di molto l'importanza scientifica, specialmente per i numerosi e superbi esemplari di corallari.

I fossili più notevoli o nuovi saranno oggetto di pubblicazioni; e fin d'ora colla presente Nota voglio dare notizia di due rari fossili di Rosignano, anche col proposito di rendere con ciò omaggio alla memoria di Fedele Bruno e di Filippo Cantamessa, i quali in modi diversi si sono resi benemeriti del nostro Museo.

* * *

Il calcare miocenico (*pietra da cantoni*) finamente arenaceo, tenero, bianco-paglierino di Rosignano-Piemonte è ben conosciuto scientificamente e industrialmente. La bella monografia (2)

---

(1) A proposito dell'acquisto di questi resti il Senatore G. Capellini scrisse (*Mastodonti del Museo Geologico di Bologna*, I, " Mem. R. Acc. Ist. di Bologna „, t. IV, ser. VI, 1907) che " da parecchi anni il Cantamessa gareggiava con i Musei del Valentino e del Palazzo Carignano, dolente che " non apprezzassero il suo entusiasmo per la Paleontologia e più ancora che " fossero state respinte sue generose offerte „. — Mi permetto di notare che ciò avvenne prima ch'io assumessi la direzione del Museo Geologico di Torino, e che ignoro le ragioni per cui questi avanzi di mastodonti del Pliocene astigiano furono acquistati per il Museo di Bologna anzichè per quello di Torino, sede più naturale, trattandosi di fossili piemontesi.

(2) G. De Alessandri, *La pietra da cantoni di Rosignano e di Vignale (Basso Monferrato). Studi stratigrafici e paleontol.*, 1 carta geol. e 2 tav., " Mem. d. Soc. It. di St. Nat. e d. Mus. Civ. di St. Nat. di Milano „, VI, 1897.

pubblicata nel 1897 dal Prof. De Alessandri ha segnato un passo notevole nella conoscenza della sua situazione stratigrafica e della sua fauna: e lo studio (1) successivo del Prof. Prever sulle orbitoidi riscontrate in questa serie miocenica e la illustrazione (2) fatta dal Prof. Bassani di un bericide (*Myripristis melitensis*) della stessa provenienza, e comune alle faune del calcare miocenico di Lecce e di Malta, hanno poi convalidato il riferimento della *pietra da cantoni* al Langhiano. Lo stesso Prof. Bassani mi informò di aver riconosciuto nei frammenti di pesci di Rosignano da me comunicatigli anni addietro anche il *Serranus Casottii* (Costa) della *pietra leccese*.

Il Bassani aveva gentilmente accolta la mia preghiera di esaminare i preziosi resti di pesci della collezione Cantamessa: ma il diletto amico, prima che potesse vedere i fossili, già spediti a Napoli, si spense in Capri pochi giorni or sono (26 aprile), quando si riprometteva di ritornare con rinnovate forze al Museo ed alla Scuola. Nella lunga lotta fra la passione dello studio, che lo animava e sosteneva, e il male, che lo insidiava, quest'ultimo pur troppo doveva vincere e toglierci con immatura morte l'insigne paleoittiologo, il preclaro insegnante e l'amico impareggiabile!

È da ritenere probabile che nuove corrispondenze paleontologiche Egli avrebbe verificate fra i due giacimenti langhiani, oltre le corrispondenze già note e quella assai significativa, oggetto della presente comunicazione, della esistenza nella *pietra da cantoni* del *Cybium Bottii* (Cap.) (*Sphyrenodus Bottii* Cap.) (3). Il fossile riferito a questa specie è ben conservato e chiaramente corrisponde al tipo, così che potrebbe bastare la fotografia (ved. tav.) quale garanzia dell'esattezza del riferimento: non credo tuttavia fuor di luogo aggiungere un cenno descrittivo sommario.

---

(1) P. L. Prever, *Le formazioni ad Orbitoidi di Rosignano-Piemonte e dintorni*, " Boll. d. Soc. Geol. It. „, XXVIII, 1909.

(2) F. Bassani, *Sopra un Bericide del calcare miocenico di Lecce, di Rosignano-Piemonte e di Malta*, 2 tav., " Mem. R. Accad. Sc. di Napoli „, XV, 1911.

(3) G. Capellini, *Della " pietra leccese „ e di alcuni suoi fossili*, " Mem. R. Accad. Sc. d. Ist. di Bologna „, t. IX, 1878, p. 24 e seg., tav. III.

Cybium Bottii (Cap.). — La rettifica della denominazione generica devesi al Woodward e fu accettata dal Bassani (1), come risulta dalla sua recente monografia sulla ittiofauna della *pietra leccese*. Il *Cybium Bottii* fu trovato anche nell'arenaria di Bolzano nel bellunese (2), per cui questa specie, che si presenta in tre giacimenti lontani, acquista importanza come fossile caratteristico del Langhiano.

Il resto, scoperto a Rosignano, è un mascellare inferiore destro; esso è lungo mm. 119, coll'estremità anteriore ben conservata e quella posteriore imperfetta, coll'osso articolare parzialmente rappresentato dall'impronta. I denti sono complessivamente 32, ma 7 sono rappresentati da impronte ben delimitate sulla roccia e 4 sono incompleti: sonvi inoltre 4 spazi o intervalli interdentali vuoti, irregolarmente distribuiti sulla metà anteriore del margine mascellare, e, se essi corrispondono, come ritengo, a denti spezzati e caduti, il numero totale dei denti sarebbe di 36. I denti sono contigui l'uno all'altro e quasi sempre a contatto, salvo i due ultimi posteriori che si presentano spaziati. Sono uniformi, compressi lateralmente e presentano su le due facce una depressione mediana ed un'altra presso i margini, quasi taglienti, in corrispondenza del colletto: hanno cioè la caratteristica forma di lancetta già notata dagli autori. La radice è cilindroide, pure lateralmente compressa e infissa profondamente, non meno di quanto emerge il dente del margine alveolare.

Tursiops miocenus Portis? — Un altro avanzo di vertebrato, della collezione Cantamessa, del quale credo opportuno di segnalare il rinvenimento, è un cranio incompleto di delfino, che con ogni probabilità appartiene al *Tursiops miocenus* Portis (3): ne enumero le parti come mi si presentano, dopo lungo e delicato lavoro di ripulimento.

---

(1) F. Bassani, *La Ittiofauna della " pietra leccese "* (Terra d'Otranto), " Mem. R. Accad. Sc. Napoli ", vol. XVI, 1915, p. 34.

(2) G. Dal Piaz, *Sui vertebrati delle arenarie miocen. di Belluno*, " Atti Acc. Sc. veneto-trent.-istr. ", anno V, 1908, p. 17.

(3) A. Portis, *Catalogo descrittivo dei Talassoterii rinvenuti nei terreni terziari del Piemonte e Liguria*, " Mem. d. R. Accad. d. Scienze di Torino ", vol. XXXVII, 1885, p. 100, fig. 106.

Il cranio è incompleto e scomposto parzialmente e se ne riconoscono le seguenti ossa più o meno frammentarie: intermascellare, visibile pel di sotto; mesoetmoide?; parietale; arco jugale; osso squamoso; periotico-osso timpanico (destro e sinistro); condili; exoccipitale; basioccipitale; mandibola (margine inferiore e estremità articolare).

Un frammento di mandibola presenta in posto tre denti ben conservati e parte di radice di altri due. Questi denti ed un altro isolato corrispondono esattamente a quelli che hanno servito al Portis per istituire la specie: sono alquanto più piccoli dei maggiori descritti dal Portis e, come gli avanzi del cranio, accennano ad un individuo più giovane.

Il De Alessandri (1) ha già notato la frequenza di ossa periotiche nel calcare della Colma di Rosignano, ritenendole attribuibili forse a delfino. Il confronto con quelle che appartengono al cranio in esame conferma questo riferimento e più precisamente al gen. *Tursiops*: è da notare tuttavia una certa variabilità nei caratteri di queste ossa, senza che per altro ne risultino differenze tali da lasciar ritenere ch'esse spettino a specie diverse.

Con questi avanzi nuovamente scoperti e qui enumerati la conoscenza del *Tursiops* di Rosignano si avvantaggia notevolmente. Ma detti avanzi parmi non bastino per una diagnosi e descrizione sufficientemente particolareggiate, e per un confronto definitivo colle forme affini mioceniche ed anche col pliocenico *T. Cortesii* (Desm.). Converrà attendere che ulteriori ricerche procurino altro materiale di studio per poter fare di questa specie una illustrazione più completa.

*
* *

Ritengo opportuno di notare infine che nelle operazioni di scoprimento e di ripulitura di queste ossa vennero allo scoperto anche rari esemplari di opercolina e non poche valve di *Pecten denudatus* Reuss (*Pseudamussium corneum* (Sow.), var. *denudata* (Reuss) sec. Sacco), specie già dal Prof. De Alessandri ricono-

---

(1) De Alessandri, " Mem. „ cit., p. 20, tav. I, fig. 2.

sciuta frequente fra i fossili miocenici del Basso Monferrato e che pure fa parte della fauna della *pietra leccese*.

La grande somiglianza fra queste due pietre nell'aspetto e nei caratteri delle faune è riconfermata dall'esame al microscopio. Lastrine sottili tagliate dalle roccie contenenti gli avanzi del *Cybium* e del *Tursiops* di Rosignano e da un campione della *pietra leccese*, avvolgente un pezzo di osso indet., dimostrano identità di costituzione: sono calcari biogenici, costituiti per oltre due terzi da globigerine minutissime e assai ben conservate, con rari esemplari di textularie e ancor più rari di rotalie, pulvinuline, lagene, nodosarie, frammenti di cidariti e spicule di spugne. Come è noto (1), è pure una marna langhiana a globigerine la *pietra di Malta*; e simili alle pietre di Rosignano e di Lecce, e della stessa età, sono la marna a seppie di Fangario (Cagliari) (2) e la pietra di Siracusa (Latomie): ma l'una e l'altra contengono globigerine poco numerose; e questa si differenzia da quella, per quanto mi risulta dalle poche sezioni sottili esaminate, perchè colle globigerine vi si osservano numerosi altri foraminiferi e spicule di spugne.

(1) C. De Stefani, *L'Arcipelago di Malta*, " Rend. R. Accad. Lincei ", 5 genn. 1913, p. 7.

(2) La *pietra cantone* e il *tramezzario* di Cagliari, del pari d'età miocenica, hanno invece carattere di *panchina*; ed infatti la parte minuta del calcare poroso che ingloba i molluschi ed altri fossili, generalmente modelli interni, è un aggregato, con litotamni, di tritumi di conchiglie e di echinodermi, con rari foraminiferi ed esclusione di globigerine. Nell'intima struttura e composizione si avvicinano a questo tipo certe varietà grossolane della *pietra* di Siracusa.

DESCRIZIONE DELLA TAVOLA

Cybium Bottii (Cap.), mascellare inferiore destro (grandezza naturale).

Appunti sullo sviluppo del sistema nervoso simpatico negli Amnioti.

Nota I del Dott. ANGELO CESARE BRUNI
Aiuto e libero docente.

(Con una Tavola).

Da parecchi anni sto raccogliendo materiale per lo studio del difficile problema dell'istogenesi delle formazioni feocrome, studio che non può essere disgiunto da quello dello sviluppo del sistema nervoso simpatico. Riservandomi di trattare altra volta in modo speciale del primo problema, credo ora opportuno riferire fatti e considerazioni, che mi paiono illuminare alcuni punti ancora oscuri delle nostre conoscenze sullo sviluppo del simpatico, oppure si scostano dai risultati delle osservazioni fin qui compiute. In questa mia relazione non insisterò sui particolari riguardanti specialmente la morfogenesi, che sono in modo sufficiente illustrati da molti lavori anche recenti (Onodi, Paterson, Fusari, His jun., Held, Kuntz, Ganfini) e pei quali non esistono profonde controversie.

Il materiale di cui mi sono servito comprende:

1° una serie di 19 embrioni di *gongylus ocellatus*, di cui 17, misurati avvolti a spira, avevano rispettivamente i diametri di mm. 3 × 3 - 3,8 × 2,6 - 3,5 × 3 - 3,8 × 3 - 4 × 3,5 - 4,5 × 4 - 5 × 3,4 - 5 × 3,5 - 5 × 4,5 - 5,3 × 4,5 - 5,3 × 4,7 - 6,4 × 4,3 - 6 × 5 - 6,5 × 5 - 7,5 × 5,5 - 7,3 × 5,8 - 7,8 × 6; due, misurati svolti, avevano la lunghezza totale rispettivamente di mm. 16 e 22 e quella del capo di mm. 6 e 7,5;

2° una serie di 28 embrioni di pollo incubati per ore: 61 $^1/_2$ - 58 - 72 - 62 - 68 - 65 - 69 - 72 - 78 $^1/_2$ - 84 - 81 - 88 - 82 - 92 - 96 - 106 - 108 e giorni 5 (3 esemplari) - 5 e 17 ore - 6 - 6 e 1 ora - 7 (2 esemplari) - 9 (2 esemplari) - 11;

3° una serie di 16 embrioni di ratto (*mus decumanus* var. *albina*) della lunghezza massima rispettivamente di mm. 4 -

5 - 6 (3 esemplari) - 7,5 (2 esemplari) - 8 - 9 - 10 - 11 (2 esemplari) - 15 - 16 - 27 - 34.

In ciascuna delle tre serie lo sviluppo del simpatico fu colto fin dal suo primo inizio, avendo potuto disporre di stadii in cui la vescicola acustica è aperta od appena chiusa ed ancora in contatto coll'epidermide, la lente cristallina ha forma vescicolare, essendo anch'essa aperta o appena chiusa, gli arti non sono ancora abbozzati, o lo sono appena.

Per gli embrioni di *gongylus*, che ebbi a disposizione già fissati, non mi fu possibile impiegare altro che metodi comuni di colorazione, semplice o, per lo più, doppia; per gli altri, accanto alle fissazioni e colorazioni semplici o doppie comuni, ho eseguito fissazioni specifiche per le cellule feocrome (liquido del Müller con formolo) ed il metodo di Cajal all'argento ridotto pel tessuto nervoso, seguìto o no dalla colorazione delle sezioni con saffranina, previo viraggio e imbiancamento. In molti degli embrioni di pollo e di topo ho ottenuto l'iniezione naturale con la legatura dei vasi estraembrionarii.

I particolari dei quali intendo occuparmi sono i seguenti: 1° dell'esistenza e della evoluzione di un abbozzo mesenchimale del cordone limitante primitivo; 2° dell'esistenza di un cordone limitante secondario, della sua istogenesi e della sua morfogenesi; 3° dell'istogenesi e della morfogenesi della porzione cervicale del simpatico; 4° del modo di formarsi del plesso ipogastrico e — negli uccelli — del nervo intestinale di Remak; 5° della presenza di cellule nervose del tipo di quelle dei ganglii spinali nei nervi spinali o nei rami comunicanti o nel cordone limitante durante i primi periodi dello sviluppo del simpatico; 6° dell'importanza del *neurotropismo* (Forsmann) e dell'*odogenesi* (Dustin) nello sviluppo normale del simpatico.

In questa prima comunicazione tratterò dei due primi argomenti.

1. — Dell'abbozzo mesenchimale del cordone limitante primitivo.

Due autori principalmente riportarono ad onore, con modernità di metodi, le vedute di Remak sulla origine mesenchimale del simpatico: Paterson e Fusari. Per quanto le loro con-

clusioni, ricavate da osservazioni su mammiferi ed uccelli, siano state confermate da O. Schultze e da Consiglio e Pusateri, e siano state estese agli anfibii da Camus, non trovarono l'appoggio della maggior parte degli AA., i quali parafrasando ed estendendo a tutte le classi di vertebrati le opinioni di Balfour, ricavate dallo studio di embrioni di elasmobranchi, ritengono che il materiale destinato a formare il simpatico sia di origine ectodermica. Esso proverrebbe dal midollo spinale, secondo alcuni indirettamente per la via dei ganglii spinali (Onodi, Rabl, His jun., Mazzarelli, Held), secondo altri indirettamente e direttamente insieme per migrazione di cellule lungo ambedue le radici dei nervi spinali (Balfour, Schenk e Birdsall, Van Vijhe, Hoffmann, Neumayer, Froriep, Jones, Kohn, Kuntz, Abel, Ganfini); inoltre alcune parti del simpatico, come, ad esempio, i plessi cardiaci e polmonari, troverebbero il loro materiale cellulare in elementi migrati dal cervello posteriore lungo la via del vago (His, Kuntz, Abel). Una cosa tuttavia risulta chiaramente dall'esame dei principali lavori in cui è sostenuta l'origine ectodermica del simpatico, ed è questa: che nei vertebrati più alti, e specialmente negli uccelli, esiste il fatto, messo in chiara luce da Fusari, che abbozzi simpatici, come quelli del cordone limitante primitivo e del nervo intestinale di Remak, appaiono prima che siano visibili rami comunicanti, ad essi collegati. O. Schultze, Rabl, Held, His lo dissero chiaramente, e già prima Onodi, accanto all'origine ectodermica della parte principale del simpatico, aveva ammessa l'origine mesenchimale, per i ganglii dei visceri e pel nervo intestinale. Held dichiara di essere stato per molto tempo in dubbio se non avessero ragione Paterson e Fusari. His ed Held, tuttavia, vedono nel primitivo abbozzo, privo di rami comunicanti, un cumulo di cellule ectodermiche, migrate dai ganglii spinali isolate o in piccoli gruppi secondo His e Mazzarelli, per mezzo di catene cellulari, la cui esistenza è effimera, secondo Held.

Due lavori meritano un cenno particolare per la differente interpretazione, che in essi è data, di ciò che dagli altri AA. viene considerato come primo abbozzo del simpatico, indipendente da rami comunicanti: sono quello di Roud, e quello di Goormaghtigh. Roud vede originarsi dall'epitelio del celoma tre abbozzi distinti che si affondano nel mesenchima: uno è desti-

nato a produrre le ghiandole genitali, un altro fornisce il substrato per la formazione delle due sostanze della capsula surrenale — corticale e midollare —, il terzo infine, molto simile a quello delle capsule surrenali, si pone innanzi ai grossi vasi addominali (abbozzo prevascolare) e serve per la formazione del plesso celiaco.

Goormaghtigh ha preso in considerazione embrioni di pollo e di topo ed ha confermato pienamente i reperti di Fusari, ma ritiene che l'abbozzo del cordone limitante di Fusari non abbia relazione con la genesi del simpatico, rappresenti invece la prima nota delle formazioni feocrome, destinata a mettersi poi in rapporto topografico col simpatico derivato da materiale ectodermico.

Le mie osservazioni in embrioni di *gongylus*, di pollo e di ratto, confermano esse pure pienamente i dati di Fusari secondo i quali le note del cordone limitante primitivo si manifestano come una modificazione di cellule mesenchimali. In vicinanza del luogo in cui i vasi segmentali si dipartono dall'aorta, lateralmente al passaggio dalla parete laterale alla dorsale di tale vaso, ed in corrispondenza della porzione craniale del mesonephros, cominciano a rendersi evidenti in seno al mesenchima dei piccoli cumuli di cellule, che non differiscono dalle mesenchimali, se non per essere più colorabili e sopratutto più avvicinate. Ben presto questi cumuli, disposti segmentalmente, si raccolgono in una colonna continua estendentesi rapidamente in senso craniale e caudale, e formata da un trabecolato di protoplasma denso, cosparso di nuclei più colorabili di quelli delle cellule mesenchimali, sovente disposti a cumuli come quelli delle masse protoplasmatiche polinucleate delle gemme di accrescimento dei vasi. Le trabecole formano una rete a maglie allungate nel senso della lunghezza dell'embrione. Questa formazione è particolarmente evidente nelle regioni toracica e addominale, si estende anche più o meno in direzione craniale, dorsalmente al tratto dorsale dell'aorta, collegante gli archi. Nella fig. 1 *a*, tolta da una sezione trasversale di embrione di ratto di 6 mm., si vede a forte ingrandimento l'aspetto delle trabecole polinucleate, aspetto che non è diverso nel *gongylus* e nel pollo.

Oltre il fatto essenziale, che esistono i gradi di passaggio per cui dagli elementi mesenchimali si giunge a queste forma-

zioni, due altri fatti importanti ho potuto mettere in rilievo con particolare evidenza nel pollo e nel ratto: uno è che in seno a questo abbozzo mesenchimale si producono dei granuli, o meglio delle goccie di una sostanza che si tinge fortemente ed elettivamente con l'ematossilina; alcune di tali goccie raggiungono la grandezza dei nuclei, e sono circondate da un alone chiaro (ved. fig. 2, ratto di mm. 4). Io non saprei dire se si tratti di un prodotto di secrezione o di un prodotto di degenerazione: comunque sia, il fatto è molto evidente ed identico in animali, appartenenti a classi diverse, e fissati con fissatori diversi (Mingazzini pel ratto, Bouin per gli embrioni di pollo di ore 78 $^1/_2$ ed 81, che presentano pure questa particolarità). Perciò, non posso assolutamente ammettere che si tratti di un reperto accidentale.

Il secondo fatto importante, che mi fu dato rilevare, è che contemporaneamente, o poco dopo che si sono formate nell'abbozzo mesenchimale le goccie in questione, nella branca ventrale di ciascun nervo spinale, almeno nelle regioni toracica ed addominale, si vedono accumularsi cellule del nervo (neurociti) in corrispondenza del punto in cui il nervo è meno lontano dall'abbozzo mesenchimale, e si assiste alla formazione di una propaggine del nervo, che si dirige verso l'abbozzo mesenchimale stesso. La fig. 1 *b* illustra questo fatto: essa è tolta dalla stessa sezione da cui venne tolta la fig. 1 *a*, e riprodotta all'identico ingrandimento, così si può vedere come i nuclei dei neurociti siano assai più grandi di quelli mesenchimali e quindi facilmente riconoscibili; uno dei neurociti ha già assunta la forma di un neuroblasto monopolare. Nella fig. 3, tolta da un embrione di pollo di ore 78 $^1/_2$, si vede uno stadio un po' meno avanzato della proliferazione del nervo spinale verso l'abbozzo mesenchimale, avendosi solo un lieve rigonfiamento del nervo, dovuto ad un accumulo di neurociti. Non può esservi dubbio che siamo qui di fronte al primo abbozzo ectodermico del simpatico, quale fu visto dalla maggior parte degli AA.

Che i neurociti derivino dal tubo neurale è sufficientemente provato nei miei stessi preparati dal fatto che tanto il ganglio spinale quanto la radice ventrale del nervo spinale, nei primordii dello sviluppo, si presentano come un prolungamento della sostanza componente il tubo neurale, e dal fatto che, anche

quando lo sviluppo è già piuttosto avanzato, si vedono nel nervo file di nuclei che continuano quelle dei ganglii intervertebrali e altri nuclei situati con una parte della loro massa nel midollo, coll'altra nella radice ventrale, attraverso la membrana limitante esterna.

Confermo adunque l'opinione di Goormaghtigh che l'abbozzo mesenchimale del simpatico, quale fu veduto da Fusari, sia una formazione originariamente indipendente dal vero abbozzo ectodermico del simpatico e che i due abbozzi, in origine, siano perfettamente distinti e separati. Io posso aggiungere che l'abbozzo mesenchimale esercita una attrazione sulla branca ventrale del nervo spinale, attrazione che è determinante per la formazione dell'abbozzo simpatico ectodermico. Sarei anche tentato di vedere nelle goccie che si producono in seno all'abbozzo mesenchimale la sostanza specifica attraente.

La separazione dei due abbozzi, contrariamente a quanto ammette Goormaghtigh, dura brevissimo tempo: ben presto l'abbozzo mesenchimale viene invaso dai rami comunicanti costituenti l'abbozzo ectodermico, ed i due abbozzi si fondono, o meglio, in parte almeno, si sostituiscono l'uno all'altro.

Ecco come si svolge questo processo di mescolanza e di sostituzione nei tre animali studiati.

Negli esemplari di *gongylus* di mm. 3 × 3 e 3,8 × 2,6 si vede unicamente l'abbozzo mesenchimale del cordone limitante, come fu descritto sopra; in quello di mm. 3,8 × 3, in cui la vescicola acustica presenta già i primi differenziamenti e la cavità della vescicola della lente è ridotta a una fessura, in alcune sezioni della regione toracica ho trovato una catena di cellule collegante la branca ventrale del n. spinale coll'abbozzo mesenchimale. Questo si è fatto più lasso per essersi le sue trabecole allontanate fra di loro ed assottigliate, determinando una rarefazione del mesenchima ambiente. Alcune delle trabecole si sono messe in intimo rapporto coll'endotelio di vasi capillari, che intanto si sono sviluppati lateralmente e ventralmente all'aorta. Negli stadii successivi, fino a quello di mm. 5,3 × 4,5, non vedo più traccia di rami comunicanti, nè puramente cellulari, nè fibrosi o fibro cellulari; da parte dell'abbozzo mesenchimale noto una rarefazione anche maggiore, la comparsa di rigonfiamenti segmentali e la presenza di alcune (pochissime) cellule del tipo di

quelle dei ganglii spinali (ved. Cap. 5°). Sopratutto noto il propagarsi di trabecole dell'abbozzo mesenchimale lateralmente e innanzi all'aorta nella regione in cui si svilupperanno i plessi celiaco ed aortico-addominale.

Lo stadio di mm. 5,3 × 4,5 è importante perchè in esso trovo che dal punto più vicino al rigonfiamento segmentale dell'abbozzo mesenchimale della branca ventrale di ciascun nervo spinale parte regolarmente un ramo (ramo viscerale) che nella regione toracica entra tutto nell'abbozzo mesenchimale, nella regione addominale vi entra con una sua parte, espandendosi con la rimanente parte nella regione dei plessi celiaco e aortico-addominale, ove si mette in rapporto con le trabecole protoplasmatiche polinucleate quivi giunte dall'abbozzo mesenchimale del cordone limitante.

A partire da questo momento l'aspetto del cordone limitante del simpatico si modifica notevolmente, in quanto si vede costituito da cumuli e trabecole di protoplasma denso, polinucleati, invasi da fascetti nervosi e da cordoncini fibrillari con nuclei allungati longitudinalmente disposti; per questi cordoncini è dimostrabile la continuazione diretta coi rami viscerali dei nervi spinali, diventati rami comunicanti (embrioni di mm. 6,4 × 4,3, sezioni frontali). Avanzando nello sviluppo, le masse polinucleate si fanno sempre più scarse dappertutto, tranne che nella regione dei futuri plessi celiaco ed aortico-addominale, ove esse non solo si conservano, ma si fanno più numerose e si mettono in relazione con la sostanza corticale delle ghiandole surrenali, essendo sovente percorse da fascetti nervosi e situate in intimo contatto con l'endotelio di larghi capillari.

L'abbozzo del cordone limitante, una volta che ha acquistato l'aspetto di un nervo molto ricco di neurociti, per modificazione del mesenchima circostante viene man mano delimitandosi in modo netto.

Negli embrioni più avanzati che ebbi in esame (mm. 16 e 22), nei quali i neurociti dell'abbozzo del cordone limitante hanno cominciato a raccogliersi in ganglii segmentali, si rileva un fatto importante: mentre negli stadii precedenti erano rarissimi i neurociti della radice ventrale del nervo spinale, attraversanti la membrana limitante esterna del midollo (conforme-

mente a quanto ha osservato anche Held), ora invece si trova nel velo marginale, verso l'origine apparente della radice, un cumulo di nuclei che si protende nella radice stessa. Se a ciò si aggiunge che a quest'epoca lungo i rami comunicanti si trovano parecchie cellule nervose assai differenziate e che si ha anche qualche segno della formazione di un rudimentale cordone limitante secondario (ved. Cap. 2°), sarà lecito pensare che a quest'epoca avvenga un'attiva migrazione di elementi dal tubo neurale al simpatico.

Negli esemplari di pollo da me esaminati, l'abbozzo mesenchimale del simpatico appare fra la 65ª e la 72ª ora di incubazione. Nell'embrione di 72 ore, che venne trattato col metodo di Cajal, per quanto la reazione sia riuscita perfettamente, non ho potuto vedere nell'abbozzo mesenchimale nè cellule nè fibre nervose. Tale abbozzo già nell'embrione di ore 78 $^1/_2$, nella regione addominale, invia delle propaggini sui lati dell'aorta; quivi le dilatazioni segmentali bene evidenti nelle altre regioni lo sono meno. In questo embrione ed in quello di 81 ore vidi apparire le caratteristiche goccie colorabili coll'ematossilina e manifestarsi il rigonfiamento della branca ventrale del nervo spinale. Questo rigonfiamento a 92 ore è costituito da un cumulo di cellule, che, assottigliandosi, risale per un certo tratto lungo il lato mediale del nervo spinale e con la sua parte principale si estende medialmente e penetra nell'abbozzo mesenchimale a livello dei rigonfiamenti segmentali. A quest'epoca però l'abbozzo del cordone limitante primitivo ha già modificato il suo aspetto, poichè si presenta essenzialmente come un nervo longitudinale straordinariamente ricco di neurociti. Trabecole polinucleate dell'abbozzo mesenchimale rimangono alla periferia della porzione nervosa, alla estremità cefalica del cordone, oltre l'articolazione occipitoatloidea, e principalmente nella regione addominale, ove le trabecole molto sovente sono percorse da fascetti nervosi, oppure si mettono in stretto contatto coll'endotelio di capillari, che avevano già cominciato a svilupparsi ventralmente all'aorta addominale alla 81ª ora. Questi rapporti delle trabecole polinucleate si vedono ancora benissimo, anzi meglio, in stadii più avanzati. La fig. 4 li presenta quali essi appaiono coi metodi comuni (pollo giorni 6 ore 1), la fig. 5 quali essi appaiono col metodo di Cajal, seguìto da colorazione con

saffranina (pollo giorni 5), mentre la fig. 6 appartenente allo stesso embrione di giorni 5, mostra un tratto di ramo comunicante con fibre nervose ed elementi cellulari mal distinti, tranne uno nel quale è iniziato il differenziamento dei neuronemi.

Dalla 2ª metà del 6° giorno fino al 9° vediamo rendersi sempre più grosso e complicato un plesso di trabecole di origine mesenchimale e di gittate di fibre e cellule nervose, parte indifferenziate, parte in via di differenziamento, plesso che sta fra le capsule surrenali, con le quali si mette in rapporto, e intorno all'origine dei vasi mesenterici. Nello stesso tempo le trabecole mesenchimali vanno riducendosi e scomparendo nell'abbozzo del simpatico delle altre regioni. Al 9° giorno, come fatto importante, assistiamo alla comparsa di fini granuli feocromi in queste trabecole, che si vedono attraversate da un fascetto nervoso nella fig. 7 *a*, in rapporto coll'endotelio di un capillare nella fig. 7 *b* e risolte in cellule feocrome distinte nella fig. 7 *c*, tolte appunto da un embrione di 9 giorni fissato colla miscela di liquido del Müller e formalina.

Negli embrioni di ratto di 5-6 mm., quando i rami viscerali delle branche ventrali dei nervi spinali hanno cominciato a formarsi, ma non hanno ancora raggiunto l'abbozzo mesenchimale del cordone limitante primitivo, si vede già tale abbozzo mesenchimale espandersi lateralmente e ventralmente all'aorta, nella regione addominale, sotto forma di trabecole di protoplasma denso con molti nuclei, spesso agglomerati, come nei rettili e negli uccelli.

Successivamente un cordone fibrocellulare, derivato dai rami viscerali, si sostituisce all'abbozzo mesenchimale con modalità simili a quelle verificatesi nel *gongylus*. Nella regione addominale una parte del ramo viscerale anzichè penetrare nel cordone limitante primitivo si sparpaglia fra le trabecole polinucleate dell'abbozzo mesenchimale, che si conserva e si estende; cosicchè negli embrioni di 11 mm., che vennero trattati col metodo di Cajal, ventralmente all'aorta, intorno all'origine delle arterie celiaca e mesenteriche, fra le capsule surrenali e caudalmente a queste, ho trovato una grossa lamina costituita in parte da fibre e da cellule simpatiche ectodermiche, in molte delle quali è già iniziato il differenziamento dei neuronemi, in parte da elementi non nervosi, derivati dall'espandersi e dal fon-

dersi delle trabecole protoplasmatiche polinucleate dell'abbozzo mesenchimale. Gli elementi nervosi e i gruppi misti di elementi nervosi e mesenchimali prevalgono alle due estremità della lamina, i gruppi di elementi mesenchimali, ricchi di fibre nervose che li percorrono, formano una placca impari, foggiata a scudo, con due prolungamenti craniali, che portandosi in alto divergono verso le capsule surrenali in modo identico a quello descritto e figurato da Kohn pel paraganglio addominale del coniglio (Kohn 1903, fig. 6 del testo). In stadii poco più avanzati il paraganglio addominale si distingue anche meglio, perchè il connettivo ne scompone il materiale costitutivo in lobuli. In seguito, vicino alle capsule surrenali il materiale ectodermico ed il mesenchimale si confondono, acquistando l'aspetto di un tessuto linfoide, che compenetra le capsule surrenali e vi forma l'abbozzo della sostanza midollare, secondo quanto ha osservato Wiesel. Tanto nel paraganglio addominale quanto nelle capsule surrenali non ho ottenuta la reazione feocroma che verso la nascita.

Da quanto ho esposto risulta che il processo di istogenesi del cordone limitante primitivo del simpatico è poco dissimile nei tre animali studiati; le differenze principali riguardano l'aspetto dei rami comunicanti, che nel pollo sono molto più brevi, più grossi e sopratutto più ricchi di cellule che non nel *gongylus* e nel ratto. Nel *gongylus* però, prima che si costituiscano i rami comunicanti fibrocellulari definitivi, ho potuto vedere dei rami comunicanti, costituiti da una catena cellulare, identici a quelli osservati da Held in rettili ed uccelli, da Kuntz e da Ganfini in rettili, e ritenuti normali da Kohn nei mammiferi.

Per Held, per Kohn e per Kuntz questi rami comunicanti cellulari sarebbero quelli che portano il materiale costitutivo per l'abbozzo del cordone limitante primitivo, Ganfini invece li vede comparire dopo un altro ramo comunicante. Probabilmente l'epoca della loro comparsa è irregolare, come pure ne è irregolare, secondo le osservazioni di Held e mie, la distribuzione e forse incostante la presenza. Non per questo io li ritengo privi di importanza, chè anzi io li credo destinati a portare nell'abbozzo mesenchimale il primo materiale ectodermico (ved. Cap. 5°).

Le lievi differenze non hanno che una piccola importanza di fronte al fatto principale osservato in modo identico nei tre

animali studiati, che cioè il primo abbozzo del cordone limitante è veramente di origine mesenchimale, come dimostrarono Paterson e particolarmente Fusari; che inoltre tale abbozzo manifesta una attrazione sulle fibre e sulle cellule del nervo spinale, destinate da sole a fornire i veri elementi simpatici, prepara ad esse lo spazio, determinando una rarefazione del mesenchima ambiente e serve loro di guida per un certo tempo, dopo il quale in parte scompare, in parte si accresce (regione dei plessi celiaco e aorticoaddominale) conservando i rapporti preesistenti con le fibre e le cellule nervose, ed acquistandone di nuovi coll'endotelio dei vasi capillari che nella stessa regione si vanno sviluppando e sopratutto trasformandosi istologicamente e morfologicamente nelle formazioni feocrome che costituiscono i paragangli e la sostanza midollare delle capsule surrenali.

Concordo adunque con Goormaghtigh nel ritenere che le formazioni feocrome derivino dall'abbozzo mesenchimale del cordone limitante primitivo; trovo però che questo abbozzo ha prima di tutto una grande importanza per la genesi del simpatico, cosa che a Goormaghtigh pare sia totalmente sfuggita.

Questa constatazione di fatti non solo non stabilisce un disaccordo con l'opinione generale delle strette relazioni fra sostanza feocroma e simpatico, ma anzi la concilia con fatti e considerazioni che paiono contraddirla. Infatti da un lato spiega benissimo perchè sul tessuto dei paragangli i nervi si appoggino soltanto, come affermò Zuckerkandl, perchè possano occorrere dei cumuli di sostanza feocroma affatto indipendenti dal simpatico (Kose) e perchè si possa ritrarre l'impressione che la sostanza feocroma sia giustapposta al simpatico (Soulié); d'altro lato permette di comprendere benissimo perchè sostanza midollare delle capsule surrenali e sostanza feocroma abbiano potuto essere considerate come una emanazione diretta del simpatico o almeno come derivate da un substrato comune col simpatico (Fusari, Swale, Giacomini, Hoffmann, Zuckerkandl, Wiesel, Kohn, Ciaccio, Poll, Kose, Kuntz, Trinci, Gantini, per citare solo qualcuno fra gli AA. più recenti).

2. — Del cordone limitante secondario.

Il primo A. che abbia parlato di due cordoni limitanti, uno primitivo, uno secondario, che si succedono durante lo sviluppo, è His jun., il quale osservò che nel pollo in stadii precoci appare un cordone limitante, situato, come negli altri vertebrati, lateralmente e un po' dorsalmente all'aorta; in stadii più avanzati invece, come poi nell'adulto, si trova un cordone limitante molto vicino alla serie dei ganglii spinali, essendo posto subito innanzi ai processi trasversi delle vertebre e formando nella regione toracica degli occhielli che abbracciano il collo di ciascuna costa. Questa constatazione era già stata fatta da Onodi, il quale però ritenne una modificazione di forma secondaria la vicinanza, che va fino alla confluenza, tra i ganglii simpatici e quelli intervertebrali. His invece considera il cordone limitante secondario come l'ultimo prodotto della migrazione di cellule dei ganglii spinali, dopo che per migrazioni successive si sono formati il cordone primitivo, il plesso aortico, i nervi splancnici, i plessi e i ganglii della parete intestinale. Per Kuntz il cordone limitante secondario degli uccelli è dovuto all'accumularsi di elementi migrati dai n. spinali, in corrispondenza dell'origine del ramo comunicante col cordone primitivo; tali elementi formano dei veri cumuli, che si collegano in seguito longitudinalmente.

Negli altri amnioti non venne osservata nessuna formazione paragonabile al cordone secondario del pollo, fino a quando Ganfini lo vide, tra i rettili nei soli cheloni, formarsi a breve distanza dal ganglio spinale, tanto da parere una lobulazione di quest'ultimo, provveduto di rami comunicanti proprii. His e Ganfini concordano nel dimostrare che, mentre si forma il cordone secondario, il primitivo, in parte almeno, si modifica, riducendosi ad un plesso circondante l'aorta.

Le mie osservazioni nel pollo confermano essenzialmente le vedute di Kuntz. Infatti, già durante il 5° giorno di incubazione, i rami comunicanti del cordone primitivo, molto grossi e ricchi di cellule, paiono risalire in alto, medialmente al nervo spinale, verso il punto di riunione delle due radici. Ciò si constata con

maggiore evidenza nelle regioni cervicale e toracica che nelle regioni caudali del tronco. Durante il 6° giorno la quantità di neurociti all'origine del ramo comunicante, origine che si è ora molto avvicinata al luogo di unione delle due radici del nervo spinale, è tale che i cumuli molto rapidamente si congiungono in una colonna longitudinale; così si raggiunge l'aspetto definitivo del cordone limitante secondario. Nel frattempo i tratti distali dei rami comunicanti del cordone primitivo si riducono gradatamente, e, dove si conservano, si allontanano dalla branca ventrale del nervo spinale; così pure, nella regione toracica, si riduce gradatamente lo stesso cordone limitante primitivo. Nella regione cervicale (ved. Cap. 3°) una parte del cordone primitivo e dei suoi rami comunicanti si conserva; nella regione addominale, mancando il caratteristico comportamento del cordone limitante secondario rispetto al collo delle coste, pare che avvenga solo uno spostamento dorsolaterale del cordone primitivo.

Il cordone secondario acquista un aspetto diverso dal primitivo, oltre che per la topografia, anche per l'esservi più densamente accumulati i neurociti e per il fatto che i neurociti stessi vi si differenziano assai tardi, non essendo ancora differenziati alla fine del 7° giorno, mentre alla fine del 4° si trovano elementi simpatici perfettamente differenziati nel cordone limitante primitivo e nei plessi che ne derivano. Oltre a ciò il cordone limitante secondario ha un ramo comunicante, il quale, anzichè originarsi dalla branca ventrale del nervo spinale a una certa distanza dall'unione delle radici, prende origine direttamente da ciascuna delle due radici.

Malgrado la vicinanza col ganglio intervertebrale non sono in grado di affermare se solo quest'ultimo fornisca i neurociti componenti il cordone secondario; inclino piuttosto a credere che concorra anche la metà ventrale del midollo per elementi migranti lungo la radice ventrale.

Nella fig. 8 sono dati tre schemi del cordone limitante secondario in sezioni trasversali delle regioni cervicale (C), toracica (T) e addominale (A), dimostrando con linee nere i fasci di fibre dei rami comunicanti. Nella regione addominale si vede come il ramo comunicante sia ancora, come quello del cordone limitante primitivo, una porzione di un fascio nervoso, che pel rimanente (accompagnato da una grande quantità di cellule) si perde nel-

l'abbozzo simpatico-feocromo circostante all'aorta e rappresentato nella figura con macchiette nere.

Alcuni dati interessanti ho ricavati dallo studio delle sezioni dell'embrione di *gongylus* di mm. 16. Ho già detto come a questo stadio si noti una migrazione di neurociti lungo ambedue le radici dei nervi spinali più attiva di quella che si osserva negli stadii precedenti (Cap. 1°). Ora una parte di questi neurociti, come viene chiaramente dimostrato dalla fig. 9, si accumula fra le due radici. Nell'embrione di 22 mm. non solo non si rileva la presenza di una formazione paragonabile col cordone limitante secondario, ma neppure il predetto accumulo di neurociti appare più imponente, per cui, non avendo potuto esaminare stadii più avanzati, ritengo che nel *gongylus* un vero cordone secondario o non si stabilisca, o, quanto meno, si stabilisca molto tardivamente.

Nel ratto lo stadio di 11 mm., che mi ha dimostrata una quantità di altri particolari notevoli, mi ha anche permesso di rilevare che da ogni nervo spinale, almeno nella regione toracica, partono due rami comunicanti: uno, corrispondente a quello che fin da principio collega il cordone limitante primitivo col sistema spinale, si diparte dalla branca anteriore del nervo spinale a una certa distanza dall'unione delle radici; l'altro invece, di nuova formazione, proviene da ciascuna delle due radici poco prima che queste si uniscano, come il ramo comunicante del cordone secondario del pollo. Oltre a ciò il cordone limitante laddove riceve ciascuno dei detti due rami comunicanti presenta un cumulo di cellule, che risale lungo di essi per un certo tratto, il che potrebbe indicare che i neurociti hanno raggiunto il cordone limitante seguendo ambedue le vie indicate dai rami comunicanti. Dopo questa constatazione ho esaminato con maggiore attenzione le sezioni degli embrioni meno avanzati, ed in uno di mm. 7,5 ho potuto scoprire nello stesso punto del n. spinale da cui partirà il secondo ramo comunicante (non ancora evidente) una quantità di neurociti molto maggiore di quella che si trova nelle altre parti dello stesso nervo, oppure nello stesso luogo negli stadii precedenti. Questi neurociti provengono da ambedue le radici.

I reperti nel *gongylus* e nel ratto mi paiono di grande importanza, perchè da una parte dimostrano nettamente che in

tutti gli amnioti, ad un certo stadio relativamente tardivo dello sviluppo, si ha una nuova e più attiva migrazione di elementi ectodermici del simpatico, d'altra parte provano che il cordone limitante secondario degli uccelli non è una formazione sostanzialmente speciale per questi vertebrati, ma soltanto appare in essi con maggior evidenza. Essa non manca negli altri amnioti, ma vi è molto meno appariscente, perchè nei rettili — eccezion fatta pei cheloni, che si comportano al riguardo come gli uccelli (Ganfini) — si tratta di una formazione troppo rudimentale per essere evidente; nei mammiferi gli elementi che corrispondono a quelli costituenti il cordone secondario degli uccelli vengono a confondersi con quelli costituenti il cordone limitante primitivo, che pare così conservarsi unico per tutta la vita.

Possiamo concludere che solo negli uccelli e nei cheloni è evidente un cordone limitante secondario dovuto ad una migrazione secondaria di elementi ectodermici dai ganglii spinali e dalla metà ventrale del tubo neurale, ma che però questa migrazione secondaria esiste in tutti gli amnioti.

Dall'Istituto Anatomico della R. Università di Torino, diretto dal Prof. R. Fusari.

INDICE BIBLIOGRAFICO

Abel W., " Proc. R. Soc. Edinburgh ,, vol. 30, p. 327, 1909-10.

— " Journ. of Anat. a. Phys. ,, vol. 47, p. 35, 1912.

Balfour F. M., " Journ. of Anat. a. Phys. ,, vol. 47, p. 422 e 694, 1877.

Beccari N., " Arch. it. Anat. ed Embr. ,, vol. 13, p. 1, 1914-15.

Van Bemmelen J. F., " Anat. Anz. ,, vol. 4, p. 240, 1889.

Cajal S. R., " Trabajos d. laborat. histol. Facultad de Medic. de Barcelona ,, 1891.

— " Trabajos d. laborat. de investigat. biolog. Universitad de Madrid ,, vol. 4, p. 119, 1905-06.

Camus R., " Arch. f. mikr. Anat. ,, vol. 81, 1912.

Ciaccio C., " Arch. it. di Anat. ed Embriol. ,, vol. V, p. 256, 1906.

Consiglio M. e Pusateri E., " Arch. di farmacol. e terapeut. ,, vol. 8, fasc. 12, 1900.

Dustin A. P., " Arch. de Biol. ,, vol. 25, p. 269, 1910.

Forsmann J., " Ziegler's Beiträge ,, vol. 24, p. 56, 1898 e vol. 27, p. 407, 1900.

Froriep A., " Med.-Naturw. Arch. ,, vol. 1, p. 301, 1907.

Fusari R., " Arch. Scienze mediche ,, vol. 16, p. 249, 1892.

Ganfini C., " Arch. it. di Anat. ed Embriol. „, vol. 10, p. 574, 1912 e vol. 13, p. 492, 1914.

Giacomini E., " Proc. verb. R. Accad. Fisiocritici „, 1897.

— " Atti R. Accad. Fisiocritici „, ser. 4, vol. 10, 1898.

— *Sopra la struttura della capsula surrenale degli anfibii*, Siena, 1902.

— " Monit. Zool. it. „, vol. 13, 1902; vol. 15, 1904; vol. 20, 1908.

— " Rendic. Accad. Sc. di Bologna „, 1904-05; 1908; 1910; 1911.

— " Rendic. R. Accad. Lincei „ (Cl. Sc. fis., mat., nat.), vol. 15, 1906.

— " Memorie R. Accad. Sc. di Bologna „, ser. 6, vol. 5, 6, 7, 8, 9, 1907-12.

— " Arch. it. di Anat. ed Embriol. „, vol. 8, p. 237, 1908.

Goormaghtigh N., " Annales et Bull. de la Soc. de Méd. de Gand „, vol. 5, ann. 80, p. 24, 1914.

Held H., *Die Entwick. des Nervengewebes bei den Wirbeltieren*, Leipzig, 1909.

His W., jun., " Abh. d. math.-phys. Cl. d. K. Akad. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. „, vol. 28, p. 1, 1891.

— " Arch. f. Anat. u. Phys. „, ann. 1897, p. 137.

Hoffmann C. K., " Zeitschr. f. wiss. Zool. „, vol. 48, p. 260, 1899.

— " Verh. k. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam „, vol. 7, 1900 e vol. 8, 1902.

Jones W. C., " Journ. of comp. Neurol. a. Psychol. „, vol. 15, p. 113, 1905.

Kohn A., " Arch. f. mikr. Anat. „, vol. 53, p. 281, 1898; vol. 56, p. 81, 1900; vol. 62, p. 263, 1903; vol. 70, p. 266, 1907.

— " Prager med. Wochensch. „, vol. 23, p. 124, 1898 e vol. 27, p. 325, 1902.

— " Anat. Anz. „, vol. 5, p. 393, 1899.

— " Ergebnisse d. Anat. u. Entw. „, vol. 12, p. 253, 1903.

Kose W., " S.-B. deutsch. med. Verein f. Böhmen 'Lotos' „, N. 6, 1898.

— " Anat. Anz. „, vol. 22, p. 162, 1902 e vol. 25, p. 609, 1904.

— " Arch. f. mikr. Anat. „, vol. 69, p. 563 e 665, 1907.

Kuntz A., " Anat. Anz. „, vol. 35, p. 381, 1909.

— " Anat. Record „, vol. 3, p. 458, 1909.

— " Journ. of comp. Neurol. a. Psychol. „, vol. 20, p. 211 e p. 283, 1910; vol. 21, p. 177, 215 e 397, 1911.

— " Am. Journ. of Anat. „, vol. 11, p. 279, 1911 e vol. 13, p. 71, 1912.

Mannu A., " Int. Monatsch. f. Anat. u. Phys. „, vol. 30, p. 49, 1913 e vol. 31, p. 116, 1914.

Mazzarelli E., " Monit. Zool. it. „, anno 5, p. 82, 1894 e " Arch. ital. de Biol. „, vol. 22, p. viii, 1895 (Resoconti XI Congresso di Medicina in Roma).

— " Rendic. R. Acc. Lincei „, vol. 3, p. 269, 1894.

Neumayer L., *Hertwig's Handb. d. vergl. u. exper. Entwicklungslehre*, vol. 2, parte 3ª, p. 513, 1906.

Onodi A. D., " Arch. f. mikr. Anat. „, vol. 26, p. 61 e p. 553, 1886.

Paterson A. M., " Phil. Trans. R. Soc. of London „ (B), vol. 181, p. 159, 1891.

Poll H., *Hertwig's Handb. d. vergl. u. exper. Entwicklungslehre*, vol. 3, parte 1ª, p. 443, 1906.

Rabl C., " Morph. Jahrb. „, vol. 15, p. 113, 1889; vol. 19, p. 65, 1892; vol. 24, p. 682, 1896.

Rabl H., " Arch. f. mikr. Anat. „, vol. 38, p. 492, 1891.

Remak R., " Müller's Arch. f. Anat. Phys. u. wiss. Med. ", ann. 1848, p. 478.
Roud A., " Bull. Soc. Vaudoise des Sciences natur. ", vol. 38, N. 135, 1903.
Schenck und Birdsall, " Mitt. aus d. embryol. Inst. in Wien ", vol. 1, p. 214, 1875.
Schultze O., *Grundriss d. Entw. d. Menschen u. d. Saug.*, Leipzig, 1897.
Soulié A. H., *Recherches sur le développement des capsules surrénales*, Thèse, Paris, 1903.
Sperino G., " Gazzetta degli Ospitali ", N. 10, 1886.
Swale Vincent M. B., " Proceed. Birmingham nat. hist. phil. Soc. ", vol. 10, 1896.
— " Anat. Anz. ", vol. 12, p. 232, 1896 (*Swale and Collinge*); vol. 13, p. 39, 1897; vol. 18, p. 69, 1900.
— " Proceed. R. Soc. ", vol. 62, p. 280, 1897 (*Swale and Moores*).
— " Int. Monat. f. Anat. u. Phys. ", vol. 15, 1898.
— " Trans. of the Zool. Soc. London ", vol. 14, p. 41, 1907.
Trinci G., " Monit. Zool. it. ", anno 20, p. 286, 1909.
— " Arch. it. Anat. ed Embriol. ", vol. 10, p. 197, 1911.
Van Wijhe J. W., " Arch. f. mikr. Anat. ", vol. 33, p. 461, 1889.
Varaglia S., " Gazzetta delle Cliniche ", anno 1885, 2° sem., N. 25-26.
Wiesel J., " Anat. Hefte ", H. 52, p. 115, 1901, e H. 63, p. 481, 1902.
Zuckerkandl E., " Verh. Anat. Gesellsch. 15. Versamm. in Bonn ", p. 95, 1901.
— *Keibel's und Mall's Handb. d. Entw. des Menschen*, vol. 2, p. 157, 1911.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

(Tutte le figure non schematiche vennero disegnate col sussidio della camera lucida Abbe, tenendo il tavolo da disegno all'altezza del tavolino portaoggetti del microscopio).

Fig. 1. Embrione di ratto di 6 mm. Fiss. Bouin, col. ematoss. ferrica Heidenhain ed eritrosina; sezioni trasversali μ 6.

1 *a* = Abbozzo mesenchimale del cordone limitante primitivo (a destra parete dell'aorta) nella regione toracica.

Ob. 2 mm. Zeiss, ap. 1,40, oc. 4 comp., tubo 160 mm.

1 *b* = Branca ventrale del nervo spinale con accumulo di neurociti e primo abbozzo del ramo comunicante (nella sezione in cui questo appare più lungo). Dalla medesima sezione della fig. 1 *a*. Ingrand. come per la 1 *a*.

Fig. 2. Embrione di ratto di 4 mm. Fiss. Mingazzini, col. ematossilina Ehrlich, eritrosina; sezioni trasversali μ 6.

Abbozzo mesenchimale del cordone limitante primitivo (a destra parete dell'aorta) nella regione toracica. Goccie di sostanza che si colora intensamente con l'ematossilina.

Ob. 2 mm. Zeiss, ap. 1,40, oc. 6 comp., tubo 160 mm.

Fig. 3. Embrione di pollo di ore 78 1/2 di incubazione. Fiss. Bouin, col. ematoss. Ehrlich, eosina; sezioni trasversali μ 10.

Branca ventrale del nervo spinale con rigonfiamento e cumulo di neurociti nel punto della branca più vicino all'abbozzo mesenchimale del cordone limitante primitivo.

Ob. $^1/_{15}$ di Koristka, oc. 4 comp., tubo 160 mm.

Fig. 4. Embrione di pollo di giorni 6, ore 1 d'incubaz. Fiss. Bouin, col. picrocarminio; sez. sagittali di μ 10.

Tronchicino nervoso simpatico e grande cellula del tipo di quelle dei ganglii spinali, in rapporto con una massa protoplasmatica polinucleata dell'abbozzo mesenchimale del cordone limitante primitivo.

Ob. $^1/_{12}$ Zeiss, oc. 3, tubo 160 mm.

Fig. 5 e 6. Embrione di pollo di 5 giorni d'incubaz. Cajal, saffranina; sezioni trasversali μ 10.

5 = Trabecolato dell'abbozzo mesenchimale del cordone limitante primitivo, percorso da fascetti di fibre nervose.

Ob. 2 mm. Zeiss, ap. 1,40, oc. 6 comp., tubo 160 mm.

6 = Tratto di un ramo comunicante, con fibre, cellule indifferenziate ed una (in alto) differenziata.

Ingrandimento come per la fig. 5.

Fig. 7. Embrione di pollo di 9 giorni di incubazione. Fiss. Müller, formolo, coloraz. ematossilina Ehrlich; sezioni frontali.

7 *a* = Fascetto di fibre nervose simpatiche in un astuccio dell'abbozzo mesenchimale che presenta la reazione cromica.

7 *b* = Massa protoplasmatica polinucleata dell'abbozzo mesenchimale in rapporto con un capillare (a destra e in basso). Tutto il protoplasma presenta la reazione cromica.

7 *c* = Cellule feocrome distinte.

Ob. 2 mm. Zeiss, ap. 1,40, oc. 6 comp., tubo 160 mm.

Fig. 8. Embrione di pollo di 7 giorni d'incubaz. Cajal; sezioni trasversali μ 10.

Schemi per dimostrare la posizione del cordone limitante secondario (s'') e delle fibre dei rami comunicanti (nere) nella regione cervicale (C), toracica (T) e addominale (A).

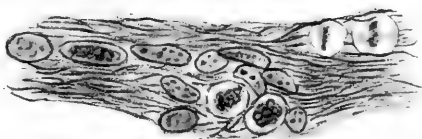
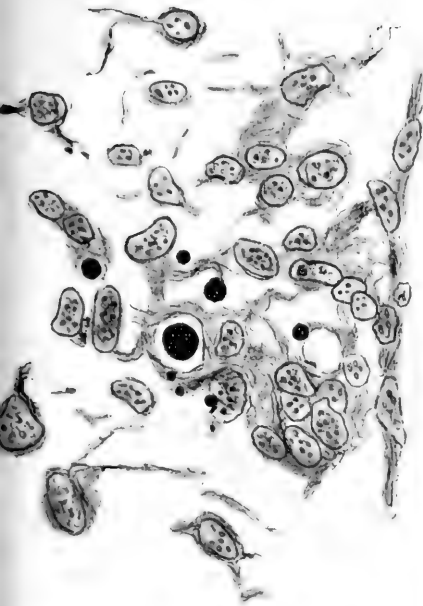
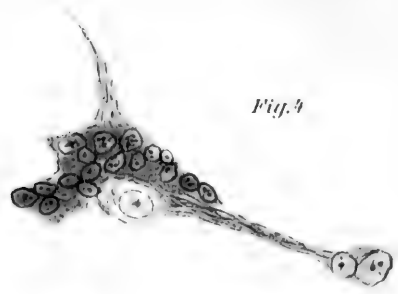
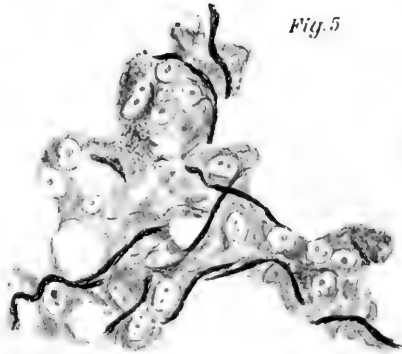
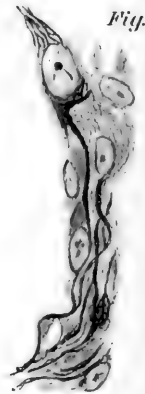
s' = cordone limitante primitivo; m = masse protoplasmatiche polinucleate dell'abbozzo mesenchimale, circondanti l'aorta addominale.

Fig. 9. Embrione di *Gongylus ocellatus*, lunghezza massima mm. 16, lunghezza del capo mm. 6. Fiss. sublimato acetico (?), coloraz. ematossilina Ehrlich, eosina.

Accumulo di neurociti fra le due radici del nervo spinale (regione toracica).

r. v. = radice ventrale; *g. s.* = ganglio spinale; s'' = cumulo di neurociti (cenno di ganglio simpatico secondario).

Ob. 5 Koristka, oc. 2.

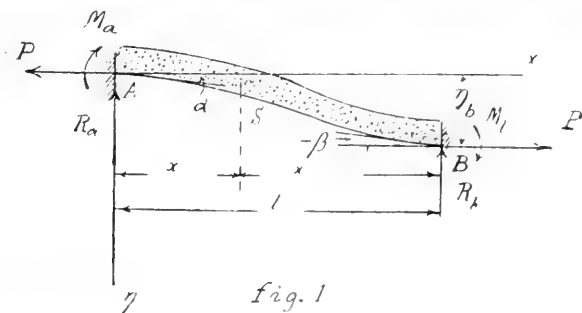
Fig.1 B
Fig.1 A
Fig.3
Fig.7 C
Fig.7 B
Fig.7 A

Lit. Salussolia, Torino

Sulla trave continua inflessa e sollecitata assialmente.

Nota di GIUSEPPE ALBENGA.

Nelle costruzioni civili e con maggior frequenza in quelle aeronautiche, si incontrano membrature inflesse da un carico ripartito e contemporaneamente tese o compresse. In genere nell'interno di una medesima campata rimangono costanti la sezione trasversale della trave, la intensità del carico ripartito e quella del carico assiale. Tali quantità possono tuttavia variare da campata a campata. Lo studio statico di una struttura di questo tipo può ridursi alla risoluzione di un sistema di *equazioni dei tre momenti*, che presentano qualche analogia con la nota equazione di Bertot-Clapeyron.

***

Consideriamo il caso della trave tesa ed inflessa. In una campata qualunque avremo nella sezione generica S (fig. 1) un

fig. 1

momento flettente

$$M_x = M_a + R_a x - \frac{px^2}{2} - P\eta .$$

Da questa relazione, ricordando che è

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{M_x}{EJ}$$

e derivando due volte rispetto ad x, si ottiene

$$(1) \qquad \frac{d^4\eta}{dx^4} - \frac{P}{EJ}\frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{p}{EJ} = 0 .$$

Facciamo

$$a^2 = \frac{P}{EJ} .$$

La (1) sarà soddisfatta quando sia

$$(2) \qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} = A \cosh. ax + B \operatorname{senh}. ax - \frac{p}{P} .$$

Le costanti di integrazione A e B si calcolano osservando che per

$$x = 0 \qquad M_x = M_a$$
$$x = l \qquad M_x = M_b .$$

Sostituendo ad A e a B il loro valore e ponendo per brevità

$$al = \lambda$$
$$ax = \xi$$
$$a(l-x) = ax' = \xi'$$

la (2) diventa

$$(3) \qquad \operatorname{senh}. \lambda \frac{d^2\eta}{dx^2} = \left(\frac{p}{P} - \frac{M_a}{EJ}\right) \operatorname{senh}. \xi' + \\ + \left(\frac{p}{P} - \frac{M_b}{EJ}\right) \operatorname{senh}. \xi - \frac{p}{P} \operatorname{senh}. \lambda ,$$

dalla quale integrando

$$(4) \qquad a \operatorname{senh}. \lambda \frac{d\eta}{dx} = -\left(\frac{p}{P} - \frac{M_a}{EJ}\right) \cosh. \xi' + \\ + \left(\frac{p}{P} - \frac{M_b}{EJ}\right) \cosh. \xi - \frac{p}{P} \xi \operatorname{senh}. \lambda + C_1 ,$$

e ancora

$$(5) \qquad \eta \,.\, a^2 \operatorname{senh.} \lambda = \left(\frac{p}{P} - \frac{M_a}{EJ}\right) \operatorname{senh.} \xi' +$$

$$+ \left(\frac{p}{P} - \frac{M_b}{EJ}\right) \operatorname{senh.} \xi - \frac{p}{P} \frac{\xi^2}{2} \operatorname{senh.} \lambda + C_1 \xi + C_2 \,.$$

Le nuove costanti C_1 e C_2 sono determinate dall'essere per

$$x = 0 \qquad \eta = 0$$

$$x = l \qquad \eta = \eta_b \,.$$

Introducendo il valore di C_1 nella (4) ed ordinando si ha con ovvie riduzioni

$$a \operatorname{senh.} \lambda \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{\eta_b}{l}\right) = \frac{p}{P}\left(\cosh. \xi - \cosh. \xi' + \left(\frac{\lambda}{2} - \xi\right) \operatorname{senh.} \lambda\right) +$$

$$+ \frac{M_a}{EJ}\left(\cosh. \xi' - \frac{\operatorname{senh.} \lambda}{\lambda}\right) - \frac{M_b}{EJ}\left(\cosh. \xi - \frac{\operatorname{senh.} \lambda}{\lambda}\right).$$

I valori delle *tangenti sugli appoggi* saranno quindi

$$(6) \qquad \alpha = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=0} = \frac{\eta_b}{l} - \frac{p}{aP}\left(\operatorname{tgh.} \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) +$$

$$+ \frac{M_a}{aEJ}\left(\frac{1}{\operatorname{tgh.} \lambda} - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{M_b}{aEJ}\left(\frac{1}{\operatorname{senh.} \lambda} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

e

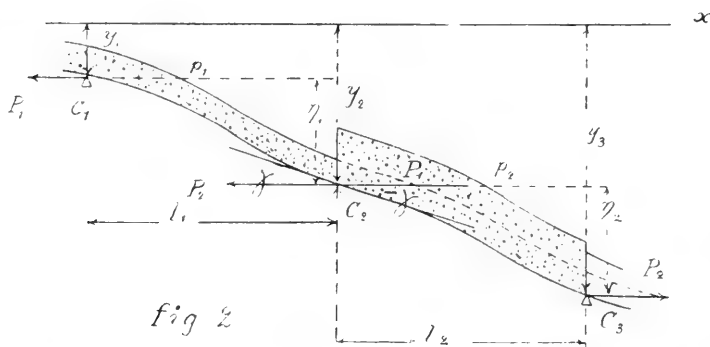
$$(7) \qquad \beta = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=l} = \frac{\eta_b}{l} + \frac{p}{aP}\left(\operatorname{tgh.} \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) +$$

$$+ \frac{M_a}{aEJ}\left(\frac{1}{\operatorname{senh.} \lambda} - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{M_b}{aEJ}\left(\frac{1}{\operatorname{tgh.} \lambda} - \frac{1}{\lambda}\right).$$

***

Ricordando la classica teoria della trave continua e distinguendo con gli indici 1 e 2 rispettivamente le quantità relative

alla prima ed alla seconda campata (fig. 2) avremo per i momenti M_1, M_2, M_3 sugli appoggi C_1, C_2, C_3, in grazia della relazione

$$\alpha_2 = \beta_1$$

$$(8) \quad \frac{M_1}{a_1 E J_1}\left(\frac{1}{\text{senh.}\,\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1}\right) - \frac{M_2}{E}\left[\frac{1}{a_1 J_1}\left(\frac{1}{\text{tgh.}\,\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1}\right) + \frac{1}{a_2 J_2}\left(\frac{1}{\text{tgh.}\,\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right] +$$
$$+ \frac{M_3}{a_2 E J_2}\left(\frac{1}{\text{senh.}\,\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{y_1 - y_2}{l_1} + \frac{y_3 - y_2}{l_2} -$$
$$- \frac{p_1}{a_1 P_1}\left(\text{tgh.}\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_1}{2}\right) - \frac{p_2}{a_2 P_2}\left(\text{tgh.}\frac{\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_2}{2}\right).$$

***

Ad una equazione analoga si giunge considerando la trave continua compressa.

Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica.

Nota di CARLO ROSATI.

Nella rappresentazione trascendente che dà Hurwitz (*) di una corrispondenza algebrica fra i punti di una curva C di genere p, ad ogni corrispondenza T vengono associati $4p^2$ numeri interi $h_{ik}\ g_{ik}\ H_{ik}\ G_{ik}\ (i, k = 1, 2, \ldots p)$, *caratteristici* della corrispondenza. Fra essi e i periodi normali della curva sussistono certe p^2 relazioni, delle quali in un lavoro recente (**) abbiamo dato la seguente semplice interpretazione geometrica: considerando in un S_{2p-1} l'omografia razionale Ω che ha per modulo il determinante $\begin{vmatrix} h_{ik} & H_{ik} \\ g_{ik} & G_{ik} \end{vmatrix}$, le relazioni stesse esprimono che la Ω muta in sè un S_{p-1} immaginario individuato in S_{2p-1} dai periodi normali della curva C.

La suddetta interpretazione geometrica, che è già riuscita feconda in quanto ci ha permesso di determinare in ogni caso i numeri base μ_1 e μ_2 delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche sulle curve di genere due, offre dunque il vantaggio di avvicinare la teoria delle corrispondenze a quella delle sostituzioni lineari e delle forme bilineari, nella quale sono acquisiti risultati ormai classici.

(*) Hurwitz, *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenz-princip*, " Math. Annalen ", Bd. 28 (1886).

(**) Rosati, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due*, " Annali di Matematica ", Tomo XXV, Serie III (1915). Nei richiami, che avremo occasione di fare in seguito, designeremo questa Memoria col titolo " *Corrispondenze* ".

Utilizzando ulteriormente la interpretazione suaccennata, introduciamo nella presente Nota il concetto di *equazione minima* cui soddisfa una corrispondenza T (§ 2), cioè l'equazione che proviene dal minimo aggregato, costituito di potenze di T, che dà origine a una corrispondenza a valenza zero. Siamo perciò partiti da un teorema di Frobenius sulle forme bilineari, del quale, in vista appunto dell'applicazione alle corrispondenze, abbiamo dovuto procurarci una dimostrazione sintetica; e quella che esponiamo al § 1, per la semplicità delle argomentazioni su cui è poggiata, ci sembra debba offrire già di per sè un qualche interesse.

L'equazione minima cui soddisfa la T ha per radici distinte le radici distinte dell'equazione caratteristica dell'omografia Ω immagine di T, e secondochè la prima ha radici semplici o multiple, la Ω è un'omografia generale o particolare. Inoltre ogni altra equazione cui soddisfa la T contiene come fattore l'equazione minima.

Per le corrispondenze a valenza l'equazione minima è lineare, per la corrispondenza simmetrica dedotta da una involuzione irrazionale di una curva l'equazione minima è quadratica. L'equazione minima cui soddisfa una corrispondenza simmetrica ha tutte radici semplici e reali, quella cui soddisfa una corrispondenza emisimmetrica ha tutte radici semplici, le quali, tranne una eventuale radice nulla, hanno per valori numeri immaginari puri.

Una radice razionale dell'equazione minima cui soddisfa la T è necessariamente intera; se γ è una tale radice, esiste sulla curva C un sistema regolare riducibile rispetto al quale la T ha la valenza *parziale* $-\gamma$. Sorge quindi spontanea la considerazione delle corrispondenze, le cui equazioni minime hanno radici tutte razionali. Tali corrispondenze si diranno *plurivalenti* (*), e per esse si assegna una formula che dà il numero

(*) Lo studio di queste corrispondenze riesce tanto più attraente in quanto un bel teorema di Severi ne mette in luce l'importanza che può avere per la teoria delle superficie. Nella Memoria: *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica* ("Math. Annalen", Bd. 74, 1913), il Severi dimostra infatti la im-

delle coincidenze, analoga a quella di Cayley-Brill per le corrispondenze a valenza ordinaria.

Nel § 3 mostriamo infine come si possano costruire curve su cui esistono corrispondenze dotate di quante si vogliano valenze.

§ 1.

1. — Per rendere più spedita la dimostrazione del teorema sulle omografie che abbiamo in mira di stabilire, premettiamo alcune semplici osservazioni sulle omografie singolari.

Ricordiamo perciò che un'omografia Ω di S_r si dice *singolare di specie* h, quando il suo modulo è nullo e di caratteristica $r - h + 1$ $(0 < h < r + 1)$. Esistono allora in S_r due spazi S_{h-1} G_{r-h}, il primo dei quali è il luogo dei punti che hanno in Ω l'omologo indeterminato, il secondo è il luogo dell'omologo di ogni altro punto di S_r: la Ω si riduce in sostanza ad una omografia non singolare fra gli S_h della stella (S_{h-1}) e i punti di G_{r-h} (*). Diremo S_{h-1} G_{r-h} gli *spazi singolari, fra loro coniugati*, di Ω e li distingueremo con le denominazioni di *primo* e *secondo*. Conviene in seguito considerare anche il caso $h = r + 1$, in cui il modulo di Ω ha gli elementi tutti nulli; in tal caso la Ω, che si considera come avente gli spazi singolari S_r G_{-1}, si dirà una *omografia nulla*.

2. — Sia Ω una omografia singolare con gli spazi singolari S_{h_1-1} G_{r-h_1}; supposto che essi si intersechino in un S_{h_2-1}, la omografia Ω_1 che Ω subordina in G_{r-h_1} ammette come primo spazio singolare S_{h_2-1}. Se questo spazio sega il suo coniugato $G_{r-h_1-h_2}$ in un S_{h_3-1}, l'omografia Ω_2 che Ω subordina in $G_{r-h_1-h_2}$ ammette come primo spazio singolare S_{h_3-1}. Così continuando, si

portante proprietà: *Quando la varietà di Picard* V *annessa ad una superficie* F *è a moduli generali, sulla curva generica* C *di un sistema lineare di* F *almeno* ∞^2 *non esistono che corrispondenze a valenza semplice o doppia.*

(*) Cfr. ad es. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa, Spoerri, 1907, pag. 58.

giungerà o ad uno spazio $G_{r-h_1-h_2-\dots-h_{q-1}}$ nel quale Ω subordina un'omografia singolare Ω_{q-1} coi due spazi S_{h_q-1} $G_{r-h_1-h_2-\dots-h_q}$ non intersecantisi; ovvero ad uno spazio $G_{r-h_1-h_2-\dots-h_{q-1}}$ il quale, per essere contenuto nel suo coniugato $S_{h_{q-1}-1}$ o con esso coincidente, contiene come omografia subordinata Ω_{q-1} un'omografia nulla, cioè un'omografia in cui il primo spazio singolare S_{h_q-1} coincide con lo spazio ambiente $G_{r-h_1-h_2-\dots-h_{q-1}}$. In entrambi i casi, estendendo una denominazione del Predella (*), diremo che S_{h_1-1} è per la Ω uno *spazio singolare multiplo di molteplicità* q, *e che in esso sono venuti successivamente a sovrapporsi gli spazi singolari* S_{h_2-1}, S_{h_3-1}, ... S_{h_q-1}.

Determiniamo, nelle suddette ipotesi, gli spazi singolari delle omografie Ω^2, Ω^3, Ω^4, ... successive potenze di Ω.

La Ω può pensarsi come un'omografia non singolare fra la stella (S_{h_1-1}) di S_r e lo spazio G_{r-h_1}: in essa, ai punti di questo spazio contenuti in S_{h_2-1} corrispondono gli S_{h_1} della stella giacenti in un $S_{h_1+h_2-1}$: $S_{h_1+h_2-1}$ e $G_{r-h_1-h_2}$ sono manifestamente gli spazi singolari, primo e secondo, della omografia Ω^2.

Per la Ω_1, che può pensarsi come un'omografia non singolare fra la stella (S_{h_2-1}) di G_{r-h_1} e lo spazio $G_{r-h_1-h_2}$, ai punti di questo spazio contenuti in S_{h_3-1} corrispondono gli S_{h_2} della stella giacenti in un $S_{h_2+h_3-1}$. Prendendo poi dei punti di questo spazio gli S_{h_1} corrispondenti per la Ω nella stella (S_{h_1-1}) si ottiene un $S_{h_1+h_2+h_3-1}$: $S_{h_1+h_2+h_3-1}$ e $G_{r-h_1-h_2-h_3}$ sono gli spazi singolari della omografia Ω^3.

Così proseguendo, si giunge nel primo dei due casi suaccennati alla potenza Ω^q i cui spazi singolari sono $S_{h_1+h_2+\dots+h_q-1}$ e $G_{r-h_1-h_2-\dots-h_q}$; e poichè la Ω subordina in $G_{r-h_1-h_2-\dots-h_q}$ una omografia non singolare, le potenze Ω^{q+1}, Ω^{q+2}, ... hanno per spazi singolari quelli stessi di Ω^q, i quali saranno perciò fra loro indipendenti. Nel secondo caso, essendo $h_1+h_2+\dots+h_q-1=r$, la Ω^q e quindi le potenze successive Ω^{q+1}, Ω^{q+2}, ... sono omografie nulle. Abbiamo dunque il risultato:

Se un'omografia singolare Ω ha come primo spazio singolare

(*) Predella, *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni*, "Annali di Matematica", 17 (2), 1889-90. *Sulla teoria generale delle omografie*, "Atti della R. Acc. di Torino", 27, 1891-92.

un S_{h_1-1} q^{plo}, *essendo in esso venuti successivamente a sovrapporsi i* $q-1$ *spazi singolari* $S_{h_2-1}, S_{h_3-1}, \dots S_{h_q-1}$, *i primi spazi singolari delle omografie* $\Omega, \Omega^2, \dots \Omega^q$ *hanno le dimensioni* $h_1 - 1$, $h_1 + h_2 - 1, \dots h_1 + h_2 + \dots + h_q - 1$ *e ciascuno di essi contiene il precedente; mentre i secondi spazi singolari delle stesse omografie, di dimensioni* $r - h_1$, $r - h_1 - h_2, \dots r - h_1 - h_2 - \dots - h_q$, *sono ciascuno contenuto nel precedente. Se* $h_1 + h_2 + \dots + h_q - 1 < r$, *le omografie* $\Omega^{q+1}, \Omega^{q+2}, \dots$ *hanno gli stessi spazi singolari, fra loro indipendenti, spettanti a* Ω^q; *se* $h_1 + h_2 + \dots + h_q - 1 = r$, *le potenze* $\Omega^q, \Omega^{q+1}, \dots$ *sono omografie nulle.*

3. — La distinzione che si suol fare per le omografie non singolari, di omografie *generali* e *particolari*, si può estendere in modo ovvio alle omografie singolari. Così un'omografia singolare Ω si dirà *generale* se il suo primo spazio singolare non interseca il suo coniugato (è in altri termini uno spazio semplice) e se in quest'ultimo essa subordina un'omografia generale; quando invece non tutte queste circostanze si verificano, la Ω si dirà *particolare*. I due spazi singolari di Ω si considerano dunque come spazi fondamentali, fra loro coniugati, corrispondenti alla radice zero dell'equazione caratteristica.

4. — Siano Ω_1 Ω_2 due omografie singolari di specie h, k; S_{h-1} G_{r-h} gli spazi singolari della prima, S_{k-1} G_{r-k} quelli della seconda. Se G_{r-h} ed S_{k-1} si segano in un S_{l-1} ed appartengono quindi ad un $S_{r-h+k-l}$, gli S_h della stella (S_{h-1}) che hanno in Ω_1 per omologhi i punti di S_{l-1} generano un S_{h+l-1} e gli S_k della stella (S_{k-1}) giacenti in $S_{r-h+k-l}$ hanno per omologhi in Ω_2 i punti di un G_{r-k-l} contenuto in G_{r-k}. È chiaro che S_{h+l-1} G_{r-k-l} sono i due spazi singolari dell'omografia prodotto $\Omega_1 \Omega_2$: onde *tale omografia singolare è di specie* $\leq h + k$.

La proprietà si estende subito al prodotto di più omografie singolari; abbiamo cioè il risultato:

Se $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_l$ *sono omografie singolari di specie* $h_1\, h_2 \dots h_l$ $(0 \leq h_i \leq r + 1)$, *il prodotto* $\Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_l$ *è un'omografia singolare di specie* $\leq h_1 + h_2 + \dots + h_l$.

5. — Perchè il prodotto di due omografie singolari Ω_1, Ω_2 sia un'omografia nulla, il che rappresenteremo scrivendo $\Omega_1 \Omega_2 = 0$,

occorre e basta che il secondo spazio singolare di Ω_1 sia contenuto nel primo di Ω_2 o coincida con esso. La relazione $\Omega_1 \Omega_2 \equiv 0$ continuerà dunque a sussistere ponendo in luogo di Ω_1 un'omografia Ω_1' il cui secondo spazio singolare è contenuto nel corrispondente di Ω_1 o con esso coincidente, ovvero ponendo in luogo di Ω_2 un'omografia Ω_2' il cui primo spazio singolare contenga il corrispondente di Ω_2 o coincida con esso.

In virtù della proprietà associativa del prodotto di omografie, le considerazioni suddette rimangono valide supposto che Ω_1 sia il primo fattore e Ω_2 l'ultimo fattore di un prodotto nullo. Avendo però un prodotto nullo di omografie permutabili, la considerazione fatta su Ω_1 o quella su Ω_2 possono ripetersi per qualsiasi fattore del prodotto.

6. — Sono di dimostrazione immediata le seguenti proprietà:

a) *Se* $\Omega_1 \Omega_2 \equiv 0$, *e una delle due omografie è non singolare, l'altra è un'omografia nulla;*

b) *Se un prodotto di omografie è nullo, e se il primo o l'ultimo fattore è un'omografia non singolare, il prodotto rimane nullo sopprimendo questo fattore.*

Sarà bene avvertire esplicitamente che la proprietà non si verifica più quando l'omografia non singolare è uno dei fattori intermedi. Invero, se nel prodotto $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$ l'omografia Ω_2 è non singolare e porta il secondo spazio singolare di Ω_1 entro il primo di Ω_3, si ha $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \equiv 0$, senza che sia necessariamente $\Omega_1 \Omega_3 \equiv 0$.

c) *Se un prodotto nullo di omografie permutabili contiene come fattore un'omografia non singolare, il prodotto rimane nullo sopprimendo questo fattore.*

7. — *Le omografie di un fascio contenente l'identità sono due a due permutabili.*

Infatti, se al fascio individuato dalle omografie Ω_1, Ω_2 appartiene l'identità, il modulo di Ω_2 si può dedurre da quello di Ω_1 aumentando di un certo numero ρ gli elementi della diagonale principale e lasciando invariati gli altri. Si vede allora subito che le omografie $\Omega_1 \Omega_2$ e $\Omega_2 \Omega_1$ hanno lo stesso modulo.

8. — Daremo il nome di *funzione razionale intera di una omografia* Ω all'omografia

$$f(\Omega) = a_0 \Omega^k + a_1 \Omega^{k-1} + \ldots + a_k I$$

che nasce combinando linearmente l'identità I e le potenze $\Omega, \Omega^2, \ldots, \Omega^k$. Se $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ indicano le radici dell'equazione

$$f(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_{k-1} z + a_k = 0,$$

per la proprietà distributiva del prodotto di omografie si avrà

$$f(\Omega) = a_0 (\Omega - \rho_1 I)(\Omega - \rho_2 I) \ldots (\Omega - \rho_k I),$$

cioè: *Una funzione razionale intera di Ω è un prodotto di omografie appartenenti al fascio individuato da Ω e dalla identità, e viceversa.*

9. — Supposto che $f(\Omega)$ sia un'omografia nulla, supposto cioè che si abbia

$$f(\Omega) = a_0 \Omega^k + a_1 \Omega^{k-1} + \ldots + a_{k-1} \Omega + a_k I \equiv 0,$$

diremo che *l'omografia Ω soddisfa all'equazione*

$$f(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_{k-1} z + a_k = 0.$$

Si consideri ora la successione

$$I, \Omega, \Omega^2, \Omega^3, \ldots$$

e sia Ω^l la *prima* potenza di Ω che sia dipendente dalle precedenti, sicchè si abbia

$$\psi(\Omega) = a_0 \Omega^l + a_1 \Omega^{l-1} + \ldots + a_{l-1} \Omega + a_l I \equiv 0 \qquad (a_0 \neq 0).$$

È chiaro che l'equazione

$$\psi(z) = a_0 z^l + a_1 z^{l-1} + \ldots + a_{l-1} z + a_l = 0$$

è quella di grado *minimo* cui soddisfa la Ω: si dirà brevemente *equazione minima della* Ω. Fissato il modulo di Ω, l'equazione minima $\psi(z) = 0$ cui essa soddisfa è determinata: se però i coefficienti del modulo stesso variano di un comune fattore, l'equazione $\psi(z) = 0$ subisce manifestamente una trasformazione a radici multiple. Sicchè, data l'omografia, restano fissate non le radici dell'equazione minima $\psi(z) = 0$, bensì i loro mutui rapporti.

10. — Teorema di Frobenius (*).

a) *Ogni radice dell'equazione minima* $\psi(z) = 0$ *di un'omografia* Ω *(singolare o non) è radice dell'equazione caratteristica di* Ω, *e viceversa. Se* $\psi(z) = 0$, *ha radici tutte semplici, la* Ω *è un'omografia generale; se* $\psi(z) = 0$ *ha radici multiple, la* Ω *è un'omografia particolare, ad ogni radice* q^{pla} *corrispondendo uno spazio fondamentale* q^{plo} *di* Ω *(nel quale cioè sono venuti successivamente a sovrapporsi altri* $q - 1$ *spazi fondamentali);*

b) *Se* $f(z) = 0$ *è una qualsiasi equazione cui soddisfa la* Ω, *dovrà essere* $f(z)$ *divisibile per* $\psi(z)$.

Supponiamo dapprima che l'equazione $\psi(z) = 0$ abbia radici tutte semplici $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_l$, senza escludere che una di esse possa anche esser nulla. Alla relazione $\psi(\Omega) \equiv 0$ può allora darsi la forma:

$$a_0 (\Omega - \gamma_1 I)(\Omega - \gamma_2 I) \dots (\Omega - \gamma_l I) \equiv 0, \tag{1}$$

la quale dice che il prodotto delle omografie $\Omega - \gamma_1 I$, $\Omega - \gamma_2 I, \dots, \Omega - \gamma_l I$ è un'omografia nulla. È facile ora provare che ciascun fattore del prodotto è un'omografia singolare non nulla. Si osservi infatti che le omografie stesse sono due a due permutabili (n. 7): se quindi $\Omega - \gamma_i I$ fosse un'omografia non

(*) Cfr. la Memoria di Frobenius: *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* ("Journal für die reine und angewandte Mathematik", Bd. 84, 1878), in cui il teorema è dimostrato facendo uso di uno sviluppo in serie. Una dimostrazione, in cui viene evitato tale sviluppo, trovasi nella Memoria dello stesso autore: *Ueber vertauschbare Matrizen*, "Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin", XXVI, 1896.

singolare, il prodotto contenuto nel primo membro della (1) rimarrebbe un' omografia nulla anche sopprimendo il fattore $\Omega - \gamma_i I$ (n. 6, c), contro l'ipotesi che sia $\psi(z) = 0$ l'equazione minima cui soddisfa la Ω. Se poi fosse $\Omega - \gamma_i I \equiv 0$, sarebbe $z - \gamma_i = 0$ la suddetta equazione minima.

Dicendo allora $S_{h_1-1}, S_{h_2-1}, \ldots S_{h_l-1}$ i primi spazi singolari di $\Omega - \gamma_1 I, \Omega - \gamma_2 I, \ldots \Omega - \gamma_l I$, per l'osservazione del n. 4 dovrà essere

$$(2) \qquad r \leq h_1 + h_2 + \ldots + h_l - 1.$$

Si osservi ora che, fissando nel fascio (Ω, I) una qualsiasi omografia non singolare Ω, gli spazi suddetti sono fondamentali per essa e corrispondenti a radici distinte della sua equazione caratteristica; essi sono allora, per un teorema di Segre, indipendenti, onde si avrà

$$(3) \qquad r \geq h_1 + h_2 + \ldots + h_l - 1.$$

Dal confronto delle (2) (3) si deduce l'uguaglianza

$$r = h_1 + h_2 + \ldots + h_l - 1$$

la quale dice che Ω è un'omografia generale (singolare o non, secondochè fra le radici $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_l$ esiste o non la radice zero) coi soli spazi fondamentali $S_{h_1-1}, S_{h_2-1}, \ldots S_{h_l-1}$.

L'equazione minima $\psi(z) = 0$ ammetta ora le radici $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_k$ di molteplicità $l_1, l_2, \ldots l_k$ $(l = l_1 + l_2 + \ldots + l_k)$, una delle quali può anche esser nulla. Alla relazione $\psi(\Omega) \equiv 0$ si può allora dare la forma

$$(4) \qquad a_0 (\Omega - \gamma_1 I)^{l_1} (\Omega - \gamma_2 I)^{l_2} \ldots (\Omega - \gamma_k I)^{l_k} \equiv 0$$

la quale afferma che il prodotto delle potenze con esponenti $l_1 l_2 \ldots l_k$ delle omografie $\Omega - \gamma_1 I, \Omega - \gamma_2 I, \ldots \Omega - \gamma_k I$, fra loro due a due permutabili, è un'omografia nulla; e dalla relazione medesima, con le argomentazioni addotte nel caso precedente, si deduce che $\Omega - \gamma_i I$ $(i = 1, 2, \ldots k)$ è un'omografia singolare, non nulla. Ma si può ora provare di più che il suo spazio sin-

golare è *almeno* l_i^{plo}, che cioè in esso sono venuti successivamente a sovrapporsi altri $l_i - 1$ spazi singolari *almeno*. Infatti, se la molteplicità di tale spazio fosse $s < l_i$, le omografie $(\Omega - \gamma_i I)^{s+1}$, $(\Omega - \gamma_i I)^{s+2}, \ldots$ avrebbero gli stessi spazi singolari di $(\Omega - \gamma_i I)^s$ (n. 2); perciò, sempre tenendo presente la permutabilità delle suddette omografie, per l'osservazione del n. 5, la (4) continuerebbe a sussistere sostituendo $(\Omega - \gamma_i I)^s$ in luogo di $(\Omega - \gamma_i I)^{l_i}$, e non sarebbe allora $\psi(z) = 0$ l'equazione minima cui soddisfa la Ω.

Indicando allora con $h_1^{(i)} - 1$, $h_2^{(i)} - 1, \ldots h_{l_i}^{(i)} - 1$ le dimensioni dello spazio singolare di $\Omega - \gamma_i I$ e degli altri $l_i - 1$ venuti successivamente a sovrapporsi in esso, il primo spazio singolare di $(\Omega - \gamma_i I)^{l_i}$ avrà (n. 2) la dimensione $h_1^{(i)} + h_2^{(i)} + \ldots + h_{l_i}^{(i)} - 1$, onde, per l'oss. del n. 4, sarà

$$r \leq (h_1' + h_2' + \ldots + h_{l_1}') + (h_1'' + h_2'' + \ldots + h_{l_2}'') + \ldots + (h_1^{(k)} + h_2^{(k)} + \ldots + h_{l_k}^{(k)}) - 1.$$

Si osservi ora che gli spazi singolari distinti e sovrapposti delle omografie singolari del fascio (Ω, I) sono, per una omografia non singolare Ω qualsiasi del fascio, spazi fondamentali distinti e sovrapposti. E poichè la somma delle dimensioni, ciascuna accresciuta di una unità, degli spazi fondamentali medesimi deve essere uguale ad $r + 1$, si deduce

$$r \geq (h_1' + h_2' + \ldots + h_{l_1}') + (h_1'' + h_2'' + \ldots + h_{l_2}'') + \ldots + (h_1^{(k)} + h_2^{(k)} + \ldots + h_{l_k}^{(k)}) - 1.$$

Confrontando questa disuguaglianza con la precedente, si ottiene l'uguaglianza

$$r = (h_1' + h_2' + \ldots + h_{l_1}') + (h_1'' + h_2'' + \ldots + h_{l_2}'') + \ldots + (h_1^{(k)} + h_2^{(k)} + \ldots + h_{l_k}^{(k)}) - 1,$$

la quale dice che la omografia Ω (singolare o non, secondochè $\psi(z) = 0$ ammette o non la radice zero) è un'omografia particolare coi soli spazi fondamentali distinti $S_{h_1'-1}$, $S_{h_1''-1}, \ldots, S_{h_1^{(k)}-1}$,

corrispondenti alle radici $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_k$ dell'equazione caratteristica, e che tali spazi fondamentali hanno esattamente le molteplicità $l_1\, l_2 \ldots l_k$.

Sia ora $f(z) = 0$ un'equazione qualsiasi cui soddisfa la Ω, e $\psi(z) = 0$ indichi sempre l'equazione minima, per la quale facciamo l'ipotesi più generale che abbia le radici multiple $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_k$, di molteplicità $l_1\, l_2 \ldots l_k$. Se $l_i' \geq 0$ è la molteplicità di γ_i per l'equazione $f(z) = 0$, la relazione $f(\Omega) \equiv 0$ acquista la forma

$$(\Omega - \gamma_1 I)^{l_1'} (\Omega - \gamma_2 I)^{l_2'} \ldots (\Omega - \gamma_k I)^{l_k'} \varphi(\Omega) \equiv 0 ;$$

e poichè $\varphi(\Omega)$ è un prodotto di omografie non singolari, dalla precedente relazione si deduce (n. 6, c) l'altra

$$(5) \qquad (\Omega - \gamma_1 I)^{l_1'} (\Omega - \gamma_2 I)^{l_2'} \ldots (\Omega - \gamma_k I)^{l_k'} \equiv 0.$$

Si considerino ora le omografie singolari $(\Omega - \gamma_i I)^{l_i'}$, $(\Omega - \gamma_i I)^{l_i}$: poichè il primo spazio singolare di $(\Omega - \gamma_i I)$ è l_i^{plo}, si deduce che se è $l_i' < l_i$ il primo spazio singolare di $(\Omega - \gamma_i I)^{l_i'}$ è contenuto nel corrispondente di $(\Omega - \gamma_i I)^{l_i}$; se invece è $l_i' \geq l_i$ gli spazi stessi coincidono (n. 2); in virtù dell'oss. del n. 5, la (5) continuerà in ogni caso a sussistere se in luogo di un qualsiasi fattore $(\Omega - \gamma_i I)^{l_i'}$ si sostituisce l'altro $(\Omega - \gamma_i I)^{l_i}$. Di qui segue che ogni esponente l' non può essere minore del corrispondente l, e che quindi $f(z)$ dev'essere divisibile per $\psi(z)$. Se invero fosse $l_r' < l_r$, insieme alla (5) sussisterebbe l'altra

$$(\Omega - \gamma_1 I)^{l_1} \ldots (\Omega - \gamma_{r-1} I)^{l_{r-1}} (\Omega - \gamma_r I)^{l_r'} (\Omega - \gamma_{r+1} I)^{l_{r+1}} \ldots (\Omega - \gamma_k I)^{l_k} \equiv 0$$

e non sarebbe più $\psi(z) = 0$ l'equazione minima cui soddisfa la Ω.

§ 2.

11. — Sia data sopra una curva C del genere p una corrispondenza algebrica T di indici $\alpha\ \beta$, di cui $h_{ik}\, g_{ik}\, H_{ik}\, G_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots p)$ siano gli interi caratteristici.

Ricorrendo alla rappresentazione geometrica, cui abbiamo

alluso nella prefazione, secondo la quale i cicli della curva sono rappresentati dai punti razionali di un S_{2p-1} e gli integrali di 1ª specie dagli iperpiani di una stella il cui centro è un $S_{p-1} = \alpha$ immaginario non intersecante il suo coniugato α_0, si indichi con Ω l'omografia di S_{2p-1} che ha per modulo il determinante $\begin{vmatrix} h_{ik} & H_{ik} \\ g_{ik} & G_{ik} \end{vmatrix}$. Tale omografia, *immagine* di T, trasforma in sè lo spazio α e quindi il suo coniugato α_0 (*).

Supposto che

$$(6) \qquad \psi(z) = a_0 z^l + a_1 z^{l-1} + \dots + a_{l-1} z + a_l = 0$$

sia l'equazione minima cui soddisfa la Ω, è chiaro, poichè Ω è un'omografia razionale, che nella (6) i coefficienti $a_0\, a_1 \dots a_l$ possono supporsi numeri interi primi fra loro; se anche ammettiamo che sia $a_0 > 0$, i detti numeri saranno allora determinati quando è fissato il modulo di Ω, cioè quando è data la corrispondenza T o una qualunque delle corrispondenze equivalenti a T.

Ma possiamo inoltre dimostrare che, in queste ipotesi, è sempre $a_0 = 1$. Invero, indicando con $\omega(z) = 0$ l'equazione caratteristica di Ω, $\omega(z)$, che è un polinomio di grado $2p$ in z, a coefficienti interi, col primo di essi uguale all'unità, sarà per il teorema di Frobenius divisibile per $\psi(z)$; onde si avrà l'identità

$$(7) \qquad \omega(z) = \psi(z)\, \varphi(z),$$

essendo $\varphi(z)$ un polinomio a coefficienti razionali. Da questa, moltiplicando per un conveniente intero N, si deduce l'altra

$$N\omega(z) = \psi(z)\, \varphi_1(z),$$

in cui $\varphi_1(z)$ è un polinomio a coefficienti interi. Osservando ora che N è il *divisore* della funzione razionale intera $N\omega(z)$, e che $\psi(z)$ è per ipotesi funzione *primitiva*, dovrà, per un noto teorema

---

(*) Cfr. *Corrispondenze*, § 1, n° 1.

di Gauss (*), essere N il divisore di $\varphi_1(z)$ e quindi $\frac{\varphi_1(z)}{N} = \varphi(z)$ sarà un polinomio a coefficienti interi; ma allora, perchè possa sussistere la (7) occorre che sia $a_0 = 1$.

Se si osserva poi che una corrispondenza a valenza zero ha per immagine una omografia nulla e viceversa, si deduce che ogni equazione cui soddisfi la Ω è anche un'equazione cui soddisfa la T e inversamente: onde sarà $\psi(z) = 0$ l'equazione minima della corrispondenza T, ed ogni altra equazione cui soddisfa la T deve avere il suo primo membro divisibile per $\psi(z)$. Dunque:

L'equazione minima di una corrispondenza T *è di grado* $\leq 2p$, *a coefficienti interi, col primo di essi uguale all'unità.*

È poi chiaro che le corrispondenze a valenza son quelle che soddisfano a equazioni minime lineari.

12. — Ogni radice razionale dell'equazione $\psi(z) = 0$ è necessariamente intera; si indichi con $-\gamma$ una tale radice. Poichè $-\gamma$ è anche radice dell'equazione $\omega(z) = 0$ caratteristica dell'omografia Ω, e poichè il determinante nullo $\omega(-\gamma)$ è quello costituito dagli interi caratteristici della corrispondenza $T + \gamma I$, questa corrispondenza dovrà essere *speciale* e il determinante medesimo dovrà avere per caratteristica un numero pari (**). Indicata con $2(p - q_1)$ tale caratteristica ($q_1 > 0$), l'omografia Ω, in corrispondenza alla radice $-\gamma$, dovrà possedere due spazi fondamentali razionali fra loro coniugati S_{2q_1-1} $G_{2(p-q_1)-1}$ appoggiati ad α (e quindi ad α_0) lungo spazi di dimensioni rispettive $q_1 - 1$ e $p - q_1 - 1$. La totalità degli iperpiani della stella (α) contenenti $G_{2(p-q_1)-1}$ è immagine di un sistema regolare riducibile ∞^{q_1-1}, i cui integrali dànno somma costante nei punti del gruppo omologo di un punto variabile x per la corrispondenza $T + \gamma I$.

Noi diremo allora che *la corrispondenza* T *ammette la valenza parziale* γ *rispetto al sistema regolare riducibile* ∞^{q-1} rap-

(*) Cfr. ad es. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni, ecc.*, Pisa, Spoerri, 1889, pag. 139.

(**) Cfr. *Corrispondenze*, § 2, n° 3.

presentato dallo spazio $G_{2(p-q_1)-1}$, e tale valenza si dirà poi *semplice* o *multipla*, secondochè $-\gamma$ è radice semplice o multipla dell'equazione $\psi(z)=0$.

Nel primo caso, S_{2q_1-1} è spazio fondamentale semplice per l'omografia Ω, cioè non interseca il suo coniugato $G_{2(p-q_1)-1}$, e le omografie singolari $(\Omega+\gamma I)^2$, $(\Omega+\gamma I)^3$, ... hanno tutte (n. 2) come spazi singolari, primo e secondo, S_{2q_1-1} e $G_{2(p-q_1)-1}$. Ne segue che, quando γ è valenza parziale semplice per la T, i sistemi regolari riducibili i cui integrali dànno somma costante nel gruppo omologo di un punto variabile x per le corrispondenze $(T+\gamma I)^2$, $(T+\gamma I)^3$, ... coincidono tutti col sistema ∞^{q_1-1} che spetta alla corrispondenza $T+\gamma I$.

Se poi $-\gamma$ è radice r^{pla} per l'equazione $\psi(z)=0$, S_{2q_1-1} è per l'omografia Ω spazio fondamentale r^{plo}, cioè sono venuti in esso successivamente a sovrapporsi altri $r-1$ spazi fondamentali: ed è facile provare (*) che tali spazi hanno tutti dimensione dispari $2q_2-1$, $2q_3-1$, ..., $2q_r-1$ $(q_1\geq q_2\geq \ldots \geq q_r>0)$ e sono appoggiati ad α (e quindi ad α_0) lungo spazi di dimensioni rispettive q_2-1, q_3-1, ..., q_r-1. In questo caso i primi spazi singolari delle omografie $(\Omega+\gamma I)$, $(\Omega+\gamma I)^2$, ..., $(\Omega+\gamma I)^r$ saranno S_{2q_1-1}, $S_{2(q_1+q_2)-1}$, ..., $S_{2(q_1+q_2+\cdots+q_r)-1}$, e i secondi saranno $G_{2(p-q_1)-1}$, $G_{2(p-q_1-q_2)-1}$, ..., $G_{2(p-q_1-q_2-\cdots-q_r)-1}$; inoltre le omografie $(\Omega+\gamma I)^{r+1}$, $(\Omega+\gamma I)^{r+2}$, ... hanno come spazi singolari quegli stessi, fra loro indipendenti, che spettano a $(\Omega+\gamma I)^r$. Ne segue che, se γ è valenza parziale r^{pla} per la T, gl'integrali che dànno somma costante nel gruppo omologo di un punto variabile x per le corrispondenze $T+\gamma I$, $(T+\gamma I)^2$, ..., $(T+\gamma I)^r$ formano dei sistemi regolari riducibili ∞^{q_1-1}, $\infty^{q_1+q_2-1}$, ..., $\infty^{q_1+q_2+\cdots+q_r-1}$, ciascuno dei quali contiene il precedente, mentre gli integrali che godono della stessa proprietà per le potenze superiori $(T+\gamma I)^{r+1}$, $(T+\gamma I)^{r+2}$, ... sono quelli stessi del sistema $\infty^{q_1+q_2+\cdots+q_r-1}$ che spetta a $(T+\gamma I)^r$.

È poi chiaro che le corrispondenze *speciali* sono quelle che ammettono la valenza parziale zero.

(*) Cfr. *Corrispondenze*, § 2, n° 3, Osservazione.

13. — Quando l'equazione minima $\psi(z)=0$ cui soddisfa la T ammette radici tutte razionali e quindi intere, la T si dirà una corrispondenza *plurivalente*, e precisamente *k-valente* se k è il numero delle radici distinte della detta equazione.

Se U denota il numero delle coincidenze di T, per una nota formula di Hurwitz (*) si ha

$$(8) \qquad U=\alpha+\beta-(h_{11}+h_{22}+\ldots+h_{pp}+G_{11}+G_{22}+\ldots+G_{pp}).$$

Facciamo dapprima l'ipotesi che T sia una corrispondenza plurivalente a valenze tutte semplici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$. Indicata, come al solito, con $\omega(z)=0$ l'equazione caratteristica dell'omografia Ω, e supposto che i determinanti nulli $\omega(-\gamma_1)$, $\omega(-\gamma_2)$, ..., $\omega(-\gamma_l)$ siano rispettivamente di caratteristiche $2(p-q_1)$, $2(p-q_2)$, ..., $2(p-q_l)$, saranno $2q_1, 2q_2, \ldots, 2q_l$ le molteplicità delle radici $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_l$ per la $\omega(z)=0$, e le valenze $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ saranno associate a sistemi regolari riducibili ∞^{q_1-1}, ∞^{q_2-1}, ..., ∞^{q_l-1}. Osservando ora che la somma delle radici della equazione $\omega(z)=0$ è data da $(h_{11}+h_{22}+\ldots+h_{pp}+G_{11}+G_{22}+\ldots+G_{pp})$, dalla (8) si deduce

$$(9) \qquad U=\alpha+\beta+2q_1\gamma_1+2q_2\gamma_2+\ldots+2q_l\gamma_l,$$

la quale formula è la generalizzazione di quella di Cayley-Brill alle corrispondenze plurivalenti, dotate di valenze tutte semplici.

L'equazione $\psi(z)=0$ ammetta ora radici tutte intere $-\gamma_1$, $-\gamma_2, \ldots, -\gamma_k$ di molteplicità $l_1\, l_2 \ldots l_k$. Alla radice $-\gamma_i$ della equazione $\omega(z)=0$ corrisponde uno spazio fondamentale $l_i^{(i)}$ per l'omografia Ω immagine di T; detto $S_{2q_1^{(i)}-1}$ questo spazio fondamentale ed $S_{2q_2^{(i)}-1}$, $S_{2q_3^{(i)}-1}$, ..., $S_{2q_{l_i}^{(i)}-1}$ quelli venuti successivamente a sovrapporsi in esso $(q_1^{(i)} \geq q_2^{(i)} \geq \ldots \geq q_{l_i}^{(i)} > 0)$, i sistemi regolari riducibili i cui integrali dànno somma costante nel gruppo omologo di un punto variabile x per le corrispondenze $T+\gamma_i I$, $(T+\gamma_i I)^2$, ..., $(T+\gamma_i I)^{l_i}$ sono rispettivamente

$$\infty^{q_1^{(i)}-1},\ \infty^{q_1^{(i)}+q_2^{(i)}-1},\ \ldots,\ \infty^{q_1^{(i)}+q_2^{(i)}+\ldots+q_{l_i}^{(i)}-1} \text{ e } 2(q_1^{(i)}+q_2^{(i)}+\ldots+q_{l_i}^{(i)})$$

(*) Hurwitz, l. c., § 10.

sarà la molteplicità della radice $-\gamma_i$ per l'equazione $\omega(z)=0$. In questo caso dalla (8) si deduce la formula

$$U=\alpha+\beta+2(q_1'+q_2'+\ldots+q_{l_1}')\gamma_1+2(q_1''+q_2''+\ldots+q_{l_2}'')\gamma_2+\ldots$$
$$+2(q_1^{(k)}+q_2^{(k)}+\ldots+q_{l_k}^{(k)})\gamma_k,$$

che è la generalizzazione di quella di Cayley-Brill alle corrispondenze plurivalenti dotate di valenze multiple.

14. — Si considerino due corrispondenze T e T^{-1} l'una inversa dell'altra. Poichè $(T^{-1})^r=(T^r)^{-1}$, ne segue che i determinanti costituiti dagli interi caratteristici delle corrispondenze T^{-1}, $(T^{-1})^2$, $(T^{-1})^3,\ldots$ si deducono da quelli di T, T^2, $T^3,\ldots$ eseguendo sui loro elementi la stessa permutazione e gli stessi cambiamenti di segno; ed allora è chiaro che, volendo determinare i coefficienti delle equazioni minime cui soddisfano T e T^{-1}, si fa capo allo stesso sistema di equazioni lineari. Dunque:

Una corrispondenza T *e la sua inversa* T^{-1} *soddisfano alle stesse equazioni minime.*

Ricordiamo ora che se Ω e Ω' sono le omografie immagini di T e di T^{-1} e Λ è il sistema nullo fondamentale relativo alla curva, si ha $\Omega'=\Lambda\,\Omega^{-1}\,\Lambda$, cioè la Ω' si ottiene trasformando mediante il sistema nullo Λ l'omografia Ω^{-1}, inversa di Ω, operante sugli iperpiani di S_{2p-1} (*). Di qui discende che gli spazi fondamentali di Ω' sono polari, rispetto a Λ, degli spazi coniugati di quelli fondamentali di Ω.

Da quanto abbiamo detto, facendo l'ipotesi che l'equazione minima di T abbia tutte radici intere, segue la proprietà:

L'inversa T^{-1} *di una corrispondenza* T k-*valente è pure* k-*valente, e le valenze di* T *e* T^{-1} *sono le medesime e delle stesse molteplicità. I sistemi regolari riducibili associati ad una stessa valenza per le corrispondenze* T *e* T^{-1} *sono della stessa dimensione, ma, in generale, distinti.*

(*) Cfr. *Corrispondenze*, § 3, n° 8, Oss. II.

15. — Dimostriamo ora il seguente teorema:

L'equazione minima di una corrispondenza simmetrica ammette radici tutte semplici e reali, quella di una corrispondenza emisimmetrica ammette pure radici semplici, le quali, tranne una eventuale radice nulla, sono numeri immaginari puri (due a due coniugati).

È noto (*) che la omografia Ω, immagine di una corrispondenza simmetrica T, nasce moltiplicando per il sistema nullo fondamentale Λ un sistema nullo razionale S che ammette gli spazi $\alpha\,\alpha_0$ come spazi totali. Poichè $\Omega + \rho I = S\Lambda + \rho\Lambda^2 = (S + \rho\Lambda)\,\Lambda$, si deduce che le omografie singolari del fascio $\Omega + \rho I$ si ottengono moltiplicando per Λ i sistemi nulli singolari del fascio $S + \rho\Lambda$, e che quindi gli spazi fondamentali di Ω sono gli assi dei sistemi nulli singolari del fascio $S + \rho\Lambda$ e gli spazi ad essi coniugati nell'omografia sono i polari dei primi rispetto a Λ. Supposto ora che l'equazione minima $\psi(z) = 0$ della corrispondenza T ammetta due radici complesse coniugate $\rho'\,\rho_0'$, i due sistemi nulli singolari $S + \rho'\Lambda$, $S + \rho_0'\Lambda$ avranno per assi due spazi $S_{2q-1}\,S^{(0)}_{2q-1}$ immaginari coniugati appoggiati ad $\alpha\,\alpha_0$ lungo spazi di dimensione $q - 1$. I detti assi non hanno poi alcun punto comune, perchè tale punto, singolare per due complessi distinti del fascio, lo sarebbe per tutti, il che è assurdo non essendo Λ singolare. Gli spazi $s_{q-1} \equiv (S_{2q-1}, \alpha)$, $s^{(0)}_{q-1} \equiv (S^{(0)}_{2q-1}, \alpha_0)$ sono immaginari coniugati; congiungendo allora un punto del primo col suo coniugato giacente nel secondo, si ottiene una retta *reale* appartenente a tutti i complessi del fascio $S + \rho\Lambda$. Poichè sappiamo che non possono esistere rette reali del complesso Λ appoggiate ad $\alpha\,\alpha_0$ (**), si deduce che le radici dell'equazione $\psi(z) = 0$ sono tutte reali.

Sia ora ρ' una tale radice ed S_{2q-1} lo spazio reale, appoggiato ad $\alpha\,\alpha_0$ lungo due spazi $s_{q-1}\,s^{(0)}_{q-1}$ immaginari coniugati, asse del sistema nullo singolare $S + \rho'\Lambda$. Lo spazio polare di S_{2q-1} rispetto a Λ è un $S_{2(p-q)-1}$ reale appoggiato ad $\alpha\,\alpha_0$ lungo due spazi $s_{p-q-1}\,s^{(0)}_{p-q-1}$ immaginari coniugati. E i due spazi $S_{2q-1}\,S_{2(p-q)-1}$ sono indipendenti, perchè, se si interse-

(*) Cfr. *Corrispondenze*, § 3, n° 6.

(**) Cfr. *Corrispondenze*, Osservazione a piè della pag. 16.

cassero, la loro intersezione, che è lo spazio reale S_{2l-1} congiungente gli spazi immaginari coniugati $s_{l-1} = (s_{q-1}, s_{p-q-1})$ $s^{(0)}_{l-1} = (s^{(0)}_{q-1}, s^{(0)}_{p-q-1})$, sarebbe spazio totale di Λ, ed esisterebbero quindi rette reali del complesso Λ appoggiate ad $\alpha\,\alpha_0$.

La Ω, avendo gli spazi fondamentali indipendenti dai loro coniugati, è adunque una omografia generale, e perciò l'equazione minima $\psi(z) = 0$ ammette radici tutte semplici (*).

Si consideri ora una corrispondenza emisimmetrica T, di cui Ω indichi l'omografia immagine. Sappiamo (**) che la Ω si ottiene moltiplicando per il sistema nullo Λ una polarità razionale P la cui quadrica fondamentale φ contiene gli spazi $\alpha\,\alpha_0$, e la quadrica φ sarà specializzata o non, secondochè T è speciale o non speciale, cioè secondochè l'equazione minima $\psi(z) = 0$ di T ammette o non la radice zero. E si osservi subito che tale radice, quando esiste, è semplice per l'equazione $\psi(z) = 0$, perchè lo spazio singolare di Ω che ad essa corrisponde non interseca il suo coniugato (***).

Ammesso che l'equazione $\psi(z) = 0$ abbia una radice reale $\rho' \neq 0$, si prenda un punto reale X nello spazio fondamentale di Ω corrispondente a quella radice; punto che, com'è noto, dovrà essere esterno agli spazi $\alpha\,\alpha_0$. Poichè X è punto unito in Ω, non potrà appartenere all'eventuale spazio doppio della quadrica φ, e dovrà avere lo stesso iperpiano polare ξ nella polarità P e nel sistema nullo Λ. Ne segue che X dovrà giacere in ξ e quindi su φ, e l'iperpiano ξ è tangente in X alla quadrica φ. Ma allora la retta *reale* uscente da X ed appoggiata ad $\alpha\,\alpha_0$ giace su φ e quindi nell'iperpiano ξ ed è quindi retta del complesso Λ, il che è assurdo. L'equazione $\psi(z) = 0$, tranne la radice zero, non può dunque ammettere radici reali.

Si osservi ora che la corrispondenza T^2, avendo per immagine la omografia $\Omega^2 = (P \Lambda P)\Lambda$ che nasce moltiplicando per il sistema nullo fondamentale Λ il sistema nullo $P \Lambda P$, trasformato di Λ mediante la polarità P, è una corrispondenza sim-

(*) Il ragionamento fatto prova inoltre che l'equazione minima di una corrispondenza simmetrica è di grado $\leq p$.

(**) Cfr. *Corrispondenze*, § 3, n° 6.

(***) Cfr. *Corrispondenze*, § 3, n° 8.

metrica (*). Indicando allora con $\varphi(t)=0$ l'equazione minima di T^2, la corrispondenza T dovrà soddisfare alla equazione $\varphi(z^2)=0$, e dovrà allora $\varphi(z^2)$ essere divisibile per $\psi(z)$. I quadrati delle radici di $\psi(z)=0$ sono dunque radici di $\varphi(t)=0$, e poichè questa equazione ammette radici tutte reali, ne segue che ogni radice non nulla di $\psi(z)=0$ deve essere un numero immaginario puro. Queste poi sono tutte semplici, perchè se la radice $i\beta$ e quindi anche la coniugata $-i\beta$ fossero di molteplicità $\alpha>1$, si avrebbe $\psi(z)=(z-i\beta)^\alpha(z+i\beta)^\alpha\ldots=$ $=(z^2+\beta^2)^\alpha\ldots$ e la $\varphi(t)=0$ ammetterebbe la radice $-\beta^2$ di molteplicità $\alpha>1$.

16. — Dal n. precedente si deduce che una corrispondenza emisimmetrica non può essere plurivalente, e che una corrispondenza simmetrica plurivalente ha le sue valenze tutte semplici. Se T è una corrispondenza simmetrica plurivalente, la T^{-1} non solo ha le stesse valenze di T, ma di più tali valenze sono associate agli stessi sistemi regolari riducibili. Inversamente, se T è una corrispondenza plurivalente e le valenze di T e di T^{-1} sono associate agli stessi sistemi regolari riducibili, gli spazi fondamentali coniugati dell'omografia Ω immagine di T saranno l'uno polare dell'altro nel sistema nullo Λ, e quindi fra loro indipendenti. Ne segue che le valenze di T sono tutte semplici, e quindi i sistemi regolari riducibili, cui sono associate, appartengono al sistema totale ∞^{p-1} degli integrali della curva. Ma allora, per il teorema d'Abel, si ha $T-T^{-1}\equiv 0$, cioè la T è una corrispondenza simmetrica. Con ciò resta completato il teorema enunciato in fine del n. 14.

§ 3.

17. — Sopra una curva C di genere $p>1$ si abbia un'involuzione θ di ordine n e di genere π $(0<\pi<p)$, e si consideri la corrispondenza simmetrica T che nasce assumendo come

(*) In generale: qualsiasi potenza di una corrispondenza simmetrica è pure simmetrica; la potenza di una corrispondenza emisimmetrica è simmetrica o emisimmetrica secondochè l'esponente è pari o dispari.

omologhi due punti di C appartenenti ad un medesimo gruppo di θ. Indicando con G_1 G_2 i gruppi omologhi di un punto generico A_1 nelle corrispondenze T T^2 e con $A_2 A_3 \dots A_n$ gli ulteriori punti del gruppo dell'involuzione θ contenente A_1, sarà $G_1 = A_2 A_3 \dots A_n$; e poichè il gruppo omologo nella T del punto $A_i (i = 2, 3, \dots, n)$ è costituito dai punti $A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_n$, si avrà manifestamente $G_2 = (n-1) A_1 + (n-2) G_1$. Di qui segue che la corrispondenza T soddisfa all'equazione quadratica

$$(10) \qquad z^2 - (n-2) z - (n-1) = 0,$$

la quale ammette le radici intere -1, $(n-1)$. È facile ora provare che la (10) è l'equazione minima cui soddisfa la T, e che quindi la T è una corrispondenza bivalente, con le due valenze semplici 1, $(1-n)$. Invero, se l'equazione minima di T fosse lineare, dovendo essa, in virtù del teorema di Frobenius, essere un divisore della (10), la T dovrebbe essere o una corrispondenza a valenza 1, ovvero a valenza $(1-n)$. Ma le due ipotesi sono entrambe da scartarsi, perchè dalla prima seguirebbe $\pi = 0$, e nella seconda la formula di Cayley-Brill darebbe come numero delle coincidenze di T il valore $d = 2(n-1) - 2(n-1)p$, onde sarebbe $p = 1$ (*).

Poichè, come è noto (**), gli integrali indipendenti di C che dànno somma costante nei gruppi dell'involuzione θ sono in numero di $p - \pi$, ne segue che il sistema regolare riducibile rispetto a cui la T ha la valenza parziale 1 è $\infty^{p-\pi-1}$; sarà quindi $\infty^{\pi-1}$ l'altro sistema, indipendente dal primo, rispetto a cui T ha la valenza parziale $(1-n)$ (***). Il numero d delle

(*) È noto (Severi) che le corrispondenze simmetriche sulle curve ellittiche sono a valenza; si vede poi subito che tale valenza è effettivamente $(1-n)$, se la corrispondenza nasce da una involuzione ellittica di ordine n.

(**) Cfr. Comessatti, *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, "Rendiconti di Palermo", Tomo XXXVI, 1913, § 4, n° 16.

(***) Chiamando Γ la curva immagine dell'involuzione θ, il sistema suddetto è quello che nasce dal sistema totale $\infty^{\pi-1}$ degli integrali di Γ mediante la trasformazione di Γ in C. Si indichino infatti con $v_1 v_2 \dots v_\pi$

coincidenze di T può dunque dedursi applicando la formula (9) del n. 13; avremo allora

$$d = 2(n-1) + 2(p-\pi) + 2(1-n)\pi = 2p - 2 - n(2\pi - 2),$$

cioè la formula di Zeuthen; questa può dunque considerarsi come conseguenza di quella di Cayley-Brill generalizzata.

18. — Siano Γ e C due curve di generi π e p $(0 < \pi < p)$ fra le quali interceda una corrispondenza S di indici 1, n e si indichi con θ l'involuzione d'ordine n generata su C dal gruppo omologo di un punto variabile su Γ. Sia poi data su Γ una corrispondenza T di indici α, β, soddisfacente all'equazione minima:

$$\psi(z) = z^l + a_1 z^{l-1} + \ldots + a_{l-1} z + a_l = 0; \tag{11}$$

assumendo allora come omologhi due punti di C quando i punti di Γ che ad essi corrispondono per la S^{-1} sono omologhi nella corrispondenza T, avremo sulla curva C la corrispondenza $U = S^{-1} T S$, trasformata di T mediante la S, di indici $n\alpha$, $n\beta$, tale che essa e la sua inversa sono composte con l'involuzione θ.

---

gli integrali di Γ e con $u_1 u_2 \ldots u_\tau$ i corrispondenti integrali di C, con ω complessivamente i periodi degli integrali v e con τ quelli degli integrali u; è chiaro che ogni integrale u_h riprende nei punti del gruppo generico $A_1 A_2 \ldots A_n$ dell'involuzione θ valori congrui rispetto ai periodi ω. Considerando allora sulla curva C dei cammini $l_2 l_3 \ldots l_n$ che vadano dal punto A_1 ai punti $A_2 A_3 \ldots A_n$, ad essi corrispondono su Γ dei cicli $\sigma_2' \sigma_3' \ldots \sigma_n'$; se $\omega_{h2} \omega_{h3} \ldots \omega_{hn}$ sono i periodi di v_h lungo i cicli medesimi, si avrà

$$\left.\begin{array}{l} u_h(A_2) \equiv u_h(A_1) + \omega_{h2} \\ u_h(A_3) \equiv u_h(A_1) + \omega_{h3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_h(A_n) \equiv u_h(A_1) + \omega_{hn} \end{array}\right\} \pmod{\tau};$$

da cui segue la formula

$$u_h(A_2) + u_h(A_3) + \ldots + u_h(A_n) - (n-1)\, u_h(A_1) \equiv \text{cost.} \pmod{\tau},$$

la quale prova l'asserto.

Vogliamo ora determinare l'equazione minima cui soddisfa la corrispondenza U.

Perciò si osservi anzitutto che se A è una corrispondenza qualsiasi su Γ ed $S^{-1} A S$ la sua trasformata su C, poichè a gruppi equivalenti di una curva corrispondono gruppi equivalenti sull'altra, dall'ipotesi $A \equiv 0$ discende $S^{-1} A S \equiv 0$, e inversamente dall'ipotesi $S^{-1} A S \equiv 0$ segue $n A \equiv 0$ e quindi $A \equiv 0$.

Si indichino ora con I, I' le corrispondenze identiche sulle curve Γ e C e con H la corrispendenza simmetrica di C in cui sono omologhi due punti appartenenti ad uno stesso gruppo dell'involuzione θ. Poichè è manifestamente $S S^{-1} = n I$, si avrà

$$U^r = S^{-1} TS \,.\, S^{-1} TS \ldots S^{-1} TS = S^{-1} n^{r-1} TS\,;$$

ed allora dalle uguaglianze

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} I' + H &= S^{-1} IS \\ U &= S^{-1} TS \\ U^2 &= S^{-1} n\, T^2 S \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ U^l &= S^{-1} n^{l\ 1} T^l S \end{aligned} \right.$$

si deduce

$$(13) \qquad \begin{aligned} U^l + n a_1 U^{l-1} + n^2 a_2 U^{l-2} + \ldots + n^{l-1} a_{l-1} U + n^{l-1} a_l (I' + H) = \\ = S^{-1} \,.\, n^{l-1} (T^l + a_1 T^{l-1} + \ldots + a_{l-1} T + a_l I) \,.\, S \equiv 0. \end{aligned}$$

Occorre qui distinguere due casi, secondochè la T è una corrispondenza speciale o non speciale. Nel primo caso, essendo $a_l = 0$, la (13) dice che U soddisfa all'equazione

$$(14) \qquad Z^l + n a_1 Z^{l-1} + n^2 a_2 Z^{l-2} + \ldots + n^{l-1} a_{l-1} Z = 0$$

trasformata della (11) mediante la trasformazione a radici multiple $Z = nz$; nel secondo caso, moltiplicando la (13) per U, ed osservando che $(I' + H)\, U = nU$, si deduce che U soddisfa all'equazione

$$(15) \qquad Z^{l+1} + n a_1 Z^l + n^2 a_2 Z^{l-1} + \ldots + n^{l-1} a_{l-1} Z^2 + n^l a_l Z = 0$$

la quale si ottiene eseguendo sulla (11) la trasformazione $Z = nz$ e moltiplicando poi per Z l'equazione ottenuta.

Proviamo ora che le (14) (15) sono nei due casi le equazioni minime cui soddisfa la U.

Poichè ogni integrale di C, che dà somma costante nei gruppi dell'involuzione θ, dà pure somma costante nel gruppo omologo di un punto variabile x per la corrispondenza U, la U dovrà possedere la valenza parziale zero, e quindi ogni equazione cui essa soddisfa deve mancare del termine noto. Supposto che

$$b_0 Z^k + b_1 Z^{k-1} + \dots + b_{k-1} Z = 0$$

sia una tale equazione, dalla relazione

$$b_0 U^k + b_1 U^{k-1} + \dots + b_{k-1} U \equiv 0 .$$

applicando le (12), si ottiene l'altra

$$n^{k-1} b_0 T^k + n^{k-2} b_1 T^{k-1} + \dots + n b_{k-2} T^2 + b_{k-1} T \equiv 0 ,$$

da cui segue che T soddisfa all'equazione

$$n^{k-1} b_0 z^k + n^{k-2} b_1 z^{k-1} + \dots + n b_{k-2} z^2 + b_{k-1} z = 0 .$$

Confrontando questa con l'equazione minima (11) cui soddisfa la T, si deduce che se è $a_l = 0$, si ha $k \geq l$; se è $a_l \neq 0$, si ha $k \geq l + 1$. L'asserto è dunque provato, onde possiamo enunciare la proprietà:

Sopra due curve Γ *e* C *di generi* π *e* p $(0 < \pi < p)$ *fra le quali interceda una corrispondenza* S *di indici* 1, n, *si considerino una qualsiasi corrispondenza* T, *e la corrispondenza* $U = S^{-1} T S$: *se* T *è speciale, l'equazione minima di* U *si ottiene eseguendo sull'equazione minima di* T, $\psi(z) = 0$, *la trasformazione* $Z = nz$; *se* T *è non speciale, l'equazione minima di* U *si ottiene moltiplicando per* Z *la detta equazione trasformata* (*).

(*) Nel caso $\pi = p = 1$, la T, se non è una corrispondenza a valenza, soddisfa a un'equazione minima quadratica $\psi(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = 0$ (coin-

19. — Da quanto abbiamo detto risulta che, se T è una corrispondenza k-valente non speciale, con le valenze $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k$ (semplici o multiple) la $U = S^{-1} T S$ è una corrispondenza $(k+1)$ — valente con le valenze $0, n\gamma_1, n\gamma_2, \dots n\gamma_k$, delle quali la prima è semplice e le altre hanno la stessa molteplicità delle corrispondenti valenze di T. Aggiungendo poi ad U una qualsiasi corrispondenza a valenza ordinaria, si ottiene una corrispondenza U_1 $(k+1)$ — valente non speciale. Con l'applicazione ripetuta del procedimento suddetto si può dunque, partendo da una corrispondenza a valenza ordinaria sopra una curva C, giungere ad una curva C_1 contenente una corrispondenza plurivalente, dotata di quantesivogliano valenze.

Pisa, Aprile 1916.

cidente con l'equazione caratteristica della omografia immagine) a discriminante negativo. La (13) del testo in tal caso diviene $U^2 + na_1 U + na_2 (I' + H) \equiv 0$; e poichè H è ora una corrispondenza a valenza $(1-n)$, si avrà $H + (1-n) I' \equiv 0$; dalle due relazioni si deduce l'altra $U^2 + na_1 U + n^2 a_2 I' \equiv 0$, la quale dice che U soddisfa all'equazione $Z^2 + n a_1 Z + n^2 a_2 = 0$; ed è questa l'equazione minima di U, essendo le sue radici numeri complessi coniugati.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 14 Maggio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Chironi, Direttore della Classe, Pizzi, Ruffini, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Prato, e Stampini Segretario della Classe. È presente anche il Socio nazionale non residente Vittorio Scialoja.

È scusata l'assenza dei Soci Carle e Sforza.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 30 aprile u. s.

Il Socio Ruffini presenta, anche a nome del Socio Chironi, il libro del Prof. Francesco Ferrara dell'Università di Pisa, intitolato *Teoria delle Persone giuridiche* (Napoli-Torino, 1915).

Rileva il Socio Ruffini la importanza senza paragone che l'argomento delle persone giuridiche ha assunto durante il secolo XIX, di guisa che non soltanto una ricca letteratura si è venuta formando intorno ad esso nei varî paesi, ma s'è verificata addirittura una produzione letteraria tale da costituire quasi di per sè una biblioteca, in quanto che non i soli privatisti, come un tempo, ma anche i pubblicisti hanno recato un decisivo contributo di ricerche e di idee alla sua elaborazione. Nota

ancora l'importanza politica del soggetto, poichè, ad esempio, intorno alla ammissibilità o alla preponderanza dell'una o dell'altra delle tipiche figure della persona giuridica, la corporazione e la fondazione, s'è impegnata nel Belgio, dal 1830 in poi, una vera battaglia fra i due partiti, che colà si sono contesi il potere, il cattolico e il liberale. Di qui l'interesse di questo libro, il quale rappresenta, anche in confronto della notissima opera del Giorgi in più volumi, quanto di meglio e di più completo la letteratura nostra abbia prodotto in materia, non solo, ma è forse la più notevole delle trattazioni recenti, anche delle straniere, non esclusa, ad esempio, quella pure tanto pregevole del francese Saleilles. Pone finalmente in chiaro, quali meriti più speciali di quest'opera, la nitidezza della esposizione, così difficile ad ottenersi in un argomento dei più astrusi, e inoltre l'uso di elementi interamente italiani, dedotti dagli statuti delle più svariate fra le persone giuridiche nostrane, che, usufruiti ora abilmente ed utilmente per la costruzione teorica, saranno in seguito, con sempre più larghi frutti certamente, impiegati del pari per la trattazione speciale e pratica.

Il Socio Chironi, ammette il valore dell'opera del Ferrara; ma, prendendo le mosse dall'accenno fatto dal Socio Ruffini al libro del Saleilles, osserva come quella stessa incertezza, che si riscontra nell'opera francese circa la definitiva determinazione della essenza della corporazione, si riflette anche nella trattazione italiana, il che è prova della difficoltà eccezionale dell'argomento.

Il Socio Scialoja, pure riconoscendo che il libro del Ferrara sta al di sopra, nella parte teorica fin qui pubblicata, alla notissima opera del Giorgi, osserva che esso lo lascia tuttavia sempre nel suo scetticismo intorno alla possibilità di una vera teoria generale delle persone giuridiche. Egli crede che la serie sempre più ricca e varia di queste possa bensì consentire delle utili trattazioni speciali per ognuno dei tipi, sotto cui esse si presentano, ma non una riduzione di tutte quante sotto un'unica

figura e quindi la loro sottoposizione ad un armonico complesso di norme.

Il Socio Einaudi esprime il voto, che si voglia nell'avvenire dedicare una trattazione apposita ad un lato, tanto importante, del problema, che è quello della tassazione delle persone giuridiche. E il Socio Scialoja ne prende occasione per ribadire il suo pensiero che neppure tale trattazione comprensiva dell'aspetto finanziario della vita delle persone giuridiche sia attuabile.

Il Presidente riassume e chiude con acconce parole il dibattito intervenuto. E la Classe ringrazia il donatore.

Il Socio Patetta presenta la monografia di G. Carbonelli, intitolata *Dieci consigli medici dettati da Maestro Gerardo De Berneriis* (Estr. dalla " Rassegna di Clinica, Terapia e Scienze affini ", Fasc. I-II, 1916), esponendone brevemente il contenuto. La Classe ringrazia l'autore per il dono.

Il Presidente S. E. Boselli presenta il libro di Ferruccio Boffi, intitolato *Su le tracce della guerra* (Lanciano, 1916), richiamando l'attenzione sul capitolo che porta il titolo " Il maresciallo H. von Moltke a Roma nel 1876. Quintino Sella e Teodoro Mommsen (con note del sen. Pietro Blaserna) ". La Classe ringrazia per il dono.

Il Socio Segretario Stampini notifica che dal Comitato Nazionale per la storia del Risorgimento fu inviato all'Accademia il discorso commemorativo di Bonaventura Zumbini detto da S. E. Boselli, presidente del Comitato, nella sua adunanza del 10 aprile u. s. Presenta inoltre la recentissima pubblicazione del Socio corrispondente Giuseppe Biadego, intitolata *Bibliografia Aleardiana* (Verona, 1916), notando e lodando il metodo seguìto dall'autore, e la partizione in due parti, di cui una registra tutte le pubblicazioni poetiche dell'Aleardi riproducendo altresì le poesie giovanili, non che le prose del medesimo; mentre l'altra raccoglie — e la raccolta costò non lieve fatica al Biadego — quanto l'A. potè trovare di scritti riguardanti la biografia e la

critica delle pubblicazioni dell'Aleardi, " sopratutto la critica che fu iperbolicamente laudativa e ferocemente demolitiva, fino a che dopo la morte del poeta andò affievolendosi e poi per qualche anno tacque quasi del tutto. " — La Classe si rallegra col donatore e lo ringrazia.

Il Socio Brondi presenta, per la pubblicazione negli *Atti,* una *Nota* del Dott. Emilio Betti dal titolo *La " condictio pretii " del processo civile giustinianeo.*

Infine il Socio Stampini presenta, pure per la pubblicazione negli *Atti,* una *Nota* del Dott. Augusto Rostagni intitolata *La composizione delle " Dirae " pseudovergiliane.*

La Classe si riunisce poscia in adunanza privata.

LETTURE

La " condictio pretii " del processo civile giustinianeo.

(Contributo allo studio della condemnatio pecuniaria postclassica).

Nota del Prof. EMILIO BETTI.

In alcune fattispecie che dànno origine ad azioni di ripetizione, l'*oggetto* di tale azione è nel processo giustinianeo mutato da quello ch'esso era nel processo classico. Laddove nel processo classico l'*oggetto dell'azione* era la cosa *medesima* — in specie o in genere — trapassata in proprietà o in possesso dell'obbligato, nel processo giustinianeo l'oggetto dell'azione nelle fattispecie accennate è senz'altro l'*equivalente* (pretium, aestimatio) della cosa trasmessa, ovvero la cosa o l'equivalente a scelta dell'attore. Quali siano le fattispecie accennate vedremo più avanti. Per valutare intanto sin da principio la reale portata di tale innovazione — che, come tante altre innovazioni giustinianee ha carattere piuttosto tecnico-processuale che materiale — è necessario premettere una serie di considerazioni.

La innovazione notata è una conseguenza della radicale trasformazione compiutasi nel sistema del processo civile dall'età romana-classica all'età bizantina. L'innovazione è interessante perchè è insieme un indice del mutamento profondo operatosi nella funzione fondamentale del processo civile, e propriamente nella *finalità della sentenza di condanna e della esecuzione forzata*. A quello che nell'età classica era il processo normale — il processo formolare — si è sostituita, com'è noto, nell'età postclassica, quale forma di processo ordinario, quella che nell'età classica era una forma straordinaria — il processo per cognitio extra ordinem e per exsecutio extra ordinem. Carattere immanente e costante del processo formolare è la condanna pecuniaria: Gai. I. 4, 48 omnium . . formularum, quae condemnationem habent, ad pecuniariam aestimationem condemnatio

concepta est . itaque et si corpus aliquod petamus, velut fundum, hominem, vestem, aurum, argentum, iudex *non ipsam rem* condemnat eum, cum quo actum est . . , *sed, aestimata re, pecuniam* eum condemnat (cfr. § 51 iudex si condemnet, certam pecuniam condemnare debet). E alla condanna pecuniaria corrisponde la esecuzione forzata *universale* sia sulla persona sia sul patrimonio (1); la sola minaccia della quale è atta a premere sulla volontà del condannato quale *coazione* indiretta, per indurlo a pagare, se può, la litis aestimatio (2). — Per contro, segnatura se non costante certo però caratteristica del processo extra ordinem è la condanna alla *consegna* o al *rilascio* della cosa stessa che è oggetto del diritto fatto valere — sempre che tale oggetto sia una cosa tuttora esistente e non un fatto: Just. Inst. 4, 6, 32 curare . . debet iudex ut omnimodo, *quantum possibile* ei sit, *certae pecuniae vel rei* sententiam ferat, etiam si de incerta quantitate apud eum actum est. Alla quale condanna nella cosa stessa corrisponde di necessità la esecuzione forzata *speciale* " manu militari " mediante mezzi di *surrogazione*, che prescindono dalla volontà del condannato: L. 6, 1, 68 qui restituere iussus iudici non paret . . , si quidem habeat rem manu militari officio iudicis ab eo *possessio transfertur* (3).

La funzione della condanna pecuniaria generale del processo formolare è quella di procacciare sempre all'attore il *risarcimento* — nulla più che il risarcimento (4) — per la mancata soddisfazione volontaria del suo diritto da parte del convenuto. E in ciò appunto consiste uno de' caratteri più salienti propri

(1) Basti ricordare le disposizioni della lex XII tab. (III, 1 e segg.) e quelle dell'editto pretorio riferite da Gai. I. 3, 78 (v. Lenel, *Edictum*[2] 392. 398).

(2) La connessione tra la condanna pecuniaria e l'esecuzione forzata universale è notata anche dallo Schmidt, *Zivilprozessrecht*[2], 918.

(3) V. inoltre in D. 43, 4, 3 pr. 1; D. 36, 4, 5, 27; D. 39, 2, 15, 23; D. 4, 2, 23, 3; D. 21, 2, 50 altre attestazioni della exsecutio extra ordinem manu militari. Testimonianze sulla coercitio extra ordinem v. in D. 25, 3, 1, 4; D. 26, 7, 1 pr.; D. 43, 32, 1, 2; D. 29, 3, 2, 8; D. 36, 2, 12, 4; D. 30, 71, 2; in particolare sulla portata dell'alterazione di D. 42, 2, 6, 1 v. quanto dicemmo in questi *Atti*, vol. 50, p. 708. Cfr. Keller, *Civilprocess*[4]; § 83, p. 362-64.

(4) Ciò vale, s'intende, in linea di principio: si prescinde dalle ipotesi in cui il giudice debba porre a base della sua aestimatio il ius iurandum in litem dell'attore (D. 12, 3, 1. 2). V. però n. 3 a p. 1024.

della obbligazione romana in confronto con la obbligazione moderna: la incoercibilità della prestazione dovuta. La condanna del processo formolare non ha *mai* per oggetto, come tale, quello stesso bene della vita che è oggetto del diritto materiale fatto valere in giudizio. Mai: non solo quando il bene preteso sia un fondo o cosa mobile, ma anche, si noti, quando il bene preteso sia una somma di danaro, come ne' casi di pretese esperite mediante actio certae creditae pecuniae o mediante actio ex vendito o actio ex locato. In codesti casi infatti la sentenza che accoglie la domanda dell'attore non si deve ravvisare quale condanna alla prestazione dovuta in origine (restituzione della somma mutuata, pagamento del prezzo o del fitto) (1), bensì pur sempre quale *condanna a una prestazione di risarcimento* che il convenuto deve in luogo della prestazione che non eseguì. La differenza pratica potrà essere irrilevante ne' casi accennati: ma la differenza giuridica tra i due concetti resta anche in essi ben netta. La prestazione di risarcimento è una creazione del processo, un *surrogato*, destinato a *sostituire* la soddisfazione diretta del diritto materiale. Essa ha sempre carattere *astratto* e *generico* in confronto con l'oggetto originario del diritto, concreto e specifico, a prestare il quale il giudice condanna, di regola, il convenuto nel processo giustinianeo, comune e moderno (2). Essa prestazione ha sua base non nell'ordinamento giuridico materiale bensì nel processuale: essa viene imposta da un *imperativo secondario* che il giudice pone, non dall'imperativo primario da cui emanava il diritto fatto valere. Essa prestazione è dovuta in forza della condanna, non in quanto la condanna afferma esistente un fatto giuridico o una volontà concreta della legge che regola i rapporti materiali (pronuntiatio), bensì in quanto esprime la posizione dell'imperativo secondario anzidetto (condemnatio) (3). La sentenza di condanna a sua volta trae la sua

(1) Tale qualifica giuridica sarebbe altrettanto giusta per la sentenza del processo giustinianeo, del comune e del moderno, quanto erronea per la sentenza del processo formolare romano.

(2) Cfr. Degenkolb, *Einlassungszwang und Urtheilsnorm*, 156-7. 159-60.

(3) Per contro l'imperativo secondario che pone la sentenza di condanna del processo moderno (come già del giustinianeo) pel caso che manchi l'esecuzione volontaria s'indirizza non al convenuto, bensì agli *organi in-*

forza vincolante — oltre che dall'ordine di giudicare impartito al giudice dal magistrato — dalla litis contestatio. Con questa infatti il convenuto, accettando la " formula „ ossia l'instrumento del contratto processuale, si è obbligato, pel caso che la sua opposizione venga giudicata infondata, a subire quella condanna pecuniaria a cui l'instrumento stesso autorizza il giudice (Gai. I. 4, 43) (1).

Affatto mutata è la funzione che resta alla condanna pecuniaria nel sistema del processo civile giustinianeo, mutata ormai la finalità stessa della sentenza di condanna e della esecuzione forzata. Una volta introdotta, infatti, in linea di principio, la condanna tendente a procacciare all'attore quello stesso bene della vita che è oggetto del diritto fatto valere in giudizio, la condanna nell'equivalente pecuniario è divenuta una forma

caricati della esecuzione forzata, de' quali è destinato a formare la convinzione sulla ulteriore attuabilità del diritto (Chiovenda, *Principii d. dir. proc.*[3], 158). Il giudice del processo formolare romano non poteva, come privato, porre alcun imperativo al magistrato che lo aveva costituito tale e che solo era competente a concedere l'esecuzione.

(1) La litis contestatio — quale contratto costitutivo del rapporto processuale, atto di disposizione delle parti — ricorda assai da vicino il contratto di compromesso (cfr. Betti, *Antitesi tra iudicare e damnare*, n. 1 a p. 6) ed è indice indelebile di quella che è la concezione romana del processo formolare. Tale processo è, secondo quella concezione, un vero *processo arbitrale.* La differenza della sententia iudicis dall'arbitrium ex compromisso propriamente detto, consiste nel fatto che nel processo formolare interviene l'*ordine autoritativo di giudicare* che il magistrato (praetor) impartisce al giudice privato. Tale ordine, pur senza togliere al giudice privato il carattere di *privato,* ossia senza farne un'autorità, conferisce però in certo modo al giudice stesso *veste giurisdizionale* ed *eleva la sententia* di lui, come esecutiva, al livello di un vero atto giurisdizionale. Nel che l'ordine preventivo di giudicare adempie una funzione analoga a quella che, p. es., nel vigente processo civile italiano adempie il decreto del pretore (Cod. proc. civ., art. 24), mediante il quale lo Stato rende in susseguenza esecutivo il lodo (Chiovenda, *Principii*[3], 111): con la differenza che l'ordine del pretore romano precede, l'ordine del pretore odierno sussegue la sentenza arbitrale. Nell'ibrida composizione de' due elementi così disparati di cui consta — contratto di litis contestatio tra le parti e ordine magistratuale di giudicare — il processo formolare romano ci rivela la sua genesi storica: esso deriva da un processo arbitrale che nelle sue origini era puramente *privato* e che più tardi è stato *assunto e fatto proprio dallo Stato* (v. Betti, *Su la formola d. proc. civ. rom.*, nota 1 a p. 41 e p. 50-51).

di condanna eccezionale e ha assunto una funzione specifica ben determinata. Tale funzione consiste nel *colmare le lacune* lasciate dalla condanna nella cosa stessa: nel tenerne le veci in tutti i casi in cui il diritto fatto valere in giudizio non comporti soddisfazione mediante consegna o rilascio di una cosa in natura, ovvero tale consegna o rilascio siano divenuti impossibili, ovvero anche lo stesso attore si contenti di un equivalente, come il prezzo ricavato (D. 39, 6, 37, 1). Per tal modo il campo di applicazione della condanna pecuniaria si è molto *ristretto*. La pronuncia di essa è restata obbligatoria pel giudice soltanto *a*) nella ipotesi di *sopravvenuta impossibilità della restituzione* della cosa in natura e *b*) nella ipotesi di *obbligazioni di fare* (positive o negative). L'ipotesi *a*) è contemplata in D. 6. 1, 68:

> qui restituere iussus iudici non paret .. si quidem habeat rem (scil. consumptis fructibus) .. ab eo possessio transfertur et fructuum dumtaxat omnisque causae nomine condemnatio (pecuniae) fit . *si vero non potest restituere*, *α*) si quidem dolo fecit quo minus possit, is, *quantum* adversarius *in litem* sine ulla taxatione in infinitum *iuraverit*, damnandus est . *β*) si vero non potest restituere nec dolo fecit quo minus possit, non pluris quam *quanti res est*, id est quanti adversarii interfuit, condemnandus est.

La medesima preoccupazione pratica è in D. 42, 2, 3:

> confessum certum se debere legatum omnimodo damnandum .. et *si iam a natura recessit: ita tamen ut in aestimationem eius damnetur:*

avvertenza che per un giurista classico non avrebbe avuto senso perchè la condanna del processo ordinario avveniva sempre nell'equivalente. La ipotesi *b*) è contemplata in D. 42, 1, 13, 1:

> si quis promiserit prohibere se, ut aliquod damnum stipulator patiatur, et faciat ne quod ex ea re damnum ita habeatur, facit quod promisit: si minus, quia non facit quod promisit, *in pecuniam numeratam condemnatur sicut evenit in omnibus faciendi obligationibus:*

dalla quale osservazione si argomenta a contrario che ai tempi di colui che la scrisse (come anche di chi scrisse l'avvertenza

in D. 42, 2, 3) per le obbligazioni di *dare* vigeva, almeno in linea di principio, la condemnatio in rem ipsam. Che una esecuzione forzata con mezzi di surrogazione non sia possibile in sè e per sè anche in materia di obbligazioni di fare (1), sarebbe affermazione erronea. I mezzi di surrogazione sono anzi applicabili anche in tale materia, sempre che il fatto dovuto sia fungibile, ossia eseguibile ad opera di un terzo (2). Ma l'ordinamento processuale giustinianeo, di cui qui si tratta, non è ancora arrivato sino al punto da riconoscere come suscettibili di condanna alla prestazione primitiva e come eseguibili con mezzi di surrogazione se non le obbligazioni di dare e gli obblighi corrispondenti a pretese reali, aventi per oggetto cosa materiale tuttora esistente. Orbene, per l'appunto nei processi relativi a tali obbligazioni e a tali pretese l'ordinamento giustinianeo — quando risulti che la cosa in natura è perita, o in altro modo sottratta alla disposizione del convenuto — è costretto ad ammettere una *eccezione* alla regola, e cioè la condanna a una prestazione surrogatoria anzi che alla prestazione della cosa stessa. Se non che — come si può arguire da varii indizi (3) — il diritto giustinianeo è, a differenza da quello classico, propenso ad aggravare la misura di tale prestazione surrogatoria oltre il limite del puro equivalente economico e a

(1) Tale idea inspira l'art. 1142 del Codice civile francese: “ ogni obbligazione di fare o di non fare si risolve nella prestazione dei danni e interessi in caso d'inesecuzione dalla parte del debitore „. Esso è una reminiscenza del fr. 13, 1 D. 42, 1 e viene contradetto da quanto soggiungono subito dopo gli articoli 1143 e 1144. Con ragione il legislatore italiano si è guardato bene dal riprodurlo nel Codice civile (cfr. art 1218).

(2) Gli art. 1220 e 1222 Cod. civ. ital. (cfr. Cod. franc. 1144 e 1143) dànno al creditore diritto di chiedere l'*adempimento* dell'obbligazione — o la distruzione di ciò che si è fatto in contravvenzione di essa — *a spese del debitore*. Cfr. l'Ordinamento germanico del processo civ., § 887 e la Legge austriaca sull'esecuzione forzata, §§ 353 e 356. Nel Codice di proc. civ. ital. mancano invece norme che regolino l'attuazione del diritto concesso al creditore: è questa una grave lacuna.

(3) Per es. la innegabile tendenza a estendere il campo di applicazione del ius iurandum in litem; la innovazione introdotta in materia di actio de eo quod certo loco nel calcolare l'interesse dell'attore eccedendo l'importo primitivo (D. 13, 4, 2, 8 [vel excedere]); le disposizioni giustinianee sull'interpretazione della condanna nell'id quod interest (Cod. 7, 47 un.).

toglierle per questo rispetto il carattere di una semplice prestazione di risarcimento (1).

Abbiamo sinora avuto riguardo soltanto alla sentenza di condanna, senza considerare la *domanda giudiziale*, alla quale intendevamo riferirci in principio nel parlare dell' " oggetto dell'azione „. Ma alla differenza fondamentale di funzione, esposta sin qui, tra la sentenza di condanna classica e la sentenza di condanna giustinianea fa riscontro una differenza analoga tra la domanda giudiziale classica (qual'è implicita nella *formula*) e la domanda giudiziale giustinianea (qual'è formulata dal *libello*). Nè potrebbe essere altrimenti. La domanda giudiziale infatti, essendo destinata a sottoporre alla decisione del giudice la questione controversa, pone essa stessa i *termini* di tale questione, forma la *base* di essa decisione e contiene già in sè, in embrione, la sentenza (2). Essa è un programma di sentenza, che la statuizione del giudice realizzerà in senso positivo o negativo, secondo che farà propria o respingerà la proposta dell'attore (3). Orbene, la formula del processo classico esprime nelle sue due parti principali una *distinzione* ben netta tra quello ch'è il *fondamento di responsabilità* di fronte all'azione e quello ch'è il *debito* processuale concreto derivante da essa azione (4). Il fondamento di responsabilità si esprime nella *intentio* della

---

(1) È una tendenza degli ordinamenti processuali propri di molti Stati-di-polizia o fortemente organizzati quella di minacciare il debitore che non adempia una prestazione infungibile con una responsabilità pecuniaria eccedente l'equivalente economico di essa prestazione: v. p. es. l'Ordinamento germanico, § 888, e la Legge austriaca sull'esecuzione forzata, § 354: non si tratta di una punizione, bensì di una forma di coazione indiretta per indurre l'obbligato all'adempimento. Cfr. Chiovenda, *Principii*[3] 236[1].

(2) Betti, *L'antitesi tra iudicare e damnare*, p. 3. Cfr. Calamandrei, *La genesi logica della sentenza civile*, p. 6-7. Di qui la regola del processo comune: " ne eat iudex ultra petita partium „ (su cui v. Chiovenda, *Nuovi saggi di dir. proc.* (1912), p. 41 e segg.) e l'esigenza, espressa negli Ordines iudiciarii (p. es., Maranta, pars VI et demum fertur n. 61), della *conformità* al libello. Cfr. Weismann, *Zivilprozessr.* I, 9. 10[1]. 55-56. 72. 212.

(3) Così allo schema " si paret, condemnato; si non paret, absolvito „, di molte formulae classiche, deve aver corrisposto il seguente schema di sentenza: " paret (= risulta), ergo condemno; non paret, ergo absolvo „.

(4) Il fondamento dà luogo alla questione giuridica " *an* sit actio „; il debito dà luogo alla questione " quid veniat in iudicium „.

formula (e nelle parti accessorie che la integrano, come la demonstratio, o ad essa si riferiscono, come la clausola restitutoria, l'exceptio): forma l'oggetto di essa intentio. Il debito processuale si esprime nella *condemnatio* della formula, forma l'oggetto di essa condemnatio: oggetto che il giudice ha da determinare mediante la litis aestimatio. La intentio in ius concepta esprime il vario contenuto della responsabilità giuridica *materiale*: responsabilità *astratta* rispetto alla finalità del processo, in quanto essa non può, nel processo classico, venir realizzata come tale. La condemnatio della formula esprime il contenuto, sempre pecuniario, della responsabilità *processuale*: responsabilità *concreta* in quanto essa, ed essa soltanto, è quella che l'attore può realizzare mediante esecuzione forzata (3).

La intentio è destinata a esprimere il vero e proprio *petitum* dell'attore (1), il suo desiderium (Gai. I. 4, 41), l'id quod actor *persequitur* (2), il suo diritto o l'affermazione giuridica ch'egli sostiene: quello insomma che in principio abbiamo chiamato l'*oggetto dell'azione*. È la intentio infatti, che *individua* l'azione: è essa a cui propriamente si applica così il criterio della pluris *petitio* agli effetti del causa cadere (Gai. I. 4, 53-59) come il criterio della *identificazione* delle azioni agli effetti della concorrenza di consunzione. La res in iudicium deducta è propriamente il diritto o il fatto affermato nella intentio e in particolare l'*oggetto* di esso diritto o fatto (3): la designazione di tale oggetto nella intentio delle azioni di stretto giudizio (per es., della condictio) deve essere precisa: non è lecito all'attore — pena il causa cadere — *variare* comunque esso oggetto, so-

(1) Restringendo la considerazione al campo delle obbligazioni munite di formulae in ius conceptae si può dire che ciò ch'è in intentione è *in obligatione*, ciò ch'è in condemnatione è *in solutione*.

(2) Cfr. Cels. D. 44, 7, 51 actio = ius iudicio *persequendi* quod sibi debetur (quod suum est). Alla intentio si riferisce la distinzione classica delle actiones tra a. quibus rem persequimur e a. quibus poenam persequimur: onde la frequente affermazione de' giuristi " haec actio *rei persecutionem* continet ,, destinata a dimostrare la trasmissibilità dell'azione.

(3) A tale oggetto per l'appunto si ha riguardo nella pluris petitio re: v. in particolare Gai. J. 4, 60. Quanto alla exceptio rei in iudicium deductae (iudicatae) v. Paul. 44, 2, 12 inspiciendum est an *idem corpus* sit (cfr. Betti, *Antitesi tra iudicare e damnare*, p. 29 in nota, p. 116 in nota).

stituendo, p. es., alla cosa stessa il suo equivalente pecuniario. L'indicazione dell'equivalente pecuniario è *riservata* alla parte della formula detta condemnatio. La condemnatio è destinata a esprimere la *proposta concreta* che l'attore fonda sulla verità della sua intentio: che cioè il convenuto venga condannato a una prestazione di risarcimento. Tale prestazione può dirsi il *contenuto* reale dell'azione, l'id quod actor *consequitur*: ad essa si riferisce il criterio della così detta concorrenza di solutio.

Sotto ben altro aspetto ci si presenta il *libello* del processo civile giustinianeo. La netta distinzione tra intentio e condemnatio, tra il fondamento della responsabilità materiale astratta e il debito processuale concreto qui è scomparsa. Nel libello l'attore, indicati per sommi capi i *fatti* costitutivi della sua pretesa, domanda senz'altro che il convenuto venga condannato alla prestazione stessa a cui è tenuto in virtù della legge materiale, ovvero a una prestazione pecuniaria surrogatoria — secondo che la prestazione pretesa consista in un dare (rendere, sgombrare) ancora possibile, ovvero in un fare. Soltanto in via d'eccezione, quando gli consti che la dazione della cosa stessa è divenuta impossibile ovvero difficilmente ottenibile, l'attore può domandare in giudizio la condanna a una prestazione pecuniaria (1).

Da codesta configurazione della domanda giudiziale e della sentenza di condanna è lecito anzitutto trarre la conclusione seguente, che è d'una importanza decisiva per la spiegazione della innovazione da noi notata in principio. Abbiam veduto che nel sistema del processo formolare l'attore non poteva *mai* raggiungere — strappandolo al convenuto mediante esecuzione forzata speciale — quel bene della vita ch'era l'oggetto primitivo del suo diritto, bensì doveva *sempre* contentarsi di conseguire l'equivalente pecuniario di esso (a prescindere dall'aggravante del ius iurandum in litem), anche se esso si trovava nelle mani del convenuto o a sua disposizione. Ora, stando così le cose, doveva essere del tutto indifferente pei giuristi classici agli effetti della condanna — una volta riconosciuti esistenti tutti i presupposti della responsabilità del convenuto — la circostanza che al momento della sentenza la prestazione dell'oggetto del diritto fosse

(1) Cfr. l'Ordinamento germanico del processo civ., § 268 n° 3.

divenuta impossibile (1): il petitum designato nella intentio ha infatti sempre carattere *astratto*, in quanto l'attore non lo può conseguire mai. Della circostanza che al momento della sentenza la prestazione della cosa stessa fosse divenuta impossibile, doveva per contro preoccuparsi il legislatore bizantino, appunto perchè nel processo vigente ai tempi suoi la condanna alla prestazione della cosa stessa era divenuta la regola. Tale prestazione, e non un suo surrogato, domanda infatti di regola l'attore nel suo libello, il quale è redatto in una forma *concreta*, pieghevole e adattantesi alle circostanze di fatto: forma che contrasta con l'astrattezza e rigidità della formula classica.

La serie delle considerazioni precedenti e la conclusione che ne abbiamo tratto ci rendono possibile di scoprire e d'intendere subito nella loro portata le alterazioni dei passi che ora segnaliamo. Anzitutto in Ulp. 781, l. 27 ad ed. 13, 1, 8 pr.:

> in re furtiva conditio *ipsorum corporum* competit: sed utrum tamdiu, quamdiu exstent, an vero et *si desierint esse in rebus humanis*? et si quidem optulit fur ⟨aestimationem eorum⟩ (2), sine dubio nulla erit condictio: si

(1) Se — una volta contestata la lite — la prestazione era divenuta impossibile senza dolo del convenuto, nelle azioni reali tale impossibilità significava il venire a mancare di un presupposto della responsabilità del convenuto medesimo, purchè non si fosse verificata dopo il termine utile per obbedire all'arbitratus de restituendo; nelle azioni obbligatorie di stretto giudizio essa non aveva per contro rilevanza alcuna. Se — sempre dopo contestata la lite — la prestazione era divenuta impossibile per dolo del convenuto, la responsabilità di costui (a prescindere dalle azioni reali per formula petitoria ov'egli rispondeva del dolo in virtù della clausula doli della stipulatio iudicatum solvi) veniva in generale aggravata colà dove si ammettesse in conseguenza il ius iurandum in litem.

(2) " Optulit „ così senza oggetto resta sospeso in aria. Offerre, quale atto del convenuto anteriore alla litis contestatio, può significare la prestazione o *a)* della cosa dovuta, ovvero *b)* della sua aestimatio. Questa seconda ipotesi è l'unica confacente al propositum, ove si suppone che la cosa sia perita. E. *offerre litis aestimationem* si dice infatti in molti passi, in particolare da Ulpiano: Afr. 9, 4, 28; Gai. 9, 4, 27, 1; 20, 6, 2; 41, 4, 1; Jul.-Ulp. 6, 2, 7, 1; Ulp. 7, 1, 17, 2; 9, 1, 1, 16; 10, 2, 16, 6; 10, 3, 7, 12; 13, 6, 5, 1; 15, 1, 11 pr.; 21, 2, 21, 3; 27, 9, 3, 2; 29, 2, 71 pr.; 40, 12, 12, 6; 47, 6, 1 pr.; Paul. 10, 2, 25, 15; 10, 2, 29. Che ne' casi contemplati nei fr. citati non si debba supporre di necessità sempre *iniziato* il processo, è ciò che abbiam

non optulit DURAT condictio ⟨rei furtivae⟩ [*aestimationis eius* (1): *corpus enim ipsum praestare non potest*].

La conclusione sta qui in flagrante contradizione con la premessa: in re furtiva condictio *ipsorum* corporum competit. La condictio ex causa furtiva *come tale* è sempre una condictio certae rei *di species*; cioè una condictio, nella intentio della quale la res furtiva deve sempre essere designata nella sua species, nella sua individualità specifica, come la cosa di cui si tratta (homo, vestis, patera, *qua de agitur*). Tale designazione individuale è necessaria anche quando la cosa di cui si tratta sia una cosa fungibile, p. es., un certo numero di moggi di frumento o di nummi (cfr. Diocl. et Max. C. 4, 8, 1 condictio nummorum furtim subtractorum, non condictio pecuniae) (2). Di qui la stretta analogia e il costante parallelismo che intercorre tra condictio rei furtivae e rei vindicatio (3). Ciò che il giurista

---

sostenuto nel I° de' nostri *Studii sulla litis aestimatio*. Il fr. 8 pr. D. 13, 1 può aggiungersi all'altro 9, 1 D. 47, 2 ivi esaminato a pag. 44–45.

(1) Un indizio esteriore della interpolazione di questo fr. — della cui chiusa altrove non avvertimmo il carattere tendenzioso (*Sul valore dogmatico della categoria contrahere*, p. 83) — è lo " eius ": chi scrisse eius dovè aver dimenticato i corpora e avere in mente un singolare come " res furtiva ", che dovè trovare e sopprimere nel testo primitivo.

(2) Di questo avviso anche PFLÜGER, *Ciceros Rede pro Roscio*, p. 15-16. Quale oggetto della condictio ex causa furtiva è designata la **ipsa** *res furtiva*, oltre che in D. 13, 1, 8 pr. e in C. 4, 8, 1, anche, p. es., ne' seguenti passi: Gai. J. 4, 4 non posse nos *rem nostram* ab alio... petere... plane odio furum... *rei recipiendae* nomine etc. § 8 *ipsius rei* et vindicatio et condictio nobis competit; Paul. Sent. 2, 31, 13 praeter *ipsius rei* persecutionem, genere vindicationis et condictionis § 14 et *ipsius rei* repetitio; Gai. 47, 2, 55 (54), 3 condictio et vindicatio ad *rei reciperationem*; Marci. 25, 2, 25 *ipsas res* maritus condicere (scil. ex c. furtiva!) potest; Ulp. 13, 1, 7, 1 condictio (petit) *rem ipsam*.

(3) La condictio ex c. furtiva è detta spettare in guisa *cumulativa* con la rei vindicatio, oltre che in Gai. J. 4, 8; D. 47, 2, 55 (54), 3; Paul. Sent. 2, 31, 13; Ulp. 13, 1, 7, 1, anche ne' passi seguenti: Pomp. 47, 2, 9, 1; Ulp. 47, 2, 14 pr.; 47, 1, 1 pr.; 47, 8, 2, 26; 11, 5, 1, 3; 25, 2, 24 (pure condictio ex causa furtiva!); Gai. 18, 1, 35, 4; 19, 2, 25, 8; Diocl. et Max. C. 3, 41, 5. Condictio (parimenti ex c. furtiva a nostro avviso, come ad avviso dello PFLÜGER, Condictio u. kein Ende, p. 38-39) e vindicatio sono poste in rapporto di reciproca *esclusione*, in quanto quella subentra a surrogar questa

classico si domanda nel caso prospettato, non è se la condictio ex causa furtiva in questo caso muti oggetto e assuma per oggetto anzi che gli ipsa corpora la loro estimatio: la condictio ex c. furtiva non può aver mai altro oggetto che i corpora. Ciò che il giurista si domanda è piuttosto se la condictio ex c. f. continui a spettare (*durare*) o non spetti più, si sia estinta (cessare). Il motivo di dubitarne sta in ciò: che al momento della litis contestatio, non esistendo più la cosa, può sembrare manchi uno de' presupposti della responsabilità del fur di fronte alla condictio, come difatti esso mancherebbe di fronte alla parallela rei vindicatio (Alex. C. 3, 41, 1 si exstat corpus nummorum). Se non che nella condictio, azione personale, soccorre la massima dei veteres " fur semper moram facere videtur ", che nel medesimo caso invoca infatti Tryph. 55[1], l. 15 disp. 13, 1, 20:

> licet fur paratus fuerit excipere condictionem et per me steterit, dum in rebus humanis res fuerat, condicere *eam, postea autem perempta est*, tamen DURARE *condictionem* veteres voluerunt, quia videtur qui primo invito domino rem contrectaverit, semper in restituenda ea, quam nec debuit auferre, moram facere.

Ulpiano pertanto si limita a distinguere due ipotesi ulteriori: se il ladro abbia o non abbia restituito al derubato la aestimatio della cosa perita: se ha restituito la aestimatio, egli è liberato dalla condictio così come se avesse restituito la cosa stessa (1); altrimenti la condictio dura immutata. Ora tale im-

là dove questa si estingue per distruzione della cosa nella sua individualità specifica, ne' seguenti passi: Ulp. 24, 1, 5, 18 (itp.?). 33, 1; Jul. 24, 1, 39; Ulp. 12, 1, 11, 2; 12, 6, 29 (itp.). Cfr. l'alternativa tra cond. e vind. in: Paul. 10, 2, 36; Ulp. 14, 6, 9, 1. Viene ammessa la vindicatio, negata la condictio in: Ulp. 12, 1, 14; Proc. 12, 6, 53; 23, 3, 67.

(1) Gai. 47, 2, 55, 3 *recepta re*... vindicationem... et condictione *tolli*. L'estinzione dell'azione consegue parimenti dal " litis aestimationem sufferre ", dal pagamento dell'equivalente pecuniario, sempre che si tratti di actiones subordinate alla *rei* persecutio. V. p. es. Jul. 25, 2, 22 in materia di actio rerum amotarum; inoltre i fr. analoghi da noi addotti nel II° degli *Studii sulla litis aestimatio*, p. 17 in nota. A proposito del fr. 1, 4 D. 2, 10 è da notare (ciò che colà tralasciammo di fare) che Ulp. non potè dire: " si unus praestiterit [poenam] ", bensì ⟨quanti ea res est⟩.

mutabilità e rigidità della condictio classica non era più consentanea alla adattabilità e pieghevolezza del libello giustinianeo: onde i compilatori si trovarono nella necessità di alterare il fr. nel modo da noi indicato. Anche altrove essi ebbero cura d'indicare l'oggetto possibile della condictio ex c. furtiva in modo alternativo — o la res. o la aestimatio —, preoccupati com'erano di distinguere l'ipotesi in cui potesse riaversi la cosa in natura, dall'ipotesi in cui ciò fosse impossibile: D. 26, 7, 55, 1:

> si ipsi tutores *rem* pupilli *furati* sunt ... nemo .. dicet unum tutorem et duplum hac actione *praestare* et *quasi specie condictionis aut ipsam rem* (scil. quamdiu exstat) *aut eius aestimationem* (si non exstat).

Passiamo ora ad altro fr.: Jul. 809, l. 80 dig. 39, 6, 19:

> si filio familias res mortis causa data fuerit et convaluisset donator, actionem *de peculio* cum patre habet (1): at si pater familias, cum mortis causa donationem accepisset, in adoptionem se dederit, *res ipsa* a donatore repetitur . nec huic (scil. patri familias) similis est is, qui rem, quam mortis causa acceperat, alii porro dederit: nam donator huic ⟨ipsi⟩, non ⟨ei cui porro eam dederit⟩ rem [sed pretium eius] condiceret.

Il giurista fa tre ipotesi di donatio mortis causa: *a*) che si doni a un filius familias; *b*) che si doni a un pater familias il quale poi si faccia adottare quale filius da un altro; *c*) che si doni ad uno il quale alieni la cosa ad un altro. Nell'ipotesi *a*) colui che ha in potestà il donatario risponde nei limiti del pe-

(1) L'actio de peculio di cui si tratta può essere, data la latitudine della espressione " res „ (cosa individuale), species, senza distinguere se mancipi o nec mancipi tanto la condictio quanto l'actio fiduciae: che res sia itp. per " servus „ (cfr. 39, 6, 37, 1) è improbabile. Che la res donata mortis causa potesse esser ripetuta con la condictio era verità indiscutibile pei Sabiniani, quindi anche per Giuliano (D. 39, 6, 35, 3). Su questo e sugli altri fr. relativi alla donatio m. c. oltre che su Paul. 12, 6, 65, 8 cfr. SENN, *Études sur le droit des obligations*, To. 1[er], I, p. 54-57 (cfr. p. 134) e p. 88-93 (cfr. p. 162-166). Il contrapposto tra condictio *de peculio* e condictio *ipsius rei* (in solidum) è illuminato dal contrapposto in D. 15, 1, 47, 2: pater *universum non* debet.

culio. Nell'ipotesi *b)* colui che ha ora in potestà il donatario non risponde in via adiettizia de peculio. trattandosi di debito contratto prima che entrasse in sua potestà, ma risponde invece direttamente e *in solido* (onde dicesi res *ipsa*). in quanto è costretto ad assumere la defensio dell'arrogato di fronte alla actio utilis quae in eum datur rescissa capitis deminutione (Gai. I. 3, 84). Nell'ipotesi *c)* colui che è succeduto al donatario nel dominio della cosa donata, non risponde affatto — a differenza del pater adoptivus — di fronte al donatore: la condictio di costui non si dirige contro l'avente causa bensì resta limitata al donatario. Il contrapposto che al giurista classico doveva premere di rilevare è il contrapposto tra i *soggetti della legittimazione passiva* di fronte all'azione, non il contrapposto tra l'uno o l'altro *oggetto* possibile dell'azione. Tale oggetto nella condictio classica permane identico anche se non è più raggiungibile presso il convenuto; e con l'oggetto permane costante anche la misura della responsabilità di lui. La esplicita esclusione della res e la sostituzione del pretium quale oggetto della condictio non potrebbero mai in diritto classico essere la conseguenza di una *circostanza estrinseca, sopravvenuta dopo* che la fattispecie della datio ob rem è già perfetta e definita in tutti i suoi elementi. La obbligazione di restituire, che si fa valere con la condictio, scaturisce infatti dalla datio ob rem: dalla configurazione della datio. e da essa sola, dipende la configurazione della condictio. L'oggetto della condictio non può essere diverso dall'*oggetto della datio*: l'oggetto della datio *determina l'oggetto della condictio.* Ciò risulta con piena evidenza dai casi in cui i giuristi classici fanno questione se l'oggetto della condictio sia la res o sia la sua aestimatio: essi in tanto si pongono tale questione in quanto dubitano se l'oggetto della datio sia stata la res o sia stata la sua aestimatio. Paul. 1755, l. 7 ad Sab. 23, 3, 17, 1:

> si, re aestimata data, nuptiae secutae non sint, videndum est *quid repeti debeat, utrum res an aestimatio*. sed id agi videtur ut ita demum aestimatio rata sit, si nuptiae sequantur quia nec alia causa contrahendi fuerit, *res* igitur repeti debeat, *non pretium*.

Nella ipotesi quivi considerata la condictio del pretium (aestimatio) non si ammette, perchè non si ammette che la datio,

rimasta imperfetta pel non verificarsi dell'evento prospettato, abbia avuto per oggetto il pretium. In altri casi per contro i giuristi classici non dubitano di designare il pretium o la aestimatio quale oggetto della condictio per la semplice ragione che il *pretium* (la aestimatio), per l'appunto è l'*id quod datum est* secondo la ipotesi proposta: così Ulp. 12, 7, 2; 12, 6, 26, 6; 24, 1, 7, 7; Paul. 18, 4, 7; 18, 1, 52; e in particolare, in materia di dote, Paul. 24, 3, 49, 1 (si aestimationem dotis repetat). Ma secondo l'ipotesi proposta nel fr. 19 D. 39, 6 l'id quod datum est è la res e non il pretium: l'oggetto della condictio non può essere dunque che la res (cfr. Jul. 39, 6, 13 pr. *eam* condicere). Per salvare la genuinità sostanziale della chiusa, si potrebbe bensì pensare che il giurista classico intendesse riferirsi non alla *intentio* della condictio, sì alla *condemnatio* (1): si potrebbe pensare ch'egli avesse scritto, anzi che " huic . . . pretium condiceret ", ⟨in hac causa . . . pretium condictione consequetur⟩. L'osservazione allora sarebbe analoga a quella di Jul. 13, 1, 14, 2 (bove subrepto et occiso . . si dominus *condictione* bovis *pretium consecutus* fuerit etc.), o di Jul. Paul. 13, 1, 3 (si mortuum hominem condicat, *consecuturum* ait *pretium* hereditatis: conforme Ulp. 47, 2, 52, 28), o di Jul. 36, 1, 26 (25), 2 (heredes filii *pretium* eius servi sorori defuncti *praestare* debent), o anche di Ulp.-Sab. 43, 16, 1, 35 (aedium incensarum *pretium restituere* cogatur, nell'a. ex interdicto unde vi) o di Diocl.-Max. C. 7, 53, 7 (servis rebus humanis exemtis, a frustratore *aestimatio* eorum restituenda est: cognitio extra ordinem). Se non che — anche dato (e non concesso) che nel nostro fr. 19 il significato del termine " pretium " fosse quello di " (litis) aestimatio " (come si potrebbe arguire per analogia dal fr. 8 pr. D. 13, 1) ossia di " quanti res est " (cfr. D. 12, 3, 9 pretio, *id est* quanti res est, litem aestimari) — resta sempre il fatto che l'osservazione finale del fr. 19 non è un'osservazione casuale, superflua e innocua, ma anzi spiccatamente *tendenziosa*. Basta infatti confrontarla con le osservazioni analoghe da noi segna-

(1) È questa la spiegazione che già proponemmo per una serie di casi analoghi (*Sul valore dogm. della cat. contrahere*, p. 78-81; *Atti*, vol. 50, p. 709[3]): ma essa non tien conto della tendenziosità dell'avvertenza.

late in D. 42, 2, 3 e in D. 13, 1, 8 pr. e con Jul.-Ulp. 2036, l. 15 ad l. Jul. et Pap. 39, 6, 37, 1:

> Julianus ait: si quis servum mortis causa sibi donatum *vendiderit* [et hoc vivo donatore fecerit], [*pretii*] ⟨contra eum⟩ condictionem donator habe[bi]⟨re⟩t, si convaluisset. [*et hoc* donator *elegerit*. *alioquin et ipsum servum* restituere compellitur].

L'alterazione bizantina in questo fr. è anche meglio evidente. Qui non può esser dubbio che il pretium oggetto della condictio sia pei compilatori il *prezzo effettivamente ricavato* dalla vendita della cosa donata. Ma tale prezzo può essere così superiore come *inferiore* al valore obiettivo della cosa, al quanti res est: la *misura* della responsabilità del donatario che in mala fede alienò la cosa donata, dipenderebbe pertanto da una circostanza estrinseca e casuale: essa potrebbe eventualmente ridursi a una somma assai tenue. Per ovviare a tale illogicità il legislatore bizantino concede al donatore un *diritto di electio* tra la domanda del prezzo e la domanda della cosa stessa (servo). Quand'egli preferisca riavere il servo, il legislatore costringe il donatario a riacquistarlo dal terzo acquirente, e ne procaccia, manu militari, la restituzione al donatore (1). La già nota interpolazione di tutta la chiusa del fr. 37, 1 viene così illustrata e confermata dalla creazione bizantina della condictio pretii: la facoltà di electio tra il pretium e la ipsa res che è un servo, ossia una species, è affatto inconciliabile con la rigida formola della clas-

(1) Una facoltà di electio *analoga* è stata introdotta dal legislatore bizantino anche a favore del petitor nella hereditatis petitio intentata contro il *malae fidei possessor* che alienò le cose appartenenti all'eredità: D. 5, 3, 20, 12 ceterum *si quis sciens* ad se hereditatem non pertinere distraxit, sine dubio *non pretia rerum, sed ipsae res* veniunt in petitionem hereditatis... [nisi forte ad eas res referemus, quas distrahi expedierat...: ut sit *in arbitrio petitoris, qualem* computationem faciat adversus malae fidei possessorem, *utrum ipsius rei et fructuum an pretii et usurarum* post motam controversiam]. Cfr. D. 5, 3, 22 [in praedone dicimus *electionem* esse debere *actoris*... tale desiderium] e D. 5, 3, 20, 21 *ipsas res*.. [*aut*, si recipere eas ab emptore nullo modo possit, *tantum quantum in litem esset iuratum*].

sica condictio certae rei di species (1). Quale condictio aestimationis troviamo itp. la condictio pretii in Paul. 1238, l. 17 ad Plaut. 39, 6, 39:

> si is cui mortis causa servus donatus est, eum manumisit, *tenetur* condictione [in pretium servi], *quoniam scit posse sibi condici*, si convaluerit donator.

Col quale fr. è da mettere a raffronto Paul. 1234[8], l. 17 ad Plaut. 12, 6, 65, 8:

> si servum indebitum tibi dedi eumque manumisisti, *si sciens* hoc fecisti *teneberis* [ad pretium eius] ⟨condictione⟩, *si nesciens, non teneberis*; sed propter operas eius liberti et ut hereditatem eius restituas ⟨in factum actio adversus te dari debebit⟩.

L'accipiente è responsabile con la condictio, di fronte al dante, per aver causato il perimento della cosa ricevuta o per averla comunque sottratta al proprio potere di disposizione: la manumissio è un atto irrevocabile, equivalente alla distruzione (Ulp. 47, 2, 46 pr.). Se non che tale atto non è fonte di responsabilità se non quando sia *colposo*: e perchè vi sia colpa occorre da parte dell'accipiente la *conoscenza del* rapporto di *obbligazione* che lo vincola al dante. Ora il donatario mortis causa possiede sempre tale conoscenza ed è come tale un " malae fidei debitor „ perchè sa sin da principio ch'egli eventualmente dovrà restituire. Chi per contro riceve il pagamento d'un indebito, deve ignorare, nel momento in cui lo riceve, che si tratti di indebito ed è come tale un " bonae fidei debitor „: altrimenti, se non lo ignora, è un ladro ed è tenuto con la condictio ex c. furtiva. Ma in lui può in prosieguo sopravvenire la conoscenza dell'indebito: e solo quando questa sopravvenga egli è responsabile per l'atto di alienazione compiuto: altrimenti no. Di qui la differenza, quanto all'estremo della responsabilità, tra

(1) Ciò è da osservare contro il PERNICE, il quale (in *Sav. Zeitschr.*, 13, 251-52) ammise potersi attribuire a Giuliano l'innovazione del diritto di electio. Di fronte a D. 39, 6, 35, 3 non ci sembra d'altra parte poter seguire il SENN nel supporre la condictio itp. in luogo dell'actio fiduciae.

condictio ob causam dati e condictio indebiti: nella prima la scienza dell'accipiente si presuppone sempre, nella seconda per contro si richiede quale *momento* particolare della fattispecie (1). Se in questa manca il momento della scienza, " cessat condictio „, sempre che si tratti di una condictio certae rei di species: in diritto classico non poteva ovviarsi agli inconvenienti pratici derivanti dalla carenza dell'azione civile in altro modo che con un'actio in factum diretta a colpire l'arricchimento (2). In diritto giustinianeo per contro anche in questo caso il legislatore, con insigne incoerenza logica, torna a dare la condictio: così come altrove (D. 16, 3, 1, 47) lo stesso legislatore bizantino in un caso in cui manca l'estremo dell'actio depositi (il dolo), torna a dare ciò non ostante l'actio depositi de pretio, in luogo della classica actio in factum (3).

Le regole della responsabilità or ora esposte si riferiscono esclusivamente alla condictio certae rei di species, ossia di cosa corporale singola, *determinabile* nella sua species, *nella sua individualità specifica*, come quella cosa di cui si tratta (qua de agitur). Quelle regole vengono infatti enunciate dai giuristi sempre a proposito di cose siffatte, in particolare a proposito di servi, non mai a proposito di *cose fungibili* (genera), di res quae pondere, numero, mensura constant, di cose insomma *determinabili* soltanto *nel loro genere*. Colui che abbia ricevuto cose siffatte e ne abbia causato il perimento, è per diritto classico responsabile in qualunque caso di fronte al dante con la condictio certae rei di genus così detta triticaria (ovvero con la condictio certae pecuniae se il " genus „ che ha ricevuto era del danaro). Questo

(1) Cfr. Pernice, *Labeo*, II², 2, 118.

(2) La questione se la manumissio arricchisca è risolta negativamente da: Marc. 40, 13, 2; 35, 2, 56, 3; Ulp. 50, 17, 126, 1; Jav. 15, 3, 2.

(3) V. Betti, in *Rendiconti dell'Istituto Lombardo*, vol. 49, p. 245-6. Per la medesima ragione non potrebbe (per diritto classico) riferirsi a una condictio, bensì soltanto a un'*actio in factum* diretta a colpire l'arricchimento l'ipotesi prospettata da Ulp. 12, 6, 26, 12

> hominem indebitum dedi et hunc, *sine fraude*, modico distraxisti: nempe *hoc solum* refundere debes, *quod ex pretio habes*.

Se non che l'ipotesi è itp. perchè estranea al contesto.

doveva essere il significato originario della osservazione di Paul. 1234[6], l. 17 ad Plaut. 12, 6, 65, 6:

> in *frumento* indebito soluto et bonitas ⟨aestimanda⟩ est. et *si consumpsit* frumentum, [pretium repetet] ⟨DURAT eius repetitio⟩.

La restituzione proposta ha una solida base in D. 13, 1,8 pr. (*durat* condictio): anche qui come colà i compilatori si preoccupano, per le ragioni a noi note, di accentuare il *mutamento* che si opera nell'oggetto della domanda giudiziale, là dove al giurista classico non importava accentuare se non la *persistenza* dell'azione. Nel sistema dell'esecuzione forzata giustinianea non è possibile all'attore recuperare la cosa stessa data indebitamente — *anche* quando questa sia cosa *fungibile* — se non sino a tanto che la cosa data, *nella sua individualità* singolare, non sia perita. Se la cosa data, anche fungibile, è perita nella sua individualità, *non* è più *possibile* agli organi dell'esecuzione toglierla al convenuto e rimetterla all'attore: questi *deve* di necessità accontentarsi che l'accipiente gli restituisca il suo prezzo di mercato (1). Simili preoccupazioni non poteva avere il giurista classico. La responsabilità materiale dell'accipiente, designata nella intentio della condictio, non può per diritto classico mutare di oggetto, bensì solo o *permanere* o *estinguersi*. Se essa permanga o si estingua può apparir dubbio per l'appunto nella ipotesi proposta: infatti la consumptio del frumentum indebitum solutum è bensì un atto imputabile, ma non è, di per sè, un atto *colposo*. Per essere tale occorrerebbe che esso fosse

(1) È questa in sostanza la interpretazione di D. 12, 6, 65, 6 sostenuta dal MANDRY in *Archiv für die civilistische Praxis*, 48, 221 sgg. (e accolta dal MAYR, *Die Condictio des römischen Privatrechts*). Essa coglie però nel segno di fronte al fr. così com'esso è redatto nella compilazione (perchè non è vero che l'osservazione " pretium repetet " sia così innocua [harmlos] come parve al PERNICE, *Labeo*, II, 2[2], 106 e già a noi, *Contrahere*, p. 80). Ma il fr. è per l'appunto alterato tendenziosamente dai compilatori (ciò di cui non si è accorto il MANDRY e neanche il PERNICE): onde la tesi del MANDRY è bensì rispondente al diritto giustinianeo e comune; ma non al diritto romano classico. Da notare quale indizio formale di itpz. è il brusco cambiamento di soggetto. Per cose fungibili cfr. l'Ordinamento germanico, § 884.

stato compiuto in mala fede, nella perfetta conoscenza del rapporto di obbligazione che vincola l'accipiente al dante: circostanza, questa, di cui il giurista non fa menzione e di cui non avrebbe mancato di far menzione — come la fa poco dopo al § 8, a proposito di una species (homo) — se essa fosse stata anche qui indispensabile. Pertanto nel debito di fungibili — a differenza che nel debito di una species — la colpevolezza del debitore nel perimento della cosa dovuta non ha alcuna rilevanza giuridica (non altrimenti che nella obligatio ex stipulatu di genus): condictio *durat* (1).

La ragione di tale differenza tra *a)* il debito di species e *b)* il debito di genus nella condictio è assai semplice e ovvia, ed è la seguente. L'oggetto dell'azione, espresso nella intentio della formula — *ciò per la cui restituzione risponde* l'accipiente — nell'una ipotesi *a)* è quella cosa *stessa* che è stata data e ricevuta, nella sua individualità specifica (qua de agitur); nell'altra ipotesi *b) non* è quell'esemplare *stesso* che è stato dato e ricevuto, nella sua individualità singolare (poichè le singole res quae pondere numero mensura constant non hanno una individualità economicamente rilevante) (2), bensì la medesima quantità della medesima qualità: tantundem ex eodem genere. Ne viene di conseguenza che nella ipotesi *a)* il debitore è liberato ogni qualvolta la cosa stessa, che egli deve in specie, sia perita o sottratta alla sua disposizione senza colpa (mala fede) da parte sua; nella ipotesi *b)* per contro la obbligazione dura anche se la cosa singola che il debitore ha ricevuta è perita senza sua colpa (mala fede): perchè *ciò che* egli deve non è *questa* cosa singola, bensì la cosa *in genere*, e genus non perire censetur. Questo è il si-

(1) Cfr. anche ERXLEBEN, *Condictio indebiti* (trad. it.), p. 301, n. 46-47, p. 308, n. 54-55; in particolare PERNICE, *Labeo*, II², 2, 120-121.

(2) Sarebbe assurdo — appunto per la ragione accennata — che l'attore con la condictio classica dovesse ripetere *quegli stessi individui* del genere, che furono da lui indebitamente prestati: p. es. " modios C tritici Africi optimi, *quibus de agitur* " (!). Tale assurdo (che bisognerebbe ammettere se si dovesse accettare per dir. classico la tesi del MANDRY) non era possibile nel processo classico (v. anche PERNICE, *Labeo*, II², 2, 104), eccetto nel caso che si ripetesse cosa rubata: nel qual caso non era più un assurdo perchè la condictio rei furtivae è un surrogato eventuale della rei vindicatio.

gnificato classico della distinzione fatta da Pomp. 12, 6, 7, da Paul. 49, 14, 21 e in particolare da Marci. l. 3 reg. 19, 5, 25:

> quod indebitum datur *aut ipsum* repeti debet *aut tantumdem ex eodem genere.*

L'oggetto della repetitio classica è l'*ipsum* nella condictio certae rei di species; è il *tantumdem* nella condictio certae rei genus e nella condictio certae pecuniae. È evidente che il " tantumdem „ è un concetto ben diverso dalla " aestimatio „ (pretium); i due concetti non coincidono formalmente se non in un solo caso: nel caso che il " genus „ che è oggetto della repetitio sia del danaro. Ciò che l'attore richiede (repetit) nella intentio è puramente la quantità medesima *del genus dato*, non la aestimatio in danaro: la aestimatio non può mai venire in considerazione che nella condemnatio della formula. Per questa ragione Gai. I. 4, 33 può contrapporre alla formula ficticia del publicanus (nella intentio della quale si opera mediante fictio una trasformazione in danaro dell'oggetto originario della pretesa) la formula della condictio e osservare:

> nulla autem formula ad condictionis fictionem exprimitur: sive enim pecuniam *sive rem aliquam certam* debitam nobis petamus *eam ipsam* dari nobis oportere intendimus.

Il che significa che con la condictio si ripete la *cosa* medesima, sia in specie sia in genere secondo che si tratti di cosa determinabile nella sua individualità ovvero soltanto nelle sue qualità generiche (1). La interpretazione del significato del termine *tantumdem* (ne' fr. dianzi cit. di Pomp. Paul. e Marci.) come = aestimatio è inconciliabile con l'addotta affermazione di Gaio. Essa ha potuto sorgere soltanto nel sistema del pro-

(1) Perciò in Pomp. 12, 6, 19, 2 la repetitio della summa — ossia di totidem nummi, non degli stessi nummi *individui* — è affatto normale: essa non deve considerarsi (come vorrebbe il MANDRY) quale un'anormalità derivante da un'avvenuta commixtio: di commixtio non si fa menzione alcuna nel fr. In Paul. 12, 6, 15, 1 si ripetono bensì gli stessi nummi *individui* (arg. ut vel possessio reddatur), ma appunto perchè si tratta di condictio rei furtivae (nummi alieni ricevuti nella scienza dell'alienità), non di condictio certae pecuniae. Cfr. Ulp. 47, 2, 43 pr.

cesso giustinianeo nel quale l'attore può riavere la stessa cosa singola che ha dato ovvero la sua aestimatio secondo che quella sia o non sia reperibile presso il debitore o l'avente causa da lui: repetitur ipsum quamdiu exstat, aut tantumdem (aestimatio) si non exstat (1).

L'esplicita affermazione di Gaio dimostra che non possono riferirsi al petitum astratto indicato nella intentio della condictio ma solo alla litis aestimatio — al debito processuale concreto che è oggetto della condemnatio — alcune determinazioni, che i giuristi fanno, di ciò che l'attore può conseguire. Tali, ad esempio: " non quidem quanti (habitatio) locari potuit, sed quanti tu (reus) conducturus fuisses " (Paul. 12, 6, 65, 7); " quanti operas essem (ego actor) conducturus " (Cels.-Ulp. 12, 6, 26, 12). I giuristi classici non possono aver ammesso che l'oggetto della repetitio fosse diverso dall'oggetto della datio, quando si trattasse di habitatio o di operae, da loro considerate come res, certae quanto al loro genus (2). Onde le affermazioni di Paul. 12, 6, 65, 7 e Cels.-Ulp. 12, 6, 26, 12 vanno emendate sul modello di Gai. I. 4, 33:

> habitatione *data* [*pecuniam*] ⟨ipsam⟩ condicam — interdum licet aliud praest⟨iteri⟩mus . . *aliud* [condicimus] ⟨condictione consequimur⟩.

Sullo stesso modello va parimenti emendata l'affermazione di Marci. 241 D. 19, 5, 25:

> si per errorem operae indebitae datae sunt *ipsae* repeti [*non possunt*] ⟨debent⟩ (3).

---

(1) Cfr. sopra D. 26, 7, 55, 1. Anche la Glossa a D. 19, 5, 25 " ipsum " interpreta " tantumdem " come = " aestimatio " — conforme alla concezione giustinianea — e lo identifica con l'oggetto della condemnatio. In questo errore cadono il Mayr (*Die Condictio d. r. P. R.*) e per una incoerenza anche il Pernice (*Labeo*, II[2], 2. 103[2] e 105).

(2) Per le operae ciò è stato dimostrato dal Thélohan, in *Études juridiques dediées à Girard*, I, p. 369-377, alla esposizione del quale ci limitiamo a rimandare il lettore. De' passi esaminati dal Th. basti citare Jul. 361 D. 45, 1, 54, 1.

(3) Ciò sostenemmo già (*Sul valore dogm. della cat. contrahere*), I, p. 80-81.

La quale affermazione d'impossibilità è inspirata da quella stessa preoccupazione da cui vedemmo inspirata l'osservazione itp. in D. 13, 1, 8 pr. corpus enim ipsum *praestari* non potest. Così la res furtiva perita, come le operae, come la habitatio sono tutti beni della vita che nel processo civile giustinianeo non possono — per eccezione — essere riprocacciati all'attore in via di esecuzione forzata mediante mezzi di surrogazione. Nel processo classico per contro tutte quelle cose venivano ripetute tali quali nella intentio della formula: che l'attore si dovesse in pratica accontentare della aestimatio era regola generale. Non deve quindi prendersi alla lettera neanche l'affermazione di Arist. 58 Pomp. 432 D. 38, 1, 4:

perinde .. operae a libertis *ac pecunia credita* petitur.

Essa non è tendenziosa bensì affatto innocua (1). Il giurista vuol dire che nella intentio della condictio le operae non vengono designate nella loro individualità specifica come *quelle* stesse operae individue *che* furono a torto prestate o promesse con giuramento (quibus de agitur), bensì soltanto designate nel loro genere proprio, come la pecunia nella condictio certae pecuniae e come gli altri genera nella condictio certae rei di genus (cond. triticaria). Sotto questo aspetto la condictio certae pecuniae può dirsi a sua volta una condictio di genus nel più ampio significato del termine (2). Resta ad esaminare ancora

(1) L'affermazione potrebbe avere un significato pratico di dir. materiale, come quella di Jul. 361 D. 45, 1, 54, 1 *solutio* eius obligationis (scil. operarum) expeditissima est, si *aestimationem operae* malit libertus *offerre*.

(2) Per maggiori svolgimenti v. lo studio citato, nota 2 a p. 78. Anche se si vuol interpretare D. 38, 1, 4 nel senso che la formula della petitio operarum avesse una *condemnatio* certae pecuniae sulla base di una aestimatio delle operae fatta dal pretore in iure (così propriamente Biondi, *Judicium operarum*) — non potrebbe però mai ammettersi che essa avesse una *intentio* diretta a certa pecunia (e d'altra parte il termine " petitur " si riferisce alla intentio). A questa ulteriore ipotesi osterebbe la gravissima pregiudiziale del carattere giustinianeo della condictio aestimationis. — La stretta affinità tra la condictio certae rei di genus e la cond. certae pecuniae quanto alla misura della responsabilità del debitore fu già veduta dal Pernice (*Labeo*, II², 2, 104-5). In entrambe è esclusa la eventualità così dell'aumento di responsabilità — che ha luogo nella cond.° di species non

un fr. in cui si nomina la condictio pretii; ma in esso a differenza dei precedenti ciò ch'è itp. non è il pretium bensì la condictio: Afr. 6, l. 2 quaest. 12, 1, 23:

> si eum servum qui tibi legatus sit, quasi mihi legatum possederim et vendiderim, *mortuo eo* posse te [mihi] *pretium* [condicere] ⟨in factum actione consequi⟩ Julianus ait, quasi ex re tua locupletior factus sim.

La distruzione della cosa (mortuo eo) — ossia la *estinzione della rei vindicatio* — è condizione indispensabile dell'azione succedanea. Nel caso proposto la condictio non può essere una condictio ex c. furtiva, perchè il possesso della cosa legata per vindicationem fu acquistato *bona fide*, nella erronea credenza che il legato fosse stato fatto a proprio favore (arg. da *quasi* mihi legatum). Nè può essere una condictio dati (ind. soluti), perchè il possesso non fu acquistato mediante un atto di trasmissione (datio) del vero legatario (proprietario) bensì per atto unilaterale di apprensione (occupatio): e Giuliano (D. 12, 6, 33) non ammette condictio se non sia preceduta da una datio. La condictio pretii mentovata non può dunque essere che una condictio *ex iniusta causa* di creazione bizantina: in diritto classico in simili casi, là dove il sistema rigido e circoscritto della condictio lasciava una lacuna, il pretore provvedeva a *colmare la lacuna* contraria all'equità e a colpire l'arricchimento mediante *actiones in factum* dirette al *ricupero del pretium*. Orbene la tendenza del legislatore bizantino è quella di sostituire a tali actiones in factum delle azioni *civili*, ora la condictio, ora l'actio negotiorum gestorum *de pretio* (1).

altrimenti che nella rei vindicatio — (pei fructus e le accessiones della cosa data) come della estinzione di debito (per perimento non colposo). Nel testo genuino di Ulp. 13, 3, 1 pr. il giurista doveva per l'appunto affermare l'analogia e il parallelismo che intercorre tra cond.° di genus e cond.° di pecunia.

(1) L'actio negotiorum gestorum de pretio, quale azione d'arricchimento, è itp. non in luogo della condictio (della quale mancano gli estremi), bensì in luogo di un'*actio in factum* classica ne' seguenti due passi che adduciamo a mo' d'esempio, emendati senza ulteriori comenti, soltanto per dare una riprova della affermazione fatta nel testo. Afr. 3, 5, 48 (49) si rem quam servus venditus subripuisset a me venditore, emptor ⟨quasi suam⟩ (in

Dunque l'esame de' singoli passi conferma pienamente e illustra in una serie di casi le considerazioni da noi premesse. Ci sembra così di aver dimostrato la giustezza della tesi sostenuta in principio e determinato il valore della innovazione bizantina.

buona fede come in D. 12, 1, 23) vendiderit eaque in rerum natura esse desierit (con che si estingue anche qui la rei vindicatio), **de pretio** ⟨videndum *an*⟩ *negotiorum gestorum actio danda sit* ⟨et ait Julianus neg. gest. actionem *dandam non esse, sed in factum dari debere*⟩, ut dari deberet, si negotium, quod tuum esse existimares, cum esset meum, gessisses (arg. da D. 10, 3, 14, 1, fr. d'importanza capitale): sicut ex contrario in me tibi daretur, si, cum hereditatem, quae ad me pertinet tuam putares, res tuas proprias legatas solvisses, quando quidem ea solutione liberarer. (Parimenti a un'actio in factum dovè riferirsi in un caso analogo a questo secondo Ulp. 3, 5, 44, 2.) — Alex. C. 3, 32, 3 mater tua vel maritus fundum tuum invita vel ignorante te vendere iure non potuit, sed rem tuam a possessore vindicare, etiam non oblato pretio, poteris, sin autem postea [de ea venditione consensisti, vel alio modo] proprietatem eius amisisti (l'estinzione della rei vindicatio è sempre il presupposto indispensabile), adversus emtorem quidem nullam habes actionem, adversus venditorem vero **de pretio** [negotiorum gestorum] ⟨in factum⟩ actionem exercere non prohiberis. — Altrove l'actio negotiorum gestorum è forse itp. in luogo di un'actio in factum, quale organo destinato alla ripetizione di *impensae*: Pap. 5, 3, 50, 1 ... eum cui aufertur hereditas (bonae f. possessor) impensas ratione doli exceptione aut retenturum aut ⟨in factum⟩ actione [negotiorum gestorum] repetiturum [veluti... voluntatis]. In Lab.-Ulp. 3, 5, 5, 5 (3), trattandosi di tale qui depraedandi causa ad negotia aliena accessit, l'azione del " gerito " non può essere l'a.° neg. gest., bensì la condictio ex causa furtiva (cfr. Pap. 12, 6, 55), e la presunta a.° neg. gest. del praedo non può essere neanche itp. in luogo di alcun'actio in factum classica, poichè in dir. classico egli non aveva azione: Gord. 3, 32, 5 malae fidei possessores eius, quod in rem alienam impendunt, non eorum negotium gerentes, quorum res est, *nullam* habent *repetitionem* [nisi necessarios sumptus fecerint: itp.].

La composizione delle "Dirae" pseudovergiliane.

Nota di AUGUSTO ROSTAGNI.

I.

Da quando, sul fiorire del nostro Rinascimento, le *Dirae* cominciarono a non essere più considerate opera vergiliana, la controversia circa l'autore, l'indole, la composizione del tipico carme non è più cessata e non ha condotto — si può dire — ad alcun risultato sicuro (1). Un punto solo, se mai, è da ritenere assodato, per merito dello Jacobs, e rappresenta la base di ogni ulteriore ricerca: che nel complesso di versi cui la tradizione attribuiva il titolo di *Dirae* e dava sembianza di un unico organismo poetico sieno da distinguere due componimenti: un primo, le *Dirae* propriamente dette, che formeranno ora oggetto particolare del nostro discorso; un secondo, più breve, cui i moderni editori hanno posto, non senza ragione, il nome di *Lydia*. Infatti, sebbene fra le due sezioni non ci sieno punto — come io credo e come mostrerò — quei contrasti di contenuto e di forma che la maggior parte dei filologi, quasi non si possa altrimenti garentire la legittimità di detta separazione, vi sogliono vedere, anzi presuppongano entrambe un comune fondo di motivi e di circostanze, è però chiaro che non si lasciano inten-

(1) Non credo di dover accennare per ora, se non qui in nota, al tentativo che negli ultimi tempi fece, con pochissimo seguito, F. Vollmer "Sitzungsber. d. Akad. zu München" 1907 pp. 335-74, di rivendicare ancora a Vergilio la paternità del componimento. Peraltro la tesi che siamo per propugnare verrà ad escludere questa possibilità. Ne parleremo dunque a suo luogo.

dere bene, sotto qualsiasi rispetto si studiino, se non separate l'una dall'altra, come carmi distinti.

Ma diciamo oramai quali siano i capi principali della discussione, e comprenderemo poi con quale fondamento si possano risolvere. — È noto che lo Scaligero, osservando nelle *Dirae* essere descritti due fatti, la perdita del campicello paterno in seguito a disordini politici e l'amore per una donna di nome Lidia, fatti che rispondono suppergiù alla vita di Valerio Catone, attribuì a Valerio Catone la paternità del componimento. Questa tesi dello Scaligero trovò, anche in tempi recenti, così validi sostenitori (ricordo Ribbeck, Ellis, Schanz (1)), come pure accaniti oppositori (Rothstein, Reitzenstein, Sciava (2)). Invero, se da un lato la corrispondenza dei due fatti accennati è per sè stessa talmente sintomatica da non sembrare casuale, d'altro lato una più minuta disamina nei particolari fa scorgere sùbito qualche notevole differenza. Di Valerio Catone è detto che perdette il patrimonio quand'era pupillo, *licentia Sullani temporis*, e che questa perdita rimpianse egli stesso in un'opera — non si sa se prosastica o poetica — intitolata *Indignatio* (3). Ora, nelle *Dirae* si parla di una distribuzione di terre ai veterani della quale sarebbe stato vittima l'autore: tutto il carme, anzi, si aggira sul concetto della discordia civile e dell'ingiusto prov-

(1) Ribbeck *Gesch. d. röm. Dichtung* I² pp. 310 sgg.; Ellis " Amer. Journ. of Philol. „ XI (1890) pp. 1 sgg.; Schanz *Gesch. d. röm. Lit.* I 2³ p. 60-3. — Inutile sarebbe al nostro scopo dare una bibliografia compiuta, che già si trova in molti repertorii. Ricorderemo per la mole del lavoro: Eskuche *De Valerio Catone deque Diris et Lydia carminibus* Diss. 1889.

(2) Rothstein *De Diris et Lydia carminibus* " Hermes „ XXIII (1888), pp. 508-24; Reitzenstein *Ein litterarischer Angriff auf Octavian* in " Festschrift f. Th. Mommsen „ pp. 32 sgg.; Sciava *Le Imprecazioni e la Lidia* (Pesaro 1898). Che l'autore non sia Valerio Catone, ritiene pure, dopo ampia discussione, G. Curcio *Poeti latini minori*, vol. II, 2 pp. 42 sgg.

(3) Suet. *De gramm.* 11: *Valerius Cato, ut nonnulli tradiderunt, Burseni cuiusdam libertus, ex Gallia. Ipse libello, cui est titulus* Indignatio, *ingenuum se natum ait et pupillum relictum, eoque facilius licentia Sullani temporis exutum patrimonio.* — Alquanto fantastiche sono le deduzioni del Naeke *Carmina Val. Cat.* (Bonnae 1847) pp. 259 sgg., seguite, tra gli altri, dal Rothstein l. c. pp. 510-1, circa un processo, una causa civile che sarebbe stata intentata al poeta per spogliarlo del suo avere.

vedimento pel quale i soldati spodestano gli antichi proprietarii. Non è improbabile che a tempo di Silla ci sia stata una spartizione di tal fatta fra i veterani, poichè — si sa bene — le proscrizioni famose degli anni 82-79 av. Cr. portarono ad un rivolgimento generale della proprietà, e in varie regioni d'Italia i beni degli invisi furono distribuiti ai partigiani del Dittatore (1). Però nel nostro carme il provvedimento è descritto in modo così somigliante a quello di cui parla Vergilio nelle sue *Ecloghe*, che è inevitabile sentirvi l'eco della distribuzione di terre fatta da Ottaviano nel 41 alle sue milizie (2).

La stonatura che abbiamo ora notato nella sostanza dei fatti si ripercuote poi anche nella forma e nell'indole generale del carme. Imperocchè, non solo la perdita del campo e l'amore di Lidia fanno pensare a Valerio Catone, ma vi fanno pure pensare certi vezzi di stile, certe particolarità di lingua e di metrica che male si convengono all'età augustea e più si accordano con la scuola dei *νεώτεροι* (3). Ma ecco che d'altra parte l'insieme del componimento, nella descrizione della natura, nello sfondo pastorale, nell'orrore per la discordia civile, è talmente intonato a Vergilio da non potersi spiegare se non sbocciato sotto l'influsso della bucolica vergiliana (4). Nè queste discordi risultanze si debbono con sofismi o con schermaglie critiche annullare o nascondere così da dare prevalenza all'una piuttosto

(1) V. infatti Appian. *De bello civ.* I 95-6, 103 particol.: *ταῖς δὲ πλείοσι [πόλεσι] τοὺς ἑαυτῷ στρατευσαμένους ἐπῴκιζεν ὡς ἕξον φρούρια κατὰ τῆς Ἰταλίας, τήν τε γῆν αὐτῶν καὶ τὰ οἰκήματα ἐς τούσδε μεταφέρων διεμέριζεν.*

(2) Perciò il Ribbeck *Gesch. d. röm. Dichtung* I² p. 313, pur attribuendo a Valerio Catone il componimento, fu indotto a ritenerlo scritto in vecchiezza, sotto l'impressione dei recenti fatti del 41.

(3) V. particolarmente le osservazioni di Eskuche diss. cit. p. 63, ed i numerosi riscontri formali con Catullo, raccolti da Curcio op. cit. pp. 31-2. Utili indizii dà pure Ellis " Amer. Journ. „ 1890 pp. 9 sgg.

(4) L'influsso di Vergilio è bene illustrato da Sonntag *Die Appendix Vergiliana* (Frankf. 1887), sebbene non così accettabile sia, in sè stessa, la tesi di quest'autore circa l'origine del carme. — Superficiali e facilmente controvertibili mi sembrano poi gli indizii coi quali P. Jahn *Die Art der Abhängigkeit Vergils von Theokrit u. anderen Dichtern* Progr. Berlin 1899 (è tutto un lavoro superficiale e schematico), pp. 31 sg., si propone di dimostrare che le *Dirae* sieno anteriori alle Ecloghe di Vergilio.

che all'altra tesi: vanno tenute presenti nel loro valore effettivo, se si vuole venire a quella spiegazione la quale entrambe le comprenda e illumini. Da una parte — ripeto — la perdita del patrimonio, l'amore di Lidia, certe particolarità stilistiche e metriche richiamano a Valerio Catone; dall'altra la distribuzione dei campi ai veterani e l'influsso della bucolica vergiliana conducono all'anno 41.

II.

La vera soluzione — dirò dunque — è suggerita dalla struttura e dall'artificio del componimento stesso. Tutti sanno che le *Dirae*, anzichè essere le imprecazioni scagliate dal poeta nell'atto stesso di abbandonare il campo, sono in realtà una ripetizione, un *bis* delle imprecazioni medesime anteriormente pronunciate. Anzichè riferire direttamente, *sic et simpliciter*, i terribili voti che l'ira gli strappa dal cuore, il poeta si presenta nell'atto di ripeterli per la seconda volta, a distanza di tempo. Infatti comincia così:

> Battare, cycneas repetamus carmine voces;
> Divisas iterum sedes et rura canamus,
> Rura, quibus diras indiximus, impia vota.

Poi, in discorso diretto e in forma strofica (a strofe libere, ben inteso), sono riferite le varie imprecazioni: il campicello non germini, non fiorisca, non produca, sia appestato dai morbi, abbruciato dal fuoco, invaso dalla sabbia, inondato dal mare e dai fiumi. Ma ad ogni nuova imprecazione regolarmente è preposta una formula introduttiva con cui viene indicato che l'imprecazione era stata lanciata altra volta:

> Rursus et hoc iterum repetamus, Battare, carmen.

Oppure:

> Tristius hoc, memini, revocasti, Battare, carmen.

Od anche, con grande uniformità:

> Dulcius hoc, memini, revocasti, Battare, carmen.
> Tristius hoc rursum dicit mea fistula carmen.
> Extremum carmen revocemus, Battare, avena.

Il procedimento (bisogna pur dirlo) ha dello strano. Varie furono le interpretazioni tentate dai critici. Alcuni pensarono che l'autore, presumibilmente Valerio Catone, alludesse alla narrazione da lui medesimo fatta in altro libro (nella *Indignatio*) del campo perduto (1). Ma ad ogni poeta è bensì lecito ripetere quante volte vuole in varii componimenti uno stesso motivo: nessun poeta è mai ricorso a così squisita trovata di annunziare egli stesso la ripetizione, fare due punti e virgolette, e, avendo l'aria di creare un nuovo carme, trascrivere press'a poco le medesime parole già prima usate. Altri (ed è ormai il giudizio prevalente) hanno pensato a un procedimento artistico proprio della tecnica alessandrineggiante: per cui i fatti, anzichè essere presentati direttamente nel loro svolgersi naturale, vengano riferiti in iscorcio (2). Ma, anche qui, i poeti ellenistici ebbero il vezzo di far narrare questo o quel fatto da una terza persona, anzichè narrare impersonalmente e obbiettivamente; ebbero il vezzo di immaginare inni cantati e riferiti da uno od altro personaggio, anzichè dare gl'inni senza contorno e senza introduzione: nelle *Dirae* il caso è ben diverso (3).

Ellenistico o non, un poeta non ha mai avuto ragione di ricorrere a simile espediente. Invece ha avuto ragione di ricorrervi un imitatore il quale abbia voluto far passare il proprio doppione a fianco all'opera originale. Ma si è tradito. Quando noi leggiamo che in questo carme l'autore si propose di ripetere ad una ad una le imprecazioni altra volta lanciate, non possiamo non prenderlo alla lettera e non vedere nell'artifizio la rivelazione malaccorta e involontaria dell'opera spuria, del

(1) Così, sulle orme dello Scaligero, il Naeke o. c. pp. 20 sgg. ed altri molti.

(2) V., ad es., Rothstein l. c. p. 512: *Quod [repetere ea quae antea agrum relinquens cecinerat] quo consilio instituerit, non minus otiosum est quaerere, quam si quis eruere velit cur alii scriptores et poetae saepius non ipsi de se rem aliquam narrare soleant; sed hominem aliquem inducere qui tradat quibus ipse adfuisse narratur.* — Così pure Schanz *Gesch. d. röm. Lit.* I 2^3 p. 61.

(3) Che il procedimento della ripetizione dipenda (come qualche altro suppose) dall'uso ieratico di dire due e tre volte le imprecazioni, non è da credere se anche a tutta prima sembri una buona idea; perchè al poeta sarebbe stato e facile e necessario svolgere in tal senso la sua concezione: mentre non risulta affatto dalle parole adoperate.

ricalco, dell'esercizio imitatorio. Così nelle sillogi dei poeti antichi non di rado sono stati duplicati o triplicati con più o meno profonde rielaborazioni i componimenti originali. Particolarmente istruttivo è il caso della silloge teocritea nella quale la variazione spuria del carme originale è talvolta giustificata mediante qualche parola introduttiva. Prendiamo l'idillio IX. Sono alcune brevi canzoni amebee di fondo teocriteo, ricalcate su motivi degli idillii VI e VIII e lì messe insieme a formare un nuovo carme, con poco accorti artifici di composizione. Un tale, che non si vede bene chi sia, invita Dafni e Menalca a dire i loro canti, poi soggiunge egli stesso, per chiusa, un canto proprio. Analogamente l'anonimo autore delle *Dirae* ha attinto la sostanza dell'opera sua, cioè la parte cantata, da un modello *x*, che ancora non conosciamo, e la ha congegnata sur uno sfondo pastorale poco chiaro e poco definito, immaginando di invitare un pastorello, suo servo o suo compagno, Battaro (1), a ripetere insieme, sul flauto, quei canti che erano stati da loro altra volta cantati. Esisteva un componimento classico contenente le imprecazioni sulla perdita del campicello: per duplicare questo componimento non c'era mezzo migliore (nel pensiero dell'imitatore) che immaginare una scena in cui quelle cotali imprecazioni venissero dette la seconda volta.

Da cosiffatta osservazione — volendo conchiudere — si ricava, in modo particolare: che le *Dirae* a noi giunte non possono in alcun modo essere opera autentica di Valerio Catone (e questo è detto a coloro che ancora credono a Valerio Catone come ad autore del componimento); non possono in alcun modo essere — se pure era bisogno di tanto per dimostrarlo — opera autentica di Vergilio (e questo è detto a coloro che recentemente, ed invero con poca fortuna, sulla fede della tradizione manoscritta, sono tornati alla credenza medievale che il com-

(1) È strano a quante fantasticherie di eruditi diede luogo questo nome *Battarus*, che alcuni presero per un fiume, altri per una collina, o per l'eco, o per una capra, o per un cigno, o per Callimaco (!) in persona. V. Curcio o. c. p. 49. Che sia un servo od un compagno, secondo l'uso del contrasto pastorale, ben vide il Näke, o. c., contro cui non valgono le osservazioni di N. Pirrone *Sui due poemetti " Dirae " e " Lydia "*, in " Rivista abruzzese ", 1901, pp. 453 sgg.

ponimento sia opera giovanile di Vergilio (1)). Ma dalla stessa osservazione discende, per giunta, che era esistito un altro carme *Dirae*, originale. Era di Vergilio? di Valerio Catone? di altri ancora? Discuteremo fra breve.

III.

Dimostrato che le *Dirae* portano in sè stesse il marchio manifesto della bastardigia, noi abbiamo raggiunto lo scopo principale che ci proponevamo. Ma non sarà inutile perseguire ancora questo aspetto del carme, nei suoi particolari, e vedere di passare, almeno in qualche punto, dalla copia all'originale.

Così come sono, le *Dirae* rappresentano, per via di accenni, alcune circostanze di un momento storico determinato. Tutto sta però a vedere se codeste circostanze provengano dall'opera originale, ovvero sieno aggiunte e adattamenti dell'imitatore. Si parla di una distribuzione di terre ai veterani, la quale — ho già detto —, sebbene nel fondo possa ricordare gli analoghi provvedimenti di Silla, coincide però più direttamente con la distribuzione dell'anno 41, ordinata dal Secondo triumvirato e menzionata nelle *Ecloghe* di Vergilio. È poi fatto il nome di una persona della quale il poeta intende cantare gli *impia facta*: Licurgo:

> Ante lupos rapient haedi, vituli ante leones,
> Delphini fugient pisces, aquilae ante columbas,
> Et conversa retro rerum discordia gliscet,

---

(1) Alludo a F. Vollmer *Die kleineren Gedichte Vergils* " Sitz.-ber. Akad. Münch. „ 1907 pp. 335-74, partic. p. 356, che fu assecondato da M. Lenchantin De Gubernatis *L'autenticità dell'*Appendix Vergiliana " Riv. di Filol. class. „ XXXVIII (1910) pp. 201-20, partic. pp. 217-8. Ottimo proponimento mi sembra essere stato quello di frenare gli attacchi all'autenticità dell'*Appendix* nel suo complesso. Ma che autentiche debbano proprio essere le *Dirae*, e conseguentemente la *Lydia*, mi sembra idea non accettabile. Infatti, per giustificare la differenza di stile rispetto alle opere certamente vergiliane, non vale, nel caso delle *Dirae*, la considerazione della giovinezza del poeta. Per vero, le *Dirae* furono composte dopo il 41, negli stessi anni in cui furono composte le *Ecloghe*. Come si spiega che nel medèsimo ambito d'anni (41-39 circa) il poeta scrivesse con così enorme disparità di stile?

Multa prius fient, quam non mea libera avena.
Montibus et silvis dicam tua facta, Lycurge,
Impia (1).

I fatti cui lo scrittore allude (si comprende anche dal sèguito) non sono la singola occupazione del suo proprio campo, ma il provvedimento generale con cui è stato disposto a siffatta occupazione. Quindi Licurgo non è il nome, vero o fittizio, del soldato che invase i beni dell'autore, ma il nome — simbolico, naturalmente — del legislatore che creò tale ingiustizia. Ciò posto, è quasi inevitabile venire alla deduzione (intuita dal Reitzenstein (2), ma abbandonata e derisa dagli altri), che Licurgo sia Ottaviano e che la scelta del nomignolo sia determinata da un parallelo fra le divisioni di campi indette dal mitico legislatore di Sparta, Licurgo, e le recenti divisioni fatte dal triumviro di Roma. — Questi i riferimenti alla realtà politica. Accenni che servano a stabilire i luoghi in cui la scena si svolge, mancano quasi assolutamente. È una coloritura molto generica, dove trovi di tutto un po', come in ogni idillio pastorale: monti, selve, prati, fiumi, mare. Anche il mare — dico — se c'entra, c'entra però in tal modo da non potersene affatto dedurre (come quasi universalmente si deduce) che fosse in prossimità al campo dell'autore. Infatti, fra tutte le possibili e impossibili maledizioni che l'anonimo autore rivolge al campicello, di essere distrutto col ferro, col fuoco, con l'aria, con la sabbia, coi morbi, non può mancare l'augurio che anche il mare esca dalla sua propria sede e vada a sommergere i malaugurati terreni. Sostenere, per un voto concepito in tal forma, che il campo maledetto fosse necessariamente nelle vicinanze del mare, sarebbe come chi sostenesse che la Capraia e la Gorgona della famosa imprecazione dantesca debbano stare allo sbocco dell'Arno, mentre in realtà ne distano alcune decine di miglia. Tanto più che, a guardar bene, l'autore sembra avere del mare una nozione piuttosto vaga:

Nigro multa mari dicunt portenta natare;

---

(1) Seguo per questi versi la lezione vulgata che si ritrova, salvo il *multa* di v. 7 corretto in *cuncta* e il *facta* di v. 8 corretto arbitrariamente in *furta*, presso Bährens *Poetae latini minores*. Non necessarie mi sembrano le correzioni del Vollmer nella recente edizione teubneriana.

(2) O. c. pp. 32 sgg.

non solo, ma spera poco egli stesso nella attuabilità del fatto augurato. Infatti, appena compiuta la straordinaria invettiva, egli soggiunge: " se non mi può ascoltare Nettuno, mi ascoltino almeno i fiumi ":

> Si minus haec, Neptune, tuas infundimus auris,
> Battare, fluminibus tu nostros trade dolores.

Ancora un equivoco da scartare. Molti critici credono di poter stabilire che il terreno in questione fosse in Sicilia. E ciò perchè l'autore rivolto alle sue terre, esclama:

> ..... Trinacriae sterilescant gaudia vobis.

Ma è un modo ben singolare questo di indicare al campo in che regione esso stesso si trovi. Invece *Trinacriae gaudia* significa, alla maniera di Vergilio, gioie e spassi pastorali (1). È una preziosità letteraria come il *Sicelides Musae*, come il *Chalcidico condita versu*, che val meglio di un difetto di logica.

Piuttosto, queste particolarità, del mare e della Trinacria, ci suggeriscono un giudizio d'indole complessiva: che la scena delle *Dirae* è convenzionale ed astratta; ha uno sfondo ideale desunto dai soliti ricordi letterarii di Teocrito e della bucolica siciliana: simile alle *Ecloghe* di Vergilio, nelle quali quasi sempre i nomi, i costumi, gli elementi sono siciliani, sebbene la realtà vissuta ci richiami alla pianura padana. Non altrimenti, del resto, in Teocrito stesso la scena è quasi sempre generica, indifferente ed astratta, con rimembranze di luoghi e di cose siciliane, ma trasportata, senza parere, nei cieli d'Oriente dove il poeta scriveva (2).

Conchiudendo: l'osservazione delle circostanze storiche e geografiche non conduce per sè stessa ad alcun risultato circa i rapporti fra modello e originale. Ma ci invita a tentare, meglio

---

(1) Così Reitzenstein l. c. pp. 33-5. Inconsistente è perciò la congettura del Rothstein l. c. p. 511, n. 2, di una distribuzione di terre in Sicilia sotto Sesto Pompeo. D'altra parte, il Rothstein stesso, quando non ritiene affatto strano che il *Trinacriae sterilescant gaudia vobis* indichi la località del campicello, suppone che il discorso sia rivolto, non al campicello, ma al soldato invasore: la quale interpretazione mi sembra oltremodo improbabile.

(2) Mi richiamo a quello che, contro i tentativi di determinare la scena di molti idillii teocritèi, scrissi in *Poeti alessandrini*, pp. 102, 122.

edotti, un altro cammino. Può Vergilio essere stato l'autore delle prime *Dirae*, da cui le presenti sarebbero ricalcate? L'ipotesi sembra a tutta prima plausibile. Infatti essa avrebbe una conferma nel catalogo delle opere di Vergilio conservato da Donato e da Servio e proveniente da Svetonio, dove si trova annoverata un'opera dal titolo *Dirae*, e si eviterebbe di supporre — come generalmente si suppone — che *Dirae* vi sia stato interpolato dopo che nel *Corpus* vergiliano furono comprese le *Dirae* a noi giunte (1). Ma le difficoltà nascono da altra banda. Vergilio perdette momentaneamente il suo podere nell'anno 41, ma lo riebbe tosto per favore di Ottaviano medesimo, al quale rendeva grazie nell'ecloga I. Quando poi, nell'anno successivo, egli venne di nuovo privato del campo, i suoi sentimenti furono ben diversi da quelli espressi nelle *Dirae*, come dimostrano le ecloghe VI e IX nonchè il contegno osservato verso Mecenate e verso il potente signore. È possibile dunque che sulle prime abbia lamentato quella perdita: ma che poi abbia divulgato, egli, favorito di Ottaviano, un componimento che tornava a disdoro del principe, non si può in alcun modo consentire (2).

A questa difficoltà un'altra è congiunta. Non dobbiamo dimenticare che nelle *Dirae* è menzione di una donna amata dal poeta, Lidia. Nulla di strano che Vergilio o il suo imitatore abbiano usato, di passaggio, questo nome immaginario deducendolo dal comune repertorio dei nomi da elegia e da pastorale. Ma conviene vedere se per avventura, lasciandosi guidare dalle prime apparenze e dalla connessione che è fra tale nome muliebre e un altro poeta latino, non si concilii davvero ogni cosa. Infatti, le *Dirae* sono seguite da quell'altro carme, a cui i moderni editori hanno dato il titolo di *Lydia* e che è interamente rivolto a lode della medesima donna. I due componimenti,

(1) Cfr. per l'ipotesi dell'interpolazione Ribbeck *Appendix Vergiliana* Prol. p. 1 sgg.; Sciava, o. c. p. 11.

(2) Certo il Vollmer l. c. pp. 356-7 suppone che le *Dirae*, opera autentica di Vergilio, sieno state pubblicate dopo la morte del poeta, a causa appunto della loro violenza. Ma l'ipotesi di una pubblicazione postuma non ha più ragion d'essere dopo che abbiamo dimostrato le *Dirae* a noi giunte, e delle quali il Vollmer discute, essere opera apocrifa.

Dirae e *Lydia*, cadono dunque sotto un'unica sentenza. Essi provengono dal medesimo autore, perchè (sia detto contro il giudizio corrente) sono ben collegati fra loro. Come nelle *Dirae* il poeta si allontana, imprecante, dalla campagna dove ha amato Lidia, così nel secondo componimento, egli, lontano, ripensa quei luoghi cari dove Lidia è rimasta, invidia la campagna la quale gode quel bene che a lui è negato, piange con profonda amarezza la separazione:

> Invideo vobis, agri formosaque prata,
> Hoc formosa magis, mea quod formosa puella
> In vobis tacite nostrum suspirat amorem.
> Vos nunc illa videt, vobis mea Lydia ludit,
> Vos nunc alloquitur, vos nunc arridet ocellis
> Et mea submissa meditatur carmina voce,
> Cantat et interea, mihi quae cantabat in aurem,
> etc. etc. (1).

Non si comprende come mai la maggior parte dei filologi, per segnare profondo il distacco fra le due poesie, sostengano che nelle *Dirae* il poeta parte e Lidia rimane, mentre nella *Lydia*, Lidia parte e rimane il poeta (2). Certo le due poesie non sono, non vogliono essere continuazione l'una dell'altra. Sono due momenti sentimentali ricavati dalla medesima situazione fondamentale.

Posto questo contatto fra i due carmi, la mia conclusione (e se ne diranno fra breve i vantaggi) è che il nome di Valerio Catone debba in certo senso rimanere loro, non più come di autore, ma certo come di fonte o modello da cui essi due sieno stati imitati (3). Si pensi al poema *Lydia* del quale parla Svetonio come dell'opera principale di Valerio Catone. Questo poema era naturalmente composto sullo stampo delle raccolte elegiache

(1) Il testo è quello del Vollmer (Lipsia 1910).

(2) Così ad es. Ribbeck *Gesch. d. röm. Lit.* I^2 p. 312; Rothstein l. c. pp. 509-10; Schanz *Gesch. d. röm. Lit.* I 2^3 p. 61. — L'opinione poi di due autori diversi è ben contraddetta da Curcio, o. c. pp. 44 sgg.

(3) Vengo così, per diverso cammino, a consentire con Bährens, il quale in *Poetae latini minores* II pp. 28-9 aveva pensato a un imitatore di Valerio Catone.

di analogo titolo, in voga presso gli Alessandrini, dalla *Bittide* di Filita alla *Leonzio* di Ermesianatte. Dovevano esservi descritte in tanti quadri staccati le peripezie della vita campestre e dell'amore per Lidia. A tale disegno corrispondono, nella sostanza, i due carmi a noi giunti.

Che poi questi due non sieno l'opera autentica, ma l'imitazione, come credo, almeno per le *Dirae*, di avere dimostrato, ciò particolarmente importa, perchè serve ad eliminare ogni obiezione proveniente dalla evidenza intrinseca del carme e a conciliarne, opportunamente, le apparenze discordi. L'evidenza intrinseca ci ha mostrato nelle *Dirae* una speciale dipendenza dagli avvenimenti dell'anno 41, ma nello stesso tempo non ha escluso il ricordo di analoghi e più antichi fatti, le proscrizioni sillane degli anni 82-79. Vuol dire dunque che la sostanza della poesia era un lamento di Valerio Catone per la perdita delle sue terre, occasionata dalle distribuzioni sillane, e che questo lamento fu adattato dall'imitatore — un contemporaneo di Vergilio — alle vicende del 41. Ugualmente l'imitatore ha inquadrato (e con quanto poca destrezza e solidità!) la serie delle imprecazioni nella cornice del contrasto pastorale, applicandole i colori e le abitudini della bucolica vergiliana.

La quale ipotesi viene poi anche a giustificare, come è necessario, il fatto stesso dell' imitazione. Ogni imitazione, o falsificazione che sia, per essere ammessa deve essere giustificabile, cioè deve aver avuto i suoi motivi. Orbene: che le *Dirae* catoniane sieno state rifatte e ripetute nella forma in cui sono, si comprende molto bene, quando — come dicevo — qualche nuovo spodestato abbia voluto contro i nuovi provvedimenti di Ottaviano sfogare il suo sdegno.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI.

CLASSI UNITE

Adunanza del 21 Maggio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe D'Ovidio, e i Soci Salvadori, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Balbiano e Segre, Segretario;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: il Direttore della Classe Chironi, e i Soci De Sanctis, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme e Patetta.

Scusano l'assenza i Soci Naccari, Parona e Prato.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente a Classi Unite, 27 febbraio 1916.

Il Socio Tesoriere Einaudi, invitato dal Presidente, dà lettura del Rendiconto finanziario dell'Esercizio 1915 e del Bilancio preventivo per l'Esercizio 1916. Vengono approvati entrambi senza osservazioni. Così pure vengono approvate le gestioni dei premi Bressa, Gautieri, Pollini e Vallauri.

Il Presidente, a proposito della notevole diminuzione delle entrate dell'Accademia, e del fatto che si è dovuta sospendere, per ragioni di bilancio, la stampa delle *Memorie*, informa che per le stesse ragioni è possibile che si debba procedere ad una

limitazione ulteriore per la stampa degli *Atti*. Ad evitare questo pericolo, raccomanda ai Colleghi una certa severità nell'accogliere lavori di estranei da presentare per gli *Atti*.

Il Socio De Sanctis, relatore della Commissione nominata dall'Accademia il 27 febbraio scorso per formulare le eventuali riforme ai Regolamenti dei premi Bressa, Vallauri, Gautieri e Pollini, legge successivamente gli abbozzi dei nuovi Regolamenti, formulati dalla Commissione. Tali abbozzi vengono discussi, articolo per articolo; e con pochi ritocchi o modificazioni vengono approvati i singoli articoli e i Regolamenti nel loro complesso, lasciando al Socio De Sanctis l'incarico di coordinare le poche modificazioni fatte, e di ritoccare, ove occorra, la dicitura.

Il Socio Patetta, anche a nome dei Soci Ruffini e Sforza, legge la Relazione della Commissione per il premio Pollini. Le conclusioni unanimi della Commissione sono per la premiazione della *Monografia storica di Lomello* del Dr. Mario Zucchi. La votazione su questa proposta si farà nella prossima adunanza.

REGOLAMENTO INTERNO

PEL CONFERIMENTO DEI PREMI BRESSA

Art. 1.

Al principio di ciascuno dei periodi biennali stabiliti dalle tavole di fondazione dei premi Bressa l'Accademia nomina una Commissione che deve ricercare durante il biennio e nel trimestre seguente le scoperte o le opere meritevoli di essere prese in esame pel premio.

Questa Commissione è composta di tre membri per ciascuna Classe, oltre al Presidente dell'Accademia che la presiede. Ogni Classe designa i propri commissari separatamente in una adunanza a Classi unite.

Art. 2.

La Commissione, oltre a fare per proprio conto le opportune ricerche, invita anche ciascun socio nazionale residente e non residente a proporre per iscritto le opere o scoperte di cui all'art. 1, e si prepara a riferire e sulle proprie ricerche e sulle eventuali proposte e sui lavori che vengano ad essa inviati dagli autori, esclusi i lavori manoscritti.

Art. 3.

Alla fine del trimestre successivo al biennio la Commissione presenta in una adunanza a Classi unite una prima relazione in cui sono indicate le scoperte o le opere meritevoli di essere prese in considerazione pel premio.

Ogni socio nazionale residente o non residente può nella stessa adunanza presentare per iscritto altre proposte motivate.

Con questa adunanza l'elenco delle scoperte od opere proposte pel premio diviene definitivo, sicchè il premio non può essere assegnato ad una opera o scoperta che non vi sia compresa.

Art. 4.

In una adunanza successiva l'Accademia integra la Commissione aggregandole due nuovi membri per ciascuna Classe, nominati con la stessa procedura di cui all'art. 1.

Art. 5.

. Entro il decembre dello stesso anno la Commissione così integrata presenta alle Classi unite la relazione definitiva con le sue proposte pel conferimento del premio.

Questa relazione, in cui sono giudicate tutte le scoperte od opere presentate dagli autori o proposte da soci, è comunicata per intero unicamente ai soci nazionali residenti e non residenti dell'Accademia.

Di essa è reso pubblico negli Atti soltanto il giudizio su la scoperta o l'opera premiata e sui lavori sottoposti dagli autori all'esame dell'Accademia.

Art. 6.

La relazione potrà contenere la proposta di una sola scoperta od opera da premiare, o potrà anche indicare come meritevoli del premio più scoperte od opere, lasciando la scelta all'Accademia.

Art. 7.

In una adunanza successiva l'Accademia a Classi unite procede al conferimento del premio.

La votazione si fa a schede segrete. Nel caso di proposta di più opere o scoperte si vota su tutti i singoli nomi proposti dalla Commissione, iniziando lo spoglio delle schede a votazione finita. Riesce vincitore del premio chi ha raccolto la maggioranza assoluta col maggior numero dei voti.

Se due o più abbiano ottenuto la maggioranza assoluta con lo stesso numero massimo di voti, si farà tra essi una votazione di ballottaggio.

Art. 8.

Qualora invece nessuno abbia ottenuto la maggioranza assoluta, si ripeterà la votazione. Se neppure tale seconda vota-

zione dà risultato, si procederà anche in questo caso al ballottaggio sui nomi che ottennero i due numeri maggiori di voti.

Art. 9.

Per la votazione di ballottaggio basterà la maggioranza relativa.

Se due o più abbiano ottenuto nel ballottaggio lo stesso numero massimo di voti, il vincitore del premio sarà designato per mezzo del sorteggio.

Art. 10.

Il premio stabilito per ciascun biennio è indivisibile, e non se ne può sospendere il conferimento.

Art. 11.

Alle adunanze in cui si discute e si delibera intorno al premio possono prender parte con diritto di voto anche i soci nazionali non residenti, ai quali si darà preavviso del giorno delle adunanze stesse.

Art. 12.

Il programma pel conferimento del premio dovrà sempre pubblicarsi non più tardi del decembre anteriore a ogni biennio.

Se si tratti di premio internazionale, sarà pubblicato nelle lingue latina, italiana, francese, tedesca, inglese.

Il Presidente dell'Accademia
Paolo Boselli

L'Accademico Segretario
della Classe
di scienze fisiche, matematiche e naturali
Corrado Segre

L'Accademico Segretario
della Classe
di scienze morali, storiche e filologiche
Ettore Stampini

REGOLAMENTO INTERNO

PEL CONFERIMENTO DEI PREMI GAUTIERI

Art. 1.

Al principio di ciascun anno dei periodi triennali determinati dallo Statuto dei premi Gautieri, la Classe di scienze morali, storiche e filologiche nomina una Commissione incaricata di ricercare e giudicare le pubblicazioni degne di essere proposte pel premio Gautieri. Questa Commissione è composta di quattro membri, oltre al Presidente dell'Accademia che la presiede.

Art. 2.

Ai sensi dell'art. 5 dello Statuto, nel 1° anno la Commissione è designata per la filosofia (compresa la storia della filosofia), nel 2° anno per la storia civile e politica in senso lato (compresa la storia dell'arte, dell'economia e del diritto ed esclusa la storia della filosofia e la storia letteraria), nel 3° anno per la letteratura (compresa la storia letteraria e la critica letteraria e non escluse le opere che si riferiscono alle letterature classiche e straniere).

Art. 3.

Ogni Commissione, oltre a fare per proprio conto le opportune ricerche, invita anche ciascun socio nazionale residente e non residente a proporre per iscritto le opere a suo giudizio degne del premio e prende in esame le eventuali proposte come pure i lavori che sieno inviati ad essa dagli autori, esclusi i lavori manoscritti.

Art. 4.

Le proposte dei soci dovranno essere presentate entro un mese dalla data dell'invito ad essi rivolto dalla Commissione.

Art. 5.

Entro il decembre dell'anno stesso in cui è nominata, la Commissione presenta alle Classi unite la sua relazione con le proposte pel conferimento del premio.

Questa relazione, in cui sono giudicate tutte le opere inviate dagli autori o proposte da soci, è comunicata per intero unicamente ai soci nazionali residenti e non residenti dell'Accademia.

Di essa è reso pubblico negli Atti soltanto il giudizio su l'opera o le opere premiate e su quelle sottoposte dagli autori all'esame dell'Accademia.

Art. 6.

La relazione potrà contenere la proposta di una sola opera da premiare, o potrà indicare come meritevoli del premio più opere lasciando la scelta all'Accademia, o anche, nel caso di due opere giudicate egualmente degne di premio, potrà proporre all'Accademia che il premio sia diviso tra esse per metà.

Art. 7.

In un'adunanza successiva l'Accademia a Classi unite procede al conferimento del premio.

La votazione si fa a schede segrete. Nel caso che la Commissione abbia proposto di dividere il premio per metà tra due opere egualmente meritevoli, si mette a partito tale proposta. Ove essa venga accolta, il premio sarà senz'altro attribuito alle due opere indicate dalla Commissione.

Art. 8.

Qualora la proposta di divisione del premio sia stata respinta o la Commissione abbia proposto essa stessa la scelta tra più opere, si vota su tutti i singoli nomi proposti dalla Commissione, iniziando lo spoglio delle schede a votazione finita. Riesce vincitore del premio chi ha raccolto la maggioranza assoluta col maggior numero dei voti.

Art. 9.

Se, avendo la Commissione proposto la scelta, due o più opere ottengano la maggioranza assoluta con lo stesso numero massimo di voti, si porrà all'Accademia il quesito se convenga procedere alla divisione del premio tra esse. Ove l'Accademia respinga la divisione, si farà una votazione di ballottaggio.

Art. 10.

Qualora invece nessuno abbia ottenuto la maggioranza assoluta, si ripeterà la votazione. Se neppure tale seconda votazione dà risultato, si procederà anche in questo caso al ballottaggio sui nomi che ottennero i due numeri maggiori di voti.

Per la votazione di ballottaggio basterà la maggioranza relativa.

Se due o più abbiano ottenuto nel ballottaggio lo stesso numero massimo di voti, il premio sarà diviso senz'altro fra essi.

Art. 11.

Alle adunanze in cui si discute e si delibera intorno al premio possono prendere parte con diritto di voto anche i soci nazionali non residenti, ai quali si darà preavviso del giorno delle adunanze stesse.

Art. 12.

Il programma pel conferimento di un premio dovrà pubblicarsi non più tardi del decembre anteriore alla nomina della Commissione.

Il Presidente dell'Accademia
Paolo Boselli

L'Accademico Segretario
della Classe
scienze fisiche, matematiche e naturali
Corrado Segre

L'Accademico Segretario
della Classe
di scienze morali, storiche e filologiche
Ettore Stampini

REGOLAMENTO INTERNO

PEL CONFERIMENTO DEI PREMI VALLAURI

Art. 1.

Al principio di ciascuno dei periodi quadriennali stabiliti dalle tavole di fondazione dei premi Vallauri (che si computano a partire dal 1° gennaio 1899) l'Accademia nomina una Commissione che deve ricercare durante il quadriennio e nel semestre seguente le opere meritevoli di essere prese in esame pel premio.

Questa Commissione è composta di quattro membri, oltre al Presidente dell'Accademia, che la presiede.

Essa viene scelta dalla Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali o dalla Classe di scienze morali, storiche e filologiche secondo che il premio è per le scienze fisiche (in senso lato) o per le opere critiche sulla letteratura latina.

Art. 2.

La Commissione, oltre a fare per proprio conto le opportune ricerche, invita anche ciascun socio nazionale residente e non residente a proporre per iscritto le opere di cui all'art. 1, e si prepara a riferire e sulle proprie ricerche e sulle eventuali proposte e sui lavori che vengano ad essa inviati dagli autori, esclusi i lavori manoscritti.

Art. 3.

Entro il semestre successivo al quadriennio la Commissione presenta in una adunanza a Classi unite una prima relazione in cui sono indicate le opere meritevoli di essere prese in considerazione pel premio.

Ogni socio nazionale residente o non residente può nella stessa adunanza presentare per iscritto altre proposte motivate.

Con questa adunanza l'elenco delle opere proposte pel premio diviene definitivo, sicchè il premio non può essere assegnato ad un'opera che non vi sia compresa.

Art. 4.

In una adunanza successiva, se il premio è per le scienze fisiche, la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali integra la Commissione aggregandole due nuovi membri.

Art. 5.

Entro il decembre dello stesso anno la Commissione presenta alle Classi unite la relazione definitiva con le sue proposte pel conferimento del premio.

Questa relazione, in cui sono giudicate tutte le opere inviate dagli autori o proposte da soci, è comunicata per intero unicamente ai soci nazionali residenti e non residenti dell'Accademia.

Di essa è reso pubblico negli Atti soltanto il giudizio su l'opera o le opere premiate e su quelle sottoposte dagli autori all'esame dell'Accademia.

Art. 6.

La relazione potrà contenere la proposta di una sola opera da premiare, o potrà indicare come meritevoli del premio più opere lasciando la scelta all'Accademia, o anche, nel caso di due opere giudicate egualmente degne di premio, potrà proporre all'Accademia che il premio sia diviso tra esse per metà.

Art. 7.

In un'adunanza successiva l'Accademia a Classi unite procede al conferimento del premio.

La votazione si fa a schede segrete. Nel caso che la Commissione abbia proposto di dividere il premio per metà tra due opere egualmente meritevoli, si mette a partito tale proposta. Ove essa venga accolta, il premio sarà senz'altro attribuito alle due opere indicate dalla Commissione.

Art. 8.

Qualora la proposta di divisione del premio sia stata respinta o la Commissione abbia proposto essa stessa la scelta tra più opere, si vota su tutti i singoli nomi proposti dalla Commissione, iniziando lo spoglio delle schede a votazione finita. Riesce vincitore del premio chi ha raccolto la maggioranza assoluta col maggior numero dei voti.

Art. 9.

Se, avendo la Commissione proposto la scelta, due o più opere ottengano la maggioranza assoluta con lo stesso numero massimo di voti, si porrà all'Accademia il quesito se convenga procedere alla divisione del premio tra esse. Ove l'Accademia respinga la divisione, si farà una votazione di ballottaggio.

Art. 10.

Qualora invece nessuno abbia ottenuta la maggioranza assoluta, si ripeterà la votazione. Se neppure tale seconda votazione dà risultato, si procederà anche in questo caso al ballottaggio sui nomi che ottennero i due numeri maggiori di voti.

Per la votazione di ballottaggio basterà la maggioranza relativa.

Se due o più abbiano ottenuto nel ballottaggio lo stesso numero massimo di voti, il premio sarà diviso senz'altro fra essi.

Art. 11.

Alle adunanze in cui si discute e si delibera intorno al premio possono prender parte con diritto di voto anche i soci nazionali non residenti, ai quali si darà preavviso del giorno delle adunanze stesse.

Art. 12.

Non più tardi del decembre anteriore a ogni quadriennio sarà pubblicato in lingua latina, italiana, francese, tedesca, inglese e diffuso quanto più largamente sarà possibile l'annunzio dei premi da conferirsi nei due quadrienni successivi.

Il Presidente dell'Accademia
Paolo Boselli

L'Accademico Segretario
della Classe
di scienze fisiche, matematiche e naturali
Corrado Segre

L'Accademico Segretario
della Classe
di scienze morali, storiche e filologiche
Ettore Stampini

REGOLAMENTO INTERNO

PEL CONFERIMENTO DEL PREMIO POLLINI

Art. 1.

Il premio istituito dal dott. cav. Giacomo Pollini sarà conferito ogni dieci anni dalla Reale Accademia delle Scienze di Torino, contando il primo decennio dal 1° gennaio 1904, in conformità delle disposizioni del testatore, che qui si riportano:

Lascio alla R. Accademia delle Scienze di Torino una rendita annua di L. 250, Consolidato 5 %, i cui redditi annuali capitalizzati dovranno servire per dare ogni tanti anni, nella cifra che essa crederà, un premio alla migliore monografia storica, sul genere della mia di Malesco, pubblicata a Torino nel 1896, manoscritta od anche stampata, degli attuali Comuni italiani delle antiche provincie piemontesi; da cui però ne escludo quelli delle città capoluogo di provincia e circondario, ad eccezione di quelli di Domodossola e Pallanza. A tale premio potranno concorrere solamente scrittori di dette provincie.

Art. 2.

L'ammontare del premio sarà fissato dal Consiglio di amministrazione dell'Accademia nel darne l'annunzio al principio d'ogni decennio.

Art. 3.

Non potranno concorrere al premio i soci nazionali residenti e non residenti dell'Accademia.

Art. 4.

I concorrenti dovranno consegnare i loro lavori stampati o manoscritti prima della fine del decennio.

I lavori stampati non potranno avere una data anteriore al decennio medesimo.

Art. 5.

Alla fine del penultimo anno del decennio la Classe di scienze morali, storiche e filologiche nomina una Commissione di quattro membri che, presieduta dal Presidente dell'Accademia, deve esaminare e giudicare i lavori stampati e manoscritti dei concorrenti.

Art. 6.

La Commissione presenterà all'Accademia la sua relazione su tutti i lavori dei concorrenti in tempo perchè questa, in una successiva adunanza plenaria, possa assegnare il premio non più tardi della fine dell'anno seguente all'ultimo del decennio.

Art. 7.

La relazione potrà contenere la proposta di un solo lavoro da premiarsi e potrà anche indicare come meritevoli del premio più lavori lasciando la scelta all'Accademia.

Art. 8.

In un'adunanza successiva l'Accademia a Classi unite procede al conferimento del premio.

La votazione si fa a schede segrete. Nel caso di proposta di più lavori da premiare, si vota su tutti i singoli nomi proposti dalla Commissione, iniziando lo spoglio delle schede a votazione finita. Riesce vincitore del premio chi ha raccolto la maggioranza assoluta col maggior numero dei voti.

Se due o più abbiano ottenuto la maggioranza assoluta con lo stesso numero massimo di voti, si farà tra essi una votazione di ballottaggio.

Art. 9.

Qualora invece nessuno abbia ottenuto la maggioranza assoluta, si ripeterà la votazione. Se neppure tale seconda votazione dà risultato, si procederà anche in questo caso al ballottaggio sui nomi che ottennero i due numeri maggiori di voti.

Art. 10.

Per la votazione di ballottaggio basterà la maggioranza relativa.

Se due o più abbiano ottenuto nel ballottaggio lo stesso numero massimo di voti, il vincitore del premio sarà designato per mezzo del sorteggio.

Art. 11.

Il premio è indivisibile.

Art. 12.

Ove la Commissione non riconosca alcun lavoro meritevole del premio, l'Accademia disporrà della somma corrispondente sia accrescendo il premio successivo, sia istituendone altri, sempre conforme all'intenzione del testatore.

Il Presidente dell'Accademia
Paolo Boselli

L'Accademico Segretario
della Classe
di scienze fisiche, matematiche e naturali
Corrado Segre

L'Accademico Segretario
della Classe
di scienze morali, storiche e filologiche
Ettore Stampini

Relazione della Commissione per il premio Pollini.

Al premio, che fu istituito per disposizione testamentaria del dott. cav. Giacomo Pollini e che la nostra Accademia deve ora per la prima volta conferire, concorsero tre studiosi, i signori Giovanni De Maurizi, Mario Zucchi e C. Mazzone.

Parve però alla Commissione che solo i lavori dei due primi concorrenti possano esser presi in considerazione, perchè l'opuscolo presentato dal signor Mazzone (*Camasco. Divagazioni storiche ed artistiche,* Varallo-Sesia, s. a.), benchè non privo di qualche pregio, appare dal titolo stesso e dal modo di trattazione non rispondente alle condizioni del concorso, indetto fra scrittori delle antiche provincie piemontesi *per la migliore monografia storica degli attuali comuni di dette provincie,* escluse, ad eccezione di Domodossola e Pallanza, le città capoluogo di provincia o di circondario; indetto, cioè, per opere di carattere esclusivamente o almeno prevalentemente scientifico.

Questo carattere scientifico, che la Commissione crede di dover recisamente affermare come requisito essenziale delle opere da premiarsi, fu, dopo maturo esame, trovato deficiente eziandio nell'opera manoscritta, che, insieme a tre opuscoli stampati (1), d'argomento affine ma non rispondenti ai termini del concorso,

(1) *La Valle Vigezzo. Monografia illustrata,* Domodossola, s. a. (ma 1911: avente il carattere di *guida* per i viaggiatori più che di monografia storica); *S. Carlo Borromeo e la Valle Vigezzo,* Gozzano-Omegna-Domodossola, s. a. (e senza nome d'autore); *Usi, costumi e tradizioni popolari della Valle Vigezzo,* Gozzano-Omegna-Domodossola, 1913 (senza nome d'autore, ma colla prefazione firmata collo pseudonimo *Riana*).

fu presentata dal signor De Maurizi: *Sommario di storia generale della Valle Vigezzo e particolare dei Comuni Vigezzini.*

La storia della Valle Vigezzo era già stata oggetto di parecchi studi, e l'autore della nuova monografia dichiara infatti apertamente di non pretendere *d'aver detto cose nuove*, ma d'aver invece voluto *ritornare sulle fonti consultate* dagli scrittori precedenti, per *vagliarle e metterle in armonia con le ricerche da lui fatte in tutti gli archivi pubblici e privati della Valle.*

Egli divise il suo lavoro in due parti.

Nella prima espose, in ventidue capitoli, la *Storia generale* della Valle, facendola seguire da *Appendici* sull'*araldica vigezzina, l'origine dei cognomi, il dialetto, gli usi e costumi, le credenze popolari, i nomignoli dei paesi vigezzini, l'emigrazione.* Nella seconda volle darci la storia particolare dei singoli comuni vigezzini, dedicando a ciascuno di essi una speciale monografia. Questa seconda parte non fu per altro condotta a termine; o almeno non furono presentate al nostro giudizio se non undici monografie, l'ultima delle quali, nell'ordine propostosi dall'autore, dovrebbe essere la sedicesima.

Le ricerche fatte dal De Maurizi, specie negli archivi locali, furono certo ampie e lodevoli; e la Commissione non può non esprimere il desiderio, che sian fatte conoscere agli studiosi nel miglior modo possibile.

Disgraziatamente dovette l'autore talvolta, e più spesso volle, senz'alcuna necessità, avventurarsi nel campo della storia generale o in ricerche speciali difficilissime, quali ad esempio quella sull'origine dei singoli cognomi; e in entrambi i casi diede prove evidenti dell'insufficienza della sua preparazione scientifica.

Così, prescindendo dalle strane cose dette appunto a proposito dei cognomi (1), si possono leggere fin dai primi capitoli della prima parte periodi come questi: “ La stima dei terreni, stabilita poi da Costantino nel 312, si faceva ogni quindici anni

(1) Per esempio (I, 639 e segg.): “ I popoli del Nord, che abitarono la ca-
“ tena delle Alpi da Savona a Trieste, lasciarono traccie indubbie della loro
“ dimora. Quantunque a noi sia ignota la loro lingua, i loro costumi, abbiamo
“ avuto qualche nome di radice anglo-sassone, o, almeno, d'ignota origine...
“ *Arnolfo de Mazano* (di origine longobarda); *Gnura* (dal tedesco); *Cappino*

(ciclo delle indizioni)..... Tanto però doveva essere l'abbandono e la poca cura delle terre, che il diritto romano riconobbe proprietario di esse chiunque le avesse coltivate per almeno due anni. Il diritto romano in materia di proprietà era tuttavia [*all'epoca delle invasioni barbariche*] schiavo dell'influenza della legge delle XII Tavole, per cui niun possidente era considerato quale proprietario, ma solo come usufruttuario de' proprii beni che aspettavano al *sacratissimum aerarium*..... Ristabilita la calma dallo scompiglio gotico, Cassiodoro radunò in codice le leggi romane e barbare, lasciando facoltà di elezione tra le due legislazioni avanti ai tribunali e nell'amministrazione del patrimonio privato. Questo sistema fu poi seguìto anche dai Longobardi, Franchi e imperatori di Germania „ (P. I, pag. 71 e 86).

Evidentemente un lavoro storico, che contiene equivoci ed errori così gravi, per quanto in alcune sue parti utile e degno di lode, non può esser ritenuto meritevole di premio.

Resta a dire della *Monografia storica di Lomello*, presentata, in gran parte manoscritta, dal dott. Mario Zucchi.

In questa monografia l'A. rimaneggiò ampiamente e rifece un suo precedente lavoro inserito, fin dal 1904, nella *Miscellanea di Storia Italiana*, edita dalla R. Deputazione di Storia Patria per le antiche provincie e la Lombardia. Al semplice *cenno sul periodo delle origini*, si sostituì nel rifacimento un'ampia trattazione del *primo periodo* della Storia di Lomello, cioè dell'epoca preromana e romana: furono aggiunte l'esposizione storica del *quinto periodo*, dal 1796 al 1912, e varie appendici, fra le quali è specialmente notevole quella dedicata alle genealogie delle varie famiglie comitali; le parti riguardanti i tre periodi, in cui l'A. divide la Storia di Lomello dal 476 al 1796, furono più che raddoppiate.

La Commissione potè quindi considerare la monografia dello Zucchi come nuova; e avendola diligentemente esaminata, fu lieta di riscontrarvi pregi non comuni; accuratezza di ricerche,

---

„ (da Koft, casa)... Ritengo di probabile origine romana le famiglie *Sartori*
„ (*Suteris*) assai numerose nel medioevo; *Cavallo* poi *Cavalli* e *Cavallini* (da
„ *caballus* della decadenza): *Coctus* indi *Cotto, Cotti, Cottini*; *Blonda, Alasia,*
„ *Alesina, Tironi, Garbaneo, Solta, Testore* (da *testor* pubblico testimonio),
„ *Flora, Melino, Mauricio, Ferrari* ed altri „.

chiarezza d'esposizione, e un giusto concetto di ciò che può dare vera importanza scientifica alle monografie storiche su piccoli comuni, i cui autori fanno di solito troppo ampia parte a minuzie locali, prive per la quasi totalità dei lettori di qualsiasi interesse, e viceversa prendono il piccolo paese di cui si occupano quasi a pretesto per metter fuori indigeste ed erronee compilazioni di storia generale.

In conclusione, avendo considerato la *Monografia storica di Lomello*, sia per sè stessa, sia in confronto colle altre sottoposte al suo giudizio, la Commissione è unanime nel proporre che al suo autore dott. Mario Zucchi sia conferito il premio Pollini.

Francesco Ruffini
Giovanni Sforza
Federico Patetta, *relatore*.

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre.
Ettore Stampini.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 21 Maggio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente CAMERANO, il Direttore della Classe D'OVIDIO e i Soci SALVADORI, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI, BALBIANO, e SEGRE, Segretario.

Scusano l'assenza i Soci NACCARI e PARONA.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza.

Il Socio nazionale TARAMELLI ha inviato in omaggio due suoi opuscoli, su *Ferdinando Sordelli*, e *Di Giovanni Maironeda Ponte e di altri naturalisti bergamaschi del secolo scorso.*

Il Socio Segretario rileva pure, fra i doni ricevuti, varie pubblicazioni del Prof. F. SACCO, che saranno enumerate nell'apposito elenco.

Il Socio GUIDI offre in omaggio un suo opuscolo *Sul calcolo della trave Vierendeel.*

Vengono presentate, per la stampa negli *Atti*, le Note seguenti:

N. JADANZA, *Ignazio Porro*;

I. GUARESCHI, *Delle singolari proprietà della calce sodata.* Nota IV;

G. Boccardi, *Questioni di probabilità*, dal Socio D'Ovidio;

A. C. Bruni, *Appunti sullo sviluppo del sistema nervoso simpatico negli amnioti*, 2ª comunicazione, dal Socio Fusari;

M. Chiò, *Sull'azione dell'anidride carbonica e del calcio sull'utero isolato*, pure dal Socio Fusari;

A. Tanturri, *Radici di numeri approssimati ed estrazione abbreviata della radice quadrata*, dal Socio Peano;

L. Della Casa, *Rapporto di grandezze eterogenee*, dallo stesso Socio Peano;

G. Cicconetti, *Strumenti diottrici ad obbiettivo composto usati in Geometria pratica*, Nota I, dal Socio Jadanza.

IGNAZIO PORRO

VIA DEL PINO A PINEROLO - CASA OVE NACQUE

Officina Fototecnica Ing. G Malfese. Torino

LETTURE

IGNAZIO PORRO

(Notizie biografiche).

Nota del Socio NICODEMO JADANZA

(Con 1 Tavola).

Nella *Rivista di Astronomia e scienze affini* dell'anno 1910 si trova una biografia d'Ignazio Porro di G. V. Schiaparelli. Nella nota (1) che si trova a piè della pagina 295 è scritto quanto segue:

" . . . . . Così risultarono questi pochi cenni che offro alla " *Rivista* aspettando che altri faccia più e meglio per onorare " la memoria di un uomo che ebbe in sè il genio della Mec- " canica e dell'Ottica pratica, e le combinazioni loro seppe in " nuovi modi usare a vantaggio della Geodesia e della Astro- " nomia ".

Quell'invito mi attrasse ed ho voluto tentare non di *fare meglio* di quanto abbia fatto l'illustre *Schiaparelli*, ma di completare e mettere in maggior luce l'opera di quest'uomo insigne, il cui nome è già passato nel dominio della Storia.

Paolo Ignazio Pietro Porro nacque a Pinerolo il 25 novembre dell'anno 1801 da Ignazio Porro di *Pinerolo* e da Anna Lanteri di *Annecy*. Il padre era Capitano del Genio Militare Piemontese ed il figlio fu anche destinato alla carriera militare. Nel 1814 entrò nel Collegio militare di Torino, nel 1815 fu ammesso come *cadetto* nel Corpo di Artiglieria, e nel 1817 entrò nell'Accademia Militare come sottotenente per fare gli studi superiori di guerra.

Nel 1815, gl'ingegneri Piemontesi Bagetti, Negresti e Melano, preposti alla determinazione topografica delle frontiere tra la Francia ed il Piemonte in contradittorio con una Commis-

sione dello Stato Maggiore francese presieduta dal Generale Du-Mesnil, richiamarono a nuova vita il metodo indiretto per la misura delle distanze per mezzo del cannocchiale, già indicato fin dal 1778 dall'ottico inglese Green. Questo metodo così viene descritto da Ignazio Porro nel suo importantissimo libro (1):

William Green fixe pour cela dans le champ du télescope deux points au moyen de deux pointes très fines ajustées dans le champ du diaphragme focal; ces deux pointes déterminent deux rayons visuels, dont les directions prolongées hors du télescope font entre elles un petit angle, que l'inventeur suppose constant pour un instrument donné: une mire en bois de deux toises de longueur est divisée en pieds et pouces par des lignes fortement marquées et visibles au télescope à la plus grande des distances qu'on se propose d'évaluer: on place la mire à l'une des extrémités de la ligne, on l'observe au télescope placé à l'autre extrémité et on compte combien il y a de divisions de la mire comprises entre les deux pointes qui constituent le micromètre: il est facile ensuite d'en déduire par un calcul simple la distance cherchée.

Esso dunque consisteva nel considerare costante l'angolo formato dalle due rette, che partendo dai fili estremi del reticolo si vanno ad incontrare nel centro ottico della lente obiettiva del cannocchiale: perciò non era rigoroso, ed in pratica si dimostrò subito inefficace, producendo errori tanto più grandi quanto più piccole erano le distanze (2).

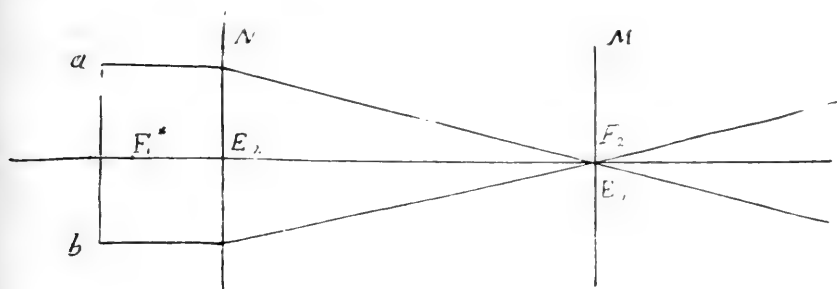
C'est aussi à l'extrême obligeance de M. Negretti *que je dois la connaissance de ce diastimomètre, tel qu'il l'employait lui-même; et sentant comme il les avait sentis, les inconvénients optiques signalés plus haut, je me suis dévoué à la recherche des causes qui avaient arrêté* M. Negretti; *j'ai le bonheur de les découvrir, et je suis arrivé facilement à une nouvelle combinaison de lentilles, formant une lunette achromatique, susceptible de la plus haute per-*

---

(1) *La Tachéométrie ou l'art de lever les plans et de faire les nivellements avec une économie considérable de temps par* I. Porro, *Major du Génie militaire en retraite* (Turin, 1850, imprimerie Zecchi et Bona, rue Carlo Alberto).

(2) Vedi nota (*a*). (La nota (*a*) e le altre analoghe che si citeranno in seguito fanno parte di uno scritto che presenterò in una prossima seduta come *Note illustrative* al presente).

fection, et exempte de tous les inconvénients que l'on remarquait encore dans l'application des micromètres à la mesuration des longueurs, lunette, à laquelle convient l'épithète de stéréogonique, *c'est-à-dire* à angle invariable.

Il cannocchiale *stereogonico* era formato così:

Al suo obbiettivo M di distanza focale $\varphi_1 = E_1 F_1^*$ fu aggiunta una lente N il cui primo fuoco F_2 andava a cadere nel centro ottico della lente obbiettiva M. Detta lente era fissata saldamente ad una distanza dalla lente M eguale alla propria distanza focale $F_2 E_2 = \varphi_2$ minore di φ_1.

Esso fu una elegante soluzione del problema di misurare le distanze colla stadia, fece sparire gl'inconvenienti che si erano verificati nella pratica ed a cui nessuno aveva saputo porre rimedio. Si enunciò implicitamente il teorema: *La distanza della stadia dal centro ottico della lente obbiettiva del cannocchiale* STEREOGONICO *è proporzionale alla parte di stadia compresa tra i fili estremi del reticolo.*

Questa fu la prima invenzione di PORRO che fece mettere in evidenza il suo nome.

Il primo cannocchiale *stereogonico* fu costruito a Torino nel 1824: aveva l'obbiettivo del diametro di 40 millimetri e di distanza focale eguale a 48 centimetri: fu adattato ad un antico grafometro per ottenere le distanze zenitali necessarie alla riduzione delle distanze all'orizzonte. Con esso furono fatte esperienze ufficiali il 15 agosto 1824 per ordine del Generale del Genio marchese BOYL da una Commissione composta dei Capitani PASSERA, SIRY e di PORRO.

Le misure furono fatte sul viale del Re, misurando con portate variabili da 80 a 120 metri una lunghezza nota di $2476^m,14$.

Del primo tronco di tale linea sono stati ricordati i seguenti valori fatti da diversi osservatori:

849,645
849,615
849,585
849,480
849,455

nei quali lo scartamento tra il massimo ed il minimo valore è $0^m,190$; e quindi un errore relativo di circa $\frac{1}{4470}$.

Fu questo il più rimarchevole progresso della diastimometria ottica fino a quel tempo e si mantiene anche ai nostri giorni.

Perfezionato il metodo di misurare le distanze col cannocchiale e colla stadia, conveniva altresì modificare gli strumenti per le misure angolari abolendo i *grafometri* e le *bussole topografiche* che allora e da molto tempo si usavano. Il teodolite era già stato inventato fin dal 1787, lo si adoperava correntemente in Inghilterra nei lavori topografici o di Geodesia elementare; in Germania abilissimi artefici ne costruivano perfezionandolo pei lavori geodetici; esso dunque era l'istrumento più indicato. Conveniva aumentare la potenza del cannocchiale onde renderlo adatto alle misure delle distanze ed adoperare la graduazione centesimale dei suoi circoli come la più facile tanto alla lettura quanto al calcolo numerico. Ne nacque così un istrumento nuovo per le operazioni topografiche che fu detto *Tacheometro* ed un sistema di rilevamento per coordinate rettangolari che fu detto TACHÉOMÉTRIE in Francia e CELERIMENSURA in Italia.

Ignazio Porro nel 1825 fu promosso Capitano del Genio Militare e, esperto più d'ogni altro nei lavori geodetici (1), fu

(1) Non risulta che il Porro avesse preso parte ai lavori geodetici del parallelo medio, eseguiti negli anni 1821-22-23, giacchè della Commissione mista, incaricata dei lavori geodetici ed astronomici, facevano parte i Piemontesi: *Cav.* D'ISASCA, *Colonnello*; *Cav.* PORRINO, *Capitano*; *Cav.* PLANA,

scelto quale direttore dei lavori geodetici preliminari pel rilevamento generale del Ducato di Genova.

Tali lavori furono eseguiti nel 1831 da lui e da alcuni ufficiali del Genio. Il rilevamento fu poi eseguito sotto la sua direzione da semplici soldati, cui furono date alcune lezioni dallo stesso Capitano Porro nel 1834.

Tale lavoro, cominciato il 3 gennaio 1835, terminò 30 mesi dopo. Il risultato fu tale che in un dispaccio ministeriale del 1842 fu qualificato *inarrivabile monumento dell'arte.*

Nel 1836 fu promosso Maggiore nel medesimo Corpo e nel 1842 chiese l'aspettativa.

Libero dagli obblighi del servizio militare, fondò a Torino una officina ottico-meccanica nella quale si dovevano costruire non solo gli strumenti per la Geodesia ma anche per quanto può avere attinenza coi progressi della ingegneria e delle industrie: *dal turbine di Fourneyron*, com'egli diceva, *al cannocchiale dell'astronomo.* Il suo nome era già noto favorevolmente ed il suo merito era già riconosciuto anche fuori dell'ambiente militare. Fin dal 1839 aveva già pubblicato il suo *Essai sur les moteurs hydrauliques*, nel quale aveva proposto una turbina che per quel tempo era una innovazione, e nel 1845 fu incaricato dal Ministro conte di Pralormo di riferire sul progetto di Médail di un traforo delle Alpi Cozie al colle di Fréjus. In tale occasione egli ebbe per primo l'idea di impiegare l'aria compressa allo scavo della galleria ed al moto delle perforatrici. Cotesta idea fu più tardi attribuita all'ingegnere Piatti e messa in esecuzione dagli ingegneri Sommeiller, Grattoni e Grandis.

Quella officina meccanica però non trovò a Torino terreno propizio e fu dal Porro abbandonata nel 1847. Nello stesso anno, dietro sua domanda, fu collocato a riposo col suo grado di Maggiore del Genio e si trasferì a Parigi, dove più tardi,

---

Astronomo; *Car.* CASTELBORGO, *Luogotenente*, come risulta dalla nota a p. 16 del 1° volume dell'opera: *Opérations Géodésiques et Astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle moyen exécutées en Piémont et en Savoie par une Commission composée d'officiers de l'État major général et d'Astronomes Piémontais et Autrichiens en 1821-1822-1823* (A Milan. De l'imprimerie impériale et royale, 1825).

sotto l'ègida ed in parte col danaro del conte Eugenio di Richemont, fondò l'*Institut Technomatique.*

Ivi per ben 12 anni si svolse la sua fenomenale attività occupandosi di svariati argomenti, per la maggior parte relativi a questione di Ottica applicata alla Geodesia ed all'Astronomia. Le sue geniali invenzioni lo fecero ben presto conoscere ai dotti ed in un paese dove erano ed erano stati insigni costruttori meccanici, tra i quali il famoso Gambey da poco defunto, si distinse come scienziato e come costruttore di strumenti geodetici.

Il primo suo libro, *La Tachéométrie* citata avanti, è un'opera magistrale e di una chiarezza ammirabile. In esso sono date le fondamenta del nuovo metodo di rilevamento da lui propugnato e tutte le norme che debbono essere adoperate nella pratica. Con pochissime note ed aggiunte potrebbe essere riprodotto attualmente e sostituito con vantaggio a molti trattati di celerimensura venuti dopo. E quanta modestia! A pag. 10 sta scritto:

A part le stéréogonisme de la lunette, la nouvelle méthode ne contient aucune chose entièrement nouvelle, l'ensemble seul est nouveau et il n'est pas étonnant qu'on ne l'ait jamais tenté, puisque pour cela faire il aurait fallu vaincre des difficultés qui de prime abord paraissaient insurmontables et qu'on n'était pas tenté d'aborder, qu'il aurait été même inutile de résoudre, tant que l'élément le plus essentiel de toute opération géodésique, la distance, ne pouvait s'obtenir que par les moyens, et avec le degré d'exactitude jusqu'ici connus.

La maggior parte degli istrumenti che si adoperarono nel Piemonte ed in Francia pel rilevamento *tacheometrico* avevano il cannocchiale *stereogonico*, mediante il quale le distanze misurate erano contate dal centro ottico della lente obbiettiva. Conveniva, ed era già stato notato fin dal 1824, che le distanze fossero contate dal centro del circolo azimutale dello strumento adoperato. Questo nuovo perfezionamento fu introdotto colla costruzione del cannocchiale *centralmente anallattico* (1), cioè col cannocchiale avente l'obbiettivo composto di due lenti convergenti, tali che il primo fuoco principale (punto anallattico) del

(1) Vedi nota (*b*).

sistema composto coincideva col centro del circolo orizzontale dell'istrumento di cui faceva parte. Il cannocchiale stereogonico, che non era altro che un cannocchiale, avente il punto anallattico nel centro ottico della lente obiettiva, sparì per sempre. Insieme al cannocchiale centralmente anallattico il Porro costruì il cannocchiale *Stenallattico*, che dava le distanze alla stadia ridotte all'orizzonte per qualunque inclinazione (tra certi limiti) dell'asse ottico del cannocchiale. Questa, in verità, fu anche una geniale sua invenzione, che però non corrispose alla buona pratica, ed il Porro stesso dopo alcuni anni scrisse queste parole: *Lo stenallattismo non è che una ingegnosa invenzione perfettamente inutile nella seria pratica* (1).

Dal libro suddetto si potrebbe dedurre che il cannocchiale *centralmente anallattico* non fu fatto prima del 1850, poichè in esso non se ne parla affatto. Ciò però non è esatto se si tien conto di una Memoria dell' Ingegnere De Sénarmont stampata nel 1849 negli *Annales des mines* (2).

Tutti quelli che hanno parlato di Porro non hanno mai accennato alla soluzione di un problema pratico importantissimo: *l'accorciamento del cannocchiale*, che egli fece fin dal 1850 per mezzo di prismi a doppia riflessione. Egli *piegò la distanza focale* in due o tre parti e fece dapprima il *longue-vue cornet* e più tardi nel 1855 il *longue-vue Napoléon III*, amendue dedicati all'esercito francese e comodissimi a portarsi anche da soldati a cavallo (3). Questi utilissimi ed elegantissimi cannocchiali erano quasi ignorati in Italia e del tutto dimenticati in Francia. Ci è voluta l'esumazione di essi fatta dalla celebre Casa Zeis di Jena, che li ha ridotti a *binoculi prismatici*, perchè essi fossero ora noti ed apprezzati in tutto il mondo. Eppure essi sono meno eleganti di quelli di Porro!

Fatevi avanti, o costruttori italiani, e rendete giustizia po-

---

(1) Cfr. *Applicazioni della Celerimensura*, Firenze, 1862, p. 140.

(2) Vedi nota (*c*).

(3) Cfr. N. Jadanza, *Teorica dei cannocchiali*, 2ª edizione (Casa editrice Ermanno Loescher, 1906). Il Porro, in una udienza particolare accordatagli il 22 febbraio 1855, presentò a S. M. l'Imperatore Napoleone III due di codesti nuovi cannocchiali, dei quali uno era montato e decorato con lusso, l'altro semplice.

stuma a quest'uomo di genio, costruendo un binoculo che si possa facilmente tenere con una mano sola accoppiando due *longue-vue Napoléon III*! L'impresa non è difficile e sarà certamente rimunerativa.

La più importante delle operazioni pratiche della Geodesia è certamente la misura di una *base*; si comprende quindi che la massima attenzione sia stata rivolta in tutti i tempi alla scelta degli apparati con cui tale misura doveva essere eseguita (1). L'apparato ideato dal Porro diversifica da tutti gli altri per avere adoperato *una sola asta di misura con divisioni ai suoi estremi*, mediante la quale si misura la distanza tra gli assi di microscopi allineati lungo la base.

Il primo suo apparato, quello con cui fu misurata la piccola base del *Luxembourg* (2), fu costruito sotto la sua direzione dalla Casa Lerebours.

Esso aveva l'asta di misura di legno di abete inverniciato e cotto nell'olio di lino, perchè il legno preparato con tale diligenza era *quasi* inalterabile alle variazioni di temperatura e di umidità. Il metodo e l'apparato di Porro furono esaminati da una Commissione che nel suo rapporto presentato nel 1850 all'Accademia Francese delle Scienze disse:

" Les appareils de M. Porro, destinés à la mesure des bases,
" sont simples, ingénieusement conçus, d'un usage très com-
" mode, d'un prix peu élevé et d'un transport facile en tout
" pays; ils offrent ce précieux avantage qu'on peut, sans une
" grande dépense et en peu de temps, mesurer la même base
" deux ou même trois fois. Ces appareils peuvent être d'une
" grande utilité dans la pratique de la géodésie. Le Mémoire

---

(1) Per avere una idea di quasi tutti gli apparati adoperati nelle diverse epoche per la misura di basi geodetiche si consulti la interessante Memoria del Dottor Ingegnere Carlo Daviso, avente per titolo: *Sugli apparati di misura delle basi geodetiche* (" Rivista di Topografia e Catasto ", vol. IX, 1896).

(2) Codesta base di soli 280 metri fu misurata da aiutanti del Genio militare francese, sotto gli ordini del colonnello Leblanc, professore di Geodesia alla Scuola Politecnica e sotto la direzione di Porro. Essa non aveva altro scopo che quello di procurarsi un campione per le esperienze che poi si dovevano fare colla stadia.

" qui en contient la description sera consulté avec avantage
" par ceux qui auront besoin de mesurer une base géodésique.

" Nous proposons à l'Académie d'accorder son approbation
" aux appareils de M. Porro, et d'ordonner que le Mémoire qui
" en renferme la description soit inséré dans le *Recueil des Sa-*
" *vants étrangers.*

" Les conclusions de ce Rapport sont adoptés „ (1).

Il primo ad applicare alla misura di una base *gli strumenti novellamente inventati dal Sig. Porro, grandemente lodati dall'Accademia delle Scienze di Parigi per la loro semplicità, economia e precisione dei risultati che promettevano,* fu l'astronomo P. Angelo Secchi, che misurò la celebre base della via Appia in Roma con un apparato costruito appunto dal Porro. Tale misura fu fatta dal 2 novembre 1854 al 26 aprile 1855 (2).

L'asta di misura, per maggiore esattezza, fu fatta di due verghe metalliche, una di ottone e l'altra di ferro, collocate parallelamente e quasi a contatto in tutta la loro estensione; le loro dimensioni erano in tutto perfettamente eguali.

Fu in questa occasione che Porro costruì per la prima volta il suo cannocchiale *panfocale.* Ecco la descrizione che ne fa il P. Secchi a pag. 55 dell'opera citata.

" L'apparato ottico del microscopio è di una costruzione
" speciale e nuova detta dall' inventore *panfocale,* perchè può
" variarsi la lunghezza del suo foco da pochi centimetri fino
" all'infinito, e da microscopio trasformarsi in telescopio. L'in-
" venzione di questo pezzo è veramente degna dell'alta impor-
" tanza che gode l'autore, e può dirsi un nuovo passo impor-
" tante fatto fare all'ottica applicata alle misure, onde col
" medesimo strumento abbiamo potuto vedere le fasce di Giove
" e i suoi satelliti, e leggere le graduazioni della tesa in decimi
" di millimetro a un decimetro di distanza dall'obbiettivo, ed
" osservare qualsiasi oggetto a qualunque distanza.

---

(1) Cfr. *Comptes rendus des séances de l'Acad. des sciences,* tome XXXI, pp. 240-241, Paris, 1850 (la Commissione era composta dai signori Binet, Faye e Largetau).

(2) Cfr. *Misura della base trigonometrica eseguita sulla via Appia per ordine del Governo Pontificio nel 1854-55 dal* P. A. Secchi D. C. D. G. (Roma, tipografia della Rev. Cam. Apostolica, 1858).

" L'obbiettivo e l'oculare sono posti a distanza invariabile, " che è di $0^m,34$. Il primo ha un diametro di $0^m,025$ e una lun- " ghezza focale di $0^m,364$; l'oculare, assai forte, è del genere " dei positivi, e considerato come microscopio semplice ingran- " disce circa 23 volte. Nel foco dell'oculare è il reticolo, for- " mato di cinque fili finissimi di ragno posti con gran precisione " paralleli, e quasi esattamente equidistanti; attraverso a questi " ve ne è un sesto ad angolo retto. Fra il reticolo e l'obbiet- " tivo inferiore scorre entro il tubo, mediante una cremagliera, " un secondo obbiettivo, che ha per ufficio di variare la lun- " ghezza focale dello strumento. onde, come si è detto, può esso " trasformarsi da telescopio in microscopio. Il diametro di questo " secondo obbiettivo è di 12^{mm} circa, e la lunghezza focale di " $0^m,093$ ".

Non soltanto l'Accademia delle Scienze, ma anche il Ministro dei Lavori pubblici nominò una Commissione per esaminare gli strumenti del Porro e la Memoria da esso presentata col tilolo: *Sur de nouveaux instruments et procédés de géodésie, de nivellement et d'arpentage*; par M. Porro, Officier supérieur du Génie piémontais.

Tale Commissione era composta dai Signori Mary, De Sénarmont, Grenet et Lalanne (relatore) (1). Dall'estratto del Rapporto presentato al Ministro dei Lavori pubblici togliamo quanto segue:

" Ce qui nous a le plus vivement frappés lorsque nous " avons manié par nous-mêmes les divers instruments soumis à " notre examen, c'est l'extrême facilité des mouvements, la ma- " nière simple et commode dont tous les organes en sont dis- " posés, l'attention avec laquelle les chances d'erreur ont été " évitées, la prévoyance qui a présidé à la confection des moindres " détails. Toutes ces qualités ne pouvaient être que le fruit " d'une longue pratique sur le terrain, guidée par une sûre " théorie et par une connaissance approfondie de la construc- " tion des instruments d'optique et de précision. Ces conditions " si diverses se trouvent rarement dans un même homme. " M. Porro, par l'invention de ses nouveaux procédés, a prouvé " qu'il les réunit toutes.

(1) Cfr. *Annales des Ponts et Chaussées*, 3e série, 1852, 2e semestre.

" Nous pensons donc, monsieur le ministre, que l'admini-
" stration doit accorder une pleine et entière approbation aux
" instruments et procédés de M. Porro. Mais son rôle, suivant
" nous, ne doit pas se borner à une approbation pure et simple.
" L'introduction dans la pratique journalière des procédés de
" M. Porro, nous parait un progrès trop notable, trop utile à
" la bonne et prompte exécution des projets, pour que nous ne
" vous proposions pas de faire quelque chose de plus. L'ensei-
" gnement dans les écoles des ponts et chaussées et des mines
" devra s'étendre dorénavant aux noveaux procédés, les élèves
" devront être exercés à la pratique des nouveaux instruments.
" De plus il est utile que parmi les ingénieurs qui ont actuel-
" lement à faire des études sur le terrain, il y en ait qui soient
" chargés par l'administration de soumettre à une épreuve jour-
" nalière et longtemps prolongée les instruments et les procédés
" de M. Porro. En conséquence, monsieur le ministre, nous avons
" l'honneur de vous proposer:

" 1° D'accorder votre approbation aux instruments et
" procédés d'arpentage, de nivellement et de géodésie que vous
" a présentés M. Porro ;

" 2° De faire insérer le Mémoire descriptif de M. Porro
" dans les *Annales des ponts et chaussées* et au moins par extrait
" dans les *Annales des mines*;

" 3° De faire déposer dans la collection des modèles de
" chacune des deux écoles des ponts et chaussées et des mines
" un théodolite olométrique de la plus grande puissance avec
" ses accessoires, y compris la mire stadia; plus le système
" complet des appareils propres à la mesure des bases;

" 4° De commander trois autres théodolites de dimen-
" sions différentes, destinés à être suivis et étudiés par les in-
" génieurs ayant un gran nombre d'opérations à faire sur le
" terrain ".

Non poteva il Porro ottenere maggior considerazione da uomini così distinti ed illuminati. La Tacheometria però non ebbe in Francia la sua popolarità per tali elogi, bensì per la iniziativa di un pratico distinto, che fu l'ing. Isidoro Moinot (1).

---

(1) Cfr. nota (*d*).

Questa Memoria ha per noi una grande importanza, poichè in essa troviamo tutti i perfezionamenti ottici fatti dopo il cannocchiale stereogonico, come il cannocchiale stenallattico, un apparecchio a prismi per eliminare l'eccentricità dell'alidada, il meroscopio panfocale e, ciò che più c'interessa, la sua teoria del cannocchiale anallattico, che è alquanto differente da quelle comunemente esposte (1).

Gli strumenti presentati dal Porro alla Commissione anzidetta erano stati costruiti nell'*Institut Technomatique* sito in Boulevard d'Enfer, n. 10. Essi però non avevano quella praticità che occorre nei lavori topografici di campagna, affidati per lo più a gente non avvezza a maneggiare istrumenti delicati. Egli aveva compreso ciò; di qui una serie di modificazioni ed una serie di strumenti nuovi con nomi differenti. Alcune di tali modificazioni in allora non ebbero seguito, sebbene più tardi siano state trovate utili; altre, benchè teoricamente esatte, erano difficilissime ad essere ottenute nella pratica e non perfettamente necessarie.

Fra le prime citeremo la *tmesitomia* del Cappello (2), che da qualche tempo è stata messa in pratica dal costruttore Heyde di Dresda. Fra le seconde citeremo la costruzione dei circoli graduati in vetro, il cui indice di rifrazione fosse precisamente eguale a 2, e ciò unicamente per éliminare l'errore dovuto alla eccentricità dell'alidada!

Nè parleremo di quegli istrumenti da lui ideati ma non eseguiti nè allora nè poi, p. es., il *rectografo anapneumatico*, il cui scopo è quello di determinare la curvatura del geoide in qualunque sezione verticale per mezzo di osservazioni fatte su distanze non maggiori di alcune centinaia di metri, e l'apparecchio

---

(1) Cfr. nota (*e*).

(2) Giuseppe Cappello, meccanico della R. Accademia delle Scienze di Torino (dal 1802 al 1818), fu il primo ad applicare agli strumenti di precisione la *tmesitomia* intagliando intorno al lembo di un teodolite dei denti o tacche ad intervalli di un grado intero e ad aggiungere un ingegnoso meccanismo che serviva ad un tempo ad imprimere al cannocchiale un movimento lento e a dare i minuti ed i secondi. Con ciò era eliminato l'errore dovuto alla eccentricità dell'alidada.

Cfr. anche N. Jadanza: *Un precursore di Heyde nella costruzione dei teodoliti a circoli dentali* („ Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino „, vol. XLIV, 1909).

per la *fotografia sferica*. A proposito di quest'ultimo è utile riportare dal libro *Fotogrammetria* del compianto ingegnere P. Paganini (Milano, 1901, editore Hoepli) quanto dice a pag. 3.

" Già nel 1855 il prof. Porro si occupava dell'applicazione
" della fotografia alla geodesia e proponeva, il primo in Italia,
" un apparecchio fotografico da servire alla topografia; disgra-
" ziatamente morì mentre appunto attendeva fervidamente al-
" l'applicazione pratica della fotografia alla celerimensura. L'ap-
" parecchio del Porro consisteva in una camera oscura munita
" di un obbiettivo sferico con vuoto interno da riempirsi d'acqua
" e traversato verticalmente da un diaframma, precisamente
" come l'obbiettivo che molto tempo dopo prese il nome di
" Sutton; la superficie focale della camera oscura era pure sfe-
" rica e il suo centro coincideva con quello dell'obbiettivo. Ri-
" mane del Porro una memoria che ha per titolo: *Applicazione*
" *della fotografia alla geodesia*, inserita nel periodico ' Il Poli-
" tecnico, (X e XI volume, tipografia Saldini, Milano). Gli ap-
" parati tutti di cui il Porro si servì per i suoi tentativi furono
" scrupolosamente conservati all'Officina Filotecnica di Milano
" dal suo direttore Ing. Salmoiraghi... „.

Nel 1857 ebbe l'ardire di tentare la costruzione di un obiettivo acromatico dell'apertura di 52 centimetri e di distanza focale di 15 metri: *la plus grande lunette du monde.* Con tale obbiettivo, ma con diametro ristretto, furono fatte alcune fotografie dell'eclisse di sole del 15 marzo 1858 in collaborazione col QUINET; esse furono molto lodate dall'astronomo Faye, che le presentò all'Accademia delle Scienze di Parigi nella seduta del 12 aprile seguente. In un tempo in cui in nessun osservatorio astronomico del mondo esistevano cannocchiali, il cui obbiettivo raggiungesse il diametro di 40 centimetri, tale impresa fu giudicata temeraria, ed infatti essa non riuscì.

A pagina 175 del libro citato del Laussedat si trova una nota in cui è detto:

" Il s'était hasardé pourtant à entreprendre d'exécuter, pour
" l'Observatoire de Paris, un objectif de 0^m,52 de diamètre,
" mais s'était vu obligé de reconnaître que la tâche était au-
" dessus de ses forces. L'auteur de cette Notice en sait quelque
" chose; chargé par le Ministre de l'Instruction publique, M. Rou-
" land, de se rendre compte de l'état d'avancement du travail

" de cet objectif, et après une longue visite dans les ateliers
" de Porro, il avait conseillé à celui-ci de ne pas continuer un
" travail auquel il était mal préparé. Sur son rapport, dans
" lequel il faisait ressortir le mérite du savant ingénieur, bien
" supérieur à celui de l'artiste, le Ministre avait consenti à
" exonérer Porro des engagements qu'il avait pris et lui avait
" même accordé une indemnité pour l'outillage dont il avait fait
" l'acquisition et pour le temps qu'il avait passé à travailler
" le verre, qu'il rendit d'ailleurs à l'Observatoire... „.

Fra gli strumenti costruiti ed inventati dal Porro citeremo i seguenti:

Il *Polemometro* per uso militare (una specie di telemetro), che fu un perfezionamento della *Staza* di Alberti; il *prisma squadro ed allineatore*; l'*oculare* per osservazioni nadirali; un *eliometro*, mediante il quale si può guardare il sole senza vetri colorati, ed il *Polioptometro*, che serve non solo a misurare gli angoli dei prismi di cristallo, ma anche a misurare l'indice di rifrazione ed il potere dispersivo dei cristalli che si adoperano negli strumenti ottici (1).

Il Porro non riuscì ad impiantarsi stabilmente a Parigi, sebbene abbia avuto il favore ed il concorso di capitalisti potentissimi. Egli volle essere scienziato e direttore d'industrie; ma mentre aveva le qualità del primo, non possedeva quelle del secondo.

Uno dei principali requisiti che deve avere un'innovazione quando è data in dominio del pubblico, dev'essere una relativa immobilità; allora soltanto può essere proficua per coloro che espongono i proprii capitali, non certo per amore della scienza, ma per averne un utile. Perciò alla fine del 1859 cessò di dirigere l'*Institut Technomatique*.

Egli aveva in animo di rientrare in Italia, già risorta a Nazione, collo scopo di prendere parte alla grande operazione della Perequazione della imposta fondiaria, che presto o tardi dovevasi eseguire. E vi si preparò. Nel 1860 furono pubblicate a Neully (2) tre Memorie aventi per titolo: *Étude sur le cadastre*

---

(1) Per la descrizione del *Polioptometro* cfr. Salmoiraghi: *Strumenti e metodi moderni di Geometria applicata* (Milano, 1907), p. 886.

(2) Typographie de Guiraudet, 2, place de la Mairie, 1860.

des terres; *Sur les hypotèques et l'enregistrement des actes publics et sur la péréquation de l'impôt foncier*; *Projet de loi sur un dépôt général de la foi publique.* Di queste tre Memorie erano autori: Félix de Robernier, Président à la Cour Impériale de Montpellier; Ignace Porro, ancien officier supérieur du génie; Félix Porro, ancien administrateur. Una quarta Memoria era un'appendice alla memoria d'Ignazio Porro, ed aveva per titolo: *De la tolérance en agrimétrie*, par Joseph Porro (neveu), ingénieur civil (1).

Nell'agosto 1861 rientrò in Italia e si stabilì a Firenze.

Dietro sua istanza ai Ministri di quel tempo, nella quale aveva domandato si esperimentasse il metodo tacheometrico, venne una disposizione in data 16 dicembre 1861, colla quale si instituiva un corso straordinario di Celerimensura nel R. Istituto Tecnico di Firenze, avente lo scopo di formare buon numero di geometri operatori per la progettata esperienza e qualche professore atto a propagare in altre provincie italiane il medesimo insegnamento, e facilitare così la formazione, a suo tempo, del personale per la nuova misura generale altimetrica e parcellaria di tutta Italia. Una seconda disposizione ministeriale autorizzava la utilizzazione delle officine di quell'Istituto alla costruzione degli strumenti.

Così nacque il libro: *Applicazione della Celerimensura alla misura generale parcellaria ed altimetrica dell'Italia — Creazione del Gran Libro Fondiario* (2).

In questo libro, al capo VI, intitolato: *Forme, combinazioni e progresso negli strumenti di celerimensura dal 1821 al 1870*, si trova la storia di tutte le modificazioni apportate agli strumenti nel suo soggiorno a Parigi; da esso si comprende bene la *malattia* che aveva il Porro, la incontentabilità e la continua premura per la ricerca di uno strumento che si potesse mandare in tutto il mondo senza pericolo di guasto e nello stesso tempo fosse di facile maneggio.

Il tentativo di formare a Firenze il futuro personale del Catasto e gli strumenti relativi non riuscì, e nell'anno scola-

---

(1) L'Ingegnere Giuseppe Porro fu per molto tempo distinto impiegato al Municipio di Torino; morì due anni fa.

(2) Firenze, 1862 (coi tipi di Giuseppe Mariani).

stico 1863-64 il Porro si trasferì a Milano, dove da Francesco Brioschi fu accolto come professore di Celerimensura in quell'Istituto Tecnico Superiore. A Milano, insieme ad alcuni meccanici e capitalisti, fondò una nuova officina ottico-meccanica col nome di *Tecnomasio Italiano*; ma questa non ebbe miglior fortuna.

" Porro (è lo Schiaparelli che parla), come mente direttrice, " voleva imporre esclusivamente i suoi metodi, i suoi strumenti, " le sue nuove invenzioni. I suoi collaboratori ed associati vo- " levano bensì che il Tecnomasio diventasse celebre per l'abi- " lità del suo Direttore e per la maggior varietà e perfezione " dei suoi prodotti, ma non intendevano che un soffio distrut- " tore mettesse d'un tratto fuori d'uso gli strumenti ed i me- " todi anteriori, confermati dall'esperienza d'una pratica seco- " lare: volevano insomma evoluzione e non rivoluzione, volevano " inventare e progredire sì, ma anche nel medesimo tempo " avere un compenso del loro lavoro e riscuotere qualche inte- " resse dei loro capitali. Porro si separò dai suoi colleghi, e " coll'aiuto di alcuni altri suoi amici e fautori, impiantò solo, " e per suo conto, la sua quarta officina, da lui chiamata *Filo-* " *tecnica* ".

Fu in questa officina che potè nel 1867 essere realizzato il suo sogno accarezzato da molto tempo, la costruzione cioè di un istrumento che potesse essere dato nelle mani di tutti e fosse meno degli altri soggetto agli strapazzi di campagna. Egli aveva fin dal 1855 a Parigi esposto un circolo metallico di soli 35 millimetri di diametro diviso in 4000 parti, ed ogni grado era numerato. Aveva anche costruito qualche tacheometro con circoli di vetro, i quali, per la loro fragilità, erano racchiusi in una scatola di bronzo. Questi due fatti determinarono in lui l'idea di costruire un tacheometro a circoli piccoli e nascosti, che fu chiamato Cleps.

Anche questa officina non prosperò molto e per mancanza di mezzi pecuniarî e per la sua poca attitudine amministrativa. Affranto dagli anni e dalla malferma salute; l'officina, sua seconda vita, languente e deserta, Ignazio Porro cessò di vivere il giorno 8 ottobre 1875.

Attratto dalle idee del Porro, ammiratore del suo genio, un suo discepolo, che per lui aveva avuto ammirazione, rispetto

e venerazione, legò la sua vita con quella della Filotecnica. Dotato di quelle qualità amministrative che al Porro erano del tutto mancate, e nello stesso tempo della Scienza che dev'essere la face delle imprese di tal genere, l'Ingegnere ANGELO SALMOIRACHI, oggi Senatore del Regno, ha eretto il monumento più duraturo alla memoria di Porro. La *Filotecnica* ha fatto progressi giganteschi dopo il 1875 sotto la sua direzione, e non vi è a temere della sua prosperità. Da quell'officina l'Italia sarà emancipata dallo straniero per tutto quanto riguarda istrumenti ottici, istrumenti astronomici e geodetici, ed il nome di Porro sarà conservato all'ammirazione dei posteri.

Il Municipio di Pinerolo, per eternare la memoria del suo concittadino, pose nel 1902 nella casa dove nacque, in via del Pino, la seguente lapide (1):

PAOLO IGNAZIO PORRO
NATO IN PINEROLO IL 25 NOV. 1801
MORTO IN MILANO IL 10 OTT. 1875
GENIALE COSTRUTTORE DI STRUMENTI OTTICI
FONDATORE DELLA CELERIMENSURA
ILLUSTRÒ LA SCIENZA GEODETICA
ONORANDO LA PATRIA.

Torino, maggio 1916.

---

(1) Debbo alla cortesia dell'Ingegnere STEFANO CAMBIANO di Pinerolo le fotografie di Porro e della casa ove nacque. Secondo lo stesso ingegnere quel ritratto fu fatto a Parigi da un nipote di Porro a nome Felice. Nella lapide la data della morte è errata.

Delle singolari proprietà della calce sodata.

Nota IV del Socio ICILIO GUARESCHI.

Nelle tre Note precedenti [1], le quali costituiscono la Parte I di questo lavoro, riguardanti il modo di comportarsi di molti gas colla calce sodata, ho dimostrato che quasi tutti i gas più velenosi o irritanti gli occhi ed eccitanti la lacrimazione vengono rapidamente assorbiti. Dissi allora che avevo esteso questi studi anche ai vapori di molte sostanze liquide e solide, ed ora esporrò i risultati che ho conseguito, alcuni dei quali mi pare siano assai interessanti.

Parte II.

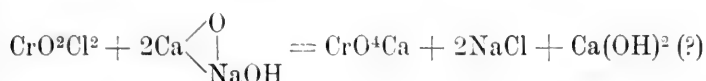
Azione della calce sodata sui vapori.

Lo studio dei gas sulla calce sodata mi portò, naturalmente, anche allo studio di quelle sostanze liquide o solide che nelle condizioni ordinarie emanano più o meno rapidamente e più o meno abbondantemente dei vapori. Io mi occupai specialmente di que' composti che hanno una azione tossica sull'organismo animale.

1. **Ossicloruro di cromo** CrO^2Cl^2. — Come è noto, l'ossicloruro di cromo o cloruro di cromile a temperatura ordinaria emette dei vapori rossi che somigliano a quelli del bromo; anch'essi sono molto irritanti. Già coll'acqua questi vapori si decompongono sciogliendosi con côlor giallo e dando acido cromico.

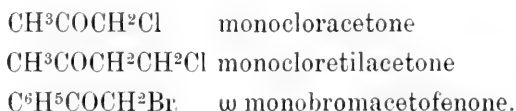
[1] *Delle singolari proprietà della calce sodata.* Note I, II e III in "Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino", 1915-1916, vol. LI.

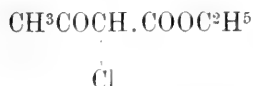
I vapori di ossicloruro di cromo sono rapidamente assorbiti dalla calce sodata, senza che si noti il passaggio di vapori acidi. Nei punti ove il vapore è assorbito si sviluppa calore e la calce sodata rimane colorata in giallo (cromati). Probabilmente reagisce nel modo seguente:

$$CrO^2Cl^2 + 2Ca\begin{matrix}/O \\ | \\ \backslash NaOH\end{matrix} = CrO^4Ca + 2NaCl + Ca(OH)^2\ (?)$$

2. **Cloruro di tionile** $SOCl^2$. — Questo composto, scoperto da U. Schiff, e che ora si fabbrica anche su vasta scala, è un liquido che possiede odore soffocante come quello del gas solforoso. Bolle a 77° e spande facilmente dei vapori. L'acqua e gli alcali lo decompongono facilmente. Era prevedibile che sarebbe decomposto subito dalla calce sodata. Ed invero, fatto passare attraverso la calce sodata insieme all'aria, sviluppa subito molto calore, al punto che non si può più toccare il tubo. Non si osserva però il fenomeno della incandescenza. Non ne passa traccia.

Derivati alogenici organici.

Sarebbe interessante uno studio metodico dei diversi derivati clorurati e bromurati organici. Esaminare di confronto ad esempio:

CH^3COCH^2Cl monocloracetone
$CH^3COCH^2CH^2Cl$ monocloretilacetone
$C^6H^5COCH^2Br$ ω monobromacetofenone.

E così pure i derivati alogenici degli eteri chetonici, quale ad esempio:

$$\begin{matrix}CH^3COCH.COOC^2H^5 \\ \quad | \\ \quad Cl\end{matrix}$$

composti che anch'essi hanno una grande azione irritante sugli occhi.

Io ho fatto delle esperienze con alcuni di questi composti ed ho dimostrato che molti di essi vengono assorbiti e decomposti dalla calce sodata già a temperatura ordinaria.

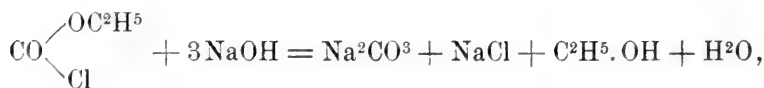
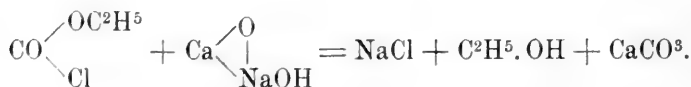
3. **Etere clorossicarbonico** $CO\langle^{OC^2H^5}_{Cl}$. — L'etere clorossicarbonico fu scoperto da Dumas [1] e lo descrisse come un liquido fluidissimo, incoloro, neutro, bollente 94°, peso specifico 1,133. Brucia con fiamma verde. Ha odore gradevole quando lo si respira nell'aria che ne convenga pochissimo, ma il suo vapore è soffocante e provoca la lacrimazione al massimo grado.

Per analogia coll'ossicloruro di carbonio, volli vedere come si comportava l'etere clorossicarbonico colla calce sodata, tanto allo stato liquido quanto allo stato di vapore. Mescolai 1 a 2 cm^3 di etere clorossicarbonico, bollente a 94°, con 10 gr. di calce sodata entro una boccetta. Dopo un certo tempo, circa 24 ore, l'odore irritante era scomparso. Ma l'etere clorossicarbonico è meglio decomposto allo stato di vapore. Attraverso un tubo ad **U** contenente 160 gr. di calce sodata fu fatto passare con corrente d'aria il vapore di 5-6 cm^3 di etere clorossicarbonico. L'etere clorossicarbonico è avidamente assorbito dalla calce sodata con sviluppo di calore. Nella parte opposta del tubo non passa affatto il vapore dell'etere clorossicarbonico; si sente un lieve odore etereo-alcolico. Anche la soluzione alcolica di nitrato d'argento non dà segno di cloro. La reazione probabilmente avviene così:

$$CO\langle^{OC^2H^5}_{Cl} + 3NaOH = Na^2CO^3 + NaCl + C^2H^5.OH + H^2O,$$

o meglio:

$$CO\langle^{OC^2H^5}_{Cl} + Ca\langle^{O}_{NaOH} = NaCl + C^2H^5.OH + CaCO^3.$$

---

[1] *Traité de Chimie*, 1835, t. V, p. 571 e " A. Ch. „ (2), t. 54, p. 225.

Nel caso dei gas detti asfissianti importava più conoscere come si comportasse allo stato di vapore che non allo stato liquido.

Ho ripetuto l'esperienza con una quantità molto minore di calce sodata (un tubo di 1,8 mm. e lungo 35, contenente 67 gr. di calce sodata) ed anche in questo caso veniva benissimo assorbito con sviluppo di calore. Anche quando la corrente d'aria era previamente disseccata attraverso l'acido solforico concentrato. Nelle stesse condizioni di lunghezza e larghezza del tubo, con 105 gr. di soda caustica in pezzetti, non si trattengono i vapori di etere clorocarbonico, passano subito col loro odore irritantissimo.

Ho esperimentato anche col carbonato sodico $Na^2CO^3.10H^2O$ e questo, benchè lentamente, assorbe anch'esso l'etere clorocarbonico. Ma indubbiamente è molto meglio assorbito dalla calce sodata.

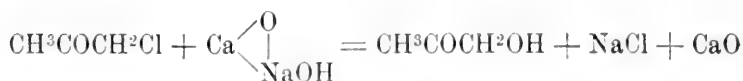
4. **Monocloroacetone.** — Il *monocloroacetone* CH^3COCH^2Cl è un liquido bollente a 119°, che manda vapori irritantissimi, eccitanti la lacrimazione.

Mescolando un poco di questo liquido entro boccetta con della calce sodata, la reazione si dimostra violenta; si sviluppa molto calore e la massa si colora in rosso rosa, mentre l'odore irritante scompare per dar luogo ad un odore gradevole. Forse si forma prima $CH^3COCH^2.OH$, il quale per condensazione darà luogo ad un dichetone.

Quando si fa passare una corrente d'aria prima attraverso al monocloroacetone, poi alla calce sodata contenuta in uno dei soliti tubi, questa si colora in rosso rosa e bruno, si scalda molto e dalla parte opposta del tubo si nota odore gradevole, che ricorda l'odore etereo alcolico e quello del mentolo.

La reazione colla calce sodata è molto più viva col monocloroacetone che non coll'etere monobromacetico.

La reazione fra monocloroacetone e calce sodata può avvenire nel modo seguente:

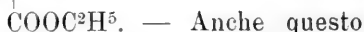
$$CH^3COCH^2Cl + Ca\begin{cases} O \\ | \\ NaOH \end{cases} = CH^3COCH^2OH + NaCl + CaO$$

susseguita dalla condensazione dell'alcol αchetonico per l'azione dell'eccesso della calce sodata.

La colorazione rossa che assume la calce sodata in presenza del vapore di monocloracetone è un mezzo semplice per verificare la presenza di questo vapore in presenza della corrente d'aria.

Era già noto che il monocloracetone si colora in rosso carminio colla potassa.

Il monocloroacetone non viene assorbito dal carbonato sodico cristallizzato $Na^2CO^3.10H^2O$. Dibattendo entro boccetta un poco di monocloracetone con un grande eccesso di carbonato, rimane inalterato. Anche se fatto passare in vapore attraverso un lungo strato di carbonato in minuti cristallini. Un tubetto a calce sodata serve benissimo per vedere se il monocloracetone passa inalterato, perchè colora in rosso la calce sodata. Dunque la calce sodata, e non i carbonati, può servire ad assorbire questo vapore irritantissimo.

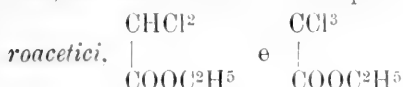
5. ω**Bromoacetofenone** $C^6H^5COCH^2Br$. — Si ottiene in cristalli trimetrici. fusibili a 50°, il cui vapore irrita gli occhi ed eccita la lacrimazione. È dunque un lacrimogeno. Anche questo composto in vapore è fissato dalla calce sodata.

6. **Etere monobromoacetico** $\begin{array}{l} CH^2Br \\ | \\ COOC^2H^5 \end{array}$. — Anche questo etere è decomposto a temperatura ordinaria dalla calce sodata. Facendo passare il vapore di questo composto (bollente: 159°-160°) con corrente d'aria attraverso la calce sodata, viene fissato e non si sente più l'odore irritantissimo. nè si ha reazione del bromo dal gas che passa oltre la calce sodata.

Quando si agita un poco del liquido con della calce sodata, a poco a poco perde il suo odore irritante per assumere un odore etereo-alcolico.

L'etere rimane saponificato e certamente si forma dell'acido glicolico $CH^2OH.COOH$, che io non ho ricercato.

Il liquido contenuto in una piccola bomba proveniente dalle trincee francesi e datami dal prof. Issoglio veniva pure fissato dalla calce sodata ed il prof. Issoglio riconobbe che quel liquido era costituito da etere monobromacetico puro.

Invece, facendo passare il vapore di questo composto attraverso un tubo contenente 150 gr. di soda caustica in piccoli frammenti, non è fissato e passa oltre. Dunque la calce sodata si comporta anche in questo caso in modo ben diverso.

Già a temperatura ordinaria, e con sviluppo di molto calore, la calce sodata decompone anche gli *eteri bicloro* e *tricloroacetici*, $\begin{array}{c} CHCl^2 \\ | \\ COOC^2H^5 \end{array}$ e $\begin{array}{c} CCl^3 \\ | \\ COOC^2H^5 \end{array}$

7. **Etere monocloroacetacetico** $CH^3COCH(Cl).COOC^2H^5$. —

L'etere αmonocloroacetacetico è un liquido incoloro che col tempo ingiallisce e poi imbrunisce. Bolle 193°. Il suo odore in principio sembra etereo, poi pungente e persistente, assai irritante agli occhi.

Quando lo si mescola colla calce sodata reagisce vivamente con sviluppo di molto calore.

2 cm^3 di questo etere versati su 5 gr. di calce sodata sviluppano molto calore e la calce sodata si colora in rosso bruno, ma poi si decolora.

2 cm^3 versati su 5 gr. di KOH in pezzetti sviluppano pure del calore ma *molto meno* che non colla calce sodata; si colora solamente in giallo, poi in bruno e rosso scuro, quasi nero permanente.

2 cm^3 di questo liquido furono fatti passare in vapore, con corrente d'aria secca, attraverso 65 gr. di calce sodata in tubo di 2 cm. per 35-40 cm. Viene assorbito bene e non passa. Anzi versando ancora 2 cm^3 di etere monocloroacetacetico sulla calce sodata della branca sinistra del tubo, poi facendo passare dell'aria in rapida corrente anche per 5 minuti, non passa traccia di etere. Tutto viene decomposto.

Dunque, *la calce sodata serve benissimo per assorbire anche questo etere lacrimogeno.*

Allora ho fatto una esperienza di confronto con la potassa.

Ho fatto passare una corrente d'aria, disseccata o no poco importa in questo caso, attraverso 4 cm^3 di etere monocloroacetacetico, poi attraverso un tubo della stessa lunghezza di quello adoperato precedentemente, ma del diametro di 1,8 e contenente 74 grammi di KOH in pezzetti e parte in polvere. L'etere

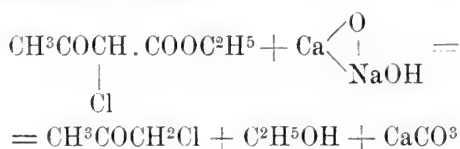
cloracetacetico forse in parte viene assorbito, ma passa anche oltre e si ritrova nell'acqua della boccia di Habermann che segue il tubo a potassa; fu riconosciuto all'odore e alla colorazione violetta col percloruro di ferro.

Ho inoltre fatto passare l'aria col vapore di etere cloracetacetico attraverso 57 gr. di soda caustica in pezzetti ed in polvere in un tubo di 1,5 cm. e pel percorso di 35 cm. circa e in parte passa. Dunque anche colla soda si fissa imperfettamente.

L'unico assorbente sicuro e pronto di questo etere è dunque la calce sodata.

L'etere monocloracetico se subisse colla calce sodata la scissione chetonica nel senso di:

$$CH^3COCH(Cl).COOC^2H^5 + Ca\langle{}^{O}_{NaOH} =$$

$$= CH^3COCH^2Cl + C^2H^5OH + CaCO^3$$

darebbe il monocloracetone, che è fissato. Ma pare che la reazione non vada in questo senso, perchè la calce sodata non arrossa persistentemente come col monocloracetone. Forse, più probabile, si forma NaCl; cioè prima si stacca il cloro.

8. **Bromuro di bromacetile.** — Il bromuro di bromacetile $CH^2Br.COBr$ la cui costituzione corrisponde a quella dell'etere bromacetico viene assorbito e decomposto dalla calce sodata assai vivamente e rapidamente. Bolle a 149°-150° ed il suo vapore fatto passare con aria attraverso la calce sodata viene subito assorbito con sviluppo di calore.

Il bromuro di bromacetile liquido messo in contatto con calce sodata direttamente reagisce con grande violenza, la calce sodata arrossa e in principio si producono abbondanti fumi bianchi.

Derivati bromurati aromatici.

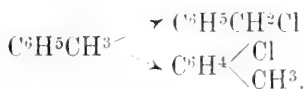
Ho esperimentato con cloro e bromoderivati di carburi aromatici contenenti l'alogeno nelle catene laterali oppure nel nucleo centrale. La differenza è notevole. Quelli contenenti l'alogeno nel nucleo centrale non vengono alterati dalla calce so-

data, o per meglio dire facendo passare il loro vapore con aria attraverso la calce sodata, si ottiene la reazione del bromo dalla parte opposta, il che vuol dire che il vapore non è fissato; mentre invece viene fissato il vapore e non si ha reazione del bromo quando l'alogeno è contenuto in catene laterali come $C^6H^5CH^2Br$ e $C^6H^4{}^{CH^2Br}_{CH^3}$.

Inoltre si può notare che i derivati bromurati aromatici dei carburi C^nH^{m-6} che contengono il bromo o il cloro nel nucleo centrale non hanno odore irritante nè eccitano la lacrimazione, o almeno l'azione è di molto minore: ad esempio, il *clorobenzene* C^6H^5Cl, il *dibromobenzene* $C^6H^4Br^2$, il *p. bromotoluene* $C^6H^4BrCH^3$, ecc. non irritano gli occhi e non hanno odore sgradevole; invece i derivati: *cloruro di benzile* $C^6H^5CH^2Cl$, *bromuro di benzile* $C^6H^5CH^2Br$, $C^6H^4{}^{CH^3}_{CH^2Br}$, *bromuro di xilile*, $C^6H^4(CH^2Br)^2$, *bromuro di xilenile*, ecc. hanno odore irritante ed eccitano la lacrimazione.

Ho provato tanto col *bromotoluene* $C^6H^4Br.CH^3$ liquido, quanto con quello *para* solido in bei cristalli; tuttedue avevano odore non irritante. Fatti passare in vapore nell'apparecchio sovraccennato, diedero subito indizio di bromo.

9. **Cloruro e bromuro di benzile.** — Il *bromuro di benzile* $C^6H^5CH^2Br$ è un liquido bollente a 210°, di odore irritante e che eccita la lacrimazione. Si prepara per l'azione del cloro sul toluene, nel qual caso si formano due isomeri:

$$C^6H^5CH^3 \begin{cases} \nearrow C^6H^5CH^2Cl \\ \searrow C^6H^4 \begin{matrix} Cl \\ CH^3. \end{matrix} \end{cases}$$

Sino dal giugno 1915 ho fatto qualche esperienza sull'assorbimento di questo composto colla calce sodata. Benchè lentamente, però viene assorbito.

Facendo passare l'aria con un aspiratore attraverso una boccia di Habermann contenente il bromuro di benzile, poi attraverso a un tubo contenente 130 a 140 gr. di calce sodata, solamente dopo il passaggio di molti litri di aria si notò la pre-

senza del bromo nel mio apparecchio per la ricerca del bromo nei prodotti bromurati volatili.

Il *cloruro di benzile* $C^6H^5CH^2Cl$, bollente a 176°, si comporta pressochè come il bromuro di benzile.

10. **Clorobenzol** $C^6H^5CHCl^2$. — È liquido incoloro, di odore lieve a freddo e acuto a caldo. I suoi vapori irritano vivamente gli occhi. Bolle verso 200°. Non si assorbe facilmente dalla calce sodata. Ma come composto lacrimogeno ha poca importanza.

Sul *fenilcloroformio* $C^6H^5.CCl^3$, bollente a 215-218°, di odore debole e non sgradevole, io non ho fatto delle esperienze.

11. **Bromuri di xililene (xylen bromuri) o di xilile.** — Io ho esperimentato con un campione di *bromuro di xilile grezzo.* Era un liquido colorato in scuro che irritava molto gli occhi ed eccitava la lacrimazione. Forse era costituito da una miscela di $C^6H^4\begin{matrix}\diagup CH^2Br\\ \diagdown CH^3\end{matrix}$ e $C^6H^4\begin{matrix}\diagup CH^2Br\\ \diagdown CH^2Br\end{matrix}$ [1].

---

[1] È da ricordare che lo xilene grezzo commerciale è una miscela di tre isomeri:

ortoxilene	$C^6H^4\begin{matrix}\diagup CH^3\\ \diagdown CH^3\end{matrix}$	boll.	142°
metaxilene	„	„	139°
paraxilene	„	„	138°.

Per l'azione del bromo sull'o. xilene boll. si ha il bromuro di o. xilile od ω bromoxilolo $C^6H^4\begin{matrix}\diagup CH^2Br\\ \diagdown CH^3\end{matrix}$ f. 21°, boll. 216°-217°, p. sp. 1.38 („ Radziszewski e Wispek Ber. „, XV, p. 1745 e XVIII, p. 1281).

Il *bromuro di p. xilile* $C^6H^4\begin{matrix}\diagup CH^2Br\\ \diagdown CH^3\end{matrix}$ bolle 218°-220° ed è in aghi fos. 35°.5. Il derivato meta bolle a 185°.

Il *bromuro di xilene o di tollilene p.* $C^6H^4\begin{matrix}\diagup CH^2Br\\ \diagdown CH^2Br\end{matrix}$ dal paraxilene bollente col bromo fonde a 143°.5 e bolle 240°-250° („ Grimaux Bull. „, 1870, XIV, p. 135). Il *bibromuro di m. xilene* f. a 77°; il *bibromuro di ortoxilene* f. a 94° e per distillazione si decompone.

Grimaux (loc. cit.) descrive il *bibromuro di tollilene* (para) $C^6H^4\begin{matrix}\diagup CH^2Br(1)\\ \diagdown CH^2Br(2)\end{matrix}$ come un composto cristallizzato fusibile a 145°-147°. Pare che questo corpo allo stato di purezza non abbia odore molto irritante, poichè Grimaux scri-

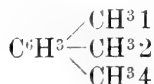
Impiego il mio apparecchio per la ricerca del bromo quale è descritto nella mia Nota I. Faccio passare il vapore di 2 a 4 cm^3 di bromuro di xilile, contenuto in un pallone, e mediante corrente d'aria attraverso un tubo ad U contenente 62 gr. di calce sodata. L'aria passa rapidamente. Il bromo non passa affatto, anche dopo 20 minuti. Allora tolgo il tubo a calce sodata e congiungo il pallone coll'apparecchio ad acido cromico e dopo nemmeno mezzo minuto si ha netta la reazione del bromo col mio reattivo.

Rifaccio l'esperienza mettendo 3-4 cm^3 di bromuro di xilile in una piccola boccia di Habermann, adoperando la stessa calce sodata di prima. Il bromo anche in questo caso non passa, benchè la corrente d'aria sia rapida ed il liquido passi direttamente in contatto della calce sodata. Ma passa subito non appena tolgo il tubo a calce sodata. La calce sodata si scalda un poco. Insieme all'aria passa l'odore del toluene o dello xilene o di catrame contenuti nel bromuro di xilile grezzo, ma questi vapori non irritano affatto gli occhi. *Dunque la calce sodata serve bene a fissare il vapore di bromuro di xilile grezzo.*

Ho ripetuta l'esperienza con altra calce sodata in piccoli granuli ed ottenni gli stessi risultati. Ho rifatta l'esperienza con calce sodata Kahlbaum, preparata almeno da un anno; non lo lascia passare se non in piccolissima quantità dopo un certo tempo.

Dunque in ogni caso è dimostrato che la calce sodata fissa benissimo il bromuro di xilile. Qui il bromo è nel gruppo — CH^2Br.

12. **Bromopseudocumene o bromuro di metilxilile.** — Il pseudocumene del catrame di carbon fossile è un miscuglio essenzialmente di vero *pseudocumene*:

$$C^6H^3\begin{cases} CH^3\,1 \\ CH^3\,2 \\ CH^3\,4 \end{cases}$$

e di mesitilene 1, 3, 5. Ma quello grezzo del commercio che bolle da 150° a 170° contiene ancora un poco di xilene. Per cui

veva: “ La préparation de ce corps est très pénible, car les bromures huileux “ qui se forment en même temps piquent horriblement les yeux „. Quando è puro, questo corpo non ha odore piccante che a caldo.

quando lo si tratta col bromo si hanno dei miscugli di derivati bromurati.

10 cm^3 di cumol grezzo del carbonfossile furono trattati con 13,8 gr. di bromo (1 mol.) versato a poco a poco; la reazione è vivissima con sviluppo di HBr. Ho avuto diversi prodotti che non irritavano molto gli occhi e sui quali non ho creduto utile proseguire delle esperienze.

Aldeidi.

Era importante fare delle esperienze anche con le aldeidi, specialmente con quelle molto volatili, perchè queste hanno tutte più o meno odore irritante, eccitano la lacrimazione e sono velenose.

13. **Acroleina** $CH^2 = CH.CHO$. — Quest'aldeide bolle a 52°,4, è solubile nell'acqua e nell'alcol; facilmente si trasforma e si resinifica. Il suo vapore irrita molto gli occhi e gli organi respiratori, e basta spanderne alcune goccie in un appartamento per renderne l'atmosfera insopportabile. Ha sapore bruciante.

Il suo vapore viene assorbito dalla calce sodata. Si può fare anche questo esperimento, che corrisponde alla depurazione dell'aria inquinata da prodotti della combustione e decomposizione delle candele di sego. Si riempia un pallone di vetro con i vapori che si sprigionano facendo bruciare incompletamente alcune candele di sego. Quel fumo, di odore nauseoso, irritantissimo, si faccia passare mediante aspiratore o un soffietto, attraverso a della calce sodata e subito si scorge che l'aria che passa è perfettamente inodora.

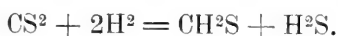
14. **Furfurolo** $\begin{matrix} CH = C.CHO \\ | \quad\quad\quad \rangle O \\ CH{=}CH \end{matrix}$. — Liquido giallognolo quasi incoloro, che all'aria imbrunisce.

Fatto passare con corrente d'aria sulla calce sodata, viene assorbito rapidamente, con sviluppo di calore anche quando la corrente di aria è rapidissima. Il suo migliore reattivo è una cartina imbevuta con acetato di anilina, la quale assume un color rosso fuoco scarlatto, anche con minime traccie di furfurolo (reazione di U. Schiff).

15. **Formaldeide.** — La formaldeide è fissata dalla calce sodata a temperatura ordinaria, ma forse meno avidamente dell'aldeide acetica. Fa d'uopo ripetere queste esperienze.

16. **Tioformaldeide** CH^2S. — Da solfuro di carbonio con zinco e acido cloridrico. Odore d'aglio acutissimo, nauseoso. È una reazione che io ho indicata già da lungo tempo per riconoscere anche delle traccie di solfuro di carbonio.

In un largo pallone di circa 2 litri ho messo un poco di solfuro di carbonio con alcuni pezzetti di zinco e poco acido cloridrico diluito. Agitando, a poco a poco si manifesta l'odore acuto, nauseoso, agliaceo della tioformaldeide. Quando il pallone era ben riempito del vapore di questa sostanza lo misi in comunicazione con un tubo a calce sodata e mediante una corrente d'aria feci passare il vapore puzzolento attraverso la calce sodata. Tutto fu assorbito e dalla parte opposta della calce sodata il gas era inodoro e non imbruniva più, nè la soluzione di nitrato d'argento nè quella alcalina di acetato di piombo. La reazione coll'idrogeno nascente, come è noto, avviene nel modo seguente:

$$CS^2 + 2H^2 = CH^2S + H^2S.$$

La calce sodata, dalla parte ove entra il gas, imbrunisce.

Se talora si sente un poco di odore dopo che il gas ha attraversato la calce sodata, è quello di un poco di solfuro di carbonio che non ha reagito.

Dunque anche *la tioformaldeide viene completamente e rapidamente fissata dalla calce sodata.*

L'*aldeide tritioformica* $(CH^2S)^3$ è solida, fusibile a 216°, ed inodora. Invece il gas CH^2S o liquido molto volatile che ottengo io riducendo il solfuro di carbonio, ha odore intensamente e tenacemente agliaceo.

17. **Aldeide acetica.** — Dumas e Stas studiarono l'azione della calce potassica a caldo sul vapore di aldeide acetica; notarono sviluppo di idrogeno e formazione di acido acetico.

Io ho osservato che quando si versa a goccia a goccia l'acetaldeide sulla calce sodata la reazione è vivissima; la calce

sodata arrossa e poi imbrunisce. Se si fa il miscuglio direttamente coll'aldeide liquida e la calce sodata, si sviluppa molto calore, l'aldeide bolle e la calce sodata rimane annerita. Anche facendo passare i vapori di acetaldeide in tubo con calce sodata, si fissano colorando la massa in bruno e con sviluppo di calore.

18. **Aldeide propilica.** — Fatta passare con corrente d'aria, in vapore, sulla calce sodata, viene da questa avidamente assorbita; la calce sodata si colora in bruno e sviluppa calore, ma meno che non l'aldeide acetica.

L'*aldeide isobutilica* in vapore sulla calce sodata a temperatura ordinaria passa inalterata.

Inutile il dire che il *cloralio* e il *bromalio* vengono prontamente decomposti dalla calce sodata.

Pirrolo, indolo e scatolo.

19. Il *pirrolo* $\begin{matrix} CH = CH \\ | \\ CH = CH \end{matrix}\!\!>NH$ fatto passare in vapore misto ad aria e alla temperatura ordinaria sulla calce sodata non viene fissato e passa inalterato. Se ne assorbe un'assai piccola quantità.

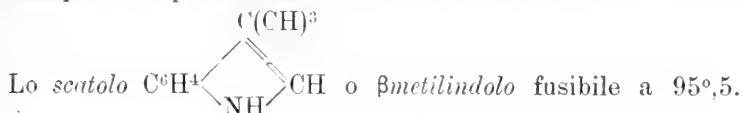
Invece l'*indolo* $C^6H^4\!<\!\begin{matrix} CH \\ NH \end{matrix}\!>\!CH$ è fissato dalla calce sodata.

Dell'indolo cristallizzato in bellissime lamine incolore fusibili a 52° fu posto in un tubo ad U e scaldato poco sopra il punto di fusione, poi mediante rapida corrente d'aria il suo vapore fu fatto passare attraverso un altro tubo ad U vuoto; il vapore di indolo naturalmente passò nell'acqua della boccia di Habermann che si mette sempre prima della pompa ad acqua, e fu riconosciuto alle sue reazioni coll'acido nitrico e nitrito potassico, ecc.

Colla stessa rapida corrente d'aria fu fatto passare il vapore di indolo attraverso un tubo contenente calce sodata recentemente preparata; allora nell'acqua della boccia di Habermann non si sentiva più l'odore dell'indolo nè dava le reazioni di questo.

Colla stessa corrente di aria fu fatto passare il vapore di indolo attraverso un tubo ricurvo contenente del *cloruro di calcio granulato* come la calce sodata, ma in questo caso il vapore di indolo passò oltre.

Dunque il vapore di indolo rimane fissato dalla calce sodata.

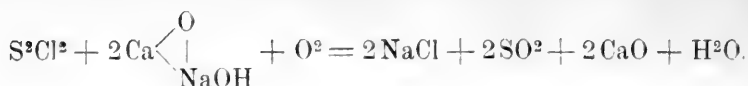
Lo *scatolo* $C^6H^4\langle C(CH)^3, NH \rangle CH$ o β*metilindolo* fusibile a 95°,5.

Io ho esperimentato con un piccolo campione di metilindolo commerciale detto sintetico, ma che in piccolissima quantità manifestava molto bene l'odore nauseoso, fecale. Mediante corrente d'aria e scaldando, ho fatto passare il suo vapore attraverso circa 25 gr. di calce sodata contenuta in un tubo ad U di 1,3 $\times$ 25 e restò fissato perchè l'acqua della boccia di Habermann che seguiva al tubo con calce sodata non aveva odore, col nitroprussiato e potassa non ingialliva nè per ebollizione con acido acetico diventava violetto. Fatte le reazioni di confronto con acqua e traccia di scatolo, le reazioni avvenivano bene.

Dunque anche lo scatolo rimane fissato dalla calce sodata.

20. **Bicloruro di solfo** S^2Cl^2. — Ho voluto esperimentare anche con questo composto. Questo prodotto si fabbrica in grande quantità specialmente per la vulcanizzazione del cautciù. È un liquido oleoso di colore giallo ranciato che all'aria spande fumi, con odore particolare sgradevole; però in principio ha un lieve odore etereo non sgradevole; ha sapore acido, amaro. Il suo vapore eccita la lacrimazione. Non conosco delle ricerche intorno alla sua azione fisiologica.

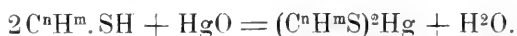
Quando si mescolano 2 cm^3 di cloruro di solfo con 10 gr. di calce sodata si sviluppa moltissimo calore, la calce si colora in verdognolo e dello solfo si rende libero, si forma dell'anidride solforosa che poi si combina colla calce sodata.

Anche facendo passare i vapori di S^2Cl^2 sulla calce sodata granulata e contenuta nei soliti tubi ad U da me adoperati si sviluppa molto calore e subito viene assorbito; si producono anche qui dello solfo e del gas solforoso che rimane fissato. Forse la reazione ha luogo nel modo seguente:

$$S^2Cl^2 + 2Ca\langle{}^{O}_{NaOH} + O^2 = 2NaCl + 2SO^2 + 2CaO + H^2O.$$

L'anidride solforosa viene poi rapidamente assorbita dalla calce sodata.

Mercaptani e tiofene.

I *mercaptani* o *tioalcoli* C^nH^mSH sono composti analoghi agli alcoli, sono alcoli solforati, ma che si distinguono dagli alcoli non solamente pel loro odore assai sgradevole, agliaceo, ma per la tendenza del gruppo SH a reagire coi composti dei metalli pesanti, e specialmente per la proprietà di reagire coll'ossido di mercurio [1]

$$2C^nH^m.SH + HgO = (C^nH^mS)^2Hg + H^2O.$$

I loro derivati alcalini o mercaptidi di sodio e potassio si preparano o sciogliendo il metallo in una soluzione eterea di mercaptano o per l'azione degli alcoolati alcalini. Da ciò avrei potuto sospettare che la calce sodata non li fissasse. Ma ho voluto provare, date le curiose proprietà della calce sodata.

21. Io ho potuto esperimentare solamente coll'*etilmercaptano*, che è veramente il tipo dei mercaptani alifatici.

Il mercaptano adoperato era un liquido incoloro, bollente a 36°, che bruciava con fiamma azzurra; aveva odore agliaceo, acuto, nauseoso.

Mediante corrente d'aria furono fatti passare allo stato di vapore circa 15 gr. di etilmercaptano attraverso a 56 gr. di calce sodata recente, in granelli piccoli; la calce sodata imbrunì subito, poi diventò rossastra; si sviluppò molto calore. Tutto il mercaptano fu rapidamente assorbito. Dalla parte opposta uscita l'aria che non precipitava più colla soluzione al-

---

[1] Da ciò il nome di *mercaptani* da *mercurium captans* e quindi di *mercaptidi* ai loro derivati metallici.

coolica di cloruro mercurico; l'aria che usciva dalla parte opposta aveva odore non sgradevole di rafano. Che si formi un prodotto di ossidazione quale $(C^2H^5)^2SO$ od analoghi? Bisognerà tornare su questa reazione.

22. **Tiofene.** — Il *tiofene* $\begin{matrix} CH = CH \\ | \\ CH = CH \end{matrix}\!\!>\!S$, liquido, incoloro, bollente a 84°. Fatto passare attraverso la calce sodata con corrente d'aria, non viene fissato, passa oltre tutto, o se ne fissano delle traccie. Lo dimostrarono subito non solamente l'odore ma anche la reazione con isatina ed acido solforico.

Acido cianidrico ed altri nitrili.

Ho fatto molte esperienze sul modo di comportarsi dei nitrili sulla calce sodata; tutti più o meno rapidamente a temperatura ordinaria vengono decomposti. Molte esperienze furono fatte di confronto con potassa e soda caustiche, pure granulate.

23. **Acido cianidrico o prussico** HCN. — Il vapore di questo veleno fatto passare insieme ad aria attraverso un tubo contenente calce sodata, viene subito assorbito, fissato, sviluppando moderato calore. Non ne passa oltre nemmeno traccia.

Del modo di comportarsi dei nitrili in generale colla calce sodata e in confronto cogli alcali dirò in una Nota separata: *I nitrili e la calce sodata.*

Solfocianati ed isosolfocianati alchilici.

Ho esaminato l'azione della calce sodata anche su questi composti, intorno ai quali riferirò nella mia Nota: *I nitrili e la calce sodata.*

Anidridi.

Ho fatto alcune esperienze anche su le anidridi.

24. **Anidride solforica.** — Facendo gorgogliare una corrente di aria secca attraverso all'acido solforico fumante, l'aria trascina l'anidride solforica SO^3 in forma di fumi bianchi

o nebbia, che, fatta passare attraverso ad uno strato di calce sodata anche molto lungo, non viene assorbita; passa oltre e passa facilmente anche attraverso all'acqua. In queste condizioni dunque la calce sodata non fissa, o ne fissa assai poco, l'anidride solforica.

Sulle nebbie di anidride solforica tornerò in altra occasione.

25. **Anidride acetica** $(C^2H^3O)^2$. — L'anidride acetica è un liquido incoloro che bolle a 137°,5, di odore acuto, forte come quello dell'acido acetico glaciale; i suoi vapori irritano gli occhi. Coll'acqua non si decompone subito, ma cade al fondo come un olio che a poco a poco si scioglie agitando, o scaldando leggermente.

La calce sodata assorbe avidamente questa anidride allo stato liquido come anche allo stato di vapore. Attraverso ad un tubo ad U di 1,5 cm. di diametro e per un percorso di circa 35 cm. e contenente 40 a 43 gr. di calce sodata, ho fatto passare dell'aria, ben disseccata, attraverso all'anidride acetica, poi per la calce sodata. Si sviluppa calore e non passa traccia di anidride, anche dopo 10 minuti. Nelle stesse e precise condizioni passando attraverso a 56-60 gr. di NaOH in pezzettini e polvere, non si fissa ed istantaneamente passa oltre, come lo indicano le carte reattive ed altri caratteri. Dopo mezzo minuto la carta azzurra è arrossata.

Così pure con uno stesso tubo contenente 60 a 62 gr. di KOH in pezzettini e polvere il vapore di anidride sviluppa calore e dopo 4 minuti passa.

Anche coll'anidride acetica, dunque, in corrente d'aria secca, è evidente il modo di comportarsi della calce sodata, dalla quale viene subito fissata, mentre la potassa e la soda, in identiche condizioni, la lasciano passare; però la potassa è più attiva della soda.

Allo stato liquido viene assorbita con sviluppo di molto calore tanto dalla calce sodata come da KOH e NaOH.

Eteri vari.

26. **Etere benzoico.** — Mescolando, ad esempio, 5 cm^3 di etere benzoico purissimo bollente 210°-211° con 15 gr. di calce sodata, dopo circa 1 a 2 ore si sente l'odore dell'alcool. La miscela si mantiene asciutta. Dopo circa 24 ore non si sente più che l'odore dell'alcool, del quale ottengo tutte le reazioni; tratto con acqua, filtro ed acidulo con acido cloridrico. Precipita l'acido benzoico puro, fusibile a 122°-123°.

27. **Etere malonico. Etere succinico.** — Anche questi eteri vengono saponificati a freddo. L'etere succinico è assorbito con sviluppo di calore.

L'*etere acetacetico metilico* rimane decomposto subito; appena si mescola colla calce sodata sviluppa molto calore. Si faranno altre esperienze coi vari eteri chetonici.

28. **Nitrito di isoamile.** — Anche questo etere rimane saponificato dalla calce sodata già a temperatura ordinaria.

29. **Eteri bromidrici o bromuri alcoolici.** — Ho già fatto sino dall'anno scorso molte esperienze con gli eteri bromidrici. Il *bromuro di etilene* viene fissato bene, allo stato liquido, dalla calce sodata; così pure il *bromuro di butile terziario* $(CH^3)^3C.Br$ reagisce assai vivamente. Però, in questi ed altri casi trattandosi di sostanze che hanno vari isomeri, bisogna che io faccia altre esperienze per vedere come si comportano gli eteri bromidrici primari, secondari e terziari. E così i corrispondenti eteri cloridrici.

Riferirò su questo argomento in un'altra Nota.

Prodotti della putrefazione.

30. Ho già fatto molte esperienze le quali dimostrano come la calce sodata assorba molto bene tutte le sostanze che sono causa del pessimo odore che hanno i prodotti della putrefazione di materie animali (carni, uova, intestina, sangue, ecc.) e vegetali.

I gas e vapori puzzolenti della putrefazione sono completamente fissati dalla calce sodata. Fra le altre cose ho notato il fatto seguente: facendo passare i prodotti della putrefazione di certe sostanze animali, ed anche vegetali, attraverso la calce sodata si fissano subito i gas o vapori puzzolenti, mentre passano oltre i gas o vapori od altri prodotti che non hanno odore, oppure hanno l'odore gradevole di *funghi* e specialmente dei *tartufi*. Queste esperienze saranno esposte in una Nota a parte: *Alcune ricerche sui prodotti gasosi o volatili della putrefazione*, perchè sono importanti anche sotto altri riguardi.

Prodotti della incompleta combustione.

31. Facendo passare l'aria attraverso i prodotti di incompleta combustione di molte materie organiche, carta, legno, ecc. in modo da trascinare il fumo e far passare il tutto attraverso un tubo con calce sodata; l'aria che passa oltre non ha più quasi nessun odore.

Dunque da queste e da altre precedenti esperienze se ne può concludere che con un apparecchietto adatto la calce sodata potrà essere impiegata per poter respirare liberamente in certe miniere o pozzi, o nelle fogne, o in ambienti ove è avvenuto un incendio, o in altri luoghi ove siano gas o vapori nocivi.

Ho fatto anche delle esperienze sugli eteri chetonici e specialmente sugli *eteri β chetonici*, quali l'etere acetacetico e derivati; ma sono ancora incomplete.

Reazioni sintetiche.

La calce sodata si presta bene anche per produrre delle reazioni sintetiche e alla temperatura ordinaria. Ricordo ad esempio quella dell'acido cianidrico e quindi dei cianuri: facendo passare il miscuglio di gas ammonico e di cloroformio, dopo poco tempo si manifesta netta la reazione dei cianuri nella parte della calce sodata ove entrano i due gas, ed inoltre dalla

parte opposta ove sta la boccia di Habermann si ha odore nauseoso di *carbilamina*, la quale non può essere dovuta alla traccia d'alcol contenuta nel cloroformio ordinario, perchè lo stesso odore acuto io ho ottenuto con cloroformio purissimo preparato dal cloralio idrato: dunque probabilmente si tratta della contemporanea formazione in queste condizioni dei due composti isomeri HCN *acido cianidrico* che resta fissato e la *carbilamina* o *isocianuro* $HN \equiv C$ che passa oltre.

Nella boccia di Habermann contenente un poco di acqua si era sciolta dell'ammoniaca; neutralizzando l'ammoniaca a poco a poco con acido cloridrico diluito si andò a mano a mano manifestando di più l'odore di carbilamina, poi con l'eccesso di acido cloridrico scomparve anche questa. Questo odore è sgradevole e produceva lentamente un poco di congestione e di nausea.

Molte altre esperienze furono fatte con le amine alifatiche ed aromatiche e con altre sostanze. Le reazioni hanno luogo senza la presenza dell'alcol. Basta mescolare anilina pura, calce sodata e cloroformio, e poco dopo si sente l'odore nauseante dell'isocianuro di fenile; coll'*etilendiamina*, pure, ecc. Il gas ammonico secco reagisce ugualmente. Il tutto sarà esposto in una Nota: *Reazioni sintetiche mediante la calce sodata.*

In una quinta Nota, che conterrà la Parte III di questo lavoro, esporrò i caratteri differenziali delle varie calci sodate ed accennerò al modo col quale queste agiscono.

Torino, R. Università, 19 maggio 1916.

Appunti sullo sviluppo del sistema nervoso simpatico negli Amnioti.

Nota II del Dr. ANGELO CESARE BRUNI

Aiuto e Libero Docente.

(Con 1 Tavola).

Avendo trattato altra volta („ Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, V. 51, fasc. 13°) della presenza e del significato di un abbozzo mesenchimale del simpatico e dell'esistenza di due cordoni limitanti, uno primitivo ed uno secondario, in questa seconda Comunicazione mi soffermerò sugli argomenti allora enunciati e non svolti, riguardanti: 1° lo sviluppo della porzione cervicale del tronco del simpatico; 2° lo sviluppo del plesso ipogastrico e — negli uccelli — del nervo intestinale di Remak; 3° la presenza ed il significato di cellule nervose del tipo di quelle dei ganglii spinali nei primi abbozzi del simpatico; 4° l'importanza del neurotropismo e dell'odogenesi nello sviluppo del simpatico.

Per la numerazione dei capitoli, continuerò quella iniziata nella Nota precedente, onde semplificare i richiami.

3. — Della porzione cervicale del tronco del simpatico.

Sul modo di formarsi della porzione cervicale del tronco del simpatico non si hanno notizie molto estese, sebbene non manchino dati per tutte le tre classi di amnioti. Così pei rettili Van Bemmelen trovò che i ganglii del cordone limitante si formano fino al 6° somite (2ª vertebra) e forse anche fino al 5°; in seguito però il cordone diventa fibrillare, tranne che sotto

alla 4ª vertebra. Più cranialmente del 6° somite il cordone limitante si continuerebbe con un fascio fibroso che si mette in rapporto coi nervi encefalici X, IX e VII, ricevendo fibre dal ganglio del vago.

Una descrizione molto minuta del simpatico cervicale di embrioni di lucertola è data dal Beccari. Sebbene lo scopo dell'A. sia stato principalmente quello di ricercare le connessioni tra il simpatico ed i nervi spinali cervicali ed encefalici, tuttavia i dati desunti da osservazioni eseguite col metodo del Cajal hanno pure un grande interesse per lo studio della genesi del tronco simpatico nella regione cervicale. Dalla descrizione e dalle figure si rileva che la continuazione del cordone limitante al collo presenta ganglii solo fino all'altezza del 5° nervo cervicale; il primo ganglio della catena però riceve anche rami comunicanti dai nervi spinali 4° e 3°. Cranialmente a questo ganglio il cordone si continua in un fascio di fibre che viene poi rinforzato da fibre del vago e del glossofaringeo. I rami comunicanti dei nervi spinali 1° e 2° in realtà non mancherebbero, ma sarebbero connessi tra di loro e con quelli del 3°, 4°, 5°, 6° nervo spinale mediante un ramo, che partendosi dal 6° ramo comunicante sale cranialmente lungo l'arteria vertebrale e si connette anche col ganglio della radice del vago e con radici dell'ipoglosso.

Ganfini nota giustamente che il ramo vertebrale, connettente i rami comunicanti, veduto dal Beccari, potrebbe rappresentare nei rettili un cordone secondario, simile, anche per la topografia, a quello che si trova ben sviluppato nella regione cervicale del pollo. Però con le proprie ricerche non potè vedere costituirsi un cordone limitante secondario al collo neppure nei cheloni, che lo presentano ben sviluppato al torace. In *lacerta* e in *seps* trovò semplicemente che i ganglii simpatici provenienti dai nervi spinali 4°, 5°, 6° restano fusi in un cordone cellulare unico (ganglio cervicale); nei cheloni invece il cordone limitante primitivo cervicale si riduce presto ad un esile cordone nel quale rimane un cumulo gangliare a posizione variabile. Il ganglio più craniale del cordone limitante secondario, corrispondente all'8° nervo spinale, si connette col cordone primitivo cervicale a livello del 7° o del 6° nervo spinale.

His jun., nel pollo di 10 giorni d'incubazione, constatò che

oltre un cordone secondario col suo ganglio cervicale I esiste anche un altro ganglio cervicale I, addossato alla faccia mediale del ganglio nodoso del vago, il quale deriverebbe in parte dai ganglii superiori del cordone limitante primitivo, in parte dal vago. Questo ganglio cranialmente si connette con nervi encefalici, caudalmente si continua con un ramo, contenente ganglii, che decorre lungo la carotide interna e contribuisce col vago alla formazione del plesso cardiaco.

Pei mammiferi l'opinione corrente è che i tre ganglii cervicali, superiore, medio e inferiore, tipici del tronco del simpatico risultino dalla fusione di ganglii segmentali. Paterson però, avendo constatato che al collo, oltre l'origine dell'arteria vertebrale, i rami viscerali, dati dai nervi spinali, non si connettono col cordone simpatico, ritiene che la porzione cervicale del simpatico sia da considerarsi come appartenente alla distribuzione periferica. Egli vede formarsi dal cordone limitante un ramo fibrocellulare che accompagna l'arteria vertebrale, mentre il cordone limitante stesso nella sua porzione cervicale si riduce a una commessura, che separa da tale cordone il ganglio cervicale superiore. Il ganglio cervicale medio, se esiste, è un cumulo di cellule in questa commessura.

Mannu, descrivendo il simpatico cervicale di molti mammiferi adulti, fa alcune considerazioni e mette in luce alcuni fatti che possono illustrare la genesi del simpatico cervicale. Nota, ad esempio, come il nervo vertebrale, ricevendo una radice da ciascun nervo cervicale (fino al 3° od al 2°), sia il rappresentante della via simpatica principale degli uccelli; constata inoltre come tale nervo vertebrale contenga un ganglio nell'asino e probabilmente anche nel coniglio adulti. Senza confermarla cita l'affermazione di Blainville, che nel nervo vertebrale dell'uomo avrebbe trovato tanti piccoli ganglii quanti sono i nervi spinali.

Le mie osservazioni sul *gongylus* sono scarse ed incomplete, non avendo potuto eseguire metodi specifici pel sistema nervoso. Tutto ciò che posso dire è che l'abbozzo mesenchimale del cordone limitante primitivo si forma anche al collo, ove anzi ha un aspetto un po' diverso essenzialmente per essere costituito da trabecole di protoplasma più denso. Del resto subisce modificazioni analoghe a quelle che lo stesso abbozzo subisce nel tronco e viene analogamente sostituito da elementi ectodermici

che vi penetrano per mezzo dei rami viscerali dei nervi spinali. Per l'ulteriore evoluzione non ho veduto nulla più di quanto abbia veduto Ganfini in *lacerta* e in *seps*. In embrioni di mm. 6-6,5 $\times$ 5 il cordone limitante oltre il 5° nervo cervicale è continuato da un cordoncino fibroso, che si mette in rapporto col vago e penetra nel cranio accompagnando la carotide interna. Non sono giunto, neppure negli embrioni più avanzati da me presi in esame, a vedere modificate queste condizioni.

Le osservazioni nel pollo mi portano a confermare in massima le vedute di His. A 92 ore di incubazione il simpatico ha ancora una disposizione identica nel collo e nel tronco; l'abbozzo mesenchimale, ridotto ma non scomparso, circonda e continua cranialmente l' abbozzo ectodermico, avanzandosi dorsalmente alla carotide interna fino a giungere — verso la fine del 5° giorno di incubazione — a livello della capsula uditiva. L'abbozzo ectodermico è rappresentato, come al tronco, da un cordone con rigonfiamenti segmentali (fig. 1, cl. 1); riceve rami comunicanti da ciascun nervo spinale e, mediante un fascio fibroso, penetra nel cranio ove termina poco caudalmente alla capsula uditiva (ved. fig. schematica 1).

Alla fine del 5° giorno vediamo comparire anche al collo il cordone limitante secondario (fig. 2, cl. 2), con le stesse modalità con cui esso appare al torace. Contemporaneamente però, e a differenza di quanto accade al torace, troviamo che il cordone limitante primitivo (fig. 2, cl. 1) subisce una riduzione gradualmente minore quanto più consideriamo sezioni craniali; anzi l'estremità craniale aumenta di volume e di estensione; così alla fine del 6° giorno è raggiunta la disposizione definitiva — salvo piccoli particolari — che è rappresentata schematicamente nella fig. 2.

Come appare da questa figura, i primitivi rami comunicanti tendono a scomparire, procedendo in senso craniocaudale (nello schema non sono più visibili i tre primi); si è invece stabilita una comunicazione, puramente fibrillare, tra il ganglio del vago ed il residuo del cordone limitante primitivo, che possiamo già chiamare ganglio cervicale supremo. L'estremità craniale del cordone limitante secondario è continuata da un fascio di fibre, che rinforzato da altre fibre — veri rami comunicanti — provenienti dalle radici del nervo ipoglosso, raggiunge il ganglio

cervicale supremo verso la sua estremità craniale. Quest'ultimo è pure continuato da un fascio di fibre, rinforzato da un contributo del glossofaringeo e può esser seguìto lungo la carotide interna fino ad un ganglietto connesso col nervo facciale.

Il differenziamento istologico degli elementi costitutivi del ganglio cervicale supremo è più precoce di quello degli elementi del cordone limitante secondario cervicale, essendo già avanzato alla fine del 6° giorno di incubazione. Caudalmente il ganglio si riduce a un fascio di fibre, che appartengono alla distribuzione periferica.

Dagli embrioni di ratto ho ricavato i dati più interessanti. Già negli esemplari di 5-6 mm. il cordone limitante della regione cervicale, che accompagna il tronco dorsale dell'aorta, collettore degli archi, ha aspetto alquanto differente dal cordone limitante delle altre regioni, che è tuttora puramente mesenchimale. Infatti, piuttosto che ad un cordone di trabecole protoplasmatiche polinucleate siamo di fronte ad una colonna di elementi molto addensati e mal delimitati, ma non fusi in sincizio, identici a quelli che costituiscono il nervo vago.

Inoltre, verso l'estremità craniale, il cordone limitante cervicale (fig. 3, cl. 1) è in larga comunicazione col ganglio nodoso del vago, tale che non si può fare nessuna distinzione fra gli elementi dei due abbozzi, che sono in continuità assoluta (fig. schematica 3).

Progredendo nello sviluppo, non trovo in nessuno stadio formarsi dei rami comunicanti, cranialmente a quello del 7° nervo cervicale, per cui mi accosto a Paterson nel riconoscere che — almeno primitivamente — il tronco del simpatico cervicale dei mammiferi, al disopra dell'origine dell'arteria vertebrale, è indipendente dai nervi spinali, essendo invece cranialmente in rapporto col nervo vago e caudalmente in continuazione col cordone limitante del tronco.

Negli embrioni di 7,5-9 mm. non ho più potuto constatare con tanta chiarezza la connessione col vago, ma essa mi è di nuovo apparsa evidentissima negli embrioni di 11 mm., nei quali la disposizione generale del cordone limitante primitivo, all'infuori del differenziamento degli elementi, è ancora quella degli embrioni di 6 mm. illustrata dalla fig. 3.

Come modificazione essenziale, invece, troviamo che, mentre

al tronco sono comparsi soltanto i rami comunicanti secondarii, accennanti alla formazione di un cordone limitante secondario, che si fonde col primitivo, al collo si è formato un vero piccolo cordone limitante secondario, costituito da fibre e da cellule, provveduto di rigonfiamenti segmentali e di rami comunicanti proprii e posto, come nel pollo, lungo l'arteria vertebrale nel canale formato dai fori trasversarii. Questo cordone (fig. 4, cl. 2) cranialmente giunge fino al 2° nervo cervicale, caudalmente è collegato al cordone limitante primitivo a livello del 6° nervo spinale; da questo medesimo 6° nervo spinale parte poi un ramo comunicante che unendosi a quello del 7° raggiunge con questo il cordone limitante primitivo (fig. schematica 4). Queste condizioni si hanno ancora nell'embrione di ratto di 16 mm., con la differenza che a quest'epoca il cordone secondario è costituito unicamente da fibre e che il tratto cervicale del cordone primitivo comincia a scomporsi in due ammassi ganglionari situati alle due estremità. L'ammasso inferiore, con due tronchi che passano uno in addietro, l'altro in avanti all'a. succlavia (ansa succlavia), si continua col cordone limitante unico del tronco.

Sarà utile ricordare che gli elementi del cordone primitivo cervicale, una volta differenziati, appaiono per la maggior parte diversi da quelli del vago in quanto sono più piccoli e mono-o pluripolari. Non mancano però cellule più grandi, bipolari come quelle del vago, in varii stadii della loro evoluzione. Fra le fibre si riconoscono quelle endogene, simpatiche, per essere più pallide e più fine. A livello dell'unione col vago si vedono fibre passare dal vago al simpatico e dal simpatico al vago, decorrendo tanto in direzione centrifuga, quanto in direzione centripeta.

Noterò ancora che alcune osservazioni su embrioni umani mi hanno permesso d'accertarmi che lo sviluppo del simpatico cervicale non vi avviene in modo diverso, sopratutto per ciò che riguarda la connessione primitiva col ganglio nodoso del vago.

Prendendo come base le mie osservazioni sul pollo e sul ratto e quelle di Beccari sulla lucertola, posso concludere che nella regione cervicale si arriva in tutti gli amnioti alla costituzione di un cordone limitante secondario, distinto dal cordone limitante primitivo. Anche in questa regione tale cordone prende il massimo sviluppo negli uccelli. Tuttavia nella regione cer-

vicale non perde mai della sua importanza il cordone limitante primitivo, del quale, gradatamente, si fanno meno intimi i rapporti coi nervi spinali e se ne fanno invece man mano più intimi dei nuovi con nervi encefalici, principalmente col X paio. Vediamo infatti che mentre nei rettili e negli uccelli il vago concorre alla formazione del simpatico cervicale soltanto con fibre, nei mammiferi, molto precocemente, concorre con un tributo di elementi cellulari.

L'opinione corrente che i ganglii simpatici cervicali siano da considerarsi come il prodotto della fusione in poche masse dei ganglii segmentali primitivi deve essere respinta in modo particolare pei mammiferi. Infatti nei rettili e negli uccelli il ganglio cervicale può ancora essere considerato come un residuo del cordone limitante primitivo, che si è costituito in cordone non segmentato da un materiale proveniente da formazioni metameriche (i nervi spinali) e che si è messo in relazione con nervi encefalici; ma nei mammiferi i ganglii cervicali, almeno il superiore ed il medio, provengono da un cordone fin da principio non segmentato, che non è più fornito metamericamente dai nervi segmentali, ma bensì è fornito da materiale proveniente caudalmente dalla porzione toracica, segmentale, del cordone limitante e cranialmente dal ganglio nodoso del nervo vago.

Sopratutto importante è il fatto che nei mammiferi una parte almeno delle cellule costituenti i ganglii cervicali proviene dal ganglio nodoso del vago. Voglio mettere questo fatto in relazione con le constatazioni di His, di Kuntz, di Abel, secondo le quali alla formazione di alcuni plessi della porzione sopradiaframmatica del simpatico e principalmente dei plessi e ganglii cardiaci concorrerebbero esclusivamente o principalmente elementi del vago e forse anche del glossofaringeo. Nei vertebrati inferiori, secondo His, questa porzione, per così dire, simpatica del vago, destinata a fornire da sola il plesso cardiaco, sarebbe distinguibile nel ganglio nodoso per la forma e la topografia delle sue cellule. Risalendo ai vertebrati superiori, pare che una parte della porzione simpatica del vago si distacchi gradatamente dal ganglio nodoso e venga nei ganglii cervicali del simpatico; così, passando dagli anamnii ai sauropsidi e da questi ai mammiferi, troviamo che nella costituzione del materiale, dal quale si formeranno i ganglii simpatici cervicali, diminuisce

man mano l'importanza degli elementi derivati dai nervi spinali ed aumenta invece quella degli elementi derivati dalla porzione simpatica del vago.

4. — Del plesso ipogastrico e del nervo intestinale di Remak.

Il grande nervo intestinale di Remak è una formazione propria degli uccelli; si tratta di un grosso cordone impari di cellule e fibre nervose, che, iniziando il suo sviluppo nel meso dell' intestino posteriore, viene poi a costituire nell'adulto la grande ansa nervosa mesenteriale. Abel ha recentemente affermato che il nervo di Remak si forma nel pollo solo relativamente tardi (a metà del 5° giorno), come un cumulo di cellule connesse col cordone limitante. Tutti gli altri AA. invece concordano nell'ammettere per questo nervo un'origine molto precoce (Onodi, Fusari, His) e sopratutto, in apparenza almeno, tanto indipendente dal resto del sistema nervoso simpatico, che Remak, Fusari ed anche Onodi, il quale ultimo ammette l'origine ectodermica delle altre parti del simpatico, lo fanno derivare direttamente dal mesenchima. His ritiene che il nervo intestinale possa formarsi per migrazione di cellule dai ganglii spinali, precocemente e indipendentemente dal resto del simpatico, per la sua vicinanza con l'origine dei nervi spinali e pel fatto che tra le due formazioni — nervo di Remak e nervi spinali — non si interpongono organi, come l'aorta, capaci di ostacolare la migrazione delle cellule formative del simpatico.

Negli altri amnioti il nervo di Remak non esiste, almeno con quelle modalità che ne fanno negli uccelli una formazione assolutamente caratteristica. Ganfini ne fa un cenno pei rettili, dicendo che esso vi è ricordato da quei nodi cellulari, che, derivando dal cordone limitante primitivo, si raccolgono nell'ultima porzione del mesentere.

Secondo le mie osservazioni, lo studio dello sviluppo del nervo di Remak non può essere disgiunto da quello del plesso ipogastrico, la cui genesi, a sua volta, presenta, tanto negli uccelli quanto nei mammiferi, alcune particolarità degne di nota.

Già in embrioni di pollo di 82 ore di incubazione ed anche

prima, in preparati eseguiti con metodi comuni, sebbene nè il plesso ipogastrico nè il nervo intestinale non siano ancora sviluppati, si può già riconoscere il luogo in cui si formerà il nervo intestinale, perchè il mesenchima, lungo l'inserzione del meso dell'intestino posteriore, ha un'orientazione diversa dal rimanente, presentandosi disposto a striscie longitudinali, separate da spazii, probabilmente linfatici, tutti allungati nella stessa direzione, come si vede anche in stadii più avanzati (fig. 5, tratta da un embrione di pollo di 106 ore, R.).

Alla fine del 4° giorno e nella prima metà del 5°, in embrioni trattati col metodo di Cajal, troviamo già costituito il plesso ipogastrico, come una emanazione diretta del cordone limitante primitivo. Si tratta di una trama delicatissima di fibre e di cellule isolate, posta su ciascun lato della linea mediana nel mesenchima avvolgente la porzione pelvica degli organi digerenti ed urogenitali. Le cellule, nell'embrione di giorni 4 e $^1/_2$ vi sono già perfettamente differenziate, hanno forma bipolare o multipolare (fig. 6, *a*, *b*) e possono presentare all'apice dei prolungamenti bottoni di accrescimento (fig. 6, *a*). Le fibre e le cellule decorrono liberamente nel mesenchima, per cui all'esame coi metodi comuni, sfuggono facilmente all'osservazione.

Ora il nervo intestinale si potrebbe definire come una concentrazione impari mediana dei plessi ipogastrici dei due lati. Infatti nella regione del nervo di Remak non soltanto convergono fibre e cellule destinate a collegare fra di loro i due plessi destro e sinistro, ma ancora gli elementi nervosi vi si accumulano in grande quantità, e, adattandosi alla caratteristica disposizione del mesenchima, si mettono longitudinalmente, secondo la linea d'inserzione del mesentere (fig. 7).

Dapprima le fibre sono parallele, ma molto distanziate fra di loro, poi il loro numero aumenta grandemente, e formerebbero un fascio compatto, se a disgiungerle non si raccogliesse una grande quantità di cellule nervose, tale che alla fine del 6° giorno il nervo si presenta piuttosto come una colonna di cellule tutte già perfettamente differenziate. Verso la fine del 9° giorno le cellule del nervo intestinale, straordinariamente numerose, formano ancora un unico, grosso e lungo ganglio, che soltanto all'11° giorno comincia a scomporsi in un grande numero di ganglii separati.

Nel frattempo, su ciascun lato, il plesso ipogastrico, mantenendosi sempre molto delicato, ha accresciuto il numero delle fibre e delle cellule, ma principalmente si è modificato, in quanto a costituirlo non concorrono solo le fibre e le cellule del cordone limitante primitivo (che nella regione pelvica è confuso col secondario), ma concorrono ancora fibre provenienti direttamente dai nervi spinali del plesso femoro-pudendo. Questo particolare si vede già alla fine del 6° giorno.

Nel ratto non ho veduto una formazione che ricordi il nervo di Remak. Per il plesso ipogastrico potei constatare un fatto molto notevole, che cioè esso ha perdute le sue connessioni genetiche col cordone limitante primitivo, conservando invece quelle col plesso femoro-pudendo (nervi spinali). Infatti, già in embrioni di 8 mm. vedo da questo plesso partire dei fasci, accompagnati da cellule, che si dirigono medialmente e si sparpagliano in esile e delicato plesso nel mesenchima denso circostante all'estremità caudale dei canali digerente ed urogenitali. Negli embrioni di 11 mm. vidi ancora benissimo fibre e cellule del plesso femoro-pudendo entrare a costituire il plesso ipogastrico. Infatti nei fasci che dal plesso femoro-pudendo si portano medialmente si trovano cellule indifferenziate, che cominciano a differenziarsi man man che le fibre si allontanano per spargersi nel plesso ipogastrico (fig. 6, *d*). Il differenziamento degli elementi nervosi, in questo plesso, è molto avanzato (fig. 6, *c* e *d*).

Cranialmente ciascuno dei due plessi ipogastrici, destro e sinistro, si mette in rapporto con ganglii del plesso aortico-addominale mediante un fascio di fibre che segue medialmente l'uretere.

Nell'embrione di 16 mm. le condizioni non sono essenzialmente modificate, ma il plesso è molto più ricco di cellule, che formano tanti piccoli gruppi sparsi, simili del resto a quello della fig. 6, *c*, tratta da un embrione di mm. 11.

In nessuno stadio ho potuto constatare delle relazioni dirette col cordone limitante del simpatico, che nella porzione pelvica del tronco è situato sui lati dell'arteria sacrale media, un po' più ventralmente che negli altri segmenti del tronco sui lati dell'aorta; sulla linea mediana i plessi dei due lati si mettono tra loro in rapporto, passando fra i visceri pelvici.

Posso concludere che il nervo intestinale di Remak è una formazione caratteristica degli uccelli, dovuta a una concentrazione impari mediana dei plessi ipogastrici dei due lati, dipendente dal fatto che fibre e cellule sono probabilmente attratte e con tutta certezza orientate e guidate da una speciale modificazione del mesenchima, per la quale il nervo è riconoscibile prima ancora di essere costituito da elementi nervosi.

Il plesso ipogastrico negli uccelli è ancora da considerarsi come dipendenza diretta del cordone limitante del simpatico, cui si aggiungono contributi dei nervi spinali (plesso femoro-pudendo) costituiti esclusivamente o prevalentemente di fibre. Nei mammiferi invece i nervi spinali del plesso femoro-pudendo hanno acquistato la massima importanza nella formazione del plesso ipogastrico, fornendo ad esso direttamente cellule e fibre, mentre la relazione col cordone limitante è diventata secondaria, essendo limitata ad un rapporto indiretto, per l'intermediario del plesso aortico-addominale.

Tutto questo è singolarmente analogo a ciò che si verifica alla estremità opposta del tronco, ove abbiamo visto che il simpatico cervicale nei sauropsidi è principalmente un derivato dei cordoni limitanti, cui si aggiungono contributi del vago; nei mammiferi invece è principalmente un derivato del vago, cui si aggiungono contributi dei cordoni limitanti.

5. — Della presenza di cellule gangliari del tipo di quelle dei ganglii spinali nei primi abbozzi del simpatico.

Da lungo tempo è noto che si possono trovare cellule nervose differenziate nei rami comunicanti o nei nervi splancnici durante lo sviluppo (C. Rabl) e nell'adulto (Varaglia, Sperino), nè gli AA. mancarono di richiamare l'attenzione sull'importanza di questo fatto — che io pienamente confermo — per dimostrare l'origine degli elementi simpatici da quelli dell'asse cerebrospinale.

Ma la particolarità alla quale io intendo qui di fare cenno è un'altra; essa riguarda la presenza di cellule del tipo di quelle dei ganglii spinali nelle note del simpatico durante i

primi periodi dell'organogenesi. Held è, a mia conoscenza, il solo A. che ne parli; egli ebbe occasione di constatarne alla radice dei rami comunicanti e nei rami comunicanti stessi in anfibii e rettili. Io le ho vedute in embrioni di *gongylus* e di pollo non solo nei rami comunicanti, ma anche nel cordone limitante, sempre in scarso numero (da 3-4 ad 8-10 in un intero embrione), ma come reperto costante.

Sopratutto degno di nota mi pare il fatto che tali elementi cominciano ad apparire nel *gongylus* di mm. 5 × 4,5, embrione nel quale non sono ancora comparsi i rami comunicanti definitivi, destinati a portare il grosso del materiale ectodermico nell'abbozzo mesenchimale, ma susseguente nella serie a quello in cui ho potuto constatare la presenza di alcuni rami comunicanti puramente cellulari.

Mettendo in relazione tale fatto con la forma delle cellule in questione, si potrebbe pensare che i detti rami comunicanti cellulari, come vuole Held, siano in relazione unicamente con la parte sensitiva del nervo misto, ed a conforto di questa supposizione si potrebbe anche ricordare la circostanza, cui pure accenna Held, e che io confermo, che a quest'epoca non si vede nei rettili alcun segno di migrazione di neurociti dalla metà ventrale del tubo neurale lungo la radice motoria dei nervi spinali.

Nel pollo ho osservata la comparsa delle cellule gangliari in questione verso la fine del 5° giorno, quando i rami comunicanti sono già bene sviluppati. La fig. 4 della mia precedente comunicazione ne rappresenta una in rapporto con una massa protoplasmatica polinucleata, appartenente all'abbozzo mesenchimale.

Nell'abbozzo del cordone limitante questi grossi elementi, assolutamente identici a quelli dei ganglii spinali, si trovano sempre circondati in tutto o in parte da trabecole dell'abbozzo mesenchimale; anche non è raro vedere immersi in tali trabecole dei nuclei quasi nudi, aventi la forma vescicolare tipica di quelli delle cellule dei ganglii spinali, così da far pensare che per lo sviluppo delle cellule di tipo spinale nel simpatico, possa avere importanza trofica l'abbozzo mesenchimale.

Probabilmente gli elementi che conservano nel simpatico le caratteristiche di quelli dei ganglii intervertebrali sono mi-

grati da questi ultimi iniziando il loro spostamento quando non erano più in uno stadio indifferente, ma avevano già cominciato ad evolversi verso il tipo dei neuroni recettori del ganglio: il differenziamento potè poi compiersi sia mentre essi erano ancora lungo la via che li portava agli abbozzi simpatici, sia quando furono giunti negli abbozzi stessi.

6. — Dell'importanza del " neurotropismo ,, e dell' " odogenesi ,, nello sviluppo del simpatico.

Molti degli AA., che studiarono lo sviluppo del simpatico, cercarono anche di rendersi ragione del meccanismo pel quale si vengono a costituire la parte centrale e quella periferica di questo sistema. Per Balfour ed Onodi la proliferazione e l'accrescimento dei complessi cellulari sono sufficienti a spiegare perchè dai nervi spinali si formi il cordone limitante e da questo la porzione periferica. Paterson accetta questa idea separatamente per la formazione dei rami comunicanti e dei rami periferici, poichè per lui i rami comunicanti originano dai nervi spinali, il cordone limitante invece dal mesenchima. Secondo Froriep i neurociti, provenendo dal tubo midollare, si sposterebbero per un doppio meccanismo di migrazione e di spinta mitotica.

Ma i due AA. che affrontarono nettamente il problema, rendendosi conto delle sue difficoltà, sono His jun. ed Held.

His, partendo dalla premessa che il cordone limitante primitivo, indipendente dai nervi spinali, fin dal principio sia costituito di materiale ectodermico, vaglia quattro meccanismi che potrebbero essere invocati per spiegare lo spostamento di questo materiale: 1° l'accrescimento di tutto un complesso cellulare, che spinge avanti una parte degli elementi; 2° il risolversi e lo sparpagliarsi di un complesso cellulare per l'accrescimento delle parti circostanti; 3° il trasporto di cellule, operato dalle fibre nervose durante il loro accrescimento; 4° il trasporto di cellule per opera delle correnti dei liquidi dei tessuti. Non trovando nessuno di questi meccanismi sufficiente a spiegare tutti i fatti osservati, viene alla conclusione che si tratti di una migrazione attiva. Secondo l'A., i nervi e così pure le cellule ner-

vose migranti, si accrescono e si spostano secondo la direzione, lungo la quale irradiano dall'asse cerebrospinale, fino a quando non incontrano ostacoli. Tali ostacoli sono rappresentati dagli epitelii e dagli endotelii: questi o arrestano la migrazione o la deviano. His non ammette in genere che le cellule possano subire un'attrazione, trova però che altra spiegazione non si può dare della tendenza di parti del simpatico ad avvicinarsi ai vasi.

Per Held il meccanismo dello spostamento degli abbozzi cellulari simpatici sta nella pressione mitotica di una colonna cellulare, che si moltiplica in fila e nella formazione di processi protoplasmatici, capaci di contrarsi per influenze osmotiche che ne colpiscano la sostanza in via di accrescimento. Nelle linee generali egli ritiene che il meccanismo degli spostamenti nel campo del simpatico non sia diverso da quello che regola lo spostamento di tutti gli altri organi durante lo sviluppo.

A quest'ultima affermazione io non credo affatto di potermi associare, parendomi che si debba distinguere tra gli organi ed i tessuti che si sviluppano contemporaneamente in stretta correlazione, e quelli invece che, sviluppandosi relativamente tardi, compenetrano o sostituiscono altri organi o tessuti, come avviene pei vasi, pel tessuto osseo, pei nervi periferici. La formazione delle gemme d'accrescimento dei vasi, le complicate modificazioni del tessuto fibroso e cartilagineo precedenti l'ossificazione, la stessa formazione di vie protoplasmatiche, in cui si accresce la sostanza nervosa, ammessa da Held per spiegare la formazione dei nervi periferici, sono fenomeni ben diversi da quelli che, ad esempio, accompagnano gli spostamenti dei muscoli, correlativi all'accrescimento ed alle modificazioni degli abbozzi scheletrici.

Del resto lo stesso Held, a proposito della formazione dei rami comunicanti del simpatico, afferma che non bastano cause meccaniche a spiegare perchè l'abbozzo del simpatico prenda origine da un determinato punto del nervo spinale. Ed infatti tutti i meccanismi e le altre cause di spostamento degli elementi simpatico-formativi supposte dai varii AA. — all'infuori della attrazione da parte dei vasi sanguigni ammessa da His per casi particolari — possono spiegare in modo più o meno esauriente il modo di accrescersi del simpatico, ma certamente non dicono perchè il simpatico si formi in determinati luoghi, da elementi provenienti da altri determinati luoghi.

Eppure, a mio avviso, basta attenersi alla semplice constatazione dei fatti per giungere molto pianamente alla desiderata spiegazione. A nessuno degli AA. che hanno preso in considerazione stadii abbastanza precoci può essere sfuggito che negli amnioti il primo abbozzo del simpatico è strettamente connesso col mesenchima e non lo è affatto coi nervi e coi ganglii spinali; ma, guidati da preconcetti, parecchi di questi AA. si sono sforzati di trovare ad ogni costo qualche fatto che potesse giustificare l'ipotesi della provenienza dell'abbozzo simpatico dai nervi o dai ganglii spinali. Nel lavoro di Held questo sforzo è perfino confessato! Sono stati molto più obiettivi gli AA. che hanno ammesso senz'altro l'origine mesodermica del simpatico; le loro osservazioni peccano soltanto di incompiutezza.

Infatti nel primo capitolo di questi miei "*Appunti sullo sviluppo del simpatico*" (ved. 1ª Comunicazione, l. c.), ho dimostrato che la formazione di un cordone limitante primitivo, costituito, secondo l'opinione generale, da cellule e da fibre provenienti dai nervi spinali, è preceduta dalla formazione, nello stesso luogo, di un abbozzo mesenchimale, il quale ha manifestamente due funzioni: 1° di esercitare sul punto ad esso più vicino del nervo spinale un'attrazione per cui fibre e cellule del nervo vengono a raggiungerlo; 2° di preparare la strada a queste fibre e cellule, di guidarle e probabilmente anche di nutrirle. Solo quando la formazione del cordone limitante ectodermico è un fatto compiuto, l'abbozzo mesenchimale in parte si distrugge, in parte si trasforma nelle formazioni feocrome.

Costituitosi il cordone limitante ectodermico, da esso deriva la maggior parte del simpatico periferico per comuni processi di proliferazione, ma non mancano esempi di nervi simpatici periferici che devono la loro formazione e la loro disposizione a preventive modificazioni del mesenchima; così accade pel nervo intestinale di Remak (cap. 4).

Non può sfuggire a nessuno come simili fenomeni di attrazione e di preparazione di vie guidanti la sostanza nervosa abbiano un evidente riscontro nel meccanismo patologico della rigenerazione dei nervi. Senza rifare qui la storia di questo importante capitolo della patologia generale, pel quale rimando il lettore ad un interessante e recente lavoro critico-sperimentale di Dustin, ricorderò come nella rigenerazione dei nervi sia stata

data la massima importanza a due fattori: il neurotropismo, cioè la tendenza delle fibre nervose in rigenerazione a dirigersi verso particolari sostanze chimiotassiche, e l'odogenesi, cioè la formazione di speciali vie, che saranno poi percorse dai nervi rigenerantisi. La teoria del neurotropismo ebbe i suoi fondatori in Forsmann ed in Cajal; la teoria dell'odogenesi, fondata da Vanlair, ebbe il suo risuscitatore in Dustin.

Nel normale sviluppo del simpatico ambedue i fenomeni del neurotropismo — applicato non solo alle fibre, ma anche ai neurociti — e dell'odogenesi sono in giuoco, e si comprende come debba essere così, quando si pensi che la formazione del sistema nervoso simpatico avviene in un'epoca in cui lo sviluppo è considerevolmente avanzato e le cellule e le fibre destinate a formare il cordone limitante primitivo devono raccogliersi in un luogo, in cui prima esisteva un mesenchima, che negli amnioti è considerevolmente denso, e sostituirsi a questo mesenchima.

Non ci deve stupire che un tale fenomeno di sostituzione sia preceduto da importanti modificazioni da parte del mesenchima stesso, come non ci stupisce che sia preceduta da profonde modificazioni la sostituzione della cartilagine da parte del tessuto osseo. I due fenomeni sono forse più paragonabili di quanto non possa a tutta prima apparire.

Dall'Istituto Anatomico della R. Università di Torino
diretto dal Prof. R. Fusari.

INDICE BIBLIOGRAFICO

Vedasi 1ª Comunicazione (“ Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, vol. 51, fasc. 13°, pag. 969).

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

(Le figure non schematiche vennero eseguite col sussidio della camera lucida di Abbe, tenendo il tavolo da disegno all'altezza del tavolino portaoggetti del microscopio).

Fig. 1-4. — Sono schemi indicanti la disposizione del simpatico cervicale. Con numeri romani sono indicati i nervi (o ganglii) encefalici, con

numeri arabi i ganglii intervertebrali. Rami comunicanti e connessioni fibrose del simpatico sono indicate in nero, i cordoni fibrocellulari mediante striscie bianche con grosse punteggiature.

cl. 1 = cordone limitante primitivo;

cl. 2 = cordone limitante secondario.

fig. 1 = Embrioni di pollo di giorni 4 $^1/_2$.

fig. 2 = „ „ „ 6-7.

fig. 3 = „ di ratto di mm. 6.

fig. 4 = „ „ „ 11.

Fig. 5. — Embrione di pollo di ore 106. Fiss. Bouin, col. picrococciniglia. Sezioni sagittali di μ 10.

Disposizione del mesenchima in corrispondenza del nervo intestinale di Remak.

m = mesenchima non modificato; *R* = mesenchima modificato a costituire trabecole longitudinali separate da spazî allungati nella medesima direzione.

Ob. $^1/_{12}$ Zeiss, oc. 3, tubo 160 mm.

Fig. 6 *a* e *b*. — Embrione di pollo di giorni 4 $^1/_2$ (ore 108). Cajal, sezioni sagittali di μ 10.

c e *d*. — Embrione di ratto di mm. 11. Cajal, sezioni sagittali di μ 10.

a = cellula bipolare del plesso ipogastrico, con bottone di accrescimento.

b = cellula multipolare del medesimo plesso.

Ob. $^1/_{12}$ Zeiss, oc. 4, tubo 160 mm.

c = gruppo di cellule differenziate del plesso ipogastrico.

d = fascio di fibre dei nervi spinali (plesso femoropudendo) con cellule indifferenziate e cellule già differenziate (plesso ipogastrico).

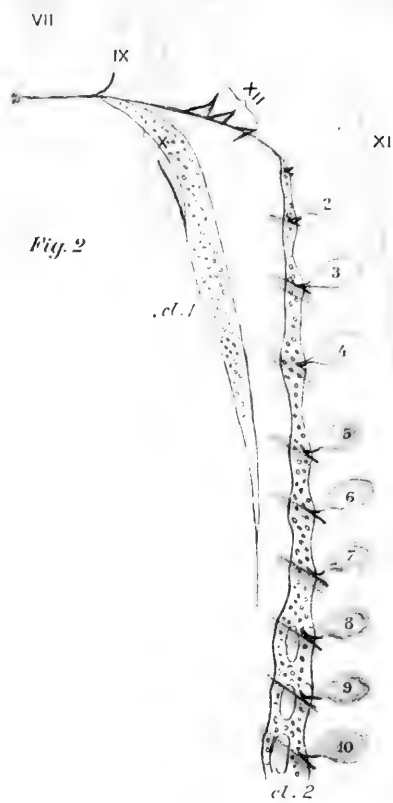
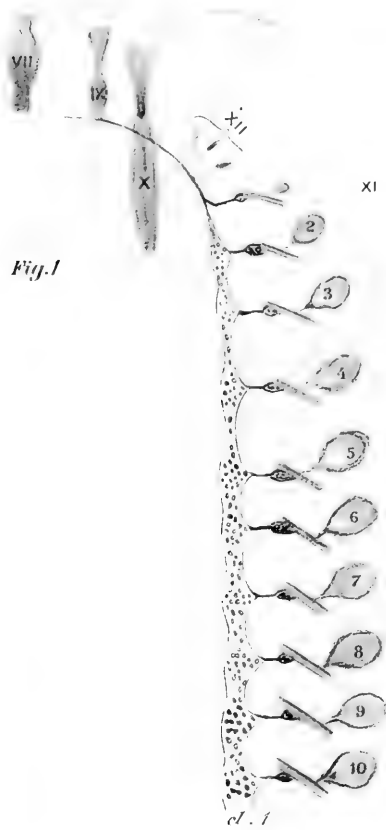
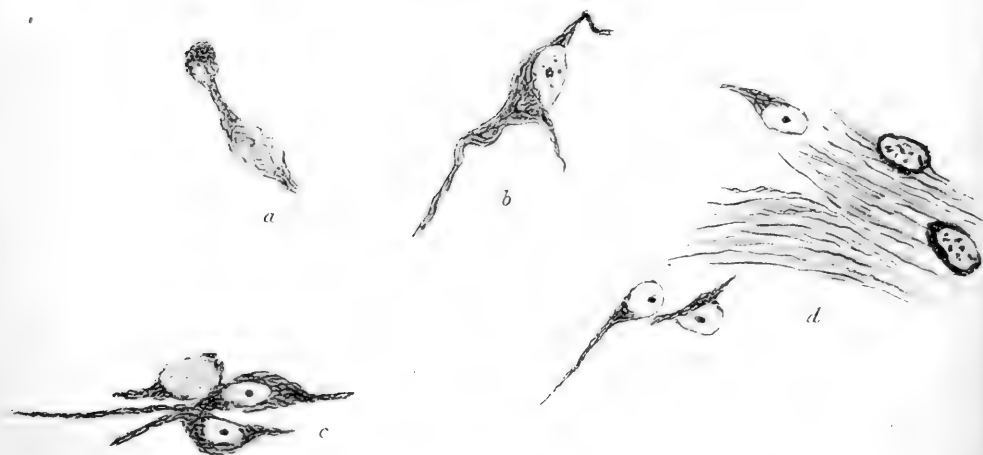
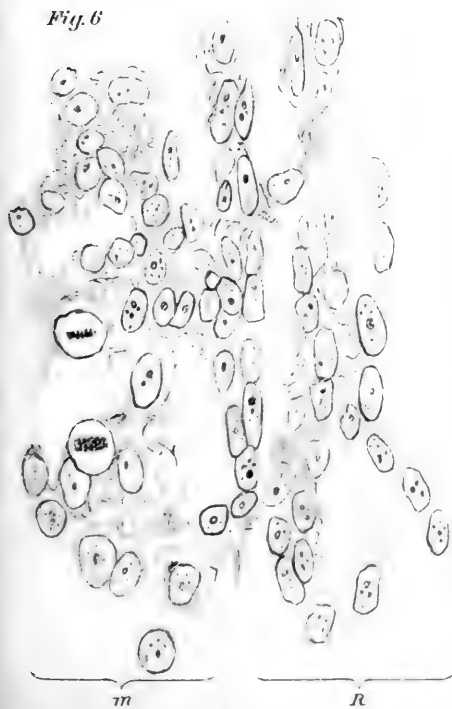
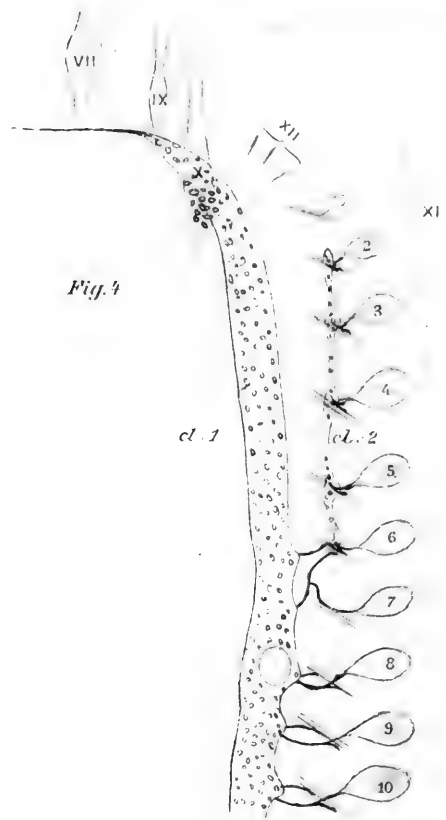
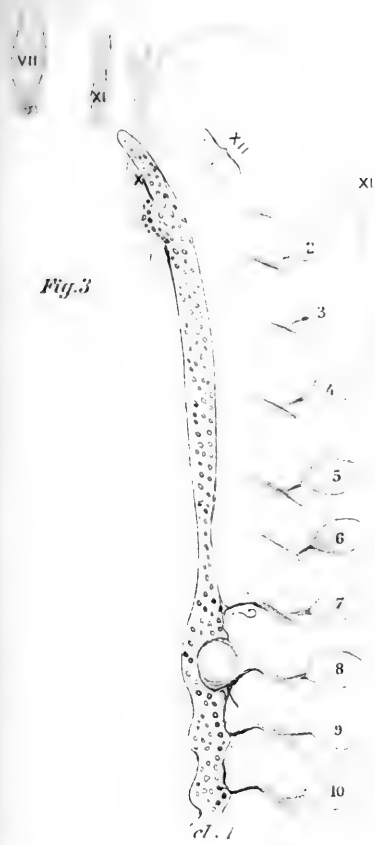
Ob. 2 mm. Zeiss, oc. comp. 4, tubo 160 mm.

Fig. 7. — Embrione di pollo di giorni 4 $^1/_2$ (ore 108). Cajal, sezioni sagittali di μ 10.

Un tratto del nervo intestinale di Remak. Le fibre nervose si vedono nel mesenchima differenziato dirette longitudinalmente.

Ob. $^1/_{12}$ Zeiss, oc. 3, tubo 160 mm.

BRUNI A.C. - Sviluppo del simpatico negli amnioti *II*.

Lit. Salussolia, Torino.

Sull'azione dell'anidride carbonica e del calcio sull'utero isolato.

Nota del Dr. MARIO CHIÒ

(Con 1 Tavola).

In una Nota precedente (1) sul comportamento chimico e biologico dell'anidride carbonica, — nella quale è svolta l'ipotesi sul modo di essere e di agire dell'anidride carbonica nei liquidi dell'organismo, in presenza di calcio, — era stata presa in esame la funzione del cuore di rana isolato, artificialmente irrigato. Ero giunto alle seguenti conclusioni:

" La tossicità del cloruro di calcio circolante in eccesso nelle cavità cardiache è diminuita dall'anidride carbonica posta all'esterno del cuore funzionante.

" La tossicità dell'anidride carbonica è diminuita dal cloruro di calcio disciolto in eccesso nel liquido di irrigazione del cuore.

" L'azione antagonista delle due sostanze nei loro effetti tossici dimostra che nell'organismo, in concentrazioni fisiologiche, esse debbono pure comportarsi reciprocamente in modo che la concentrazione dell'una influisca notevolmente sullo stato chimico dell'altra, e che le variazioni di concentrazione dell'anidride carbonica, modificando primitivamente lo stato chimico del calcio, modifichino secondariamente l'eccitabilità dei tessuti e possano determinare la produzione dello stimolo ".

Nella serie di esperienze che sono oggetto della presente Nota ho compiuto su un organo isolato funzionante di mammi-

(1) M. Chiò, *Sul comportamento chimico e biologico dell'anidride carbonica*, " Boll. della R. Accad. med. di Genova ", XXVIII, 1913.

fero le stesse esperienze che precedentemente condussi sul cuore isolato di batraco. Allora il liquido contenente variabili quantità di calcio circolava nelle cavità del cuore, mentre il liquido contenente variabili concentrazioni di acido carbonico era all'esterno del cuore, così che l'azione dell'una sostanza si esercitava sullo stato dell'altra nello spessore stesso dei tessuti e questi conseguentemente ne mostravano gli effetti; ora l'influenza che le variazioni di concentrazione di una delle due sostanze determina sullo stato dell'altra si svolge nel liquido ambiente, nel quale è immerso l'utero: questo, in altre parole, risente le variazioni *dell'ambiente* e mostra come da queste variazioni dipenda il suo funzionamento.

L'utero isolato (un tratto comprendente il corpo ed una porzione di corno) di cavia incinta, uccisa con trauma sul capo, era fissato per una estremità al fondo di un grosso tubo da saggio (diam. 5 cm.) e per l'altra estremità collegato con leva scrivente; il tubo posto fino al collo in termostato ad acqua a temperatura costante di 38°; l'organo immerso in liquido di Ringer, saturato di ossigeno con continuo gorgogliamento a piccole bolle.

La concentrazione del cloruro di calcio variato con l'introdurre altro Ringer a maggior concentrazione di calcio — come si vedrà nelle singole esperienze —; la concentrazione dell'acido carbonico variata con l'introdurre altro Ringer saturato di anidride carbonica o facendo gorgogliare anidride carbonica a piccolissime bolle (senza interrompere, naturalmente, il normale flusso di ossigeno). In ogni caso il liquido aggiunto aveva sempre la temperatura del termostato, perchè vi era immerso qualche tempo prima.

ESPERIENZE

1° Il tratto di utero è immerso in 50 cmc. di liquido di Ringer: in α si aggiungono 25 cc. di liquido di Ringer saturo di anidride carbonica. Si osserva un arresto transitorio delle contrazioni uterine. Vedasi la fig. 1ª.

2° Il tratto di utero è immerso in 50 cmc. di liquido di Ringer: in **1** si aggiungono 2 cc. di liquido di Ringer, nel quale la concentrazione del calcio è 100 volte maggiore che nel li-

quido normale; e poichè il Ringer ambiente conteneva il 0,1 $^0/_{00}$ ne deriva che i 2 cc. di Ringer aggiunti elevano la concentrazione del cloruro di calcio nel liquido ambiente dal 0,1 $^0/_{00}$ al 0,5 $^0/_{00}$: si osserva un arresto transitorio della funzione. In **2** si aggiungono altri 2 cmc. di Ringer a concentrazione elevata di calcio e si porta così la concentrazione del cloruro di calcio ambiente al 0,9 $^0/_{00}$: si inizia la fase di arresto, la quale, secondo mi risulta da altre esperienze, sarebbe molto maggiore della prima; ma in α incomincia a gorgogliare anidride carbonica e ad un certo punto la paralisi s'arresta, il muscolo si contrae violentemente e permane in uno stato quasi tetanico. Il gorgogliamento della anidride carbonica s'arresta in ω. Il tempo è segnato in periodi di 4'. Vedasi la fig. 2ª.

3° Il tratto di utero è stato immerso in cc. 50 di Ringer; successivamente sono stati aggiunti al liquido, a due a due, 6 cc. di Ringer a concentrazione elevata di calcio (sempre 100 volte più del normale); dopo un lungo periodo di lavoro normale si aggiungono, in **4**, altri due cc. di soluzione ricca di calcio, ed in **5** ancora altri due; da α ad ω gorgoglia nel liquido anidride carbonica. Si osserva che l'organo entra in uno stato di contrattura, che non è vinto che molto lentamente dalla successiva aggiunta di cloruro di calcio (cioè di soluzione di Ringer ricca di calcio). Vedasi la fig. 3ª.

4° Il tratto di utero è immerso in 50 cc. di liquido di Ringer. In **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7** sono successivamente aggiunti 2 cc. per volta di Ringer ad alta concentrazione di calcio, così che la concentrazione del cloruro di calcio nel liquido ambiente sale progressivamente al 0,5 ; 0,9 ; 1,3 ; 1,7 ; 2,1 ; 2,5 ; 2,9 $^0/_{00}$. Si inizia il gorgogliamento dell'anidride carbonica (da α ad ω), mentre la concentrazione del calcio non è ancora giunta al suo massimo e si vede che la tendenza all'arresto della funzione è presto troncata e che l'organo riprende a contrarsi, con altro ritmo perchè le condizioni del mezzo sono state modificate, Il tempo è, come sempre, segnato in periodi di 4'. Vedasi la fig. 4ª.

5° Il tracciato che costituisce la fig. 5ª è il seguito del tracciato indicato con la fig. 4ª. Da α ad ω si fa gorgogliare a piccolissime bolle l'anidride carbonica ed il tratto di utero ha una contrazione quasi completamente tetanica. Prima che cessi di gorgogliare l'anidride carbonica si aggiungono in **1**, **2**,

3, 4, 5, 6, 7, 8 ogni volta cc. 2 di liquido di Ringer ricco di calcio e si osserva che dapprima il muscolo tende a rilasciarsi e che poi si rilascia completamente; ma un successivo passaggio di anidride carbonica provoca una nuova contrazione. In seguito si rilascia poi molto lentamente e non riprende più. Vedasi la fig. 5ª.

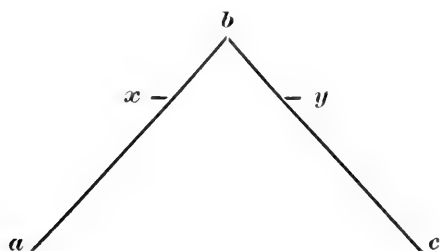
6° Da una cavia quasi a termine e con un solo corno pieno si prende la maggior parte del collo ed una striscia del corno pieno. Da α ad ω gorgoglia anidride carbonica ed il muscolo si rilascia, poi quando sta per riprendersi si fa gorgogliare altra anidride carbonica (da α^1 ad ω^1). Prima che il gas cessi di gorgogliare si aggiungono, in 1, cc. 10 di Ringer ricco di calcio, elevando la concentrazione del cloruro di calcio nel liquido ambiente dal 0,1 $^0/_{00}$ al 2,1 $^0/_{00}$. L'utero rilasciato si riprende per azione dell'anidride carbonica e riacquista il suo tono normale; ma un eccesso di calcio determinato dall'aggiunta di altri cc. 5 di Ringer ricco di calcio (la concentrazione del $CaCl_2$ sale al 3,1 $^0/_{00}$) lo deprime nuovamente e lo porta alla paralisi. Dopo circa 4′ di paralisi completa si aumenta ancora la concentrazione del $CaCl_2$ fino al 4,1 $^0/_{00}$ con l'aggiunta, in 3, di altri 5 cc. di Ringer ricco di calcio: la paralisi così continuerebbe certo per un tempo di gran lunga superiore ai 4′ (se pur volessimo supporre che la paralisi provocata colla operazione 2 non dovesse durare più di 4′), ma gorgoglia anidride carbonica da α^2 ad ω^2 e l'utero a distanza di meno di 4′ dall'operazione 3 riprende a funzionare quasi normalmente. L'aggiunta successiva di altri cc. 5 (in 4) e poi di altri cc. 2,5 (in 5) di Ringer ricco di calcio porta il muscolo alla paralisi dalla quale non si rialza più, perchè non si somministra più anidride carbonica. La quantità di cloruro di calcio portata nel liquido ambiente ha raggiunto, con l'operazione 4, la enorme cifra del 5,1 $^0/_{00}$. Vedasi la fig. 6ª.

L'esame dell'ultimo tracciato mostra come in questo caso sia avvenuto il fenomeno opposto a quello che si rilevò nei tracciati precedenti (2, 3, 4, 5): in questi il muscolo fu primitivamente depresso dall'eccesso di calcio e rialzato dall'anidride carbonica, mentre nella fig. 6ª si vede il muscolo primitivamente depresso dall'eccesso dell'anidride carbonica e successivamente rialzato dal calcio; poi nuovamente depresso dall'eccesso di calcio e rialzato dall'anidride carbonica.

Credo che non si possa non ritenere sufficientemente probativa la dimostrazione dell'antagonismo fra anidride carbonica e calcio.

Il calcio è elemento essenziale per quasi tutte le funzioni vitali: esso deve trovarsi in una determinata concentrazione ionica, necessaria per la funzione. Un eccesso paralizza, come paralizza un difetto che tenda alla sottrazione completa.

Generalmente è causa di stimolo la diminuzione moderata della concentrazione del Ca" ione nel liquido che bagna i tessuti funzionanti, mentre ogni aumento, anche lieve, della concentrazione è causa di depressione della funzione. Talvolta però si vide che un aumento nella concentrazione del calcio migliorò la funzione ed aumentò l'eccitabilità del tessuto invece di deprimerla. Questo fatto deve essere con probabilità collegato con la concentrazione che primitivamente esisteva nei liquidi intercellulari. Se la concentrazione preesistente era inferiore a quella necessaria per l'*optimum* della funzione, è chiaro che un'azione che tenda ad innalzare la concentrazione tenda a migliorare la funzione.

Vorrei con una figurazione grafica rendere l'idea da me concepita sui rapporti che corrono fra funzione di un tessuto (per ora del tessuto contrattile) e concentrazione del calcio-ione. Supponiamo di avere un angolo col vertice in alto. Nei punti *a*

e *c* si ha la paralisi della funzione risp. per assenza o per eccesso di Ca" ione, in *b* si ha lo sviluppo massimo della funzione, perchè la concentrazione del calcio-ione si trova nella misura più adatta per tale sviluppo. Poichè in genere per le condizioni generali dell'organismo la concentrazione del Ca" è superiore alla

concentrazione, direi così, *optimum*, essa potrebbe essere segnata nel punto *y*. Le azioni che tendono a diminuire la concentrazione del calcio-ione tendono a spostare *y* verso *b* e quindi aumentano la eccitabilità portando la funzione verso la sua massima espressione. Ma suppongasi il caso che per necessità o permanente o momentanea o per anomalia trovisi la concentrazione del calcio-ione in tal misura da poter essere posta nel punto *x*: è in questo caso evidente che una sottrazione di calcio od una immobilizzazione di calcio-ione non potrebbero avere che effetti immediati di depressione, perchè tendono a portare *x* verso *a*, mentre un aumento di concentrazione di calcio-ione avrebbe invece un effetto utile in quanto tende a spostare *x* verso *b*.

Un fatto di questa natura osservarono Gardella (1) e Buscaino (2) nello studio dell'azione del calcio sul processo della respirazione: l'iniezione di piccola quantità di $CaCl_2$, ebbe, in condizioni normali, un'azione eccitante, transitoria, sulla funzione del respiro. Gardella attribuì questo fenomeno ad una diminuzione di $Ca^{\cdot\cdot}$ioni in conseguenza di formazione di sali di calcio (fosfati) meno solubili. Ma potrebbe anche dipendere dal fatto che essendo — per oscillazioni, o necessarie od occasionali — la concentrazione del $Ca^{\cdot\cdot}$ione leggermente minore di quella necessaria, un piccolo aumento di $Ca^{\cdot\cdot}$ione abbia potuto riportarlo verso quella cuspide che rappresenta la concentrazione ottima.

Il centro isolato della *Gonionemus*, in condizioni normali, cioè nell'acqua di mare, non pulsa, ma posto in soluzione isotonica di cloruro di sodio puro prende subito a pulsare ritmicamente; in soluzione fortemente ipertonica di cloruro di sodio la pulsazione s'arresta e riprende se s'aggiunge cloruro di calcio: secondo Loeb il centro della medusa conterrebbe, nell'acqua di mare, troppo calcio, e perciò non si contrarrebbe ritmicamente; posto in soluzione fortemente ipertonica di NaCl la contrazione ritmica mancherebbe per un eccessivo abbassamento di concen-

---

(1) GARDELLA E., " Boll. delle Scienze med. di Bologna ", LXXVII, 1906, e " Arch. ital. de Biologie ", 1908, p. 83.

(2) BUSCAINO V. M., " Rivista di pat. nervosa e mentale ", XVII, 518.

trazione del calcio rispetto al sodio; fra le due condizioni esisterebbe quella ottima che determina il massimo sviluppo — per l'osservatore — della funzione, che è la contrazione spontanea ritmica. Quella condizione che è ottima per l'osservatore non è però tale rispetto alla finalità dell'organo o del tessuto ed è per questo che la concentrazione del Ca¨ione non corrisponde a quella che teoricamente sarebbe la più utile.

In condizioni sperimentali si può provocare una diminuzione di concentrazione del Ca¨ione con sostanze, che o fissano direttamente il calcio in composti meno ionizzati, o che a questo effetto giungono indirettamente con spostamenti dell'equilibrio chimico dei liquidi intercellulari. L'anidride carbonica ha, secondo ogni ragionevole deduzione, un'azione diretta sullo stato del calcio, e questa si svolge sia nel liquido ambiente che contiene il tessuto funzionante, come si rileva da queste ricerche, sia nello spessore stesso dei tessuti (cuore), come si vide nelle esperienze da me compiute sul cuore isolato, e già citate.

In entrambi i casi l'anidride carbonica portata sull'organo isolato in condizioni normali ebbe azione nettamente paralizzante (perchè fu sempre data in relativo eccesso); ma portata sull'organo paralizzato o depresso da un eccesso di calcio conseguì l'effetto diametralmente opposto, cioè elevò la funzione alle sue massime espressioni. In presenza di anidride carbonica l'utero isolato ebbe comportamento pressochè normale in un liquido ambiente nel quale si era successivamente aggiunto cloruro di calcio fino al 5 ‰, cioè 50 volte più di quanto si ponga nel liquido di Ringer normale. Evidentemente l'anidride carbonica, portata in un liquido contenente tale eccesso di calcio, ridusse la concentrazione ionica di questo elemento alle sue proporzioni normali, riportando verso la cuspide dell'angolo — secondo la figurazione grafica — quel punto *y* che prima era stato spostato verso *c*. Una ulteriore aggiunta di anidride carbonica tenderà a far scendere da *b* verso *a* il valore della concentrazione ionica del calcio, ma la depressione risultante della funzione sarà vinta da una quantità di cloruro di calcio tale da ristabilire l'equilibrio turbato fra gli elementi contenuti nel liquido ambiente.

Le oscillazioni dell'intensità della funzione determinate dalle oscillazioni di concentrazione delle due sostanze non possono

essere seguite oltre certi limiti, perchè intervengono altri elementi di perturbazione, primo fra tutti l'eccessiva concentrazione molecolare del liquido ambiente.

CONCLUSIONI

La funzione contrattile dell'utero isolato di cavia, depressa dall'innalzamento della concentrazione del calcio nel liquido che lo bagna, è riportata allo stato iniziale con l'anidride carbonica.

La funzione dell'utero isolato depressa con anidride carbonica è riportata allo stato iniziale aumentando sufficientemente la concentrazione del calcio.

Le oscillazioni nella concentrazione rispettiva di queste due sostanze hanno per effetto corrispondenti oscillazioni nello svolgimento della funzione.

È probabile che il fenomeno che si osserva *in vitro* si svolga pure *in vivo* e che fra le condizioni che conducono al termine della gravidanza ed al parto abbiano influenza non indifferente le oscillazioni dello stato chimico del calcio per opera dell'anidride carbonica, sì che l'intervento terapeutico con l'uno o con l'altro agente possa dare fruttuosi risultati.

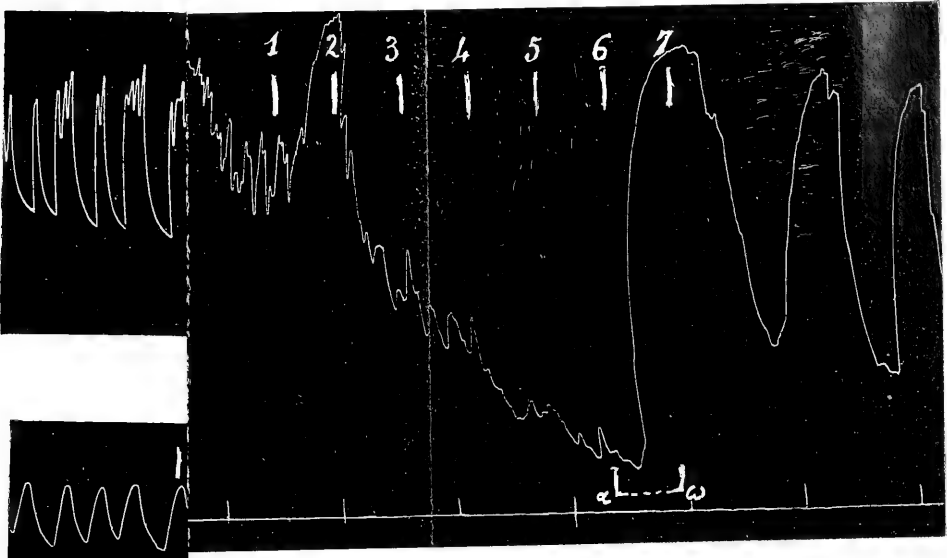



Fig. 4.

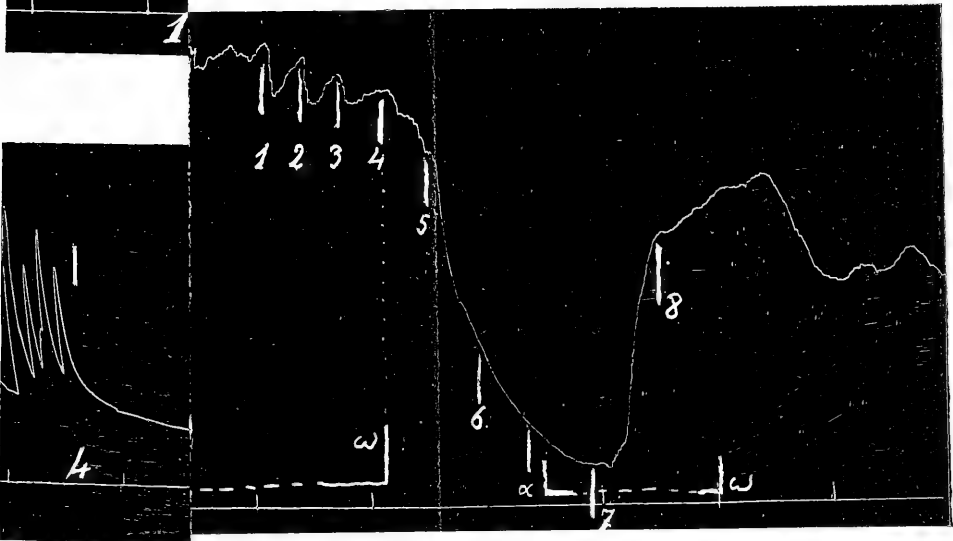



Fig. 5.

Fig. 3.

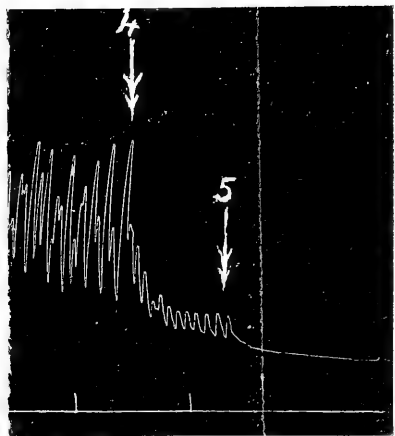



Fig. 6.

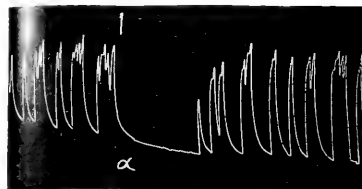



Fig. 1

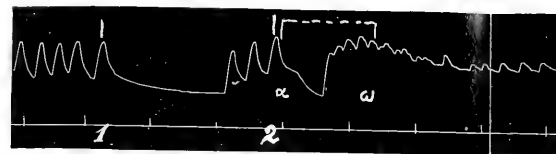



Fig. 2

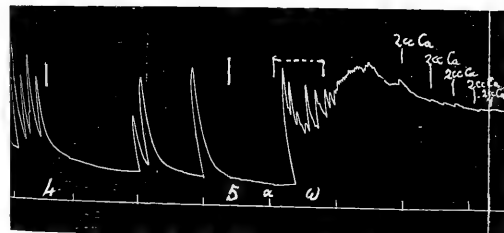



Fig. 3

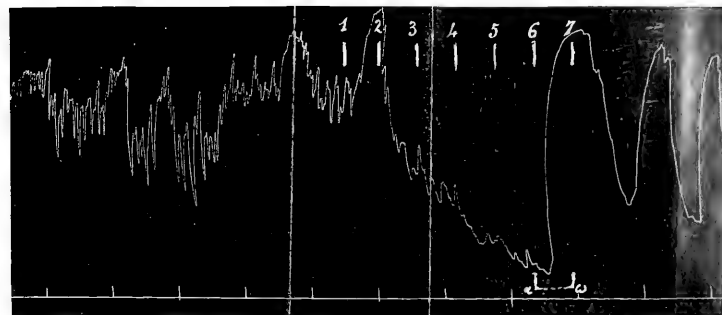



Fig. 4

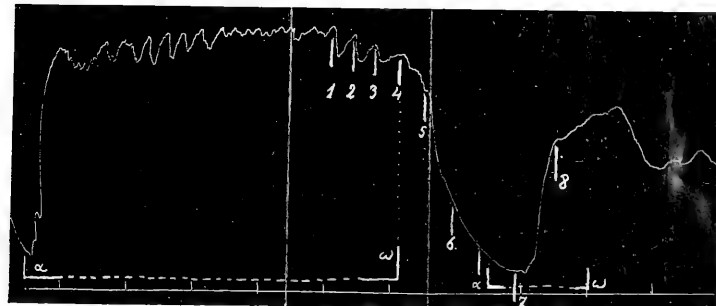



Fig. 5

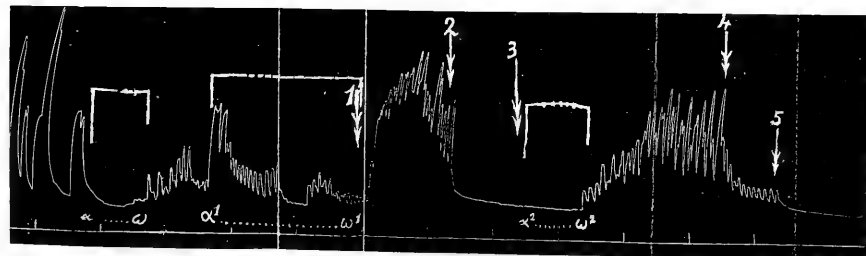



Fig. 6

Questioni di probabilità.

Nota di GIOVANNI BOCCARDI.

I.

I. — In questa noticina io ritorno dapprima sopra un semplice problema di probabilità trattato da J. Bertrand ed H. Poincaré nei loro volumi dallo stesso titolo, *Calcul des probabilités*, pubblicati l'uno nel 1889, l'altro nel 1896 (1ª edizione). Questi illustri matematici dànno del problema la soluzione esatta in modo alquanto diverso; ma l'uno e l'altro si occupano di questo problema in sul principio del volume, quando non si sono esposte le norme del Calcolo delle probabilità. Ne segue, come l'esperienza omai lunga dell'insegnamento mi ha provato, che gli studiosi non restano appagati della data soluzione, anzi per la maggior parte la dichiarano inesatta e vanno cercando qua e là argomenti per sostenere siffatta loro opinione. La soluzione poi data del Poincaré può facilmente indurre in errore pel modo con cui è presentata.

Secondo il mio modesto parere, quegli autori avrebbero fatto bene a riserbare per più tardi la trattazione di quel facile problema, la quale, fatta con l'applicazione delle regole di Bayes [1], si comprende facilmente e chiude la via alle critiche. Tanto io fo nella prima parte di questa noticina, dando maggiore estensione a quel problema, variandone i casi.

---

[1] T. Bayes si è pel primo occupato delle probabilità *a posteriori* o delle cause, ma la sua Memoria: *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances* (“ Philosoph. Transac. „, London, LIII, 1763, pp. 376-399) è un'opera postuma. R. Price s'incaricò di pubblicarla.

II. 1° Problema. — Si hanno tre scrigni identici esternamente, ciascuno con 2 cassetti, in ognuno dei quali si trova una moneta di oro o di argento. Il 1° scrigno contiene oro in ognuno dei 2 cassetti; il 2° contiene oro in un cassetto, argento nell'altro; il 3° contiene argento in ambo i cassetti. Si domanda: Qual'è la probabilità che, mettendo la mano a caso ad uno qualunque dei tre scrigni, ed aprendo a caso uno dei due cassetti, ne esca oro?

Soluzione. — Si potrebbe dire con Poincaré: Se A, B e C indicano rispettivamente i 3 scrigni, e per ognuno di essi si indica con α un cassetto e con β l'altro, avremo 6 combinazioni, ossia 6 casi, cioè:

$$\begin{array}{ll} A\alpha, & A\beta \\ B\alpha, & B\beta \\ C\alpha, & C\beta. \end{array}$$

Questi casi sono generalmente possibili, perchè nulla differenzia un cassetto dall'altro. Di questi 6 casi, 3 soltanto sono favorevoli all'uscita dell'oro: dunque $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ è la probabilità di ottenere oro.

Ma questo modo di trattare isolatamente i cassetti, indipendentemente l'uno dall'altro, induce facilmente in errore quando si viene al II Problema (che è quello su cui intendo richiamare l'attenzione), ed in quel caso i cassetti non si trovano tutti nelle stesse condizioni.

Io preferirei dar questa soluzione: Non essendovi nulla che differenzi uno scrigno dall'altro, la probabilità di mettere la mano ad uno di essi, designato, è la stessa per A, B, C, dunque è eguale ad $\frac{1}{3}$.

Però, messa la mano in uno dei 3 scrigni, non è eguale la probabilità di trarre oro quando se ne apre un cassetto a caso. Quindi applicheremo il principio della probabilità totale e della composta, espresso con la formoletta.

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_m q_m.$$

La probabilità di estrarre oro dal 1° cassetto è eguale ad 1, essendo certo che non vi si troverà altro che oro; la probabilità

di trarre oro dal 2° cassetto è $\frac{1}{2}$; quella di trarne dal 3° è zero. Dunque si ha

$$\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Risposta: *Evvi probabilità $\frac{1}{2}$ di estrarre oro.*

Se si domandasse la probabilità di metter la mano nello scrigno che contiene oro e argento (così presenta il problema Bertrand) si ha per risposta $\frac{1}{3}$.

III. 2° Problema. — Messa la mano ad uno scrigno ed aperto uno dei cassetti, vi si è trovato oro; quale probabilità vi è che, aprendo l'altro cassetto del medesimo scrigno, vi si troverà anche oro?

Gli studenti dànno diverse risposte; ma difficilmente trovano la via che conduce alla soluzione esatta. Vi è chi dice: Poichè non vi è che il 1° scrigno che possa dare oro dai due cassetti, il problema equivale a domandare qual'è la probabilità di metter la mano nel 1° scrigno: probabilità che pel detto innanzi è eguale ad $\frac{1}{3}$.

Un altro ragiona così: Poichè non vi sono che il 1° ed il 2° scrigno che contengano oro, l'aver tratto oro la prima volta vuol dire che o si è messa la mano nel 1° o nel 2°. Se nel 1°, si avrà oro anche la seconda volta; se nel 2°, si trarrà argento. Dunque due sono i casi possibili, e la risposta è: Vi è probabilità $\frac{1}{2}$ di trarre oro la seconda volta.

Qualche altro pensa a questo modo: Avendo estratto oro, io ho davanti a me due casi possibili, o di aver messo la mano nel 1° scrigno o nel 2°; l'uno e l'altro caso hanno probabilità $\frac{1}{2}$. Applicando dunque il principio della probabilità totale, avremo che pel 1° scrigno la probabilità di trarre oro una seconda volta è 1, pel secondo è 0; quindi

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}.$$

La risposta sarà dunque: La probabilità di estrarre nuovamente oro è eguale a $\frac{1}{2}$.

Un quarto ragiona così: Poichè io ho messo la mano sul 1° scrigno o sul 2°, i cassetti da aprire e sui quali rimane la incertezza sono 3; dei quali 2 contengono oro ed un solo argento. Dal momento che nulla differenzia esternamente i cassetti, vi sono 2 probabilità per oro su 3 casi; quindi la probabilità richiesta è $\frac{2}{3}$.

I primi tre sbagliavano nel ragionamento e nella risposta; l'ultimo dà la risposta esatta, ma erra nel ragionamento. Per puro caso, nelle circostanze del problema, quel ragionamento conduce alla soluzione giusta, ma, come vedremo nell'altro problema che io propongo come estensione di questo del Bertrand e del Poincaré, il considerare semplicemente i cassetti senza badare agli scrigni conduce generalmente a false soluzioni.

E il Poincaré, certamente senza volerlo, avvia a questo modo di ragionare, poichè dice:

" Avant d'ouvrir le tiroir, je savais que j'y trouverais une " pièce d'or ou une pièce d'argent avec une probabilité égale, " c'est-à-dire $\frac{1}{2}$; or, je puis trouver la pièce d'or dans trois " cas $A\alpha$, $A\beta$, $B\alpha$, et de ces trois cas un seul, $B\alpha$, est favo- " rable à l'arrivée de la pièce d'argent dans le second tiroir ".

Questa è tutta la soluzione del Poincaré.

Se vi è probabilità $\frac{1}{3}$ di cavare argento, vi è probabilità $\frac{2}{3}$ di cavare oro.

Bertrand, secondo il tono geniale e spiritoso del suo volume, gioca sulla risposta $\frac{1}{2}$ (la prima da noi esposta) e dice: La probabilità di mettere la mano sullo scrigno B, contenente oro ed argento, era $\frac{1}{3}$ prima di aprire alcun cassetto, come mai può diventare $\frac{1}{2}$ pel fatto che si è aperto un cassetto?

" Comment croire, cependant, qu'il suffira d'ouvrir un tiroir " pour changer la probabilité et de $\frac{1}{3}$ l'élever à $\frac{1}{2}$? ".

Egli prosegue con una estensione a 300 cassetti, che, col rispetto dovuto a tanto uomo, finisce con confondere anche più il lettore. Sta poi che con la sua domanda spiritosa Bertrand, nella mente degli studenti, sembra non fare differenza fra la

probabilità *a priori*, prima di aprire un cassetto e quella *a posteriori*, cioè trovato oro in un cassetto, qual'è la probabilità di aver messo la mano nel 1° scrigno?

IV. — Ecco adesso come io procedo nel cercare la soluzione. Poichè si è estratta una moneta che è risultata di oro e l'estrarre nuovamente oro dipende dall'aver messa la mano nel 1° cassetto anzichè nel 2°, qui dobbiamo applicare il teorema di Bayes sulla probabilità delle cause, assomigliando gli scrigni ad altrettante cause e l'estrazione delle monete ad effetti. La regola di Bayes può enunciarsi nel modo seguente:

Quando si è avverato un avvenimento A, *il quale può essere prodotto da diverse cause,* $C_1, C_2, C_3, \ldots C_m$, *e la probabilità che agisca ognuna di quelle cause è rispettivamente* $q_1, q_2, q_3, \ldots q_m$, *mentre, dato che agisca una di quelle cause, vi è rispettivamente probabilità* $p_1, p_2, p_3, \ldots p_m$ *che ne provenga l'avvenimento* A, *la probabilità che sia stata la causa* C_i *a produrlo è data dalla formola*

$$\frac{q_i p_i}{\Sigma q p}.$$

Di questa regola si fa ordinariamente applicazione al problema delle urne contenenti palline di diverso colore, una delle quali è stata estratta e si domanda la probabilità che essa provenga da una data urna fra quelle. Per esempio: Sieno date m urne simili, contenenti ognuna un certo numero b di palline bianche ed un numero a di palline azzurre e sia diverso il rapporto $\frac{b}{a}$ nelle singole urne. Si mette la mano in una delle urne, a caso, se ne estrae una pallina bianca. Qual'è la probabilità che essa provenga dall'urna i?

Poichè in questo caso la probabilità di metter la mano in una di quelle urne è eguale per tutte, abbiamo $q_1 = q_2 = q_3 = \ldots q_m$.

La risposta è data dalla formola

$$\frac{b_i}{a_i + b_i} : \Sigma \frac{b}{a + b}. \tag{1}$$

Prendiamo adesso gli scrigni come urne, aventi però tutte complessivamente lo stesso numero di palline, che qui sono le

monete contenute in altrettanti cassetti, e vediamo súbito che non si possono considerare i singoli cassetti come se fossero isolati, mentre sono raggruppati a 2 a 2 in ognuno dei 3 scrigni. Se questo è vero prima di metter la mano ad uno scrigno per aprirne un cassetto e trarne fuori la moneta contenutavi, non è più vero dopo che ciò si è fatto. Con l'immagine delle urne non è più possibile un equivoco.

Applicando dunque la (1), cercheremo la probabilità *a posteriori* di aver messo la mano nel 1° scrigno non contenente altro che oro, ossia la probabilità che la moneta di oro estratta appartenga al 1° scrigno; avremo così la probabilità di estrarre oro la seconda volta. La probabilità di aver messo la mano al 1° scrigno è data dal quoziente della probabilità *a priori* di estrarre oro dal 1° scrigno divisa per la somma delle probabilità di trarre oro dagli scrigni che ne contengono, cioè il 1° ed il 2°.

La probabilità *a priori* di estrarre oro dal 1° scrigno è l'unità, essendo certo che dal 1° scrigno non può trarsi altro che oro; quella di trarre oro dal 2°, che contiene oro in un cassetto, argento in un altro, è $\frac{1}{2}$; abbiamo dunque

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Risposta: *Evvi probabilità eguale a* $\frac{2}{3}$ *di trarre oro una seconda volta.*

V. — Estenderemo adesso il problema al caso di 4 scrigni.

Problema. — Si hanno 4 scrigni con 3 cassetti ognuno. Il 1° contiene una moneta di oro in ognuno dei cassetti; il 2° contiene oro in 2 cassetti, argento in 1; il 3° ha oro in 1 cassetto, argento negli altri; il 4° contiene argento in ognuno dei cassetti.

Si mette la mano in uno scrigno ed apertone un cassetto, vi si trova oro. Quale probabilità vi è che, aprendo nello stesso scrigno un altro cassetto, vi si troverà nuovamente oro?

Soluzione. — L'avere estratto oro esclude il 4° cassetto; il problema si può allora enunciare così: Si hanno 3 scrigni

con 3 cassetti ognuno; il 1° contiene oro nei tre cassetti; il 2° oro in 2 cassetti, argento nell'altro; il 3° oro in un sol cassetto e argento negli altri due. Messa la mano ad uno scrigno ed apertovi un cassetto vi si è trovato oro; qual'è la probabilità che, aprendo un secondo cassetto nello stesso scrigno, vi si troverà oro?

Qui bisogna fare intervenire le probabilità di aver messo la mano nel 1°, nel 2° o nel 3° scrigno e poi la probabilità di estrarre oro dal 1°, dal 2° o dal 3°. Applicheremo la regola di Bayes e la formola (1) ragionando nel modo seguente:

La probabilità di aver messo la mano nel 1° scrigno, in altri termini, che la moneta di oro estratta provenga dal 1° scrigno, è data dal quoziente della probabilità di trarre oro da quello scrigno *prima di aprire uno dei 3 cassetti*, divisa per la somma delle probabilità di estrarre oro da ognuno dei 3 scrigni che ne contengono. Ora la probabilità di cavare oro dal 1° scrigno è eguale ad 1, la probabilità di trarre oro dal 2° è $\frac{2}{3}$, quella di cavare dal 3° scrigno è $\frac{1}{3}$; quindi la probabilità di aver messo la mano nel 2° scrigno è

$$1 : \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} .$$

Similmente la probabilità di aver messo la mano nel 2° scrigno è

$$\frac{2}{3} : \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} ;$$

quella di aver messo la mano nel 3° è

$$\frac{1}{3} : \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} .$$

Adesso, la probabilità di trarre oro dal 1° scrigno quando vi si è messa la mano è 1, quella analoga quando si è messa la mano nel 2° è $\frac{1}{2}$; quella di trarre oro dal 3° scrigno (che ne conteneva una sola, la quale si suppone estratta quando si suppone di aver messa la mano nel 3° scrigno) è zero.

Dunque la probabilità di trovare oro aprendo un secondo cassetto dello scrigno cui si è messa la mano, che è una probabilità totale, è data da

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Risposta: *La probabilità di trarre nuovamente oro è eguale a* $\frac{2}{3}$.

VI. — Se si volesse fare il conto coi cassetti, considerandoli come indipendenti e nelle stesse condizioni di probabilità, si direbbe: Estratto oro da un cassetto, rimangono 5 cassetti con oro su 8 cassetti (il 4° scrigno rimane sempre escluso), dunque: *La probabilità di trarre oro nuovamente è eguale a* $\frac{5}{8}$.

La probabilità di cavare argento sarebbe $\frac{3}{8}$.

Ma, come abbiamo detto innanzi, questo modo di ragionare è errato. I cassetti rimasti non aperti nei 3 primi scrignetti non si trovano nelle stesse condizioni di probabilità, quanto ad aver messa la mano nello scrigno cui appartengono. Allorchè si è estratto oro una prima volta è più probabile di aver messo la mano nel 1° scrigno che nel 2°, e più in questo che nel 3°.

II.

VII. Problema. — Si hanno m palline in un'urna, essendo m un numero pari o dispari. Qual è la probabilità che prendendone con un sol colpo un certo numero, questo sia pari o dispari? [1].

---

[1] Chi non si occupa di probabilità che per caso, potrebbe pensare che con l'impostare così la questione si venga dapprima a ritenere eguali le probabilità di trarre un numero pari o un numero dispari, mentre poi si trova che vi è più facilità per un numero dispari; ma chi ragionasse così mostrerebbe d'ignorare come si trattino i problemi di probabilità. Qui si suppone identico *l'atto di estrarre* una combinazione qualsiasi e si cerca se è più facile estrarre un numero pari o dispari.

Soluzione. — I casi favorevoli alla estrazione di un numero pari sono soltanto le combinazioni di m oggetti a 2, 2. a 4, 4, ecc. I casi favorevoli a un numero dispari sono le combinazioni di m oggetti ad 1 ad 1, a 3 a 3, ecc. Quindi il numero dei casi favorevoli alla estrazione di un numero pari di palline è dato dalla somma dei numeri delle combinazioni pari. Evidentemente la combinazione zero a zero è qui esclusa, dovendosi di necessità estrarre un certo numero di palline.

Similmente il numero dei casi favorevoli alla estrazione di un numero dispari di palline è dato dalla somma dei numeri delle combinazioni dispari. Il numero poi dei casi egualmente possibili è la somma di quelle due somme.

Per avere queste due somme immediatamente ricorreremo alle note relazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} 2^m = 1 + (m)_1 + (m)_2 + \ldots + (m)_m \,, \\ 0 \; = 1 - (m)_1 + (m)_2 + \ldots \pm (m)_m \,, \end{cases}$$

che si ottengono ponendo $a = 1$, $b = \pm 1$ nello sviluppo di $(a + b)^m$.

Addizionando le (2) si ha

$$(3) \qquad 2^m = 2 + 2(m)_2 + 2(m)_4 + \ldots$$

Isolando nel 2° membro il doppio della somma delle combinazioni pari C_p e dividendo per 2, si ha

$$C_p = 2^{m-1} - 1.$$

Sottraendo la seconda delle (2) dalla prima, otteniamo

$$(4) \qquad 2^m = 2\left[(m)_1 + (m)_3 + \ldots\right],$$

e quindi per la somma C_d delle combinazioni dispari

$$C_d = 2^{m-1}.$$

Il numero poi di tutte le combinazioni possibili è dato da $C_p + C_d$, ossia è eguale a

$$2^{m-1} + 2^{m-1} - 1 = 2^m - 1,$$

come si ha pure immediatamente dalla prima delle (2), che dà

$$(m)_1 + (m)_2 + (m)_3 + (m)_4 + \dots = 2^m - 1.$$

Passando alle probabilità, dobbiamo fare il rapporto del numero dei casi favorevoli a quello dei casi egualmente possibili, sicchè avremo:

Probabilità di estrarre un numero pari di palline

$$\frac{2^{m-1}-1}{2^m-1} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2^m-1},$$

probabilità che è $< \frac{1}{2}$.

Probabilità di estrarre un numero dispari

$$\frac{2^{m-1}}{2^m-1} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2^m-1},$$

probabilità che è $> \frac{1}{2}$.

Dunque: *È più probabile di estrarre un numero dispari di palline.*

Però la differenza fra questa probabilità e quella di un numero pari, cioè

$$\frac{1}{2^m-1},$$

è tanto più piccola quanto più grande è m.

Si constata che la somma delle due probabilità che riguardano due avvenimenti, che sono i soli possibili ed opposti l'uno all'altro, forma l'unità.

VIII. — Nella soluzione ora data si è ammesso il caso che si prendano tutte le m palline insieme, e allora, che m sia pari o dispari, le espressioni trovate per le probabilità di un numero pari e di un numero dispari sussistono. Ma se si fa l'ipotesi che non si prendono mai tutte le palline insieme, allora bi-

sogna distinguere il caso in cui m è pari da quello in cui è dispari.

Nel caso di m *pari* il numero dei casi favorevoli alla uscita di un numero impari di palline eccede di 2 quello della uscita di un numero pari. Se poi *m è impari* vi sono tanti casi favorevoli per un numero pari quanti per un numero dispari.

Infatti, se *m è pari* e non si ammette l'ultima combinazione $(m)_m$ che allora sarebbe una sola combinazione pari (essendo $(m)_m = 1$), la relazione (3), ossia

$$2^m = 2 + 2\,[(m)_2 + (m)_4 + \dots + (m)_{m-2}] + 2\,(m)_m$$

dà

$$2\,C_p = 2^m - 2 - 2\,, \qquad C_p = 2^{m-1} - 2.$$

La (4) poi dà

$$2^m = 2\,[(m)_1 + (m)_3 + \dots + (m)_{m-1}]$$

e quindi

$$2\,C_d = 2^m, \qquad C_d = 2^{m-1}.$$

Se invece *m è dispari*, la (3), ossia

$$2^m = 2 + 2\,[(m)_2 + (m)_4 + \dots + (m)_{m-1}]$$

dà

$$2\,C_p = 2^m - 2\,, \qquad C_p = 2^m - 1\,,$$

e la (4), ossia

$$2^m = 2\,[(m)_1 + (m)_3 + \dots + (m)_{m-2}] + 2\,(m)_m$$

dà

$$2\,C_d = 2^m - 2\,, \qquad C_d = 2^{m-1} - 1.$$

Si vede che quando m è pari, $(m)_m$ è una combinazione pari e bisogna diffalcarla da C_p completo, mentre essa non entra nella espressione di C_d.

Quando poi m è dispari, $(m)_m$ è una combinazione dispari che non figura in C_p, invece figura in C_d e stabilisce l'eguaglianza di C_p e C_d.

IX. — Passiamo alle probabilità.

Nel caso di *m pari*, la somma di tutti i casi possibili è

$$C_p + C_d = 2^m - 2,$$

quindi la probabilità di una combinazione pari è

$$\frac{2^{m-1} - 2}{2^m - 2} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2^{m-1} - 1};$$

la probabilità di una combinazione dispari è

$$\frac{2^{m-1}}{2^m - 2} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2^{m-1} - 1}.$$

Si constata che la somma delle due probabilità forma l'unità.

Nel caso di *m dispari*, la somma di tutti i casi possibili è

$$C'_p + C'_d = 2^m - 2$$

e si ha, per una combinazione pari,

$$\frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 2} = \frac{1}{2}$$

e similmente per una combinazione dispari

$$\frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 2} = \frac{1}{2}.$$

La somma delle due probabilità è sempre eguale ad 1.

X. — Come esempio, nella ipotesi che si possano estrarre tutte le palline, supponiamo $m = 4$, avremo

$$C_p = 7, \qquad C_d = 8.$$

Se poniamo $m = 5$, risulterà

$$C_p = 15\,, \qquad C_d = 16\,.$$

Dunque, che m sia pari o dispari, è sempre $C_d > C_p$.

Se invece escludiamo l'ipotesi che si possano prendere tutte le palline, poniamo $m = 4$. Risulterà

$$C_p = 6\,, \qquad C_d = 8\,.$$

Per $m = 5$ avremo

$$C_p = 15\,, \qquad C_d = 15\,.$$

XI. — Non si comprende come il Laurent (*Traité du Calcul des probabilités*, pag. 51) abbia perduto di vista la condizione necessaria che la somma delle probabilità pei due casi deve essere eguale all'unità quando, risolvendo questo problema, trova per probabilità di estrarre un numero pari

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m+1}}$$

e per un numero dispari

$$\frac{1}{2}\,.$$

Qui la somma è inferiore ad 1.

Ecco la soluzione inesatta che dà il Laurent:

" Les manières dont on peut prendre un nombre pair de " boules sont les cas où l'on en prendra 2, 4, 6, 8, ...; les pro- " babilités de ces événements simples sont respectivement les " quotients de C_m^2, C_m^4, C_m^6, ... par la somme de toutes les " combinations que l'on peut faire avec m objets, somme que " l'on sait être égale à $(1+1)^m$ ou 2^m; la probabilité d'extraire " un nombre pair de boules sera donc

$$\frac{C_m^2 + C_m^4 + C_m^6 + \dots}{2^m} = \frac{(1+1)^m - (1-1)^m - 1}{2^{m+1}} = \frac{2^m - 1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m+1}}\,;$$

" la probabilité d'extraire un nombre impair est de même

$$\frac{C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \ldots}{2^m} = \frac{(1+1)^m - (1-1)^m}{2^{m+1}} = \frac{2^m}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}.$$

" La probabilité d'extraire un nombre impair de boules est
" donc plus considérable que celle d'extraire un nombre pair,
" mais la différence tend vers zéro quand le nombre total des
" boules augmente indéfiniment ".

Si vede che questa conclusione è esatta, ma il modo di giungervi è erroneo.

Laplace si occupa due volte di questo problema, cioè nella *Théorie analytique des probabilités* (pag. 203 del vol. VII di *Œuvres complètes*) e nella Memoria *Sur les suites récurro-récurrentes* (pag. 19, vol. VIII) e conclude sempre che *il y a toujours plus avantage à parier pour les nombres impairs que pour les pairs.*

Però egli suppone sempre che ci si assicuri che il numero x di palline che si estrae non possa eccedere il numero totale m delle palline. Del caso in cui non è consentito di trarre tutte le palline non fa parola.

Non si comprende come il Laurent non abbia posto mente alla soluzione data da Laplace.

Radici di numeri approssimati ed estrazione abbreviata della radice quadrata.

Nota di ALBERTO TANTURRI.

Il presente scritto può dividersi in due parti. La 1ª fa seguito alla Nota: *Prodotto di due numeri approssimati*, comparsa in questi *Atti* (1915, 25 aprile): e tratta, coi metodi di quella, delle radici dei numeri approssimati. La 2ª riprende un antico metodo d'estrazione abbreviata della radice quadrata, e lo completa con teoremi nuovi, utili nella pratica (*).

Radici di numeri approssimati.

1 ·1 La teoria sta tutta in due proposizioni che qui scrivo coi simboli del " Formulario Mathematico ".

I $\quad m \epsilon 1 + \mathrm{N}_1 \,.\, a \epsilon 1 \vdash 10^m \,.\, n \epsilon \mathrm{N}_0 \,.\, k = \mathrm{ord}\, m \,.\, \mathcal{O} \,.\, \sqrt[m]{a} \,\epsilon \sqrt[m]{(\mathrm{V}_n a)} +$
$\quad + (0 \vdash 1)\, 10^{-n-k}.$

II $\quad \mathrm{HpI} \,.\, i \epsilon 1 \cdots m - 1 \,.\, (\mathrm{V}_n a)^{m-1} \geq (10^{k+i}/m)^m \,.\, \mathcal{O} \,.$ " $+$
$\quad + (0 \vdash 1)\, 10^{-n-k-i}.$

(*) Prendo occasione per un piccolo *errata-corrige* dello scritto citato. — Nell'es. 3° della pag. 932, dopo le parole: " ... è un valore di $a \times a'$ a meno di $1/10^2$ ", per maggior chiarezza si aggiunga: ", come risulta subito dal n. **2** ·1, al quale sempre convien ricorrere quando il prodotto $f_n \times f_n'$, si ha, come qui, espresso in cifre ". Nel rigo 5° dell'es. 3° della pag. 937, invece di π si legga $\pi(\sqrt{5}+1)$. E nel rigo 5° della 1ª nota della pag. 939, si legga: " ... non esatti, *tutt'e due* per difetto o per eccesso: ... ". — La breve citazione dell'altra nota della stessa pag. 939 è poi, credo, la più comoda per il lettore; ma è sproporzionata al gran contributo del Professore Burali-Forti alla moderna teoria delle approssimazioni.

·2 Se a e b sono quantità, $a \vdash b$ indica l'intervallo da a a b a compreso e b escluso.

E se m è un numero naturale (: 1, 2, 3, ...), ord m, che si legge " ordine di m ", è quell'intero (: 0, 1, 2, ...) x, tale che $10^x \leq m < 10^{x+1}$.

Essendo poi a una quantità positiva o nulla, e n un intero,

$$V_n a = E(10^n a)\, 10^n;$$

cioè, secondo la nomenclatura della mia Nota citata sopra, = " parte di a a meno di $1/10^n$ ". Questo simbolo fu proposto dal Peano nella Nota: *Approssimazioni numeriche* (" Rend. R. Accad. dei Lincei ", 1916, 2 gennaio), insieme con la lettura che qui adottiamo: " valore di a con n decimali ".

" Valore di a a meno di $1/10^n$ " significherà invece ogni quantità positiva o nulla y, tale che $a \epsilon y + (0 \vdash 1) 10^{-n}$, cioè che $y \leq a < y + 1/10^n$. Quest'ultima relazione dà soltanto che $V_n a$ o $= V_n y$, o $= V_n y + 1/10^n$; e perciò è detto in quella mia Nota che un generico valore di a a meno di $1/10^n$ non dà il valore di a con n decimali; *lo dà solo con ambiguità.*

·3 Leggeremo dunque così:

" Sia m un intero maggiore di 1 e di ordine k, a una quantità tale che $1 \leq a < 10^m$, e n un intero. E consideriamo il valore $V_n a$ di a con n decimali.

Sempre $\sqrt[m]{(V_n a)}$ è un valore di $\sqrt[m]{a}$ a meno di $1/10^{n+k}$ ".

" Anzi, a meno di $1/10^{n+k+i}$; se, nelle stesse ipotesi, i è uno dei numeri 1, 2, ..., $m-1$, e $(V_n a)^{m-1} \geq (10^{k+i}/m)^m$ ".

·4 *Dimostrazioni.* — Dalla $V_n a \leq a < V_n a + 1/10^n$ si deduce infatti che $\sqrt[m]{(V_n a)} \leq \sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{(V_n a + 1/10^n)}$; e quindi che

$$\sqrt[m]{(V_n a)} \leq \sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{(V_n a)} + 1/[10^n \times m \times \sqrt[m]{(V_n a)^{m-1}}],$$

in virtù d'un noto teorema elementare (*).

(*) Se x e y sono quantità positive, e m è un intero maggiore di 1, $\sqrt[m]{(x+y)} < \sqrt[m]{x} + y/(m \times \sqrt[m]{x^{m-1}})$.

Basterà dimostrare che la differenza fra 3° e 1° membro dell'ultima relazione, sempre $\leq 1/10^{n+k}$; anzi $\leq 1/10^{n+k+i}$, nelle nuove ipotesi della II.

Ora, per la def. di ordine, $10^k \leq m < 10^{k+1}$. E sta inoltre la: $1 \leq V_n a < 10^m$; equivalente alla ipotesi: $1 \leq a < 10^m$ (*). Dunque, quella differenza:

$$\text{sempre} \leq 1/[10^n \times 10^k \times 1] \quad , \text{cioè di } 1/10^{n+k};$$
$$\text{come} \quad " \quad > 1/[10^n \times 10^{k+1} \times \sqrt[m]{(10^m)^{m-1}}], \quad " \quad 1/10^{n+k+m}.$$

Essa inoltre $\leq 1/10^{n+k+i}$, quando, essendo i uno degl'interi da 1 a $m-1$, $10^{k+i} \leq m \times \sqrt[m]{(V_n a)^{m-1}}$, cioè $(V_n a)^{m-1} \geq (10^{k+i}/m)^m$.

Così le I e II son dimostrate.

2. Prima quistione. — " m è un intero maggiore di 1, e n è un intero; e di una quantità positiva a si conosce il valore $V_n a$ con n decimali. Che cosa si può dire, *a priori*, dell'approssimazione di $\sqrt[m]{(V_n a)}$ rispetto a $\sqrt[m]{a}$? ".

Risposta. — Vedila nel n. 1·3, quando però si supponga che $1 \leq a < 10^m$, cioè che $1 \leq V_n a < 10^m$. A ciò possiamo sempre ridurci, spostando, nel dato valore $V_n a$, il punto deci-

---

(*) Ecco una proprietà elementare del simbolo E:

a) $a \epsilon Q_0 . f \epsilon N_0 . \supset : a < f . = . Ea < f;$

cioè: " sono equivalenti le due relazioni $a < f$ ed $Ea < f$, nell'ipotesi che a sia una quantità positiva o nulla, e f un intero ".

Per conseguenza:

b) $a \epsilon Q_0 . f \epsilon N_0 . \supset : f \leq a . = . f \leq Ea.$

Da *a)* e *b)* si deduce la proposizione ora applicata nel testo:

c) $a \epsilon Q_0 . f, f', m \epsilon N_0 . \supset : f \leq a < f' . = . f \leq V_m a < f'.$

Appresso servirà la proposizione più generale:

d) $a \epsilon Q_0 . n \epsilon N_0 . f, f' \epsilon N_0/10^n . m \epsilon n + N_0 . \supset : f \leq a < f' . = . f \leq V_m a < f'.$

Così, per es., se a è una quantità, la $3{\cdot}14 \leq a < 3{\cdot}16$ equivale alla $3{\cdot}14 \leq V_2 a < 3{\cdot}16$, o alla $3{\cdot}14 \leq V_3 a < 3{\cdot}16$, ecc.

male di m, o $2m$, o $3m$, ecc., posti; eccettuati alcuni semplici casi da studiarsi a parte (*).

Seconda quistione. — " m è un intero maggiore di 1, a una quantità tale che $1 \leq a < 10^m$, e r un intero. Trovare un intero x tale che $\sqrt[m]{(V_x a)}$ sia un valore di $\sqrt[m]{a}$ a meno di $1/10^r$ ".

Risposta. — Pongo $k = \text{ord}\, m$; e per ogni $1 \cdots m-1, i, z_i = \sqrt[m-1]{(10^{k+i}/m)^m}$. E distinguo due casi.

1° *caso*. $r \geq k$.

Prendo $x = r - k$. Sarà $\sqrt[m]{(V_{r-k} a)}$ un valore di $\sqrt[m]{a}$ a meno di $1/10^r$; anzi, a meno di $1/10^{r+i}$, se per qualche $1 \cdots m, i$, $V_{r-k} a \geq z_i$.

Spesso, però, basta dare a x un valore minore di $r - k$. Precisamente: se esiste un $1 \cdots m-1, i$, tale che $r \geq k + i$ e $V_{r-k-i} a \geq z_i$, prenderò $x = r - k - i$. Sarà $\sqrt[m]{(V_{r-k-i} a)}$ un valore di $\sqrt[m]{a}$ a meno di $1/10^r$; anzi, a meno di $1/10^{r+s}$, se esiste un $0 \cdots m - i - 1, s$, tale che $V_{r-k-i} a \geq z_{i+s}$.

2° *caso*. $r < k$.

Prendo $x = 0$. Sarà $\sqrt[m]{(V_0 a)}$ un valore di $\sqrt[m]{a}$ a meno di $1/10^r$; perchè lo è a meno di $1/10^k$; anzi lo è a meno di $1/10^{k+i}$ se i è un $1 \cdots m - 1$ tale che $V_0 a \geq z_i$.

(*) Scrivo i casi da studiarsi a parte quando $m = 2$, cioè quando si tratta di radici quadrate.

Se $a \epsilon 0{\cdot}\ldots$, si può dir solo che $\sqrt{a} \epsilon 0{\cdot}\ldots$

Se $a \epsilon 0{\cdot}0\ldots$, " " $\sqrt{a} \epsilon 0{\cdot} \vdash 0{\cdot}4$.

Se $a \epsilon 0{\cdot}1\ldots, 0{\cdot}2\ldots, 0{\cdot}3\ldots, 0{\cdot}4\ldots, 0{\cdot}5\ldots, 0{\cdot}6\ldots, 0{\cdot}7\ldots, 0{\cdot}8\ldots, 0{\cdot}9\ldots$, si può, ordinatamente, dir solo che

$$\sqrt{a} \epsilon 0{\cdot}3.:., 0{\cdot}4.:., 0{\cdot}5.:., 0{\cdot}6.:., 0{\cdot}7\ldots, 0{\cdot}7.:., 0{\cdot}8\ldots, 0{\cdot}8.:., 0{\cdot}9\ldots$$

La notazione, per es., $0{\cdot}3\ldots$ sta invece dell'altra $0{\cdot}3 \vdash 0{\cdot}4$; sicchè la scrittura $a \epsilon 0{\cdot}3\ldots$ precisa la scrittura comune: $a = 0{\cdot}3\ldots$; come è detto nella citata Nota del Peano. Per comodità poi, scrivo, per es., $0{\cdot}3.:.$, invece di $0{\cdot}3 \vdash 0{\cdot}5$.

Caso particolare della radice quadrata.

3. Sia a una quantità tale che $1 \leq a < 10^2$.

·1 Se n è un intero, *a priori* si può dir sempre che $\sqrt{(V_n a)}$ è un valore di $\sqrt{a}$ a meno di $1/10^n$. Anzi, a meno di $1/10^{n+1}$, se $V_n a \geq 25$, o, che è lo stesso, se $a \geq 25$.

Il 1° di questi due risultati è, preciso, anche nel Vieille (v.: *Approximations numériques*, 2e édit.). Ma la condizione sufficiente per la maggiore approssimazione visibile *a priori*, che, col nostro 2° risultato, è semplicemente la: „ $a \geq 25$ „, è per quell'Autore la: „ $a \geq 40$, ovvero $30 < a < 36$ „; come ho dedotto da una relazione generale che egli scrive tra la 1a cifra significativa di a e quella della sua radice m^{ma} (*).

·2 Se r è un intero, per avere un valore di $\sqrt{a}$ a meno di $1/10^r$ basta scrivere $\sqrt{(V_r a)}$; che è, anzi, un valore di $\sqrt{a}$ a meno di $1/10^{r+1}$, quando $a \geq 25$ (**).

Se poi $r \geq 1$ e $a \geq 25$, basta scrivere $\sqrt{(V_{r-1} a)}$.

(*) Non è difficile dimostrare che, per bontà di risultati, la nostra regola del n. **1**·3 supera quella ottenuta dal Vieille con l'error relativo. Chi voglia far gli esempi di questo Autore osservi che nell'es. 1° egli non tien conto della sua relazione tra la 1a cifra di a e quella di $\sqrt[m]{a}$; in virtù della quale, non solo $\sqrt[3]{0{\cdot}4285}$, ma già $\sqrt[3]{0{\cdot}428}$ è un valore di $\sqrt[3]{(3/7)}$ a meno di $1/10^3$. E che nell'es. 5°, non solo $\sqrt{14{\cdot}472}$, ma già $\sqrt{14{\cdot}47}$ è un valore di $\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$ a meno di $1/10^2$.

(**) Applicando al caso di $r = 0$ la proposizione rammentata alla fine del n. **1**·2, e scrivendo E per V_0, avrò dunque:

a) $\quad E(\sqrt{a})$ o $= E(\sqrt{Ea})$, o $= E(\sqrt{Ea}) + 1$;

b) $\quad$ e, se $a \geq 25$, $V_1(\sqrt{a})$ o $= V_1(\sqrt{Ea})$, o $= V_1(\sqrt{Ea}) + 1$.

È però noto che $E(\sqrt{a}) = E(\sqrt{Ea})$, qualunque sia la quantità positiva a; e, del resto, la: $E(\sqrt{a}) > E(Ea)$ equivarrebbe alla: $E(\sqrt{a}) > \sqrt{Ea}$, cioè alla: $[E(\sqrt{a})]^2 > Ea$, o alla: $[E(\sqrt{a})]^2 > a$, o, finalmente, alla falsa: $E(\sqrt{a}) > \sqrt{a}$.

Caso particolare della radice cubica.

4. Sia a una quantità tale che $1 \leq a < 10^3$.

·1 Se n è un intero, *a priori* si può dir sempre che $\sqrt[3]{(V_n a)}$ è un valore di $\sqrt[3]{a}$ a meno di $1/10^n$. Anzi, a meno di $1/10^{n+1}$, se $V_n a \geq (10\sqrt{30})/9$. Anzi ancora, a meno di $1/10^{n+2}$, se $V_n a \geq (1000\sqrt{3})/9$.

Per comodità pratica scrivo che

$$(10\sqrt{30})/9 \,\epsilon\, 6{\cdot}085..., \text{ e } (1000\sqrt{3})/9 \,\epsilon\, 192{\cdot}450...$$

·2 Se r è un intero, per avere un valore di $\sqrt[3]{a}$ a meno di $1/10^r$ basta scrivere $\sqrt[3]{(V_r a)}$; che è, anzi, un valore di $\sqrt[3]{a}$ a meno di $1/10^{r+1}$, quando $V_r a \geq (10\sqrt{30})/9$; anzi ancora, un valore a meno di $1/10^{r+2}$, quando $V_r a \geq (1000\sqrt{3})/9$.

Se poi $r \geq 1$ e $V_{r-1} a \geq (10\sqrt{30})/9$, basta scrivere $\sqrt[3]{(V_{r-1} a)}$; che è anzi un valore di $\sqrt[3]{a}$ a meno di $1/10^{r+1}$, quando $V_{r-1} a \geq (1000\sqrt{3})/9$.

Se, finalmente, $r \geq 2$ e $V_{r-2} a \geq (1000\sqrt{3})/9$, basta scrivere $\sqrt[3]{(V_{r-2} a)}$.

Sull'estrazione di radice.

5. Per l'estrazione della radice m^{ma} si può ricorrere ai teoremi che qui scrivo pure in simboli.

$$a \epsilon 1 + Q_0 \,.\, n \epsilon N_0 \,.\, m \epsilon 1 + N_1 \,.\, f = V_n (\sqrt[m]{a}) \,.\, \supset .$$

III	$\sqrt[m]{a} \leq f + (a - f^m)/(m \times f^{m-1})$.
IV	„ $\geq$ „ $+$ „ $/[m \times (f + 10^{-n})^{m-1}]$.
V	„ $\geq$ „ $+$ „ $/\{10^n [(f + 10^{-n})^m - f^m]\}$.

“ Sia a una quantità non minore di 1, n un intero, m un intero maggiore di 1; e sia f il valore di $\sqrt[m]{a}$ con n decimali. Valgono allora le tre relazioni scritte „.

La III è comune nei trattati. Evidente quando $f=\sqrt[m]{a}$, si ottiene, come è noto, ponendo in ogni altro caso $x=f^m$ e $y=a-f^m$ nel teorema della 1ª nota del n. **1**·4.

La IV è enunciata, per es., nella pag. 102 dell'*Aritmetica generale e Algebra elementare* di G. Peano, con una traccia di possibile dimostrazione. Quando $f<\sqrt[m]{a}$, si può ottenere dal t.: “ se x e y sono quantità positive, e m è un intero maggiore di 1,

$$\sqrt[m]{(x+y)}>\sqrt[m]{x}+y/[m\times\sqrt[m]{(x+y)^{m-1}}]\ (*)\ „;$$

ponendo ancora $x=f^m$ e $y=a-f^m$, e poi tenendo conto della: $\sqrt[m]{a}<f+10^{-n}$.

La V è data nel “ Formulario Mathematico „, per le radici quadrata e cubica. E, sempre quando $f<\sqrt[m]{a}$, si può ottenere dal t.: “ se x, y e z sono quantità positive, e m è un intero maggiore di 1, e se $y<(\sqrt[m]{x}+z)^m-x$, allora

$$\sqrt[m]{(x+y)}>\sqrt[m]{x}+zy/[(\sqrt[m]{x}+z)^m-x]\ (**)\ „;$$

ponendo $x=f^m$, $y=a-f^m$, e $z=10^{-n}$.

(*) A differenza del t. della 1ª nota del n. 1·4, la dimostrazione elementare di questo è alquanto riposta. Si può, per es., procedere come appresso.

Moltiplico per $\sqrt[m]{(x+y)^{m-1}}$, e sarò ridotto a dimostrare che

$$x+y>\sqrt[m]{x(x+y)^{m-1}}+y/m\,;$$

cioè, trasportando y/m ed elevando a potenza m, che

$$[x+(m-1)\,y/m]^m>x(x+y)^{m-1}.$$

Scambio i due membri, e aggiungo $y\,(x+y)^{m-1}$. Dovrò dimostrare che $(x+y)^m$, ossia $\{[x+(m-1)\,y/m]+y/m\}^m$, $<[x+(m-1)\,y/m]+y(x+y)^{m-1}$. Ora quest'ultima si ottiene ponendo $a=x+(m-1)\,y/m$ e $b=y/m$ nel noto t.: “ se a e b sono quantità positive, e m è un intero maggiore di 1,

$$(a+b)^m<a^m+m\,(a+b)^{m-1}\,b\ „;$$

che si può dimostrare per induzione rispetto a m.

(**) Questo t. si ottiene ponendo $a=\sqrt[m]{x}$, $b=zy/[(\sqrt[m]{x}+z)^m-x]$, e $c=z$,

Nei trattati converrebbe alla III unir la V. La quale offre, rispetto alla IV, un doppio vantaggio: dimostrazione assai più agevole, e confine inferiore, per $\sqrt[m]{a} - f$, *sempre* più elevato (*).

Estrazione abbreviata della radice quadrata.

6·1

VI $a \epsilon 1 + Q_0 . n \epsilon N_1 . f \epsilon \iota [V_n(\sqrt{a})] \cup \iota [V_n(\sqrt{a}) + 10^{-n}] . g = V_{2n} \{[f + V_{2n}(a/f)]/2\} . \supset . g \epsilon \iota [V_{2n}(\sqrt{a})] \cup \iota [V_{2n}(\sqrt{a}) + 10^{-2n}]$.

·2 Prima di tutto, la scrittura, per es., $f \epsilon \iota$ ecc. significa che

$$f \text{ o } = V_n(\sqrt{a}), \qquad \text{o } = V_n(\sqrt{a}) + 10^{-n};$$

ed è più breve della equivalente

$$f \epsilon (1 + 10^{-n} N_0) . f - 10^{-n} \leq \sqrt{a} < f + 10^{-n},$$

che contiene però solo simboli aritmetici. Intanto, di f si può dire che soddisfa all'una o all'altra delle due:

$$(1) \qquad f \leq \sqrt{a} < f + 10^{-n},$$

$$(2) \qquad f - 10^{-n} \leq \sqrt{a} < f.$$

---

nell'altro: " se a, b e c sono quantità positive, e m è un intero maggiore di 1, e $b < c$,

$$(a + b)^m < a^m + [(a + c)^m - a^m] \, b/c \text{ "};$$

dimostrabile per induzione, e immediato, del resto, per chi scriva $[(a + b)^m - a^m]/b$ e $[(a + c)^m - a^m]/c$ sotto forma di polinomi in $a + b$ e $a + c$.

(*) Basta riconoscere che dei due denominatori *sempre* il 2° è minore del 1°; cioè che sempre

$$(f + 10^{-n})^m < f^m + m(f + 10^{-n})^{m-1} \times 10^{-n}.$$

Ora questa segue subito dal t. che chiude la penultima nota; ponendo $a = f$ e $b = 10^{-n}$.

È poi facile riconoscere che g è il valore con $2n$ decimali di $(f + a/f)/2$ (*).

·3 " a è una quantità non minore di 1, e n un numero naturale; e f o è uguale al valore con n decimali di $\sqrt{a}$, o a tal valore aumentato di $1/10^n$.

Cerco il valore con $2n$ decimali di $(f + a/f)/2$. Cioè: divido a per f spingendomi fino alla $2n^{ma}$ cifra decimale; sommo f col quoziente ottenuto; e divido la somma per 2, spingendomi pure fino alla $2n^{ma}$ cifra decimale.

Avrò un numero, g.

Orbene: g, o è uguale al valore con $2n$ decimali di $\sqrt{a}$, o a tal valore aumentato di $1/10^{2n}$ ".

·4 *Dimostrazione.* — Dei due numeri f e a/f vogliam considerare la media aritmetica, $(f + a/f)/2$, e la media geometrica, $\sqrt{a}$. Fra tali medie vale, come è noto, una relazione; che scrivo così:

$$(f + a/f)/2 = \sqrt{a} + (\sqrt{a} - f)^2/2f,$$
$$\text{ovvero a } \sqrt{a} + (f - \sqrt{a})^2/2f,$$

secondochè $f \leq \sqrt{a}$, ovvero $\sqrt{a} < f$. Nel 1° di questi due casi $\sqrt{a} - f < 10^{-n}$, e nel 2° $f - \sqrt{a} \leq 10^{-n}$; come segue dalle (1) e (2). Sempre dunque:

$$\sqrt{a} \leq (f + a/f)/2 \leq 10^{-2n}/2f;$$

e poichè $f \geq 1$:

$$\sqrt{a} \leq (f + a/f)/2 < \sqrt{a} + 10^{-2n}.$$

Applico allora la proposizione rammentata alla fine del n. **1**·2, e ho che il valore, g, di $(f + a/f)/2$ con $2n$ decimali o $= V_{2n}(\sqrt{a})$, o $= V_{2n}(\sqrt{a}) + 10^{-2n}$.

·5 Questo t. VI suppone conosciuto un numero f come valore di $\sqrt{a}$ con n decimali; alla peggio anche *con ambiguità*, e, in particolare, dunque, con certezza. E, mediante un proce-

---

(*) Si applicano le proposizioni:

a) $n \varepsilon N_1 . a \varepsilon Q . \supset . E(n + a) = n + Ea$

b) " . " $. \supset . E(a/n) = E(Ea/n)$.

dimento assai semplice, dà un numero g come valore di $\sqrt{a}$ con $2n$ decimali: *con ambiguità*, è vero; ma al quale è riapplicabile il procedimento adoperato per f, senza che ci si debba fermare a rimuover l'ambiguità.

Esso compare, per es., nel VIEILLE sotto forma non troppo perspicua e con dimostrazione lunga e poco felice. Il BERTRAND stabilisce solo che " se a è un valore approssimato di $\sqrt{N}$, $(a + N/a)/2$ è un secondo valore più approssimato del primo "; supponendo " piccolissimo " in valore assoluto il numero $\sqrt{N} - a$, del quale dice che " il quadrato si può, senza error sensibile, trascurare ". Ma tal meno ampio t. si può far risalire a Erone Alessandrino (v. *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, di G. LORIA, pag. 785 della 2ª ediz.).

·6 *Esempio* $\sqrt{1·301} \in 1·1...$ (1)

1·301/1·1 ∈ 1·18...	1ª div.) 1·301		1·1
(" + ") 2 = 1·14	g	...3	1·18
1·301/1·14 ∈ 1·1412...	2ª div.) 1·301		1·14
(" + ") = 1·1406	g_1	...32	1·1412
1·301/1·1406 ∈ 1·14062773...	3ª div.) 1·301		1·1406
(" + ") ∈ 1·14061386...	g_2	...11162	1·14062773

Ecc.

Ragiono così.

Sta la (1), senza ambiguità.

Nella VI pongo $a = 1·301$, $f = 1·1$, $n = 1$. Avrò che $g = 1·14$; sicchè $\sqrt{1·301}$ o $\in 1·14...$, o $\in 1·13...$

Senza fermarmi a rimuovere l'ambiguità, riapplico il procedimento, ponendo $a = 1·301$, $f = 1·14$, $n = 2$. Avrò che $g_1 = 1·1406$; sicchè $\sqrt{1·301}$ o $\in 1·1406...$, o $\in 1·1405...$

Pongo ancora $a = 1·301$, $f = 1·1406$, $n = 4$. Avrò che $g_2 = 1·14061386$; sicchè $\sqrt{1·301}$ o $\in 1·14061386...$, o $\in 1·14061385...$

Ecc.

7·1 Per calcolare $V_{2n}(a/f)$ si fa la divisione di a per f sino alla $2n^{ma}$ cifra decimale. Giunti però alla n^{ma} cifra deci-

male si ha già il numero $V_n(a/f)$, del quale diamo qui alcune proprietà.

Hp VI . ⊃ :

VII $V_n(a/f) \epsilon (f - 2 \times 10^{-n}) + (0 \cdots 4) 10^{-n}$.

VIII „ $\geq f . = . f = V_n(\sqrt{a})$.

IX „ $\epsilon \iota f \cup \iota (f + 10^{-n}) . \supset . V_n g = f . 10^{2n}(g - f) = \text{rest}(10^{2n}g, 10^n)$.

X „ $= f + 2 \times 10^{-n} . \supset . V_{2n}(\sqrt{a}) = f + 10^{-n} - 10^{-2n}$.

·2 Si può leggere così:

“ Nelle stesse ipotesi della VI, il quoziente, $V_n(a/f)$, di a per f limitato alla n^{ma} cifra decimale è sempre uguale a uno dei 5 numeri:

$$f - 2/10^n, \quad f - 1/10^n, \quad f, \quad f + 1/10^n, \quad f + 2/10^n \text{ ”}.$$

Possiamo dir dunque che si hanno 5 casi. Orbene:

“ Nei primi 2 casi, $f = V_n(\sqrt{a}) + 1/10^n$; e, negli ultimi 3, $f = V_n(\sqrt{a})$ ”.

“ Nel 3° e nel 4° caso, $f \leq g < f + 1/10^n$; e $10^{2n}(g - f) =$ numero formato dalle ultime n cifre dell'intero $10^{2n} g$ ”.

“ Nel 5° caso, $V_{2n}(\sqrt{a}) = f + 1/10^n - 1/10^{2n}$ ”.

·3 *Dimostrazioni.* — Con la semplice indicazione “ *d)* ”, richiameremo la proposizione *d)* della 2ª nota del n. **1** ·4.

VII Per ipotesi (v. **6** ·2), $f - 1/10^n \leq \sqrt{a} < f + 1/10^n$; ossia, elevando al quadrato, $f^2 - 2f/10^n + 1/10^{2n} \leq a < f^2 + 2f/10^n + 1/10^{2n}$.

Tralascio l'ultimo termine del 1° membro, e osservo che l'ultimo termine del 3° membro $< f/10^n$. Avrò che $f^2 - 2f/10^n \leq a < f^2 + 2f/10^n + f/10^n$; cioè, dividendo per f, che $f - 2/10^n \leq a/f < f + 3/10^n$. Ora questa, per *d)*, equivale alla $f - 2/10^n \leq V_n(a/f) < f + 3/10^n$, vale a dire alla VII.

VIII La $f \leq V_n(a/f)$ equivale (v. *d)*) alla $f \leq a/f$, cioè alla $f^2 \leq a$, o alla $f \leq \sqrt{a}$; che equivale alla $f = V_n(\sqrt{a})$, perchè, per ipotesi (v. **6** ·2), $f - 1/10^n \leq \sqrt{a} < f + 1/10^n$.

IX Per ipotesi, $f \leq V_n(a/f) < f + 2/10^n$, cioè per *d)*, $f \leq a/f < f + 2/10^n$. Aggiungo f e divido per 2; e ho che $f \leq (f + a/f)/2 < f + 1/10^n$. E allora, per *d)*, $f \leq V_{2n}[(f + a/f)/2] < f + 1/10^n$; cioè (v. fine di **6**·2) $f \leq g < f + 1/10^n$.

Dimostrata così la 1ª parte, ne derivo che l'intero $10^{2n}(g - f) < 10^{2n} \times 1/10^n$, cioè $< 10^n$. E allora la identità $10^{2n} g = 10^n \times 10^n f + 10^{2n}(g - f)$ dà senz'altro che rest $(10^{2n} g, 10^n) = 10^{2n}(g - f)$; cioè la 2ª parte.

X Poichè $V_{2n}(a/f) \geq V_n(a/f)$, che, per ipotesi, $= f + 2/10^n$, avrò che $V_{2n}(a/f) \geq f + 2/10^n$. Ma $V_{2n}(a/f) \leq f + 2/10^n$; perchè, come abbiamo visto nella dimostrazione della VII, $a/f < f + 3/10^n$, cioè (v. *d)*), $V_{2n}(a/f) < f + 3/10^n$ (*). Dunque $V_{2n}(a/f) = f + 2/10^n$.

Ma allora la VI ci dà che $g = f + 1/10^n$, e che

$$\text{o } f + 1/10^n = V_{2n}(\sqrt{a}) \qquad \text{o } f + 1/10^n = V_{2n}(\sqrt{a}) + 1/10^{2n}.$$

Di queste due non sta la 1ª; perchè da essa seguirebbe che $f + 1/10^n \leq \sqrt{a}$, e dalle ipotesi (v. **6**·2) segue invece che $\sqrt{a} < f + 1/10^n$. Starà perciò la 2ª; con che la X è dimostrata.

·4 Alla VIII allude il VIEILLE allorchè dice che " chaque " division... manifeste le sens de l'approximation déjà obtenue; " car la vraie racine est nécessairement comprise entre le di- " viseur et le quotient correspondant „. Così, nell'es.° del n. **6**·6, la 1ª ambiguità è rimossa durante la 2ª divisione, la quale precisa che $\sqrt{1{\cdot}301} \in 1{\cdot}14...$, perchè $V_2(1{\cdot}301/1{\cdot}14) \geq$, anzi $=$, $1{\cdot}14$: e, parimenti, la 2ª ambiguità è rimossa durante la 3ª divisione, la quale precisa che $\sqrt{1{\cdot}301} \in 1{\cdot}1406...$, perchè $V_4(1{\cdot}301/1{\cdot}1406) \geq$, anzi $=$, $1{\cdot}1406$.

Resta l'ambiguità finale. Per rimuover la quale, il VIEILLE propone esplicitamente una nuova applicazione della VIII. Così, nel nostro esempio egli rimuoverebbe la 3ª ambiguità

(*) Nelle solite ipotesi della VI, si stabilisce facilmente la: $f - 2/10^n \leq V_{2n}(a/f) \leq f + 2/10^n$; che dà due confini per $V_{2n}(a/f)$; tutt'e due raggiungibili, come si può riconoscere su esempi. Esempio del confine superiore: $a = 19{\cdot}368$, $n = 1$, $f = 4{\cdot}5$; e del superiore: $a = 21{\cdot}1534$, $n = 1$, $f = 4{\cdot}5$.

Sempre nelle solite ipotesi:

$$V_{2n}(a/f) = f + 2/10^n. = . V_n(a/f) = f + 2/10^n. = . E(10^{2n}a) + 1 = (10^n f + 1)^2.$$

inoltrandosi in una 4ª divisione: calcolerebbe, per l'appunto, $\mathrm{V}_8\,(1{\cdot}301/1{\cdot}14061386)$. Si trova che $\geq 1{\cdot}14061386$ (perchè $= 1{\cdot}14061387$), e si conclude che $\iota\, 1{\cdot}301 \,\epsilon\, 1{\cdot}14061386\ldots$ (*).

Più semplice è però servirsi direttamente della relazione:

$$\mathrm{V}_n\,(a\,f) = f \,.=.\, f^2 \leq a\,:$$

con la quale $\iota\, 1{\cdot}301 \,\epsilon\, 1{\cdot}14061386\ldots$, perchè $1{\cdot}14061386^2 < 1{\cdot}301$. Ma, con le proposizioni che do appresso, le ambiguità si posson rimuovere immediatamente, man mano che si presentano: per l'appunto, la 1ª si rimuove già con la 1ª divisione, e la 2ª con la 2ª, e la 3ª con la 3ª, ecc.; generalmente a colpo d'occhio.

8·1

$$a \,\epsilon\, 1\,\mathrm{Q}_0 \,.\, n \,\epsilon\, \mathrm{N}_1 \,.\, f = \mathrm{V}_n\,(\sqrt{a}) \,.\, g = \mathrm{V}_{2n}\,\{[f + \mathrm{V}_{2n}\,(a/f)]/2\}.$$

$$\mathrm{V}_n(a/f) \mathord{-}= f + 2\times 10^{-n} \,.\, q = 10^{2n}\,\mathrm{V}_{2n}(a/f) = \mathrm{quot}\,[\mathrm{E}\,(10^{3n}a),\, 10^n f\,].$$

$$z = \mathrm{rest}\,(10^{2n}g,\, 10^n) \,.\, r = \mathrm{rest}\,[\quad ,, \quad . \quad ,, \quad] \,.\supset\therefore$$

XI $\quad q \epsilon 2\mathrm{N}_0 + 1 \qquad .\supset. \mathrm{V}_{2n}(\sqrt{a}) = g$

XII $\quad q \epsilon 2\mathrm{N}_0 \qquad .\, r \geq z \,.\supset. \quad ,, \quad = ,,$

XIII $\quad ,, \quad .\supset: r\times 10^n + \mathrm{rest}[\mathrm{E}(10^{4n}a).10^n] < z^2 .=. \quad ,, \quad = ,, - 10^{-2n}.$

·2 Comincio dall'enunciare le ipotesi comuni.

" Sia a una quantità non minore di 1, e n un numero naturale, e f il valore con n decimali di $\sqrt{a}$.

" Calcolo il *quoziente*, $\mathrm{V}_{2n}\,(a/f)$, di a per f sino alla $2n^{\text{ma}}$ decimale. E, come nella VI, sommo f con esso quoziente, e divido la somma per 2, spingendomi sino alla $2n^{\text{ma}}$ cifra decimale. Avrò un numero, g.

(*) Nelle tre rimozioni d'ambiguità che abbiamo così fatte, sempre $\mathrm{V}_n\,(1{\cdot}301/f) \geq f$. Era facile scegliere a in modo che in qualcuna delle tre valesse la: $\mathrm{V}_n\,(a/f) < f$. Ma ho prescelto $a = 1{\cdot}301$, perchè nelle tre rimozioni ci dà esempio dei nostri tre criteri del successivo n. **8**: e anche per un'altra ragione che si vedrà nella nota del n. **9**·3.

" Suppongo che $V_n(a/f)$, cioè quel *quoziente* troncato dopo la n^{ma} cifra decimale, sia diverso da $f + 2/10^n$ [avendo già, con la X, esaurito il caso di $V_n(a/f) = f + 2/10^n$].

" Indico poi con q il *quoziente* stesso, privo però del punto decimale. La divisione fatta per il calcolo di esso *quoziente* è, in sostanza, la divisione, nel senso più elementare, di $E(10^{3n}a)$ per $10^n f$; e q è il quoto di questa (*): e con r rappresenteremo il resto corrispondente.

" Chiamo, finalmente, z il numero formato dalle ultime n cifre dell'intero $10^{2n}g$ „.

Ciò posto:

" Se q è dispari, il valore di $\sqrt{a}$ con $2n$ decimali $= g$ „.

" Lo stesso può dirsi se q è pari e $r \geq z$ „.

" Se poi q è pari e $r < z$, comporrò un intero facendo seguire r dalle cifre decimali $(3n+1)^{ma}$, $(3n+2)^{ma}$, ..., $4n^{ma}$, di a. Il valore di $\sqrt{a}$ con $2n$ decimali $= g - 1/10^{2n}$, solo se esso intero $< z^2$ „.

·3 *Esempi.*

1°. Riprendiamo l'esempio del n. 6·6.

Ponendo $a = 1{\cdot}301$, $n = 1$ e $f = 1{\cdot}1$, ho che $g = 1{\cdot}14$. La 1ª divisione dà poi che $V_1(a/f) = 1{\cdot}1$, e perciò non $= f + 2/10^n$; che $q = 118$, e $r = 3$. Dunque q è pari, e $r < 4$, cioè del numero z formato dall'ultima cifra di g. Ma, scrivendo dopo r la 4ª cifra decimale di a, ho 30, che $> z^2$. E allora, per la XIII, $\sqrt{1{\cdot}301} \in 1{\cdot}14...$, senza ambiguità.

Ponendo $a = 1{\cdot}301$, $n = 2$ e $f = 1{\cdot}14$, ho che $g_1 = 1{\cdot}1406$. La 2ª divisione dà poi che $V_2(a/f) = 1{\cdot}14$, e perciò non $= f + 2/10^n$; che $q_1 = 11412$, e $r_1 = 32$. Dunque q_1 è pari, e $r_1 > 6$, cioè del numero z formato dalle due ultime cifre di g_1. E allora, per la XII, $\sqrt{1{\cdot}301} \in 1{\cdot}1406...$, senza ambiguità.

Ponendo, finalmente, $a = 1{\cdot}301$, $n = 4$ e $f = 1{\cdot}1406$, ho che $g_2 = 1{\cdot}14061386$. La 3ª divisione dà poi che $V_4(a/f) = 1{\cdot}1406$, e perciò non $= f + 2/10^n$; e che $q_2 = 114062773$. Ed essendo allora q_2 dispari, senza ambiguità $\sqrt{1{\cdot}301} \in 1{\cdot}14061386...$, in virtù della XI.

(*) $q = 10^{2n} V_{2n}(a/f) = E(10^{2n} a/f) = E(10^{3n} a/10^n f)$; che per la *b)* della nota del n. 6·2, $=$ quot $[E(10^{3n}a), 10^n f]$.

2°. Si sa che $V_5(\sqrt{1{\cdot}24}) = 1{\cdot}11355$; e si vuole $V_{10}(\sqrt{1{\cdot}24})$. Con una divisione trovo che

$$1{\cdot}24/1{\cdot}11355 \in 1{\cdot}1135557451\ldots \text{ Dopo di che}$$
$$(\quad " \quad + \quad " \quad)\,2 \in 1{\cdot}1135528725\ldots;$$

e quindi, immediatamente, in virtù della XI,

$$V_{10}(\sqrt{1{\cdot}24}) = 1{\cdot}1135528725.$$

Questo esempio è, in sostanza, nel KOEHLER. Il quale trova, veramente, qualche cosa di più, e cioè che

$$V_{11}(\sqrt{1{\cdot}24}) \text{ o } = 1{\cdot}11355287257, \text{ o } = 1{\cdot}11355287256;$$

ma servendosi però del valore di $\sqrt{1{\cdot}24}$ con 6 decimali, che a noi, con la VI e le XI-XIII, darebbe, e senza ambiguità $V_{12}(\sqrt{1{\cdot}24})$.

È noto che le tavole logaritmiche del KOEHLER son seguite, tra l'altro, da tavole di radici. Quella delle radici quadrate, per ogni intero, a, compreso tra 1 e 1000, dà $V_7(\sqrt{a} + 10^{-7}/2)$; cioè $V_7(\sqrt{a})$ o $V_7(\sqrt{a}) + 1/10^7$, secondochè la 8ª cifra decimale di $\sqrt{a} < 5$ o ≥ 5. E " con essa tavola ", dice l'Autore (v. nella pag. XXXVI), " si può determinare anche la radice quadrata con più che 7 decimali, fino a 14 "; e intende però, *a meno dell'ambiguità finale*, perchè applica, in sostanza, la VI, senza disporre delle XI-XIII.

Noi invece *siamo in grado di dar subito* $V_{14}(\sqrt{a})$, *senza ambiguità*. Per applicare infatti la VI, noi dividiamo a per il numero dato dalla tavola; e, con la VIII, a non oltre la 7ª cifra decimale del quoziente ci accorgiamo se la tavola ha dato $V_7(\sqrt{a})$ o $V_7(\sqrt{a}) + 1/10^7$. Nel 1° caso applicheremo immediatamente le XI-XIII, e nel 2° ci porremo in condizione di applicarle, *con un semplice espediente*, che ora spiego su un esempio (*).

(*) *Anzi, se* $a > 25$, *noi siamo in grado di ottener subito* $V_{15}(\sqrt{a})$. Quando infatti a è compreso tra 100 e 1000, dal numero $V_8[\sqrt{(a/100)} + 10^{-8}/2]$, che si può leggere nella tavola, so dedurre $V_{16}[\sqrt{(a/100)}]$, e quindi, con spostamento del punto decimale, $V_{15}(\sqrt{a})$. E quando a è compreso tra 25 e 100, $V_{15}(\sqrt{a})$ si deduce dal numero $V_7(\sqrt{a} + 10^{-7}/2)$ della tavola, con le proposizioni dell'ultimo capitolo di questo scritto.

3°. Leggo nella tavola del KOEHLER che $V_7(\sqrt{5}+10^{-7}/2)=$ 2·2360680; dimodochè $V_7(\sqrt{5})$ o $=2·2360680$, o $=2·2360679$.

Volendo applicare la VI, divido 5 per 2·2360680. Giunto alla 7ª decimale ho il quoziente 2·2360679, minore del divisore; il che (v. VIII) mi assicura che $V_7(\sqrt{5})=2·2360679$. Continuo allora la divisione, *scambiando però tra loro il divisore e il quoziente ottenuto*, e spingendomi fino alla 14ª decimale. Avrò che

$$q=223606805499958 \quad \text{e} \quad r=4648518;$$

sicchè $\quad g=2·23606797749976 \quad$ e $\quad z=7749976.$

Per la XIII, poichè evidentemente $r\times 10^7<z^2$, senza ambiguità $V_{14}(\sqrt{5})=2·23606797749975$.

9. In questo n. do le *dimostrazioni* delle XI-XIII.

·1 Comincio dallo stabilire che, nelle ipotesi:

$$a\,\epsilon\,1+Q_0\,.\,n\,\epsilon\,N_1\,.\,f=V_n(\sqrt{a})\,.\,g=V_{2n}\{[f+V_{2n}(a/f)]/2\},$$

vale l'uguaglianza logica:

$$a)\quad V_{2n}(\sqrt{a})=g\,.=.\,10^n\times\text{rest}[E(10^{3n}a),\,2\times10^nf]+\text{rest}[E(10^{4n}a),\quad 10^n\ ]\geq[10^{2n}(g-f)]^2.$$

La VI dice infatti che, in quelle ipotesi, $g-1/10^{2n}\leq\sqrt{a}<g+1/0^{2n}$ (cfr. **6**·2). Dir dunque il 1° membro logico della *a)* è come dire che $g\leq\sqrt{a}$; o che $a\geq g^2$, o che $10^{4n}a\geq(10^{2n}g)^2$: la qual relazione, avendo intero il 2° membro, equivale (v. *b)* della 2ª nota del n. **1**·4) alla

$$(1)\qquad E(10^{4n}a)\geq(10^{2n}g)^2.$$

Ma si stabilisce facilmente che

$$E(10^{4n}a)=2\times10^{2n}f\times E[E(10^{3n}a)/(2\times10^nf)]+10^n\times\text{rest}[E(10^{3n}a),\,2\times10^nf)]+\text{rest}[E(10^{4n}a),\,10^n],$$

e $\quad 10^{2n}g=10^{2n}f/2+E[E(10^{3n}a)/(2\times10^nf)]$ (*);

(*) $E(10^{4n}a)=10^n\times E[E(10^{4n}a)/10^n]+\text{rest}[E(10^{4n}a),10^n]$, in virtù della relazione: dividendo = divisore × quoto + resto. Ora $E[E(10^{4n}a)/10^n]=$

sicchè, sostituendo nella (1), e poi trasportando il 1° termine del 1° membro, avrò come equivalente del 1° membro logico della $a)$ la relazione:

$$10^n \times \text{rest}\,[E\,(10^{3n}a),\, 2 \times 10^n f\,] + \text{rest}\,[E\,(10^{4n}a),\, 10^n] \geq$$
$$\geq \{\, E\,[E\,(10^{3n}a)/(2 \times 10^n f)] - 10^{2n}f/2\,\}^2 :$$

nella quale il 2° membro, in virtù della espressione ora data per $10^{2n}g$, si può anche scrivere $[10^{2n}(g - f)]^2$. Si è così ottenuta la $a)$.

·2 Per comodità, diremo che vale la $a)$ nelle ipotesi:

$$a \,\epsilon\, 1 + Q_0 \,.\, n \,\epsilon\, N_1 \,.\, f = V_n(\sqrt{a}) \,.\, g = V_{2n}\,\{[f + V_{2n}(a/f)]/2\,\} \,.$$
$$.\, V_n(a/f) - = f + 2 \times 10^{-n}.$$

Dimostro ora che, in queste stesse ipotesi:

$b)$ $$10^{2n}(g - f) = \text{rest}\,(10^{2n}g,\, 10^n)\,,$$

e quindi

$c)$ $$10^n > 10^{2n}(g - f).$$

Dalla $f = V_n(\sqrt{a})$, e dalla ipotesi fatta su $V_n(a/f)$, segue infatti (v. VIII e IX) che $V_n(a/f)$ o $= f$, o $= f + 1/10^n$. E allora la IX insegna che vale la $b)$. Donde la $c)$; perchè in ogni divisione il resto è minore del divisore.

·3 Ancora nelle stesse ipotesi di ·2, dico che vale la proposizione:

$d)$ $$\text{rest}\,[E\,(10^{3n}a),\, 2 \times 10^n f\,] \geq 10^{2n}(g - f) \,.\supset .\, V_{2n}(\sqrt{a}) = g.$$

$E\,(10^{3n}a)$ (v. $b)$ della nota del n. 6 ·2): che, in virtù della stessa relazione, $= 2 \times 10^n f \times E\,[E\,(10^{3n}a)/(2 \times 10^n f)] + \text{rest}\,[E\,(10^{3n}a),\, 2 \times 10^n f]$. Sta dunque la 1ª delle 2 uguaglianze da dimostrare.

Per la 2ª; come è detto nel n. 6 ·2, $g = V_{2n}[(f + a/f)/2]$, ossia $= V_{2n}[f/2 + 10^n a/(2 \times 10^n f)]$. Perciò $10^{2n}g = E\,[10^{3n}f/2 + 10^{3n}a/(2 \times 10^n f)]$: che, essendo $10^{2n}f/2$ e $2 \times 10^n f$ dei numeri naturali, = quanto sopra è scritto (v. $a)$ e $b)$ della nota del n. 6 ·2).

Scrivo infatti la c), e moltiplico poi a membro a membro con la ipotesi della d). Avrò che $10^n \times \text{rest}\,[\text{E}\,(10^{3n} a), 2 \times 10^n f] > [10^{2n}(g-f)]^2$; e quindi, per la a), che $\text{V}_{2n}(\sqrt{a}) = g$ (*).

·4 Stabilisco finalmente che, nelle ipotesi:

$$a \,\epsilon\, 1 + \text{Q}_0 \,.\, n \,\epsilon\, \text{N}_1 \,.\, f = \text{V}_n(\sqrt{a}) \,.\, q = \text{quot}\,[\text{E}\,(10^{3n} a), 10^n f] \,.$$
$$.\, r = \text{rest}\,[\text{E}\,(10^{3n} a), 10^n f],$$

si può scrivere che

$$\text{rest}\,[\text{E}\,(10^{3n} a), 2 \times 10^n f] = r + 10^n f, \text{ se } q \text{ è dispari,}$$
$$\text{ed } = r \qquad\qquad , \text{ se } q \text{ è pari.}$$

Ciò segue subito dal teorema (v., per es., nel " Formulario Mathematico ", pag. 50, **6**·2):

$$x \,\epsilon\, \text{N}_0 \,.\, y, z \,\epsilon\, \text{N}_1 \,.\, \supset .\, \text{rest}\,(x, y \times z) = \text{rest}\,(x, y) +$$
$$+\, y \times \text{rest}\,[\text{quot}\,(x, y), z],$$

ponendo $x = \text{E}\,(10^{3n} a)$, $y = 10^n f$, e $z = 2$.

·5 Ciò posto, ecco le dimostrazioni delle XI-XIII.

XI Essendo q dispari, $\text{rest}\,[\text{E}\,(10^{3n} a), 2 \times 10^n f] = r + 10^n f$; e quindi $\geq 0 + 10^n \times 1$, cioè $\geq 10^n$. Ma, per c), $10^n > 10^{2n}(g-f)$. Dunque quel resto $> 10^{2n}(g-f)$. E allora la d) dice che $\text{V}_{2n}(\sqrt{a}) = g$.

XII Essendo q pari, $\text{rest}\,[\text{E}\,(10^{3n} a), 2 \times 10^n f] = r$; che, per ipotesi, $\geq z$, cioè rispetto a $\text{rest}\,(10^{2n} g, 10^n)$, o, per b), rispetto a $10^{2n}(g-f)$. E allora la d) dà che $\text{V}_{2n}(\sqrt{a}) = g$.

XIII Nego i due membri logici della a): poi osservo che, essendo q pari, $\text{rest}\,[\text{E}\,(10^{3n} a), 2 \times 10^n f] = r$; e che, per b), $10^{2n}(g-f) = z$. Avrò la XIII.

(*) La proposizione reciproca non è vera. Così, per es., se $a = 1{\cdot}301$, $n = 1$ e $f = 1{\cdot}1$, si trova che $g = 1{\cdot}14$ e $\text{V}_{2n}(\sqrt{a}) = 1{\cdot}14$. Eppure $\text{rest}\,[\text{E}\,(10^{3n} a), 2 \times 10^n f]$, che $= 3$, $< 10^{2n}(g-f)$, che $= 4$.

Un caso particolare.

10·1

VIa $\qquad n \epsilon N_1 . a \epsilon 1 \vdash (1 + 2 \times 10^{-n}) . \supset .$
$V_{2n} [(a+1)/2] \epsilon \iota [V_{2n} (\sqrt{a})] \cup \iota [V_{2n} (\sqrt{a}) + 10^{-2n}].$

" Se n è un numero naturale, e a è una quantità tale che $1 \leq a < 1 + 2/10^n$, il valore con $2n$ decimali di $(a+1)/2$ o è uguale al valore con $2n$ decimali di $\sqrt{a}$, o a tal valore aumentato di $1/10^{2n}$ ".

·2

HpVIa . $g = V_{2n} [(a+1)/2] . r = \text{rest} [E(10^{3n} a), 10^n] . z =$
$= \text{rest} (10^{2n} g, 10^n) . \supset \therefore$

XIa $\quad E(10^{2n} a) \epsilon 2N_0 + 1 \qquad . \supset . V_{2n}(\sqrt{a}) = g$

XIIa $\quad E(10^{2n} a) \epsilon 2N_0 \qquad . r \geq z . \supset . \quad$ " $=$ "

XIIIa $\quad$ " $\quad . \supset : \text{rest}[E(10^{4n} a), 10^{2n}] < z^2 . = . \quad$ " $=$ " $- 10^{-2n}$.

" Nelle stesse ipotesi di VIa, calcolo il quoziente, g, di $a + 1$ per 2 sino alla $2n^{ma}$ decimale; e sia r il numero formato dalle n cifre di a che seguono la $2n^{ma}$ decimale, e z il numero formato dalle ultime n cifre dell'intero $10^{2n} g$ ".

Si guardi allora la $2n^{ma}$ cifra decimale di a.

" Se tal cifra è dispari, il valore di $\sqrt{a}$ con $2n$ decimali $= g$ ".

" Lo stesso può dirsi se tale cifra è pari, e $r \geq z$ ".

" Se poi la stessa cifra è pari e $r < z$, considererò l'intero formato dalle $2n$ cifre di a che seguono la n^{ma} decimale. Il valore di $\sqrt{a}$ con $2n$ decimali $= g - 1/10^{2n}$, solo se esso intero $< z^2$ ".

·3 $\qquad$ *Dimostrazioni.*

VIa $\quad$ Per ipotesi, $a \geq 1$; e perciò $\sqrt{a} \geq 1$. Essendo poi $\sqrt{a}$ la media geometrica, e $(a+1)/2$ la media aritmetica tra a e 1, $\sqrt{a} \leq (a+1)/2$; e, per conseguenza, $< 1 + 1/10^n$, perchè, per ipotesi, $a < 1 + 2/10^n$.

Dunque: $1 \leq \sqrt{a} < 1 + 1/10^n$; cioè $1 = V_n (\sqrt{a})$. Applico

allora la VI, ponendo $f=1$. Il numero g, che (v. fine di **6**·2) $= V_{2n}[(f+af)/2]$, diventa $V_{2n}[(1+a)/2]$; e si ha quindi la VI$_a$ (*).

XI$_a$-XIII$_a$ Faccio le ipotesi della VI$_a$: e, nelle XI, XII e XIII, pongo: $f=1$, $g=V_{2n}[(a+1)/2]$, $q=10^{2n}V_{2n}a=E(10^{2n}a)$, $r=\text{rest}[E(10^{3n}a), 10^n]$, e $z=\text{rest}(10^{2n}g, 10^n)$; osservando che certamente $V_n a$ non $=1+2/10^n$, perchè $V_n a \leq a$, che, per ipotesi, $< 1+2/10^n$. Avrò le XI$_a$, XII$_a$ e XIII$_a$. In quest'ultima, al posto di $\text{rest}[E(10^{3n}a), 10^n] \times 10^n + \text{rest}[E(10^{4n}a), 10^n]$, abbiam potuto scrivere $\text{rest}[E(10^{4n}a), 10^{2n}]$; perchè chi prende il numero formato dalle ultime n cifre di $E(10^{3n}a)$, e lo moltiplica per 10^n, e aggiunge il numero formato dalle ultime n cifre di $E(10^{4n}a)$, ottiene il numero formato dalle ultime $2n$ cifre di $E(10^{4n}a)$ (**).

·4 *Esempi.*

1°. $n=1$; e $a \in 1{\cdot}15...$, e, in particolare, $=1{\cdot}15$. Dimodochè $g=1{\cdot}07$.

La XI$_a$ dà, immediatamente, che $V_2(\sqrt{a})=1{\cdot}07$, cioè che $\sqrt{a} \in 1{\cdot}07...$

2°. $n=1$, e $a \in 1{\cdot}147...$ Dimodochè $g=1{\cdot}07$.

La 2ª cifra decimale di a è pari; $r=$ cifra seguente $=7$; e $z=$ ultima cifra di $107=7$. Dunque, per la XII$_a$, $\sqrt{a} \in 1{\cdot}07...$

3°. $n=1$, e $a \in 1{\cdot}146...$ Dimodochè $g=1{\cdot}07$.

La 2ª cifra decimale di a è pari; $r=6$; e $z=7$. Applico allora la XIII$_a$. L'intero formato dalle 2 cifre decimali di a che

---

(*) Nella VI$_a$, si può, all'ipotesi su a, sostituir, per es., la più ampia: $a \in 1 \vdash (1+2{\cdot}8\times 10^{-n})$.

Sempre infatti

$$\sqrt{a} \leq (a+1)/2\,, \tag{1}$$

perchè $(a+1)/2=\sqrt{a}+(\sqrt{a}-1)^2/2$.

Ora la (1) dà che $\sqrt{a}-1 \leq (a-1)/2$: e quindi che $(\sqrt{a}-1)^2/2 \leq (a-1)^2/8$; e, per conseguenza, $< 1/10^{2n}$, se, come supponiamo, $a < 1+2{\cdot}8/10^n$. Dunque $\sqrt{a}+(\sqrt{a}-1)^2/2 < \sqrt{a}+1/10^{2n}$; cioè

$$(a+1)/2 < \sqrt{a}+1/10^{2n}. \tag{2}$$

Dalla (1) e dalla (2) segue la tesi della VI$_a$ (v. la fine di **1**·2).

(**) Si può aggiungere che $V_{2n}[\sqrt{(1+2\times 10^{-n})}]=1+10^{-n}-10^{-2n}$. Es.^{i}: $\sqrt{1{\cdot}2} \in 1{\cdot}09...$; $\sqrt{1{\cdot}02} \in 1{\cdot}0099...$; $\sqrt{1{\cdot}002} \in 1{\cdot}000999...$

seguon la 2ª certamente $> 7^2$; e perciò $\sqrt{a} \in 1\cdot07...$ Si può anzi dire che già $\sqrt{1\cdot1449} \in 1\cdot07...$, e più precisamente che $\sqrt{1\cdot1449} = 1\cdot07$; come, del resto, si verifica subito con l'elevazione a quadrato.

4°. $n = 3$, e $a \in 1\cdot000694...$ Dimodochè $g = 1\cdot000347$.

La 6ª cifra decimale di a è pari; $r =$ numero formato dalle 3 cifre decimali seguenti; e $z = 347$. In virtù dunque della XII_a, se $r \geq 347$, $\sqrt{a} \in 1\cdot000347...$ Se poi $r < 347$, applicherò la $XIII_a$: avrò che $\sqrt{a} \in 1\cdot000346...$ solo quando $< 347^2$ il numero formato dalle 6 cifre di a che seguon la 6ª decimale. Precisamente, poichè $347^2 = 120409$, ho che soltanto $\sqrt{1\cdot000694120409} = 1\cdot000347$.

Questo 4° esempio è nel VIEILLE. Egli dimostra solo che " pour extraire la racine carrée d'un nombre $1 + \epsilon$, qui sur-" passe peu l'unité, il suffit d'ajouter à l'unité la moitié de " l'excès ϵ; et le résultat est approché par excès, à moins " de $\epsilon^2/8$ ". E può scriver subito la relazione: $\sqrt{1\cdot000694} = 1\cdot000347$; la quale ha forma di uguaglianza, ma, secondo le sue convenzioni, significa:

$$a \in 1\cdot000694... . \supset . \sqrt{a} \in 1\cdot000346 \frown 1\cdot000348 ;$$

cioè: se a è una quantità soddisfacente alla $1\cdot000694 \leq a < 1\cdot000695$, allora $1\cdot000346 < \sqrt{a} < 1\cdot000348$.

Estrazione abbreviata della radice quadrata d'un numero maggiore di 25.

11. Se il numero di cui si cerca la radice quadrata > 25, alle VI-XIII si sostituiscono con vantaggio altre proposizioni, che qui mi restringo a enunciare.

·1

VI′ $a \in 25 + Q_0 . n \in N_1 . f \in \iota[V_n(\sqrt{a})] \cup \iota[V_n(\sqrt{a}) + 10^{-n}] .$
$g = V_{2n+1}\{[f + V_{2n+1}(a/f)]/2\} . \supset . g \in \iota[V_{2n-1}(\sqrt{a})] \cup \iota[V_{2n-1}(\sqrt{a}) + 10^{-2n-1}]$.

·2 $\text{Hp VI}' . \supset .$

VII′=VII $V_n(a/f) \in (f - 2 \times 10^{-n}) + (0 \cdots 4)\, 10^{-n}$.

VIII′=VIII " $\geq f . = . f = V_n(\sqrt{a})$.

IX′ $V_n(a/f) \epsilon \iota f \cup \iota (f + 10^{-n}) . \supset . V_n g = f . 10^{2n-1}(g - f) = \text{rest}(10^{2n+1} g, 10^{n+1})$.

X′ „ $= f + 2 \times 10^{-n} . \supset . V_{2n+1}(\sqrt{a}) = f + 10^{-n} - 10^{-2n-1}$.

·3 $a \epsilon 25 + Q_0 . n \epsilon N_1 . f = V_n(\sqrt{a}) . g = V_{2n+1} \{[f + V_{2n+1}(a/f)]/2\}$.
$V_n(a/f) -= f + 2 \times 10^{-n} . q = 10^{2n+1} V_{2n+1}(a/f) = \text{quot}[E(10^{3n+1}a), 10^n f]$.
$z = \text{rest}(10^{2n+1} g, 10^{n+1}) . r = \text{rest}[$ „ , „ $] . \supset \therefore$

XI′ $q \epsilon 2N_0 + 1 . V_n(a/f) = f$ $. \supset . V_{2n+1}(\sqrt{a}) = g$

XI″ „ . „ $= f + 10^{-n} . r + 10^n f \geq z . \supset .$ „ $=$„

XI‴ „ $. \supset : (r + 10^n f) \times 10^{n+1} +$
$+ \text{rest}[E(10^{4n+2}a), 10^{n-1}] < z^2 . = .$ „ $=$„ $- 10^{-2n-1}$

XII′=XII $q \epsilon 2N_0$ $. r \geq z . \supset .$ „ $=$„

XIII′ „ $. \supset : r \times 10^{n+1} +$
$+ \text{rest}[E(10^{4n+2}a), 10^{n-1}] < z^2 . = .$ „ $=$„ $- 10^{-2n-1}$.

Rapporto di grandezze eterogenee.

Nota del Prof. LUCIANO DELLA CASA.

Nelle applicazioni della Matematica, tanto nella vita comune, quanto all'ingegneria, alla fisica, ecc. si opera costantemente su grandezze; e spesso si presenta il prodotto e il rapporto di due grandezze, omogenee o no.

I trattati di aritmetica o non parlano delle operazioni sulle grandezze o si limitano a pochi cenni. I libri di matematica applicata ne fanno uso, senza darne definizioni teoriche.

La questione della possibilità di parlare di prodotti e rapporti di grandezze fu già oggetto di varie pubblicazioni. Nelle " Conferenze Matematiche „ tenute presso la R. Università di Torino, trattarono questa questione, quest'anno, i professori A. Pensa, che espose la sua teoria pubblicata nel " Bollettino di Matematica „ di A. Conti, 1913, pag. 49; T. Boggio, F. Castellano.

Seguendo il consiglio del Prof. Peano, qui espongo una trattazione di queste operazioni su grandezze limitandomi per ora al rapporto di due grandezze.

L'idea di grandezza si può spiegare mediante esempi; se ne possono enunciare le proprietà; e si può definire mediante un sistema di proposizioni primitive.

Sono grandezze le lunghezze, le aree, i volumi, gli angoli, i pesi, le masse, i tempi, i valori, ecc.

Il significato della parola grandezza risulterà determinato dalle sue proprietà. Esprimerò queste proprietà coi due simboli della logica matematica: cioè ϵ, $\supset$. E faccio uso delle abbreviazioni seguenti:

G = " grandezza „, versione letterale di *μέγεθος* d'Euclide;

Q = " quantità numerica „, o semplicemente " quantità „; o " numero reale positivo „:

parendomi utile di dare alla parola " numero " il significato dell' " ἀριθμός " d'Euclide, cioè numero intero. Quindi se n è una quantità, " n metri " sarà una " quantità di metri ", conforme all'uso comune.

§ 1.

·1 $$a \varepsilon \mathrm{G} \,.\, n \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset \,.\, n \times a \varepsilon \mathrm{G}.$$

" Se a è una grandezza ed n una quantità numerica, allora $n \times a$ è una grandezza ".

Essa viene anche detta " prodotto del numero n per la grandezza a "; si indica anche con na. Tutte le grandezze della forma $n \times a$ ove n è una quantità, si dicono " omogenee con a ", ὁμογενής in Euclide, libro V; cosicchè Qa, cioè Q $\times a$ significa " grandezza omogenea con a ". Essendovi il segno Qa per dire " grandezza omogenea con a ", è inutile introdurre un simbolo speciale per esprimere questa idea.

·2 $$a \varepsilon \mathrm{G} \,.\, \supset \,.\, 1 \times a = a.$$

" Se a è una grandezza, allora $1 \times a$ è eguale ad a ".

·3 $$a \varepsilon \mathrm{G} \,.\, n \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, n \times a = a \,.\, \supset \,.\, n = 1.$$

" Se a è una grandezza ed n è una quantità, e se $n \times a$ è eguale ad a, allora sarà $n = 1$ ". Quindi fra le grandezze non comprendiamo lo zero.

·4 $$a \varepsilon \mathrm{G} \,.\, m, n \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset \,.\, m \times (n \times a) = (m \times n) \times a.$$

" Se a è una grandezza ed m, n sono quantità, allora $m \times (n \times a)$ è eguale $(m \times n) \times a$ ". Cioè dovendo moltiplicare il numero m per la grandezza $n \times a$, si può moltiplicare m per n ed il prodotto moltiplicarlo per la grandezza a. Questa proposizione esprime la proprietà associativa della moltiplicazione.

Le proposizioni precedenti non sono da noi dimostrate, cioè noi nella presente teoria le assumiamo come proposizioni pri-

mitive, e seguiranno definizioni e teoremi. In conseguenza noi non diciamo che cosa sia una grandezza, cioè non diamo una definizione nominale di grandezza. Si potrebbe dire a parole che grandezza è ciò che si può moltiplicare per una quantità, il che coincide all'incirca colla frase " grandezza è tutto ciò che è suscettibile di aumento o di diminuzione "; come sta scritto nel *Trattato di Aritmetica* di Bertrand, ed altri.

·5 $$a, b \in G . b \in Qa . \supset . a \in Qb.$$

" Se a e b sono grandezze e se b è il prodotto di una quantità numerica per a, allora anche a è il prodotto di una quantità numerica per b ".

Infatti se $n \in Q$ e $b = n \times a$, moltiplicando anche i membri per $(1/n)$, abbiamo:

$$(1/n) \times b = (1/n) \times (n \times a) = [(1/n) \times n] \times a = 1 \times a = a.$$

Il passaggio dal primo membro al secondo si fa colla sostituzione $b = n \times a$; dal secondo al terzo si ricorre alla proprietà associativa supposta colla P·4; dal terzo al quarto si ricorre all'aritmetica sulle quantità numeriche, e dal quarto al quinto si ricorre alla P·2.

Poichè Qa significa " grandezza omogenea con a ", questa proposizione si può anche leggere " se b è omogenea con a, allora a sarà omogenea con b ". Quindi invece di dire " a è omogenea con b " potremo anche dire " a e b sono omogenee fra loro ".

·6 $$a \in G . b \in Qa . c \in Qb . \supset . c \in Qa.$$

" Se a è una grandezza, e b è una grandezza omogenea con a, e c è una grandezza omogenea con b, allora anche c sarà omogenea con a ". Infatti se $m, n \in Q$ e posto $b = m \times a$, $c = n \times b$ si ha:

$$c = n \times (m \times a) = (n \times m) \times a$$

cioè c è omogenea con a.

·7 $a \varepsilon G . m, n \varepsilon Q . m \times a = n \times a . \supset . m = n.$

" Essendo a una grandezza ed m, n delle quantità numeriche e se $m \times a$ è eguale a $n \times a$, allora sarà $m = n$ ".

Infatti, eseguendo sui due membri dell'eguaglianza $m \times a = n \times a$, la stessa operazione " moltiplicare per $1/n$ " e tenendo conto della proprietà associativa si ricava:

$$(m/n) \times a = a$$

e per la proprietà ·3

$$m/n = 1 \text{ cioè } m = n.$$

§ 2.

·1 $a \varepsilon G . n \varepsilon Q . \supset . a \times n = n \times a.$ Def.

Avendo introdotto il prodotto della quantità numerica n per la grandezza a, non avrebbe ancora significato il prodotto della grandezza a per n. Ponendo per definizione

$$a \times n = n \times a$$

si viene così a dare significato ad $a \times n$; per questo il prodotto di una grandezza per una quantità numerica gode della proprietà commutativa; sarà perciò lecito a noi di scrivere il fattore numerico prima o dopo la grandezza; ad esempio:

$$\text{m} \times 5 = 5 \times \text{m}.$$

·2 $a \varepsilon G . m, n \varepsilon Q . \supset . (m \times n) \times a = m \times (n \times a) = m \times (a \times n) = (m \times a) \times n = a \times (n \times m) = (a \times m) \times n.$

Nel prodotto di una grandezza a e di due quantità numeriche m ed n, si possono permutare ed associare i fattori in tutti i modi possibili.

Risulta dalla proprietà commutativa § 2 ·1 e dalla proprietà associativa § 1 ·4.

·3 $a \varepsilon G . n \varepsilon Q . \supset . a/n = a \times (1/n)$. Def.

Avendo le lettere il solito significato, con a/n, che si legge " a diviso n „ si intende a moltiplicato per il reciproco di n.

Mediante le proprietà commutativa § 2 ·1 e associativa § 1 ·4 si possono facilmente dimostrare le seguenti proprietà:

·4 $a \varepsilon G . n \varepsilon Q . \supset . (a \times n)/n = a \times (n/n) = a \times 1 = a$.

·5 ———— $. \supset . (a/n) \times n = a \times (1/n) \times n = a \times (n/n) =$
$= a \times 1 = a$.

§ 3.

Rapporto di grandezze omogenee.

·1 $a, b \varepsilon G . n \varepsilon Q . \supset : b/a = n . = . b = n \times a$. Def.

" Se a e b sono grandezze ed n una quantità numerica, dire che il rapporto b/a è eguale ad n, equivale a dire che b è eguale al prodotto $n \times a$ „.

Ne risulta:

·2 $a, b \varepsilon G . b/a \varepsilon Q . \supset . b \varepsilon Q a$.

" Se b/a è una quantità numerica, allora b è omogenea con a „.

Infatti se $b/a = n$ ove n è un numero reale, sarà per definizione, $b = n \times a$, cioè b è omogenea con a.

·3 $a \varepsilon G . b \varepsilon Q a . \supset . b/a \varepsilon Q$.

" Se a è una grandezza e se b è una grandezza omogenea con a, allora il rapporto b/a è una quantità numerica „.

Infatti, poichè $b \varepsilon Q a$, esiste una quantità n, tale che $b =$
$= n \times a$. E ne esiste una sola; poichè se m ed n sono quantità e se $b = m \times a$ e $b = n \times a$ sarà $m \times a = n \times a$ onde $m = n$, per § 1 ·7.

Le proposizioni ·1, ·2, ·3 si possono raccogliere nella seguente, ove si fa uso degli altri simboli logici ⍳ (quel), ∍ (il quale), ∩ (et):

$a \varepsilon G . b \varepsilon Q a . \supset . b/a = ⍳ Q \cap n \ni (b = n \times a)$.

" Se a è una grandezza e b è una grandezza omogenea con a, allora con b/a si intende quel numero n tale che $b = n \times a$ ".

Il rapporto b/a di due grandezze omogenee è la ragione λόγος di Euclide.

$$\cdot 4 \qquad a \varepsilon G . \supset . a/a = 1.$$

$$\cdot 5 \qquad a \varepsilon G . b \varepsilon Q a . \supset . (b/a) \times a = b.$$

$$\cdot 6 \qquad a \varepsilon G . n \varepsilon Q . \supset . (n \times a)/a = n.$$

Risultano subito dalla definizione del .

$$\cdot 7 \qquad a \varepsilon G . b \varepsilon Q a . n \varepsilon Q . \supset . (n \times b)/a = n \times (b/a).$$

Infatti per la ·5, per la proprietà associativa, e per la ·6 si ha:

$$(n \times b)/a = n [(b/a) \times a]/a = \{ [(n \times (b/a)] \times a \} /a = n \times (b/a).$$

E analogamente:

$$\cdot 8 \qquad \text{———} . \supset . (b/n)/a = (b/a)/n.$$

Risulta dalla ·7 cambiando n in $1/n$.

Ed ancora:

$$\cdot 9 \qquad \text{————————} . \supset . b/(a \times n) = (b/a)/n.$$

$$\cdot 10 \qquad \text{————————} . \supset . b/(a \quad n) = (b/a) \times n.$$

Di queste ultime proprietà ometto per brevità le dimostrazioni.

$$\cdot 11 \qquad a \varepsilon G . m, n \varepsilon Q . \supset . (m \times a)/(n \times a) = m/n.$$

Infatti associando:

$$(m \times a)/(n \times a) = [(m/n) \times (n/a)]/(n \times a) = m/n.$$

$$\cdot 12 \qquad a \varepsilon G . b \varepsilon Q a . m, n \varepsilon Q . \supset . (m \times b)/(n \times a) = (m/n) \times (b/a).$$

" Se a è una grandezza e b una grandezza omogenea con a ed m, n sono quantità numeriche, allora il rapporto di $m \times b$ ad $n \times a$ è eguale al prodotto dei rapporti m/n e b/a ".

Infatti, per la proprietà associativa e per la ·6 si ha:

$$(m \times b)/(n \times a) = [(m/n) \times (b/a) \times (n \times a)]/(n \times a) = (m/n) \times (b/a).$$

·13 $a \varepsilon G \,.\, b, c \varepsilon Q a \,.\, \supset \,.\, (a/b) \times (b/c) = a/c.$

·14 $a \varepsilon G \,.\, b, c, d \varepsilon Q a \,.\, \supset \,.\, (a/b)/(c/d) = (a/c)/(b/d).$

·15 $u \varepsilon G \,.\, a, b \varepsilon Q u \,.\, \supset \,.\, a/b = (a/u)/(b/u).$

cioè " il rapporto di due grandezze omogenee colla grandezza u è eguale al rapporto dei loro rapporti alla grandezza u ".

Si ottiene dalla precedente (·12) leggendo a/u e b/u invece di m ed n.

§ 4.

·1 $a \varepsilon G \,.\, b \varepsilon Q a \,.\, \supset \,.\, a + b = (1 + b/a) \times a.$ Def.

" Se a e b sono grandezze omogenee, chiameremo somma di a con b e la indicheremo con $a + b$, il prodotto della quantità numerica $1 + b/a$ per a ".

·2 $a \varepsilon G \,.\, b \varepsilon Q a \,.\, \supset \,.\, a + b \varepsilon Q a.$

" La somma di due grandezze omogenee, è una nuova grandezza omogenea con esse ".

·3 $a \varepsilon G \,.\, m, n \varepsilon Q \,.\, \supset \,.\, (m + n) \times a = m \times a + n \times a.$

Esprime la proprietà distributiva del prodotto di una grandezza per una somma di numeri.

Infatti:

$$m \times a + n \times a = (m \times a)(1 + n/m) = a \times (m + n).$$

·4 $u \varepsilon G \,.\, a, b \varepsilon Q u \,.\, \supset \,.\, (a + b)/u = a/u + b/u$

cioè il rapporto della somma di due grandezze omogenee a e b, ad una terza u omogenea con esse, è eguale alla somma dei rapporti di a ad u e di b ad u.

Infatti:

$$\begin{aligned}(a+b)/u &= a\,(1+b/a)/u \\ &= (1+b/a)\times(a/u) \\ &= a/u+(b/a)\times(a/u) \\ &= a/u+b/u.\end{aligned}$$

·5 $a \epsilon \mathrm{G} \,.\, b \epsilon \mathrm{Q}a \,.\, n \epsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, n\times(a+b)=n\times a+n\times b.$

Esprime la proprietà distributiva del prodotto di una quantità numerica per la somma di due grandezze.

Infatti:

$$\begin{aligned}n\times(a+b) &= n\times(1+b/a)\times a \\ &= [n+(n\times b)/a]\times a \\ &= n\times a+n\times b.\end{aligned}$$

·6 $a \epsilon \mathrm{G} \,.\, b \epsilon \mathrm{Q}a \,.\supset.\, a+b=b+a.$

Esprime la proprietà commutativa della somma di due grandezze omogenee.

Infatti, se u è una grandezza omogenea con a e b, si ha:

$$\begin{aligned}(a+b)/u &= a/u+b/u, \text{ per la ·4} \\ &= b/u+a/u, \text{ perchè Q} \\ &= (b+a)/u\end{aligned}$$

quindi

$$a+b=b+a.$$

·7 $a \epsilon \mathrm{G} \,.\, b, c \epsilon \mathrm{Q}a \,.\supset.\, a+(b+c)=(a+b)+c.$

Esprime la proprietà associativa della somma di grandezze omogenee.

Infatti, se u è una grandezza omogenea con a, b, c, abbiamo per la ·4:

$$\begin{aligned}a+(b+c) &= [a/u+(b/u+c/u)]\times u, \text{ associando i termini numerici:} \\ &= [(a/u+b/u)+c/u]\times u, \text{ sviluppando:} \\ &= (a+b)+c.\end{aligned}$$

§ 5.

·1 $a \epsilon G . b \epsilon Q a . \supset : b > a . = . b/a > 1.$ Def.

" Se a è una grandezza, e b è una grandezza omogenea con a, allora dire che b è maggiore di a, equivale dire che b/a è maggiore di 1 „.

·2 $a \epsilon G . b \epsilon Q a . \supset . a + b > a$

·3 $u \epsilon G . m, n \epsilon Q . \supset : m > n . = . m \times u > n \times u$

·4 $u \epsilon G . a, b \epsilon Q u . \supset : b > a . = . b/u > a/u.$

" Se u è una grandezza, e a, b sono grandezze omogenee con u, allora dire che b è maggiore di a, equivale dire che b/u è maggiore di a/u „.

Infatti:

$b > a . = . (b/u) \times u > (a/u) \times u$ e per la § 5 ·3

$. = . b/u > a/u.$

·5 $a \epsilon G . b, c \epsilon Q a . c > b . b > a . \supset . c > a.$

" Se a è una grandezza, e b, c sono grandezze omogenee con a, e se c è maggiore di b e b è maggiore di a, allora sarà anche $c > a$ „.

Infatti:

da $c > b$ e da $b > a$ si ricava per la ·4:

$c/u > b/u$ e $b/u > a/u$,

e trattandosi di quantità numeriche, si ha:

$c/u > a/u$ e quindi $c > a.$

·6 $a \epsilon G . b \epsilon Q a . \supset : a > b . = . a \epsilon b + Q a.$

" Se a è una grandezza, e b è una grandezza omogenea con a, allora dire che a è maggiore di b, equivale dire che a è la somma di b con un'altra grandezza omogenea con a „.

Questa è una definizione possibile del segno $>$.

Tralascio di parlare della differenza di due grandezze omogenee, perchè troppo semplice.

§ 6.

Osservazione. — Nella teoria precedente delle grandezze si parte dal concetto non definito di prodotto di una quantità numerica per una grandezza, del quale prodotto si enunciano le proprietà, e mediante esso si definisce il rapporto di due grandezze omogenee e la loro somma e si dimostrano le proprietà relative. Questa teoria si trova in G. Peano, *Aritmetica generale e Algebra elementare*, 1902.

Io ho sviluppato questa teoria dando forma esplicita alle dimostrazioni e completando il sistema delle proposizioni.

Questa teoria è la più semplice e la più rapida per chi conosce tutta l'aritmetica, compresi i numeri irrazionali. Ma essa non è l'unica, anzi sotto l'aspetto logico sarebbero forse a preferirsi le teorie in cui si parte dall'idea di somma di due grandezze: se ne enunciano le proprietà mediante proposizioni primitive e si definiscono poi le altre operazioni.

Questa ultima teoria ebbe illustri cultori, specialmente in Italia: basti citare l'ultimo lavoro di S. Catania, *Grandezze e Numeri* (Niccolò Giannotta, Catania, 1915), il quale è ben noto a tutti gli studiosi.

Una teoria un po' meno nota è quella esposta da Edward V. Huntington in " Transactions of the American Mathematical Society „, tomo 3°, 1902, pag. 265.

Ridurrò in simboli il sistema delle proposizioni primitive.

Se a, b, c sono enti d'una classe di grandezze omogenee, si ha:

1) $a + b \in \mathrm{G}$

2) $a + b \sim= a$

3) $(a + b) + c = a + (b + c)$

4) 1° $a > b \,.=.\, \exists\, \mathrm{G} \cap x \ni (a = b + x)$ Def.

   2° $a \sim= b \,.\supset.\, a < b \,.\cup.\, a > b$

5) $s \in \mathrm{Cls}'\mathrm{G} \,.\, c \in \mathrm{G} : x \in s \,.\supset_x.\, x < c : \supset .$

$\exists\, \mathrm{G} \cap a \ni [x \in s \,.\supset_x.\, x \leq a : a' \in \mathrm{G} \,.\, a' < a \,.\supset.\, \exists\, s \cap x \ni (x > a')]$

6) $a \in \mathrm{G} \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{G} \cap x \ni (x < a)$.

In linguaggio comune si ha:

1°) Se a e b sono grandezze (omogenee), allora $a + b$ è una grandezza.

2°) La grandezza $a + b$ non è eguale alla grandezza a.

3°) La somma di più grandezze ha la proprietà associativa.

4°) 1° Diremo che a è maggiore di b quando esiste una grandezza x tale che si ha $a = b + x$. 2° Se a non è uguale a b, allora o a è maggiore di b o b è maggiore di a.

5°) Postulato della continuità: Se s è una classe di grandezze e se c è una grandezza e se ogni grandezza x della classe s è minore di c, allora esiste una grandezza a tale che se x è una qualunque grandezza della classe s, essa è minore o eguale ad a; e inoltre se a' è una grandezza minore di a, allora esiste nella classe s una grandezza x tale che sia $x > a'$.

6°) Se a è una grandezza, allora esiste sempre una grandezza x minore di a.

§ 7.

Rapporto di grandezze eterogenee.

Il rapporto di due numeri (interi), o (numero) razionale, si suol definire o come operatore, o per astrazione, o come classe di coppie.

Il rapporto di due grandezze eterogenee si può definire in modo simile.

·0 $a, b \varepsilon G . x \varepsilon Q a . \supset . x(/a \times b) = (x/a) \times b$ Def.

·01 „ $x \times (b/a) =$ „ „

·02 „ $(b/a)x =$ „ „

Se a e b sono grandezze, ed x è una grandezza omogenea con a, allora x/a è una quantità: quindi $/a$ è l'operazione " dividere per a " che si può eseguire su ogni grandezza x omogenea con a. Ed ha senso $(x/a) \times b$, che è una grandezza omogenea con b. Noi indicheremo questa grandezza anche con $x(/a \times b)$, cambiando l'ordine delle parentesi; e anche con $x \times (b/a)$, cambiando i fattori b e $/a$, e anche con $(b/a)x$, cambiando i due fattori. Quindi b/a è un operatore, che si può applicare ad ogni

grandezza omogenea con a, e dà per risultato una grandezza omogenea con b.

Questo operatore b/a dicesi anche " la proporzionalità per cui ad a corrisponde b ".

·1 $$a, b \varepsilon G . \supset . (b/a) \times a = b.$$

Infatti per definizione:

$$(b/a) \times a = (a/a) \times b = 1 \times b = b.$$

Questa eguaglianza è identica alla § 3 P ·5; l'ipotesi è più larga.

·2 $$a, b \varepsilon G . x \varepsilon Q a . (b/a) x = y . \supset . y \varepsilon Q b . x/a = y/b.$$

" Essendo a e b delle grandezze, e x una grandezza omogenea con a, e posto $(b/a) x = y$, sarà y una grandezza omogenea con b, e si avrà la proporzione scritta, cioè y è la quarta proporzionale dopo a, x, b ".

Infatti $y = (x/a) b$, e $x/a \varepsilon Q$, onde si ha la tesi

·3 $$a, b \varepsilon G . a' \varepsilon Q a . b' \varepsilon Q b . \supset \therefore b/a = b'/a' : = : u \varepsilon Q a . \supset_u . (b/a) u = (b'/a') u \quad \text{Def.}$$

" Date due grandezze a e b, e due altre a' e b' omogenee rispettivamente con a e con b, allora dicesi che $b/a = b'/a'$ quando, comunque si prenda la grandezza u omogenea con a (e quindi con a'), si ha che i prodotti $(b/a)u$ e $(b'/a')u$ risultano eguali ".

·4 $$a, b \varepsilon G . a' \varepsilon Q a . b' \varepsilon Q b . \supset : b/a = b'/a' . = . a'/a = b'/b.$$

" La condizione necessaria e sufficiente affinchè siano eguali i rapporti b/a e b'/a', in cui i numeratori sono eterogenei coi rispettivi denominatori, ma i numeratori sono omogenei fra loro, come pure i denominatori, è che sia soddisfatta l'eguaglianza dei rapporti fra quantità omogenee ".

In tal modo nella proporzione di Euclide $a'/a = b'/b$ si possono alternare i medii, e scrivere $a'/b' = a/b$.

Infatti, essendo u una grandezza omogenea con a, la $b/a = b'/a'$ per definizione significa $(b/a)\,u = (b'/a')\,u$, cioè $(u/a)\,b = (u/a')\,b'$, cioè $(u/a)/(u/a') = b'/b$, cioè $a'/a = b'/b$.

La definizione dell'eguaglianza dei rapporti di grandezze si può mettere sotto la forma più simmetrica, ma un po' più complicata:

$$x, y \varepsilon \mathrm{G}/\mathrm{G} \,.\, \supset \therefore x = y \,.=.\, \exists\, \mathrm{G} \frown u \ni (u \times x, u \times y \varepsilon \mathrm{G} \,.\, u \times x = u \times y).$$

" Se x e y sono rapporti di grandezze (eterogenee), dicesi che $x = y$, quando esiste una grandezza u tale che su essa si possano eseguire le operazioni x e y; cioè tale che $u \times x$ e $u \times y$ siano grandezze, e si abbia $u \times x = u \times y$ ".

·5 $\quad a, b, c, d, x \varepsilon \mathrm{G} \,.\, c \varepsilon \mathrm{Q}b \,.\, x \varepsilon \mathrm{Q}a \,.\supset .$
$\quad [(d/c) \times (b/a)]\, x = (d/c) \times [(b/a)\, x]$. Def.

" Per prodotto di due rapporti di grandezze d/c e b/a, essendo però c omogeneo con b, si intende l'operazione che si ottiene eseguendo su una grandezza x omogenea con a, prima l'operazione b/a, e sul risultato l'operazione d/c ".

·6 $\quad a, b, c \varepsilon \mathrm{G} \,.\supset .\, (c/b) \times (b/a) = c/a.$

·7 $\quad a, b \varepsilon \mathrm{G} \,.\supset .\, (a/b) \times (b/a) = 1.$

I due rapporti, il cui prodotto è 1, si possono anche qui chiamare l'uno reciproco dell'altro.

Se d è omogeneo con c, si ha dalla ·5 pure definito il prodotto d'una quantità numerica per un rapporto di grandezze.

Il rapporto di due grandezze eterogenee si può definire per astrazione (invece che come operazione). Allora non si dice che cosa sia b/a, ma si definisce solo l'eguaglianza:

$$b/a = b'/a' \,.=.\, a'/a = b'/b,$$

conforme alla ·4. Cioè dicesi che il rapporto delle grandezze eterogenee b ed a è eguale al rapporto b'/a', ove b' è omogeneo con b, ed a' con a, se sussiste l'eguaglianza fra rapporti di grandezze omogenee a'/a e b'/b, ove questi rapporti sono le ragioni di Euclide. Poi è necessario definire il prodotto di b/a per una

grandezza omogenea con a mediante la P·02, e le altre operazioni.

Oppure si può porre b/a = classe di coppie di grandezze b' e a', omogenee rispettivamente con b e con a, tali che $a'/a = b'/b$; e poi definire le operazioni.

Risulta così chiaro che queste varie teorie si riducono ad uno spostamento nell'ordine delle proposizioni.

ESEMPI

In molte questioni si presentano i rapporti di grandezze eterogenee. Così " la velocità di un mobile è eguale allo spazio percorso diviso per il tempo impiegato a percorrerlo " e la proposizione " la velocità d'un uomo al passo è di 5 chilometri all'ora " si può scrivere sotto forma semi-simbolica:

$$\text{Velocità uomo al passo} = 5 \text{ chilometri}/\text{ora}$$

ove al posto di *è* si scrive =, e al posto di *al* si scrive /. Così il segno si presenta come abbreviazione. Ma esso conserva le proprietà formali del diviso dell'Aritmetica.

Volendo la velocità in centimetri al secondo c/s, basta sostituire chilometro = 100 000 c, ora = 60 × 60 s, e si avrà:

$$5 \text{ chilometri}/\text{ora} = 139 \text{ c}/\text{s}.$$

E se voglio lo spazio percorso in 8 ore moltiplico la velocità pel tempo:

$$(5 \text{ chilometri}/\text{ora}) \times 8 \text{ ore} = 5 \text{ chilometri} \times (8 \text{ ore}/\text{ora}) =$$
$$= 40 \text{ chilometri}.$$

L'unità di misura delle velocità nel sistema c. g. s. è c/s. Il Prof. Castellano (*) propone di chiamarla *cine*.

Parimenti:

$$\text{densità d'un corpo} = \text{massa}/\text{volume}$$
$$\text{densità dell'aria} = 1293 \text{ g}/\text{m}^3.$$

(*) F. Castellano, *Sulla definizione del moto " equabile ", del moto " equabilmente vario " e della " velocità "*. " Periodico di Matematica ", settembre-ottobre, 1908, e *Lezioni di Meccanica razionale*, 2ª edizione, 1911.

Queste notazioni sono molto diffuse nei trattati di fisica, quantunque non ancora generali in quelli di Matematica.

Da un Manuale di ingegneria ricavo le seguenti formule:

Peso del filo di ferro del diametro di 1 mm = 6 g/m
Peso di una lastra di ferro dello spessore di 1 mm = 7,8 kg/m²
Portata media del fiume Reno = 1000 m³/s.

La velocità rotatoria si suol misurare dagli ingegneri in giri al minuto, e dai fisici in radianti al secondo; e si ha:

giro/minuto = 0,1046 radiante/secondo.

L'uso del segno / è più raro negli esempi seguenti:

prezzo del caffè = 5 L/kg (5 lire al chilogramma)
densità della popolazione italiana = 113 abitanti/(km)².

In questi esempi il segno / si può leggere " al „ o anche " per „.

Si legge " in „ nella frase del tipo:

" L'area di un triangolo sferico in triangoli trirettangoli è quanto il suo eccesso sferico in retti „, che in simboli è:

(triangolo sferico) / (triangolo trirettangolo) =
= (eccesso sferico) / retto.

Altri esempi tolti dalla vita comune si hanno in:

stipendio d'un impiegato = L 150/mese
interesse semplice di L. 1000 = 50 L/anno.

§ 8.

Proporzionalità.

Ogni problema pratico, in cui date più grandezze, se ne cerca una nuova, qualora tale problema abbia soluzione, determina questa grandezza in funzione di quelle. La natura della funzione è costituita dalle parole del linguaggio ordinario che legano quelle grandezze.

·1 $a \epsilon G . \supset \therefore f \epsilon \text{proporz}(Qa) . = : b \epsilon Qa . \supset_b . fb \epsilon G :$
$x \epsilon Q . \supset_x . f(xa) = x(fa)$. Def.

" Se a è una grandezza, dire che f è una proporzionalità sulle grandezze omogenee con a, significa dire che comunque sia b una grandezza omogenea con a, si ha che fb è una grandezza; cioè f fa corrispondere ad ogni grandezza omogenea con a una nuova grandezza. Inoltre soddisfa alla condizione $f(xa) = x(fa)$ qualunque sia la quantità numerica x „.

La relazione $f(xa) = x(fa)$ si può mettere sotto la forma $f(xa)/fa = x$; o, posto $b = xa$, cioè essendo b omogenea con a, $(fb)/(fa) = b/a$; e così non compaiono che rapporti fra grandezze omogenee. Introdotto il rapporto di grandezze eterogenee, poichè fa può essere eterogeneo con a, la proporzionalità si può anche scrivere $(fb)/b = (fa)/a$, cioè il rapporto $(fa)/a$ non varia, sostituendo ad a una grandezza ad essa omogenea. E moltiplicando per b, possiamo anche scrivere:

·2 $a \epsilon G . f \epsilon \text{proporz}(Qa) . b \epsilon Qa . \supset . fb = [(fa)/a] \times b$.

" Se a è una grandezza e f una proporzionalità fra le grandezze omogenee con a, allora, data una grandezza qualunque b omogenea con a, il valore della funzione fb è il prodotto del coefficiente $(fa)/a$ (non numerico, ma costante rispetto ad a) per b „. Ciò è possibile solo dopo l'introduzione del rapporto di grandezze eterogenee.

·3 $a \epsilon G . f \epsilon \text{proporz}(Qa) . b \epsilon Qa . \supset . f(a+b) = fa + fb$.

" Se f è una proporzionalità, allora la funzione della somma è la somma dei valori della funzione „.

Infatti per la definizione della somma di due grandezze, si ha:

$$a + b = (1 + b/a)\, a$$

onde:

$$f(a + b) = f[(1 + b/a)\, a].$$

e per la definizione di proporzionalità, essendo $1 + b/a$ una quantità numerica:

$$f(a+b) = (1 + b/a) fa$$
$$= fa + (b/a) fa$$
$$= fa + fb.$$

Viceversa:

·4 $u \varepsilon G . f \varepsilon GF(Qu) : a, b \varepsilon Qu . \supset_{a,b} . f(a+b) = fa + fb : \supset . f \varepsilon$ proporz.

" Se u è una grandezza, e se f è una grandezza funzione delle grandezze omogenee con u; e se comunque si prendono le grandezze a e b omogenee con u, sempre si ha: $f(a+b) = fa + fb$, allora f è una proporzionalità ".

Una funzione f tale che comunque si prendano a e b, si ha $f(a+b) = fa + fb$, dicesi funzione *distributiva* rispetto all'addizione; o anche semplicemente *additiva* (*).

Trattandosi di numeri reali positivi e negativi, la questione, che la proprietà additiva importi la proporzionalità, fu studiata da Eulero; poi da Cauchy nel 1821, imponendo la condizione della continuità della funzione; poi da Darboux nel 1880, supposto che il limite superiore dei valori della funzione sia finito almeno in un intervallo comunque piccolo (**).

Ma non facendo altre ipotesi, la questione rimane insoluta.

Però, nel nostro caso, la proposizione si può dimostrare.

Infatti, ponendo $b = a$, dall'ipotesi del ·4 si deduce:

$$f(2a) = 2fa.$$

Supponiamo che per un intero n si abbia:

$$f(na) = nfa.$$

allora, ponendo $b = na$, si avrà:

$$f(a + na) = fa + nfa,$$

(*) F. Enriques, *Les concepts fondamentaux de la science*, Paris, 1913, pag. 139.

(**) G. Peano, " Formulario Mathematico ", edit. V, a. 1908, pag. 117-118.

cioè:

$$f[(n+1)a] = (n+1)fa.$$

Perciò la relazione $f(na) = nfa$, che è vera per $n = 1$ e 2, e suppostola vera per un valore intero di n, risulta pure vera per $n+1$, sarà vera in generale, cioè:

$$(1) \qquad n \in N_1 . \supset . f(na) = nfa.$$

Pongo a/n invece di a, e divido per n:

$$n \in N_1 . \supset . f(a/n) = (fa)/n.$$

Pongo ma invece di a, essendo m un N_1; ed avremo che

$$f(ma) = mfa$$
$$m, n \in N_1 . \supset . f(ma/n) = m(fa)/n,$$

cioè:

$$(2) \qquad r \in N_1/N_1 . \supset . f(ra) = rfa.$$

" Se r è il rapporto di due interi, cioè un numero razionale, sarà soddisfatta la proporzionalità ".

La funzione f è crescente, cioè

$$(3) \qquad b > a . \supset . fb > fa.$$

Invero, se $b > a$, esiste una grandezza tale che $b = a + c$, onde per la proprietà additiva, $fb = fa + fc$, onde $fb > fa$.

Sia ora x una quantità (numerica positiva) irrazionale e siano y e z due razionali tali che

$$y > x > z$$

sarà, per § 5·3:

$$ya > xa > za,$$

e per la (3):

$$f(ya) > f(xa) > f(za),$$

e siccome y e z sono razionali, per la (2):

$$yfa > f(xa) > zfa,$$

e dividendo per fa, in virtù della stessa § 5 ·3:

$$y > f(xa)/fa > z;$$

quindi $f(xa)/fa$, che è minore d'ogni numero razionale y maggiore di x, ed è maggiore d'ogni numero razionale z minore di x, sarà eguale ad x:

$$f(xa)/fa = x$$

onde:

$$f(xa) = xfa.$$

Questa proposizione è molto importante, perchè è spesso più facile verificare la proprietà additiva, anzichè quella che ha servito per la definizione di proporzionalità, e che è in uso in tutti i libri.

Così, se a e b sono lunghezze, e se con $a \times b$ indichiamo il rettangolo costrutto su esse, è facile il verificare che $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (Euclide, Libro II, prop. 1). Se ne deduce che $a \times b$, considerato come funzione di b, è proporzionale a b.

Parimenti, da " prezzo $(a + b) =$ prezzo $a +$ prezzo b ", deduco che *prezzo* indica una proporzionalità.

Nella proposizione ·4 non è permesso di portare l'ipotesi $a \varepsilon Qu$ prima dei due punti.

Così se a è una grandezza, e comunque si prenda la grandezza omogenea b, sempre si ha $f(a + b) = fa + fb$, non segue che f sia una proporzionalità. Così se $fx = x + \sin x$, sarà, qualunque sia x, $f(2\pi + x) = f(2\pi) + fx$ senza che f sia la proporzionalità.

Questo teorema si trova pure in J. Tannery, *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, Paris, 1900, pag. 447.

Il prof. Michele De Franchis nella sua *Geometria elementare ad uso dei Licei*, 1909, pag. 343, fa uso della proposizione precedente per dimostrare i teoremi sulla proporzionalità fra grandezze geometriche.

Ma questi autori trattano diversamente il caso dell'irrazionale.

Unità di misura.

Essendo a e b grandezze omogenee, la quantità numerica b/a che già si chiama *ragione* o *rapporto* di b ad a, ed è il λόγος di Euclide, dicesi anche dagli autori moderni " il numero che misura b essendo a l'unità di misura ". Questa frase deve essere considerata come un tutto indecomponibile; non ha senso la frase " numero che misura b ", come non ha senso nemmeno l'altra " a è l'unità di misura ". Così il rapporto b/a di due numeri, o " valore della frazione il cui numeratore è b e il denominatore è a " ha un valore preciso.

Ma non ha senso la frase " valore della frazione il cui numeratore è b ", e nemmeno ha senso la frase " denominatore della frazione a/b ", poichè essendo $1/2 = 2/4$, non segue che il denominatore di 1/2 sia il denominatore di 2/4 (*).

Le espressioni " misura di una grandezza ", " unità di misura ", al pari di " numeratore e denominatore " e di tante altre parole di algebra, " termini d'una somma ", " fattori d'un prodotto ", " coefficiente ", " base, esponente ", ecc. esprimono proprietà di scritture, non dei valori che esse hanno. Sono delle cosidette " pseudofunzioni ". Questi termini in vari trattati moderni sono mandati via o relegati in un vocabolario.

In teoria, " unità di misura " significa " grandezza qualunque ", perchè ogni grandezza può essere assunta come unità di misura. Perciò, per verificare se una proposizione, in cui si parla di unità di misura in modo esplicito o implicito, abbia senso, basta al posto di " unità di misura " leggere " grandezza arbitraria ".

In pratica sono unità di misura quelle grandezze cui siamo soliti riferire le altre. E queste unità hanno variato col luogo e col secolo, ed anche in uno stesso luogo e tempo si usano più sistemi di unità di misura.

Così noi siamo soliti a dare alle frazioni il denominatore 10,

---

(*) S. Catania, *Aritmetica razionale per i Ginnasi superiori*, 1914, p. 132.

o una sua potenza; mentre Tolomeo, seguendo gli Assiri, dava alle frazioni il denominatore 60.

Le lunghezze si misurano oggi in metri, o chilometri, o centimetri, o micron, o raggio medio dell'orbita terrestre, o anno-luce. Prima del sistema metrico (*), c'erano i romani *digiti*, *pedes* e *millia passuum*. I greci usavano il *δάκτυλος*, di cui 16 formavano il *πούς*, di cui 600 formavano lo *στάδιον*.

Se allo stadio olimpico attribuiamo il valore di 185 m., come fanno tutti gli autori, 600 stadii formano il grado di meridiano terrestre (30 stadii formano la persiana parasanga, *παρασάγγης*, che è il cammino di un uomo in un'ora).

Nei tempi primitivi si usò il " tiro di pietra ", la " gittata di lancia ". Così, *Iliade*, III, 12 (versione del Monti):

> .....nè va lunge il guardo
> più che un tiro di pietra

e *Iliade*, XXI, 251:

> .....diè un salto Achille
> quant'è il tratto d'un'asta.

Sopprimendo le unità di misura, o facendole = 1, si perde l'omogeneità delle formole, e si arriva ad eguaglianze della forma 40 lire 8 metri = 5 grammi, poichè lira = metro = gramma = 1, e manca il filo conduttore per mettere le unità a posto.

Everett, *Units and Physical constants* (London, 1879), dopo aver spiegato le notazioni che portano all'eguaglianza:

$$\frac{\text{Yard}}{(\text{minute})^2} = \frac{1}{1200} \times \frac{\text{foot}}{(\text{second})^2},$$

scrive: " Such equations as these may be called " physical equations ", inasmuch as they express the equality of physical quantities, whereas ordinary equations express the equality of

(*) Laisant et Lemoine, *Traité d'arithmétique*, Paris, 1895, pag. 72: " Déjà " plusieurs fois des tentatives infructueuses avaient été faites pour uniformiser, dans le royaume de France, le sistème de poids et mesures; en " particulier par Charles le Bel, par Louis IX et pendant la minorité de " Charles IX en 1560 par les États Généraux; il était réservé à la Convention de mener à bonne fin un travail aussi important ".

mere numerical values. The use of physical equations in problems relating to units is to be strongly recommended, as affording a natural and easy clue to necessary calculations „.

Invece la maggioranza dei matematici professa l'opinione opposta. Lasciando in disparte alcuni che dicono “ io non ho definito il rapporto di grandezze eterogenee, dunque non si può definire „, mi limito qui a riportare quanto dice J. Tannery, rapito nel 1910 alle scienze matematiche che Egli aveva tanto perfezionato con numerosi libri importantissimi, e relativi specialmente alla parte didattica e ai fondamenti della matematica.

Il Tannery, nel libro postumo *Science et philosophie*, 1912, a pag. 319 riporta e critica la definizione contenuta nell'*Annuaire du Bureau des longitudes*:

“ L'unité de vitesse est la vitesse uniforme d'un centimètre par seconde „.

Egli parte dalla definizione “ La vitesse dans un mouvement uniforme, est le nombre qui mesure la longueur parcourue par le mobile pendant l'unité de temps „. “ Si l'on prend le centimètre pour unité de longueur, la seconde pour unité de temps, la vitesse dont il s'agit dans la définition de l'*Annuaire* est le nombre *un* et nous arrivons à la définition suivante:

“ Dans le système C. G. S., l'unité de vitesse est le nombre *un* „. Ce n'est assurement pas ce qu'ont voulu dire les auteurs de ce système „.

E ragionando in modo analogo, conchiude:

“ L'unité d'accélération est le nombre *un*;

“ La dyne est le nombre *un*;

“ L'erg est le nombre *un* „.

Le conseguenze cui arriva il Tannery, derivano legittimamente dalle premesse, cioè dalla definizione “ Velocità è il numero che misura la lunghezza percorsa durante l'unità di tempo „ provandone così la sua fallacia. E si può riconoscere direttamente. Questa definizione suppone esistere una unità di tempo, mentre “ unità di tempo „ è il nome comune di “ secondo, minuto, ora, giorno, anno „ e di “ tempo „ in generale. E non ha senso il numero che misura la lunghezza; poichè 2 m = 200 cm, e il numero 2 che misura il primo membro non è eguale a 200 che misura il secondo.

Strumenti diottrici ad obbiettivo composto usati in Geometria pratica.

Nota I di G. CICCONETTI.

1. Considerazioni generali. — Accoppiando all'obbiettivo semplice convergente L_1 di un cannocchiale (o di una camera oscura) una seconda lente L_2 si avrà un obbiettivo composto $L_1 L_2$ e potrà disporsi dei due nuovi elementi: distanza focale di L_2 e distanza reciproca delle due lenti in modo che il sistema $L_1 L_2$ soddisfi a qualche condizione imposta.

Supporremo, per semplicità, che le lenti sieno infinitamente sottili e che quindi i punti principali dell'una e quelli dell'altra coincidano rispettivamente coi loro centri ottici O_1, O_2 (fig. 1).

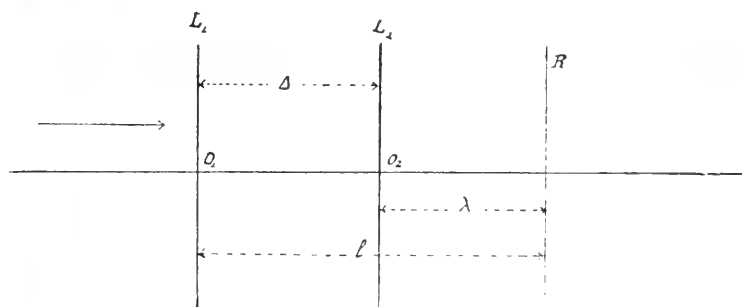



Fig. 1.

Le distanze, come di solito, si riterranno positive o negative secondochè sono contate nel senso di propagazione della luce (da sinistra verso destra) o nel senso opposto e indicheremo con

φ_1, φ_2, φ, rispettivamente le distanze focali della lente L_1, della lente L_2 e del sistema $L_1 L_2$.

F_1, F_1'; F_2, F_2'; F, F'; il 1° ed il 2° fuoco rispettivamente della lente L_1, della lente L_2 e del sistema $L_1 L_2$,

Δ, la distanza $O_1 O_2$ fra le due lenti, sempre positiva,

l, la distanza, sempre positiva, fra l'obbiettivo semplice L_1 ed il piano R ove si forma l'immagine definitiva cioè il piano del reticolo,

λ, la distanza, che dovrà pur essa risultar sempre positiva, fra la seconda lente L_2 ed il medesimo piano R dell'immagine,

D, il valore assoluto della distanza di un oggetto osservato dalla lente L_1.

La lente L_1 è sempre convergente, quindi φ_1 è sempre positiva. La seconda lente L_2 potrà essere convergente o divergente e in corrispondenza φ_2 sarà positiva o negativa.

Sono elementi necessari alla nostra discussione: la distanza $O_1 F$ del 1° fuoco del sistema dalla prima lente L_1, la distanza $O_2 F'$ del 2° fuoco del sistema dalla seconda lente L_2 e la distanza focale φ del sistema.

Si hanno pertanto le note formole

$$O_1 F = \frac{-\varphi_1 (\varphi_2 - \Delta)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}, \tag{1}$$

$$O_2 F' = \frac{\varphi_2 (\varphi_1 - \Delta)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}, \tag{2}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}, \tag{3}$$

le quali sono generali, cioè valgono sia per L_2 convergente sia per L_2 divergente. Ma in questo secondo caso introducendo il valore assoluto della distanza focale negativa φ_2 può tornare utile scriverle sotto la forma

$$O_1 F = \frac{\varphi_1 (|\varphi_2| + \Delta)}{\varphi_1 - |\varphi_2| - \Delta}, \tag{1'}$$

$$O_2 F' = \frac{-|\varphi_2| (\varphi_1 - \Delta)}{\varphi_1 - |\varphi_2| - \Delta}, \tag{2'}$$

$$\varphi = \frac{-\varphi_1 |\varphi_2|}{\varphi_1 - |\varphi_2| - \Delta}. \tag{3'}$$

Affinchè il sistema $L_1 L_2$ possa funzionare da obbiettivo di un cannocchiale (o di una camera oscura) deve dare di un oggetto lontano una immagine reale da raccogliersi sul piano del reticolo (o della lastra), epperò il 2° fuoco F' del sistema, che è l'immagine di un punto infinitamente lontano, deve essere reale, cioè posteriore ad L_2. È dunque condizione necessaria che la distanza $O_2 F'$ risulti positiva.

Se L_2 è convergente la (2) mostra che a questa condizione si può soddisfare o con

$$(4) \qquad \begin{array}{ll} \Delta < \varphi_1 & \text{e allora } \varphi \text{ risulta positiva} \\ \text{o con } \Delta > \varphi_1 + \varphi_2 & \text{e allora } \varphi \text{ risulta negativa.} \end{array}$$

Se invece la seconda lente L_2 è divergente, la (2') porta a concludere che per avere $O_2 F'$ positiva deve essere

$$(5) \qquad \varphi_1 > \Delta > \varphi_1 - |\varphi_2|,$$

con che la distanza focale φ del sistema risulta positiva.

Nel caso che lo strumento debba servire per osservare o proiettare soltanto oggetti che si trovano a *notevole distanza*, per L_2 convergente, ognuna delle due condizioni (4) è praticamente accettabile. Ma se lo strumento deve servire *con continuità* per tutte le distanze dell' oggetto da infinito a zero è facile vedere che la seconda condizione $\Delta > \varphi_1 + \varphi_2$ è inammissibile. Infatti per questa continuità di funzionamento non solo è necessario che il 2° fuoco F' del sistema sia reale, ma deve essere il 1° fuoco F virtuale, perchè se fosse reale, cioè anteriore alla lente L_1, quando l'oggetto si trovasse in F la sua immagine formandosi a distanza infinita non potrebbe raccogliersi sul reticolo. Dovendo dunque $O_1 F$ risultare positiva la (1) mostra che ciò è conciliabile colla condizione $\Delta < \varphi_1$ ma non coll'altra $\Delta > \varphi_1 + \varphi_2$.

Se poi la seconda lente L_2 è divergente si vede dalla (1') che la condizione (5) pel 2° fuoco reale è incompatibile con $O_1 F$ positiva. In altri termini, se il 2° fuoco è reale lo è anche il 1°, cioè questo è anteriore ad L_1 e lo strumento non potrà funzionare per *qualunque* distanza dell'oggetto.

Negli strumenti di Geometria pratica ad obbiettivo composto, l'accoppiamento della nuova lente L_2 coll'obbiettivo semplice primitivo L_1 può effettuarsi, in relazione al piano del reticolo, in tre differenti maniere:

1° Facendo invariabile la distanza Δ fra le due lenti ed in tal caso colle diverse distanze dell'oggetto variano l e λ, subendo, s'intende, le stesse variazioni.

2° Mantenendo costante la distanza l fra la prima lente L_1 ed il piano del reticolo ed allora variano Δ e λ.

3° Lasciando fissa la distanza λ fra la seconda lente ed il reticolo e facendo variare l ed λ che subiranno le stesse variazioni.

Agli strumenti della prima categoria appartengono il *Microscopio ad ingrandimento costante*, il *Plesiotelescopio*, ambedue del Prof. Jadanza, ed il *Cannocchiale anallattico*; sono del secondo tipo i *Cannocchiali a lunghezza costante e a visuale reciproca*, e finalmente fra gli strumenti della terza specie abbiamo il cannocchiale cosidetto *con oculare di Huyghens*.

Gli strumenti a *teleobbiettivo* possono essere tanto colla distanza Δ costante quanto variabile.

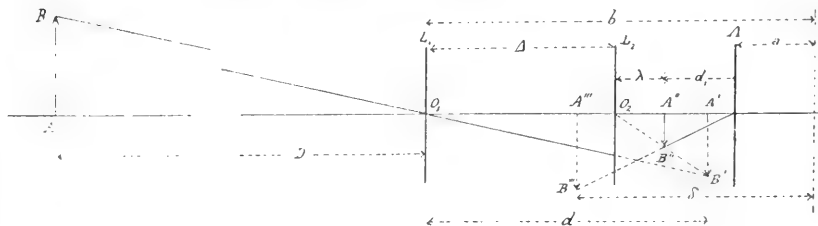



Fig. 2.

L'ingrandimento d'un cannocchiale è dato dal rapporto fra l'angolo α' sotto cui è vista l'immagine che di un oggetto AB dà il cannocchiale stesso e l'angolo α sotto cui sarebbe visto l'oggetto medesimo ad occhio nudo.

Se b (fig. 2) è la distanza dall'obbiettivo semplice L_1 dell'occhio armato di cannocchiale sarà pertanto

$$\alpha = \frac{AB}{D+b} .$$

L'obbiettivo semplice L_1 darebbe dell'oggetto AB una immagine $A'B'$ distante d da L_1 per modo che

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{d}{-D} .$$

Ma poichè

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{\varphi_1}$$

si ricava

$$\frac{d}{D} = \frac{\varphi_1}{D - \varphi_1}$$

e quindi

$$\frac{A'B'}{AB} = -\frac{\varphi_1}{D - \varphi_1} .$$

L'immagine $A'B'$ si trova ad una distanza da L_2 che in valore e segno è data $d - \Delta$ e la lente L_2 dà di $A'B'$ una nuova immagine $A''B''$ tale che

$$\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{\lambda}{d - \Delta} .$$

D'altra parte siccome

$$-\frac{1}{d - \Delta} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\varphi_2}$$

si trae

$$\frac{\lambda}{d - \Delta} = \frac{\varphi_2 - \lambda}{\varphi_2}$$

onde

$$\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{\varphi_2 - \lambda}{\varphi_2} .$$

Finalmente, l'oculare convergente Λ, che supponiamo anch'esso ridotto ad un'unica lente sottile di distanza focale ψ, dà di $A''B''$ un'ultima immagine virtuale $A'''B'''$ che riterremo formarsi alla distanza δ della visione distinta dal 1° punto nodale dell'occhio. Sicchè se indichiamo con d_1 la distanza, negativa, di $A''B''$ da Λ e con a la distanza del 1° punto nodale dell'occhio da Λ, si ha

$$\frac{A'''B'''}{A''B''} = \frac{\delta - a}{d_1} .$$

Anche qui, dalla

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{\delta - a} = \frac{1}{\psi}$$

si ricava

$$\frac{\delta - a}{d_1} = \frac{\psi + \delta - a}{\psi}$$

e perciò

$$\frac{A'''B'''}{A''B''} = \frac{\psi + \delta - a}{\psi} .$$

Ora, l'angolo sotto cui è veduta l'immagine definitiva $A'''B'''$ dal 1° punto nodale dell'occhio è

$$\alpha' = \frac{A'''B'''}{\delta} ,$$

quindi l'ingrandimento sarà

$$I = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{A'''B'''}{AB} \frac{D+b}{\delta} = \frac{A'''B'''}{A''B''} \frac{A''B''}{A'B'} \frac{A'B'}{AB} \frac{D+b}{\delta} ,$$

e sostituendo per i rapporti $\frac{A'''B'''}{A''B''}$, $\frac{A''B''}{A'B'}$, $\frac{A'B'}{AB}$ i valori trovati si ottiene

$$I = - \frac{\psi + \delta - a}{\psi} \frac{\varphi_2 - \lambda}{\varphi_2} \frac{\varphi_1}{D - \varphi_1} \frac{D+b}{\delta}$$

dove il segno negativo sta ad indicare il rovesciamento dell'im-l'immagine che si verifica nel caso considerato della figura.

Il termine

$$\frac{\psi + \delta - a}{\delta}$$

può ritenersi costante per un dato osservatore, ma per semplicità possiamo addirittura metterlo eguale all'unità quando si consideri come posizione normale dell'occhio quella per la quale il suo 1° punto nodale coincide col fuoco posteriore della lente oculare $(a = \psi)$. Resta allora come espressione dell'ingrandimento

$$I = - \frac{D+b}{D - \varphi_1} \frac{\varphi_1}{\psi} \frac{\varphi_2 - \lambda}{\varphi_2} , \tag{6}$$

la quale mostra che l'ingrandimento è una funzione della distanza D dell'oggetto osservato.

Poichè si può scrivere

$$I = -\frac{1+\frac{b}{D}}{1-\frac{\varphi_1}{D}} \frac{\varphi_1}{\psi} \frac{\varphi_2-\lambda}{\varphi_2},$$

segnando coll'indice ∞ i valori che le grandezze variabili colla distanza D acquistano per $D=\infty$ si ottiene come *ingrandimento normale*, corrispondente cioè a questo valor limite della distanza dell'oggetto,

$$(6') \qquad I_\infty = -\frac{\varphi_1}{\psi} \frac{\varphi_2-\lambda}{\varphi_2}.$$

Consideriamo il cannocchiale semplice che ha per obbiettivo la sola lente L_1 e lo stesso oculare: il suo ingrandimento è

$$\mathfrak{J} = -\frac{D+b'}{D-\varphi_1} \frac{\varphi_1}{\psi} = -\frac{1+\frac{b'}{D}}{1-\frac{\varphi_1}{D}} \frac{\varphi_1}{\psi}$$

e l'ingrandimento normale

$$\mathfrak{J}_\infty = -\frac{\varphi_1}{\psi}$$

sicchè

$$(6'') \qquad I_\infty = \mathfrak{J}_\infty \frac{\varphi_2-\lambda}{\varphi_2}.$$

Tornando al caso generico di un valore qualsiasi della distanza D si ha anche per la (6)

$$I = -\frac{D+b}{D+b'} \frac{D+b'}{D-\varphi_1} \frac{\varphi_1}{\psi} \frac{\varphi_2-\lambda}{\varphi_2}$$

e quindi

$$(6''') \qquad I = \frac{D+b}{D+b'} \mathfrak{J} \frac{\varphi_2-\lambda}{\varphi_2}.$$

Ora

$$\frac{D+b}{D+b'} = \frac{1+\frac{b}{D}}{1-\frac{b'}{D}} = \left(1+\frac{b}{D}\right)\left(1+\frac{b'}{D}\right)^{-1} = \left(1+\frac{b}{D}\right)\left(1-\frac{b'}{D}+\frac{b'^2}{D^2}-\ldots\right).$$

Se per D si considerano valori sufficientemente grandi da poter trascurare le potenze superiori alla prima dei termini $\frac{b}{D}$, $\frac{b'}{D}$, si potrà ritenere

$$\frac{D+b}{D+b'} = 1 + \frac{b-b'}{D}.$$

e poichè

$$b = l + d_1 + a$$
$$b' = d + d_1 + a$$

risulta

$$b - b' = l - d,$$

sicchè, nell'ordine di approssimazione ammesso,

$$(6^{IV}) \qquad I = \left(1 + \frac{l-d}{D}\right) \mathfrak{J} \frac{\varphi_2 - \lambda}{\varphi_2}.$$

Per gli strumenti della terza categoria λ è invariabile epperò l'ultimo fattore del secondo membro è costante per tutti i valori di D. Ne deriva che per quei valori della distanza D pei quali è trascurabile il termine $\frac{l-d}{D}$, l'ingrandimento è espresso da quello del cannocchiale semplice con obbiettivo L_1, moltiplicato per una costante.

La formola (6) e le $(6''')$, (6^{IV}) che ne derivano, non sono applicabili al caso $D = \varphi_1$. Ora, a differenza di quanto accade per un cannocchiale ad obbiettivo semplice, con alcuni cannocchiali ad obbiettivo composto è possibile osservare oggetti che si trovano ad una distanza D eguale a φ_1, minore di φ_1 e anche nulla.

Pel caso $D = 0$, denotando con l'indice 0 i valori che le grandezze variabili con D assumono per questo valore della distanza, si ha subito dalla (6)

$$(6^{V}) \qquad I_0 = \frac{b_0}{\psi} \frac{\varphi_2 - \lambda}{\varphi_2}.$$

Per avere l'ingrandimento I_{F_1} corrispondente all'osservazione di un oggetto che si trovi al fuoco anteriore di L_1, cioè alla distanza $D = \varphi_1$, conviene trovare una nuova espressione dell'ingrandimento introducendo Δ ed eliminando λ.

A tale scopo dalle relazioni già trovate

$$\frac{d}{D} = \frac{\varphi_1}{D - \varphi_1} \qquad \text{e} \qquad \frac{\lambda}{d - \Delta} = \frac{\varphi_2 - \lambda}{\varphi_2}$$

si traggono rispettivamente

(7) $$d = \frac{D\varphi_1}{D - \varphi_1},$$

(8) $$d = \Delta + \frac{\varphi_2 \lambda}{\varphi_2 - \lambda},$$

onde eguagliando si ha

(9) $$\frac{D\varphi_1}{D - \varphi_1} = \Delta + \frac{\varphi_2 \lambda}{\varphi_2 - \lambda}.$$

Se da questa relazione si ricava λ si ottiene

(10) $$\lambda = \varphi_2 \frac{D\varphi_1 - (D - \varphi_1)\Delta}{D\varphi_1 - (D - \varphi_1)(\Delta - \varphi_2)}.$$

Sostituiamo questo valore nella (6) e risulta

(11) $$I = -(D + b)\frac{\varphi_1}{\psi} \frac{\varphi_2}{D\varphi_1 - (D - \varphi_1)(\Delta - \varphi_2)}.$$

Contrassegnando coll'indice F_1 i valori che le variabili con D assumono per $D = \varphi_1$ si ottiene

(11') $$I_{F_1} = -\frac{\varphi_1 + b_{F_1}}{\varphi_1} \frac{\varphi_2}{\psi} = -\left(1 + \frac{b_{F_1}}{\varphi_1}\right)\frac{\varphi_2}{\psi}.$$

Se poi nella (11) si pone $D = 0$ si ottiene una nuova espressione di

(11'') $$I_0 = -\frac{b_0}{\psi} \frac{\varphi_2}{\Delta_0 - \varphi_2}.$$

L'ingrandimento normale I_∞ può anche ottenersi dalla (11) ponendovi $D=\infty$ dopo aver diviso numeratore e denominatore per D. Si ha

$$(11''') \qquad I_\infty = -\frac{\varphi_1}{\psi} \frac{\varphi_2}{\varphi_1+\varphi_2-\Delta_\infty} \,,$$

cioè per la (3)

$$(11^{\text{IV}}) \qquad I_\infty = -\frac{\varphi}{\psi} \,,$$

la quale mostra che, come in un cannocchiale semplice, l'ingrandimento normale è rappresentato dal rapporto fra la distanza focale obbiettiva e quella oculare.

Dalla (11''') introducendo per $-\frac{\varphi_1}{\psi}$ l'ingrandimento normale $\mathfrak{I}_\infty$ del cannocchiale ad obbiettivo semplice L_1 si ha

$$(12) \qquad \frac{I_\infty}{\mathfrak{I}_\infty} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1+\varphi_2-\Delta_\infty} \,,$$

e se L_2 è divergente potrà anche scriversi

$$(12') \qquad \frac{I_\infty}{\mathfrak{I}_\infty} = \frac{|\varphi_2|}{\Delta_\infty-\varphi_1+|\varphi_2|} \,.$$

Nel caso di L_2 convergente la (12) mostra che per $\Delta_\infty < \varphi_1$ risulta sempre $I_\infty < \mathfrak{I}_\infty$, cioè l'aggiunta della lente L_2 produce una diminuzione dell'ingrandimento, ma per $\Delta > \varphi_1 + \varphi_2$ tenendo Δ_∞ *poco* maggiore di $\varphi_1 + \varphi_2$ può rendersi il denominatore (valore assoluto) minore del numeratore e quindi $I_\infty > \mathfrak{I}_\infty$. Il cambiamento di segno che per $\Delta > \varphi_1 + \varphi_2$ avviene da $\mathfrak{I}$ ad I sta ad indicare che l'immagine ottenuta coll'obbiettivo composto è rovesciata rispetto a quella che si avrebbe col solo obbiettivo semplice L_1.

Nel caso di L_2 divergente, dovendo essere soddisfatta la (5), il denominatore della (12') è sempre positivo e sempre minore del numeratore, epperò si ha costantemente $I_\infty > \mathfrak{I}_\infty$.

In conclusione, accoppiando all'obbiettivo semplice L_1 una lente L_2 convergente, l'ingrandimento normale diminuisce se $\Delta_\infty < \varphi_1$ e cresce o diminuisce per $\Delta_\infty > \varphi_1 + \varphi_2$ secondochè $\Delta_\infty - (\varphi_1 + \varphi_2) \lesseqgtr \varphi_2$.

Se poi la lente aggiunta è divergente, l'ingrandimento normale viene sempre aumentato.

Per gli strumenti della prima categoria essendo Δ costante, alla notazione Δ_x può senz'altro sostituirsi Δ.

È forse inutile aggiungere che le conclusioni ottenute per l'ingrandimento normale valgono, in pratica, anche per valori finiti di D sufficientemente grandi, con tanta maggiore approssimazione quanto è più grande la distanza D considerata.

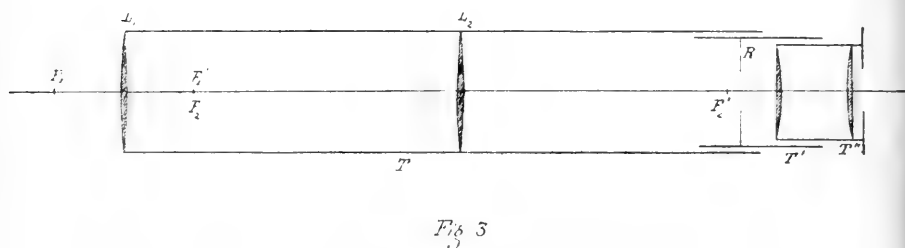
I. — Strumenti colle due lenti $L_1\, L_2$ a distanza reciproca invariabile.

2. Microscopio a ingrandimento costante. — In alcuni strumenti usati in Geometria pratica, specie nei teodoliti, la determinazione di piccole distanze su graduazioni rettilinee o di piccole ampiezze su graduazioni circolari si effettua con microscopi composti detti *a vite micrometrica*, coi quali l'intervallo fra un tratto fisso del campo (origine) a cui si riferisce la lettura ed il tratto della graduazione immediatamente precedente si misura col movimento di due fili abbinati, paralleli ai tratti, che vengono trasportati in traslazione nel piano dell' immagine muovendo una vite a passo molto fine e regolare. Supposto che la distanza angolare fra due tratti consecutivi di un cerchio graduato sia p. es. $10'$ si immagini il passo della vite regolato in modo che quando questa ha fatto un giro esatto i fili abbiano percorso esattamente un intervallo della graduazione cioè $10'$. La testa della vite, allargata a disco, sia divisa in 60 parti eguali: allora ad ogni rotazione di una parte della vite corrisponderà una traslazione dei fili abbinati che sul cerchio graduato rappresenta $\frac{10'}{60} = 10''$. Se le cose son disposte in guisa che quando coi fili si collima l'origine o tratto fisso del microscopio al tamburo della vite (micrometro) si legge *zero*, basterà collimare il tratto della graduazione che immediatamente precede il tratto fisso e la lettura del micrometro, moltiplicata per 10 se già non lo è, darà in secondi l'intervallo richiesto.

È chiaro che una scorrezione del microscopio nel senso di avvicinarsi o di allontanarsi dalla graduazione porta con sè una

variazione dell' ingrandimento e di conseguenza la grandezza dell'immagine riuscirà diversa dal suo valor normale pel quale un giro esatto della vite micrometrica fa percorrere ai fili l'esatto intervallo di una parte della graduazione. Se quindi si verifica una scorrezione di questo genere occorre rimettere il microscopio nella posizione normale e questa operazione è delicata e laboriosa.

Tale inconveniente viene eliminato coll'uso del *Microscopio ad ingrandimento costante* del Prof. Jadanza (*). L'obbiettivo, invece che di una sola lente è costituito di due lenti convergenti L_1, L_2 (fig. 3) così fissate ad un unico tubo T che il 2° fuoco F_1' della

Fig. 3

prima coincide col 1° fuoco F_2 della seconda. La distanza fra le due lenti L_1, L_2 essendo $\Delta = \varphi_1 + \varphi_2$, esse costituiscono un sistema telescopico come risulta dalle espressioni (1), (2), (3), che pel detto valore di Δ divengono infinitamente grandi. Si sa che in un sistema telescopico l'ingrandimento trasversale o lineare, cioè il rapporto di una dimensione dell'immagine alla dimensione coniugata nella figura obbiettiva (giacente in un piano normale all'asse) è costante e, precisamente, se

$$\varphi_2 = n\varphi_1$$

dove $n > 1$, l'obbiettivo composto darà della dimensione considerata una immagine n volte più grande *qualunque sia la distanza della figura obbiettiva.*

(*) " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", vol. XXVI, pag. 536.

L'immagine di un intervallo della graduazione prodotta dal sistema obbiettivo L_1 L_2 e raccolta sul reticolo R verrà poi osservata coll'oculare T'' che la ingrandirà nuovamente, ma questo stesso ingrandimento subiscono gli spostamenti dei fili nel piano dell'immagine e quindi l'azione dell'oculare essendo comune all'una e agli altri non ne altera il rapporto di grandezza.

Un raggio incidente che passi pel fuoco anteriore F_1 di L_1 procede fra le due lenti parallelamente all'asse e all'uscita da L_2 passa per F_2' sicchè F_1 e F_2' sono coniugati rispetto al sistema telescopico L_1 L_2 e se il piano della graduazione osservata contiene F_1 l'immagine si formerà nel piano normale all'asse passante per F_2' ove si porterà il reticolo R, munito dei fili mobili, mediante aggiustamento del tubo T' che lo porta, rispetto T.

Qualora il microscopio per un urto od altra causa qualsiasi venga a variare la sua distanza dalla graduazione basterà spostare il tubo porta-reticolo T' fino a veder chiara l'immagine ed il microscopio è di nuovo rettificato.

L'obbiettivo telescopico è anche utilmente applicabile nei microscopi a stima aventi il reticolo costituito da una lastrina di vetro sulla quale un intervallo apparente della graduazione è diviso, mediante tratti incisi, in un certo numero di parti eguali.

Naturalmente l'utilità dell'obbiettivo telescopico in un microscopio di lettura presuppone la perfetta corrispondenza iniziale, costruttiva, fra la grandezza dell'immagine obbiettiva di un intervallo della graduazione ed il passo della vite micrometrica o la grandezza del diagramma inciso sulla lastrina. Che se ciò non fosse, l'obbiettivo telescopico, allo stesso modo che toglie la possibilità di una scorrezione quando il microscopio è rettificato, impedirebbe di correggerlo, mentre in un microscopio ad obbiettivo semplice l'aggiustamento, entro certi limiti, è sempre possibile.

3. Plesiotelescopio del prof. Jadanza (*). — Con un cannocchiale non si può osservare un oggetto più vicino del fuoco anteriore dell'obbiettivo perchè l'immagine diverrebbe virtuale.

(*) " Rivista di Topografia e Catasto ", vol. VIII (1895-96), pag. 36.

Praticamente poi la distanza minima alla quale può osservarsi l'oggetto è notevolmente maggiore della distanza focale φ_1 per non essere obbligati ad un allungamento eccessivo del cannocchiale.

Se accoppiando all'obbiettivo semplice L_1 una seconda lente L_2 a distanza Δ invariabile si vuol raggiungere lo scopo che lo strumento funzioni per *tutte* le distanze dell'oggetto da infinito a zero servendo così da cannocchiale e da microscopio, sappiamo già, per le considerazioni svolte nel paragr. 1, che la seconda lente dovrà essere convergente e che la sua distanza Δ dalla prima dovrà soddisfare la condizione

$$\Delta < \varphi_1 .$$

Ciò posto riprendiamo la (10) nella quale

$$\lambda = \varphi_2 \frac{D\varphi_1 - (D - \varphi_1)\Delta}{D\varphi_1 - (D - \varphi_1)(\Delta - \varphi_2)} = \varphi_2 \frac{\varphi_1 - \left(1 - \frac{\varphi_1}{D}\right)\Delta}{\varphi_1 - \left(1 - \frac{\varphi_1}{D}\right)(\Delta - \varphi_2)} .$$

Se si indicano con λ_∞, λ_{F_1}, λ_0 i valori che assume λ rispettivamente per $D = \infty$, $D = \varphi_1$, $D = 0$, si ottengono subito

$$\lambda_\infty = \frac{\varphi_2(\varphi_1 - \Delta)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \qquad \lambda_{F_1} = \varphi_2 \qquad \lambda_0 = \frac{\varphi_2 \Delta}{\Delta - \varphi_2} .$$

Da questi risultati si deduce che se oltre alla condizione $\Delta < \varphi_1$ che rende positiva λ_∞ (2° fuoco reale) si verifica l'altra $\Delta > \varphi_2$ che rende positiva λ_0, l'immagine potrà sempre raccogliersi sul reticolo per tutte le distanze dell'oggetto da infinito a zero. Soddisfatte queste condizioni, poichè l'immagine si sposta nello stesso senso dell'oggetto, λ_∞ e λ_0 rappresentano le distanze minima e massima dell'immagine da L_2. Data φ_1 si assume $\Delta < \varphi_1$ e stabilito quindi il massimo valore λ_0 di λ, dall'ultima relazione si ricava

$$\varphi_2 = \frac{\lambda_0 \Delta}{\lambda_0 + \Delta} .$$

Allora si hanno tutti gli elementi per calcolare il valor minimo λ_∞ di λ. La differenza $\lambda_0 - \lambda_\infty$ rappresenta la corsa massima del reticolo.

Esempio. — Sia $\varphi_1 = 300^{mm}$. Assunta $\Delta = 200^{mm}$ si voglia $\lambda_0 = 100^{mm}$. Si trova allora $\varphi_2 = 66^{mm},66...$ e quindi $\lambda_\infty = 40^{mm}$, cosicchè risulta $\lambda_0 - \lambda_\infty = 60^{mm}$. Mentre l'oggetto si sposta da distanza infinita fino a toccare l'obbiettivo, l'immagine si allontana dal 2° fuoco del sistema $L_1\, L_2$ di soli 60^{mm} che costituiscono il massimo allungamento del cannocchiale.

Il plesiotelescopio si presta a diverse applicazioni. In primo luogo costituisce un mezzo assai semplice per determinare le distanze dei fuochi dalle facce di una lente. A tale intento diretto lo strumento verso un oggetto lontanissimo gli si dispone davanti la lente L da esaminare colla sua faccia posteriore ad una distanza m da quella anteriore dell'obbiettivo, avendo cura che questa distanza sia non troppo piccola se la lente L è convergente e invece assai breve se L è divergente. Si allunga poi o si accorcia il plesiotelescopio fino a veder chiaramente l'immagine dell'oggetto data dalla lente L, immagine che si forma nel 2° piano focale della lente stessa. Quindi, tolta via la lente, si fa spostare davanti allo strumento rimasto fisso una punta fino a vederla distinta, il che accade quando essa si trova nel punto già occupato dal 2° fuoco della lente L. In queste condizioni si misura la distanza n fra la punta e la faccia anteriore dell'obbiettivo ed allora la differenza $m - n$ dà in valore e segno la distanza del 2° fuoco della lente esaminata dalla faccia posteriore della medesima.

Come altre applicazioni del plesiotelescopio, qualora esso si renda girevole entro guaina cilindrica munita di tre viti di base che coll'aiuto di una livella permettano di disporne l'asse esattamente verticale, lo strumento si presta o a individuare la verticale di un punto a terra in modo da servir da segnale a chi debba collimare da lontano quel punto, o a fare delle letture su aste orizzontali graduate in corrispondenza di una data verticale, a qualunque altezza esse sieno, come accade nella misura di una base ad una sola asta col metodo ottico.

Per la (6) essendo $\Delta > \varphi_1$ il rapporto $\frac{I_\infty}{\mathfrak{I}_\infty}$ espresso dalla (12) nel caso del plesiotelescopio è minore dell'unità, cioè l'ingran-

dimento normale dello strumento è minore di quello del cannocchiale semplice avente per obbiettivo la sola lente L_1. La riduzione dell'ingrandimento può limitarsi coll'assumere Δ poco minore di φ_1.

Nel caso numerico considerato

$$\varphi_1 = 300^{mm} \qquad \varphi_2 = 66^{mm},66\ldots \qquad \Delta = 200^{mm}$$

posto ad esempio $\psi = 12^{mm}$, risulta dalla (11''')

$$I_\infty = -10,0.$$

Per calcolare I_{F_1} colla (11') bisogna trovare b_{F_1} valore di b corrispondente a $D = \varphi_1$. Si ha ora, ritenendo sempre l'oculare come costituito di un'unica lente sottile

$$b_{F_1} = \Delta + \lambda_{F_1} + d_1 + a = \Delta + \lambda_{F_1} + d_1 + \psi.$$

Il valore di d_1 potrebbe calcolarsi colla relazione

$$-\frac{1}{d_1} - \frac{1}{\delta - \psi} = \frac{1}{\psi}$$

dove δ è la distanza della visione distinta che convenzionalmente può assumersi di 250^{mm}. Ma il valore di d_1 così calcolato viene, come è noto, così poco diverso da ψ che può senz'altro sostituirsi con questo valore, e allora si ha

$$b_{F_1} = \Delta + \varphi_2 + 2\psi = 290^{mm},7.$$

Con ciò dalla (11') si ottiene

$$I_{F_1} = -9,8.$$

Finalmente colla (11'') si può calcolare I_0 dopo aver trovato per valore di b corrispondente a $D = 0$

$$b_0 = \Delta + \lambda_0 + 2\psi = \Delta + \frac{\varphi_2 \Delta}{\Delta - \varphi_2} + 2\psi = 324^{mm}.$$

e risulta

$$I_0 = -13,5.$$

Derivando le espressioni di λ_∞ o λ_0 rispetto Δ considerata come unica variabile si ottiene

$$\frac{d\lambda_\infty}{d\Delta} = -\frac{\varphi_2^2}{(\Delta - \varphi_2 + \varphi_1)^2} \qquad \frac{d\lambda_0}{d\Delta} = -\frac{\varphi_2^2}{(\Delta - \varphi_2)^2}$$

e questi risultati mostrano che tanto λ_∞ quanto λ_0 diminuiscono col crescere di Δ, ma che la diminuzione che subisce λ_∞ è maggiore di quella che subisce λ_0. In conseguenza di ciò col crescere di Δ, il che val quanto dire col crescere dell'ingrandimento normale, si allunga la corsa massima $\lambda_0 - \lambda_\infty$ del reticolo. Però questo fatto non porta un inconveniente pratico, perchè l'aumento di corsa è poco notevole, come apparisce dai risultati corrispondenti ai tre valori di Δ qui appresso considerati:

$\varphi_1 = 300^{mm}$ $\qquad \varphi_2 = 66^{mm},66...$

	$\Delta = 200^{mm}$	$\Delta = 250^{mm}$	$\Delta = 290^{mm}$
$\frac{I_\infty}{\mathfrak{J}_\infty} =$	0,40	0,57	0,87
$\lambda =$	100^{mm}	91^{mm}	87^{mm}
$\lambda_\infty =$	40	29	9
$\lambda_0 - \lambda_\infty =$	60	62	78

Piuttosto la limitazione di Δ, in alcuni casi, può essere consigliata dalla opportunità di avere uno strumento di piccole dimensioni di contro alla poca utilità di realizzare un forte ingrandimento.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSI UNITE

Adunanza del 28 Maggio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, i Soci: Camerano, Vice-Presidente dell'Accademia, D'Ovidio, Direttore della Classe, Salvadori, Naccari, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Fusari, Balbiano, Panetti, e Segre, Segretario;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, i Soci: Chironi, Direttore della Classe, Carle, Pizzi, De Sanctis, Stampini, D'Ercole, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli, Patetta, Vidari, Prato.

Scusano l'assenza i Soci Ruffini e Sforza.

Si legge e si approva il verbale della precedente adunanza 21 maggio 1916.

Indi si procede alla votazione, per il conferimento del premio Pollini, intorno alla proposta della Commissione pel

premio stesso, contenuta nella Relazione letta nell'adunanza precedente.

Il premio ad unanimità di voti viene conferito al Dr. Mario Zucchi per la sua *Monografia storica su Lomello.*

Dovendosi poi passare alla votazione per l'elezione del Presidente, scadendo per compiuto 2° triennio di presidenza S. E. Boselli, questi desidera esprimere ancora una volta all'Accademia i suoi vivi ringraziamenti per l'onore fattogli coll'eleggerlo all'alto posto, come pure per la cortesia con cui fu sempre confortata la funzione attribuitagli. Lasciando la presidenza resterà sempre legato ai Colleghi da affetto e gratitudine.

Nella votazione per l'elezione del Presidente riesce eletto il Socio Senatore Prof. Lorenzo Camerano, per il nuovo triennio, salvo l'approvazione Sovrana.

Il Socio Camerano ringrazia vivamente i Colleghi. Dice quanto è difficile succedere degnamente ad un Presidente quale è stato S. E. Boselli. Accenna pure ai meriti dei predecessori di questo. Invoca la collaborazione dei Colleghi per potere, seguendo gli esempi ricordati, tener sempre alto il prestigio dell'Accademia.

Indi si procede alla votazione per l'elezione del Vice-Presidente, scadendo, per aver compiuto un 2° triennio, il Socio Camerano. Risulta eletto, per il nuovo triennio, il Socio Senatore Prof. Giampietro Chironi, salvo l'approvazione Sovrana.

Infine, a termini del nuovo Regolamento per il conferimento del premio Bressa, approvato nell'adunanza a Classi Unite del 21 maggio 1916, si passa alla votazione di tre membri per ciascuna Classe, per formare la Commissione pel XX premio Bressa (Nazionale, quadriennio 1913-1916).

Per la Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali riescono eletti i Soci Naccari, Parona e D'Ovidio.

Per la Classe di Scienze morali, storiche e filologiche riescono eletti i Soci De Sanctis, Stampini e Ruffini.

La Commissione è presieduta dal Presidente dell'Accademia.

Gli Accademici Segretari

Corrado Segre.

Ettore Stampini.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 28 Maggio 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: CHIRONI, Direttore della Classe, CARLE, PIZZI, DE SANCTIS, D'ERCOLE, BRONDI, EINAUDI, BAUDI DI VESME, SCHIAPARELLI, PATETTA, VIDARI, PRATO, e STAMPINI Segretario della Classe.

È scusata l'assenza dei Soci RUFFINI e SFORZA.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 14 corr.

Il Socio Segretario STAMPINI presenta alla Classe, a nome dell'autore Giuseppe BIADEGO, nostro Socio corrispondente, le recenti pubblicazioni: *Borgolecco* (Estr. dagli *Atti dell'Accademia d'agricoltura, scienze e lettere di Verona*), e *Medici Veronesi e una libreria medica del sec. XIV* (Estr. dagli *Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti*). La Classe ringrazia.

Il Socio DE SANCTIS presenta, per la pubblicazione negli *Atti*, una *Nota* della Sig.na Matilde DENICOLAI dal titolo *La genealogia dei tiranni di Sicione secondo un nuovo frammento storico.*

Il Socio STAMPINI presenta, pure per la pubblicazione negli *Atti*, una prima *Nota* del Prof. Ferruccio CALONGHI intitolata *Il Codice Beriano di Tibullo. Confronti e osservazioni.*

Il Socio Vidari propone che la Classe voglia associarsi alle solenni onoranze che saranno rese domani alla memoria di Augusto Conti. Il Socio Stampini appoggia la proposta del Socio Vidari, osservando che ben si può fare eccezione alla regola, per la quale l'Accademia si associa ufficialmente soltanto alla commemorazione de' suoi Soci, per la considerazione che Augusto Conti, oltre ad avere illustrato la scienza e la cattedra italiana, combattè a Curtatone contro quel medesimo nemico contro cui tutta l'Italia strenuamente combatte nell'ora presente. Il Socio De Sanctis dichiara che voterà a favore della proposta, ma non intende che il caso del Prof. Augusto Conti abbia a servire di precedente contro la costante consuetudine dell'Accademia. Così la Classe a voti unanimi approva di associarsi all'onoranza resa ad Augusto Conti, che, dopo essere stato luminoso esempio di patriottismo sul campo di battaglia, fu illustrazione della scienza filosofica e decoro della cattedra italiana.

In fine la Classe, raccolta in adunanza privata, procede alle votazioni per l'elezione del Direttore e del Segretario della Classe. Risultano eletti, salva l'approvazione sovrana, alla carica di Direttore il Socio S. E. Boselli, che scade dall'ufficio di Presidente dopo due trienni di carica, e all'ufficio di Segretario il Socio Stampini.

Nella stessa adunanza privata ebbe luogo anche la votazione per la nomina di un quarto membro della Commissione per il premio Gautieri di Storia. È eletto il Socio Baudi di Vesme; e perciò la Commissione risulta definitivamente composta del Presidente dell'Accademia, e dei Soci De Sanctis, Boselli, Patetta e Baudi di Vesme.

LETTURE

La genealogia dei tiranni di Sicione secondo un nuovo frammento storico.

Nota di MATILDE DENICOLAI

Alla storia della tirannide di Sicione, su cui poche e in parte discordanti notizie ci erano giunte, nuova luce ha portato un frammento recentemente scoperto (1), di cui ha trattato M. Lenchantin in una Nota intitolata: *Il nuovo storico di Sicione e la dinastia degli Ortagoridi* (2). Riprendo qui la questione, ma solo per ciò che riguarda la genealogia dei tiranni, e quel tanto di cronologia che ad essa si connette, parendomi che i dati del papiro, combinati con le testimonianze già note, ci permettano di giungere a un risultato definitivo soddisfacente.

Richiamiamo brevemente le fonti. All'oracolo che aveva predetto la tirannide ai Sicioni, oracolo al quale allude pure evidentemente il nostro frammento, accennano Diodoro e Plutarco. Diodoro (3) dice: *Ὅτι Σικυωνίοις ἔχρησεν ἡ Πυθία ἑκατὸν ἔτη μαστιγονομηθήσεσθαι αὐτούς. ἐπερωτησάντων δὲ αὐτῶν τίς ὁ ταῦτα ποιήσων, πάλιν ἀπεκρίθη, ᾧ ἂν καταπλεύσαντες πρώτῳ γεγενημένον υἱὸν ἀκούσωσιν. ἐτύγχανε δὲ τοῖς θεωροῖς ἠκολουθηκὼς τῆς θυσίας ἕνεκα μάγειρος, ὃς ἐκαλεῖτο Ἀνδρέας. μισθοῦ τοῖς ἄρχουσι μαστιγοφορῶν ὑπηρέτει.* Maggiori notizie ci dà Plutarco (4): *Σικυωνίοις δὲ καὶ διαρρήδην ὁ θεὸς προεῖπε μαστιγονόμων δεῖσθαι τὴν πόλιν, ὅτι Τελητίαν παῖδα στεφα-*

---

(1) Grenfell e Hunt *Oxyrhynchus-Papyri* XI p. 104 n. 1365 (Londra 1915).

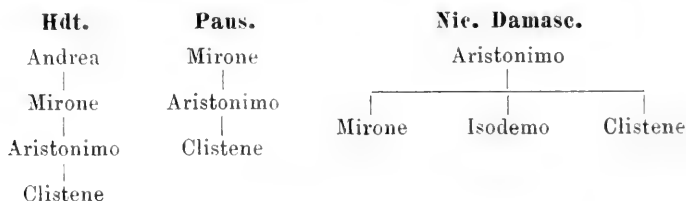
(2) " Atti R. Accademia delle Scienze di Torino „ vol. LI (1915/16) pp. 290-305.

(3) VIII 24 (*exc. Vat.*).

(4) *De sera num. vind.* 7 p. 553.

νούμενον ἐν Πυθίοις ..... διέσπασαν. ἀλλὰ Σικυωνίοις μὲν Ὀρθαγόρας γενόμενος τύραννος, καὶ μετ' ἐκεῖνον οἱ περὶ Μύρωνα καὶ Κλεισθένη, τὴν ἀκολασίαν ἔπαυσαν.

Alla sua volta, parlando di Clistene, così Erodoto (1) nomina i tiranni di Sicione: '*Clistene, figlio di Aristonimo, figlio di Mirone, figlio di Andrea*'. E, d'accordo con lui, Pausania (2) pure ci riferisce: *Κλεισθένης ..... ὁ Ἀριστωνύμου τοῦ Μύρωνος ἐγόντων ἔτι τὴν κάτω πόλιν Σικυωνίων ἐτυράννησε* ..... e in altro luogo (3) ci dà la notizia che Mirone vinse una corsa col cocchio nell'anno 648 a. C.: *τοῦτον ᾠκοδόμησεν ὁ Μύρων νικήσας ἅρματι τὴν τρίτην καὶ τριακοστὴν Ὀλυμπιάδα.* Una genealogia diversa dà invece Nic. Damasceno (4), il quale fa Mirone, Isodemo e Clistene fratelli, figli di Aristonimo, e, parlando di Clistene, aggiunge: *ἀπ' Ὀρθαγόρου κατάγων τὸ γένος*, collegandosi così ad Aristotele, il quale c'informa che la tirannide durò a Sicione più che negli altri paesi, per il buon governo di Ortagora e dei *παῖδες Ὀρθαγόρου.*

Riassumendo queste notizie, noi possiamo trarne i seguenti alberi genealogici:

Di più, secondo Nic. Damasceno e Aristotele (5), il fondatore della dinastia è Ortagora, e ciò bene concorda con la versione dell'oracolo data da Plutarco, mentre l'altra versione (quella di Diodoro) sembra accordarsi solo con Erodoto.

È anzitutto evidente che non si può in nessun modo identificare il Mirone di Nic. Damasceno con quello delle altre fonti,

(1) VI 126.
(2) II 8, 1.
(3) VI 19, 2.
(4) Fr. 61.
(5) *Polit.* V 1315 *b*.

ma nessuna difficoltà vi è ad ammettere nella famiglia due persone dello stesso nome, data anche l'antica consuetudine di dare al nipote il nome del nonno. La questione è quindi controversa solo sul fondatore della dinastia, sul primo dei tiranni che, secondo alcuni, come abbiamo visto, fu Andrea, secondo altri Ortagora. Su questo punto il nostro frammento è chiarissimo: il designato dall'oracolo a essere il capo della nuova dinastia è Ortagora, la cui umile condizione non faceva pensare all'avverarsi in lui della profezia. Infatti il padre suo Andrea era un *μάγειρος* (una fonte (1) dà questo titolo ad Ortagora per una confusione spiegabilissima), ed aveva allevato il figlio convenientemente al suo stato, come un ordinario cittadino.

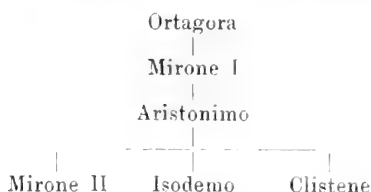
Vediamo come alcuni critici abbiano interpretato dette fonti.

Dato il contrasto fra la versione di Diodoro e quella di Plutarco, si era pensato da alcuni ad una identificazione dei due personaggi, nel senso che Ortagora (= l'oratore veridico, così interpreta il Curtius (2)) sarebbe il nome preso da Andrea quando divenne tiranno. A quest'opinione s'avvicina il Grote (3), dicendo essersi supposto con qualche probabilità che i due nomi indichino la medesima persona. E. Meyer (4), invece, è del parere che questa identificazione sia molto problematica, e che la distinzione di un Mirone I e di un Mirone II sciolga le difficoltà solo in apparenza. C. O. Müller (5) pone la successione:

Ortagora
Andrea
|
Mirone
|
Aristonimo
|
Clistene

aggiungendo subito ch'essa " non è però molto certa, giacchè anzi pare che Ortagora e Andrea si debbano riunire in una

(1) LIBAN. *oratio contra Severum* IV p. 173, 2 FOERSTER.
(2) *Gr. G.* I[6] p. 242.
(3) *History of Greece* III p. 43, Londra, 1847.
(4) *G. des Altertums* II[1] p. 629.
(5) *Dorier* I[2] cap. 8 § 2.

stessa persona „. Il Busolt (1) riferisce soltanto la genealogia del Duncker (2):

che mi pare di per se stessa inaccettabile, giacchè nessuna fonte ci dà Mirone figlio di Ortagora, a meno che non si voglia ricadere nell'identificazione di cui ho già detto. Il Beloch (3) introduce anch'egli un secondo Mirone, ma respinge la testimonianza di Niccolò Damasceno, supponendo Clistene non fratello ma cugino di Mirone II:

Ma anche alla sua supposizione manca l'appoggio delle fonti, anzi essa è in aperto contrasto con una di esse (Nic. Dam.), che non pare, in tanta scarsezza di dati, trascurabile.

Ora il nuovo frammento ci dice che il fondatore della dinastia è Ortagora, figlio di Andrea. Come mai Erodoto non lo nomina? Egli riferisce semplicemente che Mirone, padre di Aristonimo, nonno di Clistene, era figlio di Andrea. Allora si è detto: o Erodoto ha confuso Andrea con Ortagora, nominando il padre invece del figlio, oppure si riferiva ad un secondo An-

(1) *Gr. G.* I² p. 661.
(2) *G. der Alt.* VI⁵ 78.
(3) *Gr. G.* I² 2 p. 285.

drea figlio di Ortagora. Il Lenchantin (1) ha stabilito il suo albero genealogico nel modo seguente:

Questa genealogia sembra accordare perfettamente tutte le fonti. E certo, una genealogia che non si concilî con la nostra fonte più antica, Erodoto, deve tenersi assai sospetta. Ma la ipotesi del Lenchantin non spiega come Erodoto, anche ammesso che non abbia inteso dare una genealogia completa dei tiranni di Sicione, si sia fermato, dopo essere risalito fino a lui, ad Andrea (II), che non avrebbe alcuna particolare importanza, mentre un solo passo di più l'avrebbe portato ad Ortagora, il fondatore della dinastia. Ma un'altra difficoltà assai maggiore si presenta: il numero delle generazioni. Ricordiamo che il periodo assegnato dalle fonti come durata della tirannide, è un periodo di 100 anni. Questa cifra, sia pure intesa come un valore approssimativo, si deve accettare, in quanto che essa, dataci da Aristotele, è chiaramente attinta alla fonte importante di un oracolo, un oracolo certo *ex eventu* e, quindi, attendibilissimo. Prolunghiamo pure questo periodo fino a 110 anni (di più mi pare troppo), e concediamo anche, per il momento, che cominci con Ortagora e termini con Clistene (il che non credo assolutamente, come dirò tra poco); ebbene, pare molto difficile ammettere che in tale periodo si possano far entrare cinque generazioni. Del resto lo stesso Lenchantin (2), parlando della vittoria olimpica di Mirone nel 648, dice in parentesi " 66 *anni, cioè 2 generazioni prima dell'analoga vittoria del nipote Clistene* ", dove si vede chiaramente che egli pure si attiene alla regola sopra accennata.

(1) Nota cit.
(2) L. c. p. 304.

Ma v'ha di più, poichè, come ho già detto, il periodo della tirannide non si può far terminare con Clistene. Narra Erodoto (1) che Clistene aveva cambiato il nome della sua tribù da Egialei in *Ἀρχέλαοι* e quello delle altre in *Ὑᾶται, Ὀνεᾶται, Χοιρεᾶται*, ed aggiunge: *τούτοισι τοῖσι οὐνόμασι τῶν φυλέων ἐχρέοντο οἱ Σικυώνιοι καὶ ἐπὶ Κλεισθένεος ἄρχοντος καί, ἐκείνου τεθνεῶτος, ἔτι ἐπ' ἔτεα ἑξήκοντα*. Se, quanto ai nomi, è indubitato che si tratta di una semplice invenzione (2), è altrettanto indubitato che le parole di Erodoto significano chiaramente che nessun rivolgimento politico seguì la morte di Clistene.

La caduta della tirannide sotto gli Spartani avvenne dunque soltanto dopo i 60 anni testimoniati da Erodoto. Ora, se un altro tiranno, *non* della famiglia, fosse successo a Clistene, come ritiene il Müller (3), e come pure crede il Lenchantin (4), molto probabilmente qualcosa della costituzione di Clistene sarebbe mutato, ed Erodoto non avrebbe mancato di accennarvi, se non altro per ciò che riguarda i nomi delle tribù. E ad ogni modo il contesto del passo citato di Aristotele mostra che Aristotele voleva parlare della durata totale della tirannide (della antica tirannide, s' intende) in Sicione. Plutarco (5) accenna ad un tiranno di nome Eschine che gli Spartani avrebbero cacciato ristabilendo gli antichi ordini. Poichè mi pare molto semplice ammettere che questo Eschine appartenesse alla stessa famiglia di Ortagora, e non poteva essere figlio di Clistene, la cui Agariste era figlia unica ed ereditiera (6), lo riterrei un nipote di questo tiranno, e precisamente figlio di Isodemo. Dal citato frammento di Nic. Damasceno, si può trarre, mi sembra, che Isodemo avesse dei figli i quali avevano diritto alla successione. Egli dice che Clistene, dopo avere incitato Isodemo ad uccidere Mirone per vendicare il suo onore, lo esortò ad andare in esilio

(1) V 68.
(2) De Sanctis *Ἀτθίς*² p. 285.
(3) L. c.
(4) Nota cit.
(5) *De Herod. malign.* 21 p. 859.
(6) De Sanctis *Ἀτθίς*² p. 286.

affinchè, purgandosi del fratricidio, potesse di nuovo fare i sacrifizi, e *fosse dato ai figli succedergli nel trono.*

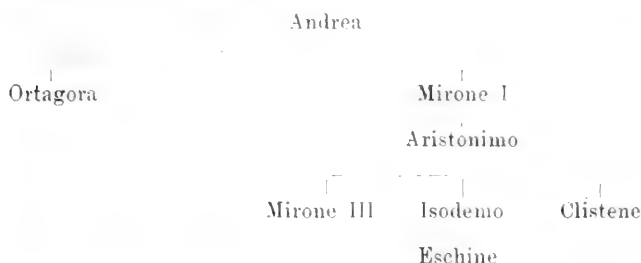
Dunque, tutto considerato, io non troverei altra soluzione migliore di questa: supporre Ortagora e Mirone I fratelli, figli di Andrea. Avrei la genealogia:

Andrea

Ortagora — Mirone I

Mirone I → Aristonimo

Aristonimo → Mirone III — Isodemo — Clistene

Clistene → Eschine

Così le testimonianze di Erodoto e delle altre fonti si accorderebbero con quelle del frammento di Ossirinco, e il numero delle generazioni risulterebbe possibile in un periodo di poco più di 100 anni, giacchè sarebbero quattro, a voler comprendere, come credo si debba fare, anche Eschine.

Le difficoltà che si oppongono a questa genealogia, sono più apparenti che reali. Ortagora non ha figli, e ciò pare in contrasto con Aristotele, il quale (1) ha parole di lode per il governo di Ortagora e dei *παῖδες Ὀρθαγόρου*, e con Nic. Damasceno, il quale (2) dice di Mirone: *ἀπ' Ὀρθαγόρου κατάγων τὸ γένος*. Qui *παῖδες* va inteso naturalmente nel senso di *discendenti* e non di *figli*. Ora non mi pare inammissibile che potessero essere chiamati *παῖδες* di Ortagora i discendenti del fratello Mirone; basta semplicemente supporre che Ortagora, in mancanza di discendenti diretti, abbia adottato Aristonimo, a cui passò, per sè e per i suoi discendenti, il diritto di successione. Ortagora rimane pur sempre il primo, e quindi il capostipite dei tiranni. Erodoto poi, nonostante l'importanza che assume ogni fondatore di dinastia, non accenna ad Ortagora perchè verosimilmente egli non voleva darci la genealogia com-

(1) L. c.
(2) L. c.

pleta dei tiranni di Sicione, ma solo risalire, di figlio in padre, agli antenati noti di Clistene; nel qual caso è evidente che Ortagora, fratello di Mirone, non doveva essere nominato. Quanto alla versione, data da Diodoro, dell'oracolo, il designato dal quale ad essere il capo della dinastia sarebbe Andrea anzichè Ortagora, si può supporre, o una piccola confusione nella interpretazione dell'oracolo stesso, oppure un maggior rilievo voluto dare a colui che era designato ad essere il padre del primo tiranno. Finalmente Aristotele tace di Andrea, perchè egli nomina i tiranni di Sicione, ed Andrea non fu tale.

Certo, poichè la nuova genealogia proposta si fonda specialmente sui dati del papiro di Ossirinco, ci si potrebbe domandare: è desso degno di fede? Dato che, come abbiamo visto, si può benissimo accordare con le altre fonti, e anzi ci permette di giungere ad una soluzione assai migliore, mi pare si possa, senza grande difficoltà, rispondere affermativamente per la parte del frammento che riguarda la genealogia. Per il resto del racconto farei maggiori riserve, trattandosi di fatti avvenuti un secolo avanti i primi logografi, e si sa che, in sì lungo periodo, le circostanze di un fatto consegnato alla pura tradizione orale, hanno tempo di trasformarsi e di alterarsi.

Per stabilire la cronológia dei tiranni di Sicione, pochissimi sono i dati delle fonti. Ricordiamo l'esplicita testimonianza di Erodoto (1) sulla caduta della tirannide avvenuta 60 anni dopo la morte di Clistene, e quella di Aristotele (2), secondo il quale l'intera durata della dinastia è di 100 anni. Ora alcuni hanno voluto significare con questi 100 anni il periodo che va da Ortagora a Clistene, e sono quindi partiti dalla morte di quest'ultimo per stabilire la salita al trono di Ortagora; a me sembra invece che tale periodo si riferisca alla intera tirannide e comprenda anche l'ultimo tiranno (che io ritengo fosse un Or-

(1) V 68.
(2) L. c.

tagoride), e che quindi occorra riportare l'inizio della tirannide a 100 anni prima della caduta di Eschine.

I sostenitori della prima ipotesi si fondano specialmente su un dato cronologico fornitoci da Pausania (1), secondo il quale Mirone (naturalmente il nonno di Clistene) avrebbe vinto una corsa col cocchio nella 33ª Ol. (648 a. C.), e, poichè partendo da dati cronologici certi riguardanti il figlio di Agariste, Clistene l'Alcmeonide (2), si può stabilire con sufficiente sicurezza la morte di Clistene di Sicione tra il 570-65, vengono a porre il periodo dei 100 anni tra il 670 e il 570 (Meyer, Curtius e, con poca differenza, anche il Müller). Di non molto si allontanano il Grote e il Lenchantin, che rimandano il principio del regno di Ortagora, il primo tra il 680-70, il secondo tra il 690-80.

Ma occorre osservare che la data della vittoria olimpica di Mirone, ritenuta come un fondamento certissimo, non è tale. Il Beloch (3) che, dopo il Mahaffy, ha studiato la lista dei vincitori di Olimpia, è giunto alla conclusione che, per la parte più antica, tale lista non è degna di fede. Per alcuni vincitori occorre fare uno spostamento di anni: così la vittoria di Mirone può essere portata, senza difficoltà, verso il 600 (4). Perciò preferisco lasciare da parte tale data, e poichè ritengo che Aristotele, riportando la predizione dell'oracolo, abbia voluto significare l'intero periodo che va dall'avvento al trono di Ortagora alla caduta di Eschine, cercar di stabilire l'anno in cui questa può essere avvenuta.

La piena restaurazione della libertà dev'essere seguita quando gli Spartani mossero contro Atene circa il 510, e ciò concorda bene col citato luogo di Plutarco, nella cui lista, ordinata cronologicamente, Eschine viene dopo Ippia (511). Anche un frammento recentemente pubblicato (5) menziona la caduta della tirannide sotto gli Spartani mentre era tiranno Eschine, parallelamente alla caduta dei Pisistratidi. Ora, se, come dice Erodoto, la morte di Clistene avvenne 60 anni prima della piena

---

(1) VI 19, 2.

(2) Cfr. De Sanctis *Ἀτθίς*[2] p. 285-6.

(3) *Gr. G.* I[2] p. 148 segg.

(4) Ibid. p. 154.

(5) *Catalogue of the Greek Papyri of the John Ryland's Library* n. 18 p. 31.

restaurazione della monarchia, essa deve cadere verso il 570, che è appunto la data a cui pure siamo giunti per altra via.

Considerando dunque che il periodo della tirannide s'aggiri sui 100-110 anni, e che, naturalmente, s'intenda con essi un periodo intero, continuato (1), partendo dalla data probabile del 510, vengo a porre l'inizio del regno di Ortagora verso il 620, con un doppio vantaggio: di dare alla tirannide di Sicione una durata che, per quanto lunga, non supera troppo singolarmente la durata delle altre tirannidi greche, mentre forse un po' esagerati sono i 160 anni che in realtà le attribuiscono gli storici che fanno terminare il periodo di 100 anni con Clistene, e di non anticiparne troppo il principio in Sicione rispetto a quello delle tirannidi in altre città vicine. Si sa infatti che le cause politiche ed economiche che portarono ad un tale rivolgimento politico, sono, nelle loro linee generali, le stesse per tutte le città greche. Ora, parrebbe un po' difficile ammettere che le nuove esigenze si facessero sentire tanti anni prima a Sicione che non a Corinto, certo economicamente più progredita, dove i Cipselidi vengono al potere alla fine del VII sec. (2), e ad Atene, in cui la tirannide s'inizia alla metà del VI sec. Poco prima che in Atene, cioè verso il 600, cade la signoria dei nobili in Megara per l'avvento alla tirannide di Teagene (3). Non è chi non veda come con tali date ben si accordi quella del 620 av. Cr. che io propongo per l'inizio del governo degli Ortagoridi.

(1) Il Plass (*Die Tyrannis* p. 138) credette invece che Aristotele coi 100 anni avesse inteso dare una somma degli anni di regno dei singoli tiranni, senza contare le rivoluzioni che avrebbero preceduto la salita al trono di alcuni di essi. Così rimanda la salita al trono di Ortagora al 700.

(2) Beloch *Gr. G.* I^2 p. 217.

(3) Ibid. p. 360.

Il Codice Beriano di Tibullo

Confronti e osservazioni

Nota I di FERRUCCIO CALONGHI

Il codice della civica Biblioteca Berio di Genova contenente i carmi di Tibullo, o più precisamente il *Corpus Tibullianum*, e di Catullo, si può dire, particolarmente per Tibullo, un manoscritto ignorato.

Come sia entrato nella Biblioteca Berio e in qual'epoca, non mi è riuscito finora di mettere in chiaro.

Ne dette notizia Gerolamo Bertolotto in " Giornale Ligustico ", 1892, p. 376, in un articolo dal titolo *Spicilegio genovese: " Per un codice ignorato di Catullo "*, e prima ancora E. Bianchi nel " Giornale delle Biblioteche ", 1867, p. 5, aveva incluso il codice " Tibulliano " nell'elenco dei mss. più importanti della Beriana. Dove avesse desunto la notizia sul valore del codice, il Bianchi non ci dice (1). Certo egli era un abile fotografo e appassionato ammiratore di codici manoscritti.

Il Bertolotto studiò la seconda parte del codice, quella cioè contenente i carmi Catulliani e dette una collazione della " Chioma di Berenice ". Io invece mi occupo qui esclusivamente della prima parte e precisamente del *Corpus Tibullianum*.

Il codice Beriano, che chiameremo senz'altro *Ber.*, è membranaceo, miscellaneo, di fogli 37 (Tibullo) + 45 (Catullo), con un foglio di guardia alla fine, di mm. 235 × 168. Ha una bella scrittura italiana di tipo umanistico che permette di fissarne la

(1) La descrizione del Bianchi (l. c.) si limita a queste parole: *Tibulli Albii Carmina*, membranaceo del sec. XV, vol. 1 in 4°. Il Bianchi non s'era accorto che il codice conteneva anche Catullo.

data alla metà del secolo XV. Se il v. dopo I 2, 25 è veramente un'interpolazione di Giovanni Aurispa, noi avremmo una prova, del resto abbastanza superflua, per la datazione del ms. Legatura recentissima, della seconda metà del secolo XIX. Segnatura attuale D bis-11-6-51. Nel f. 1^r^ il n. 915, in stampatello recentissimo, è quello dell'Inventario dei mss. della Beriana. Come risulta dai fogli 1^r^, 3^r^, che recano parole scritte in margine evidentemente tagliate, il codice, forse quando fu rilegato, fu tosato al margine superiore e laterale. Il codice contiene Tibullo con i Poeti del *Corpus Tibullianum* (fogli 1-40^v^, secondo la recentissima numerazione a mano), e Catullo (1). Per la descrizione della seconda parte rimando all'articolo citato del Bertolotto. La parte del codice che contiene il *Corpus Tibullianum* è mutila; mancano i fogli 14, 23, 24 — sicché effettivamente essa comprende ora 37 f. — sforbiciati via recentemente.

Il codice fu posseduto da un tale che firma Jo Paolo Batta Porta (*Io* non è *Io.* [= *Io*[*h*]*annes*], come lesse il Bertolotto), in evidente scrittura della 1ª metà del secolo XV. Il nome Paolo Batta Porta è scritto sul margine laterale destro di f. 3^r^ e nel margine superiore del foglio di guardia, dove si legge: *Io Paulo Batta Porta di Messer Francesco.* Segue un *Ze*, e sotto il numero *2335*. Forse della medesima mano, certo della stessa epoca è la sentenza scritta nel margine superiore del f. 26^r^: *Prima che tu faci pensa quello che può intreuegnire.*

Le note marginali e interlineari non sono numerose. Qualche rarissima volta sono chiose, come in II 6, 6, ad *erronem*, la spiegazione grammaticale *erro-nis*; di solito correzioni del testo o varianti, che saranno indicate nella nostra collazione, o indicazioni di lacune nel testo, come in 16^v^ *deficit*, in 29^v^ *def.* Anche di queste rendiamo conto singolarmente nel confronto che segue.

L'intestazione è in carattere capitale, in rosso pallido.

La prima lettera del 1° carme (D) è miniata in oro, azzurro, verde e viola pallido ed occupa lo spazio, in altezza, di cinque linee, mentre l'iniziale degli altri carmi non fu miniata e occupa lo spazio di due linee.

(1) La parte Catulliana, mutila alla fine, è numerata 41-84: il numero 72 è ripetuto su due fogli consecutivi.

Le rubriche sono in rosso pallido.

I quinterni sembrano esser stati di 6 fogli, almeno fino ad un certo punto.

Richiami a piè di pagina si trovano nel margine destro inferiore scritti verticalmente solo nel verso dei fogli 6 (*Annus in*), 30 *Elisios olim*, 38 *Si iuveni*, e, nella parte Catulliana, nei fogli 46, 54, 70, 77.

La scrittura sembra di una sola mano, per quanto qualche volta appaia un poco più piccola, altre volte più larga. Le pagine piene contengono 25 linee.

Difficilmente si può dire se la *secunda manus*, a cui appartengono le correzioni interlineari e marginali — quasi tutte — sia sempre la medesima. Sembra piuttosto di no, ma ad ogni modo e per ragioni ovvie, indicheremo sempre con *Ber.*² le correzioni e le varianti scritte da mano diversa da quella del copista (*Ber.*¹).

***

Il codice *Ber.* è un terzo autorevole rappresentante, dopo *Ambr.* e *V*, della tradizione manoscritta completa del *Corpus Tibullianum* quale essa era alla fine del medioevo, appartiene cioè in massima alla tradizione esente dalle interpolazioni umanistiche. Il suo valore si approssima dunque a quello di *V* (ciò che è notevolissimo, data l'epoca a cui appartiene) e in qualche caso che esamineremo esso contribuisce validamente alla ricostruzione di *O*, cioè dell'originale comune. Dai confronti che seguono con *Ambr.* e *V* e dalle osservazioni che li accompagnano, risulta: 1° che il codice *Ber.* non è una copia diretta di *Ambr.* e nemmeno di *V*; 2° che *Ber.* non deriva da *Ambr.* o da *V* neppure per via di esemplare intermedio; 3° che *Ber.* deriva dal medesimo originale da cui derivano *Ambr.* *V* ed è copiato sopra un codice similissimo ad *Ambr.* (1); 4° che qualche 'ben rara' correzione interlineare o marginale del suo esemplare diretto passò

---

(1) Di qui nasce l'identità, quasi assoluta, delle rubriche, nonché dell'ordine in cui sono disposti i componimenti poetici, e della loro suddivisione.

nel testo di *Ber.*, e che a questo solo si riduce il materiale di interpolazione del nostro codice; 5° che rispetto ad *Ambr.* e *V* il *Ber.* non ha alcuna trasposizione di versi; 6° che *Ber.* ha le medesime lacune di *Ambr.* e *V* eccetto una, quella del pentametro dopo I 2, 25, supplita con un verso attribuito a Giovanni Aurispa, e di cui v. sotto a suo luogo; 7° che qualche rara omissione di versi o di parole si spiega facilmente con la disattenzione del copista, quando — s'intende — non coincida con omissioni di *Ambr. V* e di altri cdd.; 8° che gli errori numerosi della tradizione di *O* (cioè dell'orig. comune di *Ambr.* e *V*) sono pure errori di *Ber.*, e che in questi è notevole il carme IV 12 scritto in seguito a III 6, 64, non tuttavia in *Ber.* per intero, ma solo nei primi tre versi.

Stimiamo ancora necessarie alcune osservazioni:

1° L'ortografia non ha in *Ber.* particolarità notevoli. Tuttavia è da ricordare *a)* l'uso di *e* (= *ae*, *oe*), come in *Ambr.* La *secunda manus* di regola corresse (1); *b)* la predilezione di *i* invece di *y* che trovi in *Ambr.* e *V*, e la frequente correzione di *i* in *y* della *secunda manus*; 2° Le abbreviazioni sono talora risolte in *Ber.*, talora in *Ambr.* o *V* e non in *Ber.*, senza una regola costante; 3° Il copista di *Ambr.* è fedele e diligente, quello di *Ber.* si può dir soltanto fedele, diligente no. La scrittura sua è bella, chiara, ma parecchi sono gli errori suoi di disattenzione che ho chiamato spesso così o anche errori 'materiali', nel confronto che segue. Ma è copista fedele, benché poco colto, e perciò non altera scientemente il suo esemplare, come fa qualche volta lo scriba di *V*.

A proposito del confronto e delle osservazioni seguenti, credo opportuno di premettere che i passi segnati con asterisco sono quei pochi in cui c'è interpolazione o sospetto di interpolazione, ed ancora che la mia collazione contiene anche qualche rettifica relativa alle lezioni di *Ambr.* e di *V*. La seconda edi-

(1) Piú propriamente ciò si osserva nella prima parte del ms. Poco per volta la *1ª manus* segnò a suo luogo il dittongo.

zione del Postgate (*Liverpuliae*, 1914, leggo in calce alla prefazione) ha corretto inesattezze del testo e dell'apparato critico che erano nella precedente (1905), ma non dappertutto ha dato la vera lezione di *Ambr.* e di *V*. Un nuovo confronto di *Ambr.* e di *V* col *Ber.* mi porge l'occasione di correggere la lettura inesatta di qualche vocabolo, partic. di *V* (1).

Infine debbo dichiarare che ho posto nel confronto *Ambr.* al centro e *V* e *Ber.* ai lati, solo perché con *Ambr.* si confronta così meglio ciascuno degli altri due.

N.B. Le lezioni di **Ber.** discordanti da **Ambr.** o da **V** o da entrambi i mss. sono riportate tutte quante, non così le concordanze dei tre codici, di cui mi sono limitato naturalmente a registrare qui alcune tra le più caratteristiche.

	V	Ambr.	Ber.
I, 1 *Rubrica*			*dopo* Deliam *omissione di* amet et [*negligenza del copista, perché il senso senza queste parole non corre*]
1	adgerat	congerat	congerat

Alle volte abbreviazioni svolte in uno, alle volte in un altro, senza regolarità. V. sotto ai vv. 4 e 9, e invece in I 6, 18 e in I 8, 18.

	V	Ambr.	Ber.
5	vitę	vite	vite

Ber., *come* **Ambr.** *e gli* Exc. Par., *non distingue* e *da* ae: **V** *invece fa sempre la distinzione. In* **Ber.** *spesso l'*e = ae, *corretto dalla* 2ª manus.

	V	Ambr.	Ber.
4	fugêt	fugent	fugent
9	semper	semꝑ	semꝑ
*12	florida	florida	florea
17	ortis (V^2 õ)	ortis	ortis

(*Anche le scorrezioni ortografiche sono di regola comuni*)

---

(1) Ringrazio vivamente i sigg. Bibliotecari Mons. Ratti della Vaticana, Mons. Gramatica dell'Ambrosiana e Cav. Cervetto della Beriana per le cortesie usatemi nell'occasione di questo mio studio.

	V	Ambr.	Ber.
18	sęva (*cfr. n. 5*)	seva	seva
20	vestra (*cfr. oss. v. 1*)	vr̃a	vr̃a
21	cęsa („ „ „)	cesa	cesa
24	io	io	yo

Comunemente per altro il **Ber.** *ha* i *mentre* **Ambr.** *e* **V** *hanno* y. *Spesso la* 2ª m. *di* **Ber.** *corresse* i *in* y.

27	aestivos (*cfr. oss. v. 1*)	estivos	estivos

(*D'ora innanzi stimiamo inutile segnare esempi analoghi*)

29	bidentes	ludentes	bidentes

In **V** *il* b *è calcato come se prima il copista avesse scritto* ludentes. *La parola è riscritta marginalmente in* **V** *e* **Ber.**: *in* **V** *leggo* bidens, *in* **Ber.** Bidentes *colla maiuscola, come a indicare che si tratta proprio di una* b *iniziale. L'originale di* **Ambr.** *e di* **Ber.** *non era qui molto chiaro e non era facile decidersi tra* lu *e* bi (1).

33	At vos	At vos	Aut vos

L'errore di **Ber.** *è uno dei piuttosto frequenti dovuti alla sbadataggine del copista* (*Vedi anche in proposito la rubrica di quest'elegia*).

43	satis est requiescere (*sopra:* satis est)	satis est satis est requiescere	*come in* **Ambr.**
44			*verso omesso*

La 2ª m. *di* **Ber.** *segna marginalm. l'omiss. con una crocetta.*

59	supprema	supprema	suprema

Tuttavia la correzione di errori ortografici, che possono esser stati dell'originale, non è punto frequente in **Ber.**

*63	dura (V¹)	dura	duro

Concordanze di tutti e tre i codici: 2 magna — 5 vitae — 14 deum — 19 felices (**V¹** felicęs) — 24 clamat — 25 iam modo non possum — 35 hic — 37 neu — 37 et — 53 Messala [**Ber.²** *in margine* Messalla] — 48 igne — 49 si — 54 exiles — 59 et — 64 iuncta — 71 neque — 73 posses [*erroraccio comune, manifestam. corretto, appena scritto, dalla* 1ª m. *di* **V** *in* postes. *Notevole per altro che l'errore proviene dall'originale comune*] — 74 inseruisse — 78 dites despiciam.

---

(1) *Infatti la lez.* ludentes *compare anche altrove, ad es. nel* Guarneriano (*s. XV*), *le cui principali varianti sono riportate dal Volpi nell'ediz. di Padova. 1749* (*v. pag.* xxx).

	V	Ambr.	Ber.
I 2	*Rubrica identica nei tre codici.*		
3	bacho	bacho	bacho

così quasi sempre, ciò che prova il comune originale. La 2ª manus *di* **Ber.** *corregge costantemente, aggiungendo un* c *sopra la linea.*

5	nunc	nr̃e	nr̃e

Il nunc *di* **V** *è cancellato trasversalmente e corretto marginalmente in* nostrae *da mano più recente.*

7	ymber	imber	ʰymber

Incostanza ortografica di **Ambr.** *e di* **Ber.**; *ignoranza della* 2ª manus *di* **Ber.**

*25 *Dopo il 25 manca in* **Ambr.** *e* **V** *il pentametro. In* **V** *per altro è scritto da mano più recente nel margine inferiore del foglio. Esso suona:* Securum in tenebris me facit esse Venus. **Ber.** *ha il verso inserito nel testo e scritto dalla* 1ª manus. *Come è noto, esso fu attribuito all'Aurispa* (*Vedi Tibullo del* Baehrens, *h. l. e, fra l'altre, l'ediz. antica del* Broukhusius), *che scriveva buoni distici elegiaci. Giovanni Aurispa morì intorno al 1460.* — **Ambr.**², *margine esterno, ha* deficit, *ad indicare la lacuna.*

Notevolissimo il fatto che di altri versi che sono caduti, in lacune segnate dagli stessi codici, il **Ber.** *non ha mai accolto supplementi. Qui evidentemente il codice padre di* **Ber.** *conteneva il verso, scritto forse marginalmente, come in* **V** (1).

31	*come in* **Ambr.**	non labor hic l(a)edit	*manca:* hic (*semplice omissione*)
*35	ne ... neu	ne ... neu	neu ... neu

Così leggo in **V** *e non* neu ... neu, *come vedo nelle note alle edizioni dello* Hiller, *del* Cartault *e del* Postgate (1914).

*37	*come in* **Ambr.**	si quis	si quid (*non è lez. nuova*)
52	perdomuisse	perdonuisse	perdomuisse

Errore materiale in **Ambr.** — **Ber.** *non copiò su* **Ambr.**

53	Nec	Hec	Hec

(**V**² *corresse*). *Errore comunissimo.*

---

(1) **Ber.**, *come già dissi, non è copia diretta né indiretta di* **Ambr.** *o di* **V** *e non conosce la* secunda manus *né dell'uno né dell'altro codice, a differenza di* **B**, *il* Parisinus *7989 del Lachmann, che con ogni probabilità fu copiato su* **Ambr.**, *di cui conosce la* 2ª *m.*

	V	Ambr.	Ber.
53	posses: *la scrittura dimostra un certo sforzo, un dubbio nei due* ss, *anche in* **Ber**. *Notiamo per accennare ad un originale comune o a due originali gemelli o similissimi.* **Ambr.** posses *con scrittura nitida.*		
79	magnae	magni	magni
	conferma che l'originale comune dava magni.		
80	num	nūç (= num)	nunc
	L'originale comune doveva dunque dare nunc *poco leggibile.*		
85	perripere (2ª *m.* e)	ꝑepere	perrepere
86	sancto .... tundere	*come* **V**	sanctum .... tondere
	In **Ber**. sanctum *è corretto in* sancto *forse già dalla prima mano, a cui si deve uno svarione caratteristico,* tondere, *suggerito dal* caput *che segue.*		
94	detenuisse *con tentativo di correzione*	detinuisse	detinuisse
95	areta	arcta	arctam (*per inavvertenza*)
97	debita (*errore di lettura? è anche in altri mss.*)	dedita	dedita

Consenso dei tre codici: 7 domini — 14 florida — 19 decedere — 19 furtim molli — 23 decet (*uno dei molti comuni errori derivati dalla fonte comune: naturalmente* ψ docet) — 40 rapido — 58 ipse — 65 possit — 82 diripuisse — 88 non unus.

	V	Ambr.	Ber.
I, 3 *Rubrica*:	pheacas? (*corr. su* pheatas)	feacas	feacas
	ma nel resto identica in tutti e tre i codici. Per altro in **V** *c'è manifesta correzione* (*di* f *in* ph). — *Quanto a* legi utet *di* **Ambr.**, *è falsa lettura del* Baehrens *per* egrotet.		
1	sine me	sine me	summe (*errore materiale corretto da seconda mano*)
13	cuncta	cuncta	cunta (**Ber.**[2] *corresse*) *errore comunissimo nel* **Ber.** (*Vedi anche I 5, 29*)
13	nusquam	numquam	numquam
*14	*come* **Ambr.**	respiceretque	despiceretque (*non è lezione nuova*)

	V	Ambr.	Ber.
*25	deum (V[1])	deum	dum
	l'e fu traversato da lineetta vertic.		*(come in* **G**)
26			*omissione di* puro *aggiunto da* **Ber.**[2]
37		*In* **Ber.** *verso omesso:*	**Ber.**[2] *segna l'omissione*
*38	veteris: **V**[2] ventis	veteris (*abbreviato*)	ventis (*come in* **G**)
50	reperte: **V**[2] *in margine* repente	repente **Ambr.**[1], *poi rasa la 2ª gamba dell'*n *per fare un* reperte	repente
53	*come* **Ambr.**	fatales	fatalis (**Ber.**[1]: *errore?*)
56	Messalam	Messalam	Messallam
			di regola invece in **Ber.** Messala i (2ª m.)
69	*come* **Ambr.**	Tesiphoneque	Thesiphoneque
		(*contro* Tisiphoneque *di* ψ)	
69	feros	feros	ferox
			(*errore materiale per il preced.* impexa) (1)
79	*numina	*numina	lumina
			(*forse pensando a* laesit *che segue, il copista scrisse* lu *per* nu, *ma non fu il solo ad errare*)

Consenso dei tre codici: 4 mors modo nigra — 12 triviis — 12 omnia (*con ogni probab. in* **Ambr.**[1], *benché su rasura mano più recente abbia scritto* omina); *in* **V** *si legge 'indubbiamente'* omnia (Hiller *scrive* omnia, ut videtur); *osservo infatti in* **V** *I 5, 20* omnia *scritto in modo identico, cioè come un* omma. *La lez.* omnia *è confermata dal* **Ber.** omĩa. *L'originale comune aveva l'abbreviazione che facilmente può far scambiare un* omnia *con un* omina *e viceversa. L'interpolazione, come si vede, ha fatto ben poco sul* **Beriano** — 14 cum — 17 aves dant — 18 Saturni — 19 dixi: **Ber.** di (*lo* xi *è aggiunto dalla* 2ª manus: *scriba trascurato*) — 21 neu quis — 32 inpharia (*una parola sola*) — 69 impexa — 71 tunc — 75 ticios — 86 colo — 87 ac — 90 videar **Ambr.** *e* **Ber.**; videar *forse da* videas **V** — 91 nunc (**V**[2] tunc).

(1) *Tuttavia l'errore si ripete in codici* (*ad es. nel* Brixianus A. VII. 7, **Br.** *dello Stampini*) *e nell'ed. Romana del 1475. Sembra errore comune di distrazione nei copisti, perché fu notato anche in mss. Ovidiani*

I 4 *Rubrica identica in tutti e tre i codici.*

	V	**Ambr.**	**Ber.**
21	iurare	iurare	iurate *(errore per inavvertenza: bada al* time *che segue)*
22	summa freta (**V**^{1})	freta summa	freta summa
25	sagiptas (**V**^{1})	sagittas	sagittas
29	te perdit (**V**^{1}) (**V**^{2} deperdit)	te perdit	te perdit (**Ber.**^{2} deperdit)
*32	prior	prior	precor *(errore di disattenzione? corretto marginalm. Non è lez. nuova)*
33	premeret cum	premeret cum	cum premeret *(inavvertenza)*
38	utrumque	utrunque	utrunque
39	tentare	temptare	temptare

Ho citato i due versi solo per la grafia dei tre mss. Analogam. in I 3, 69.

	V	**Ambr.**	**Ber.**
44	annutiat	amiciat	amiciat
		(originale comune illeggibile)	
51	arma	āma	arua

L'errore di **Ber.** *si spiega coll'aver preso la prima gamba di* m *per un* r, *ciò che fa pensare ad una scrittura di tipo gotico, simile a quella di* **Ambr.**

	V	**Ambr.**	**Ber.**
54	tamen acta apta	tamen apta	tamen apta

Il copista di **V** *scrisse* tamen acta apta, *poi cancellò* acta.

	V	**Ambr.**	**Ber.**
*55	ipse	ipse	ipsa

*L'*ipsa *di* **Ber.** *può essere errore materiale (cfr. il* rapta *che precede), ma non è lezione nuova.*

	V	**Ambr.**	**Ber.**
56	volet *(per me, evidentem. corretto su* velit)	velit	velit *(marginal.* volet)
62	nec	ne (**A**^{2} nec)	ne

Il ne *è dunque dell'originale.* **V** *corresse.*

	V	**Ambr.**	**Ber.**
63	carmine purpurea est nisi	carmine purpurea ê nisi	carmine purpurea ê nisi

*L'*est *mancava dunque nell'originale e fu supplito da* 2ª manus *in* **Ber.** *e forse da* 2ª *anche in* **Ambr.** *Forse* **V**^{1} *ebbe iniziativa e supplì senz'altro.*

	V	Ambr.	Ber.
*69	expleat	expleat	impleat
			non è lezione nuova
71	*come in* **Ambr.**	esse locum Venus	*omissione di* locum: *la* 2ª manus *aggiunse interlinearmente dopo* esse, venus
76	callidus	calldus (i *sopra*)	calidus

L'originale comune mancava di i *o di* l: **V**^{1}, *più esperto, compì esattamente.*

	V	Ambr.	Ber.
78	cunctis	cunctis	cuntis
			(*Cfr. sopra in* I 3, 13).

Consenso dei tre codici: 8 sit — 24 quicquid — 25 dictinna — 27 tardus eris — 27 transiet — 30 alta — 36 illam — 40 credas — 40 vincet — 44 *verso identico in* **Ambr.** *e* **Ber.** *Vedi sopra: nota al med. verso* — 48 opera: **Ber.**^{2} opere — 48 atterruisse (**V**^{2} e **Ber.**^{2} atteruisse) — 53 mihi - cum: **V**^{2} tum *corretto su* cum, *infatti* tum *è scritto anche interlinearmente come correzione, ciò che sfuggì pure al* Postgate (*1914*): **Ber.**^{2} tum — 55 post. Hiller *lesse erroneamente* mox *in* **V**, *dove il* post *è chiarissimo. Di ciò si accorse anche il* Postgate (*1914*) — 59 iam tu — 66 amnis. *In* **Ber.** *scrittura incerta dell'*n — 67 At qui. *In* **Ber.** *propr.* A tqui — 69 ter centenas — 70 frigios — 72 flentibus — 73 ticio — 74 ticium — 78 nostra (**V** nostra, **Ambr.** nr̃a, **Ber.** nr̃a) — 80 diducat (**Ber.**^{2} deducat).

I 5	V	Ambr.	Ber.
Rubrica	mederi amori teneat	amori mederi teneat	amori mederi tene- neat (*a capo*) (*sillaba geminata*)
	deposcentes	*come* **V**	deprecantes
2	fortis	sortis	sortis
*12	praecinuisset	praecinuisset	praetimuisset (*è anche nell'ediz. Aldina del 1567*)
16	vota	voca	vota
		confusione di ta *con* ca	
16	chreme	creme	cme

L'abbreviazione di **Ber.** *vale precisamente* creme, *che doveva essere la lezione dell'originale. Crocetta di richiamo della* 2ª manus, *ma nessun tentativo di correzione marginale. Dalla forma errata non è difficile risalire al* Triviae, *correzione che troviamo in* ψ.

	V	**Ambr.**	**Ber.**
21	frugumque	frugumque	frugum (*omissione?*)
22	terret (*errore*)	teret	teret
26	sinu	sinu	sinus
		errore materiale: **Ber.**^{2} sinu	
27	fructibus	vititus	vitibus
29	illa	$\overset{a}{\text{ille}}$ (*errore di lettura*)	illa
32	ab oribus (**V**^{2} arboribus) (*così leggo*)	arboribus	arboribus
42	nefanda	nefanda	nephanda
	ma in altri passi nephandus *invece nei primi due.*		
*47	adest	adest	abest
			errore di lettura? corretto marginalm. da 2ª manus. *Si legge anche altrove.*
48	callida	callida	calida
	calida *è solita erronea grafia di* **Ber.**, *ma anche di varii copisti.*		
50	tristitia (**V**^{1})	tristia	tristia
65	occultos	ocultos	occultos
67	iuncta (**V**^{2} victa)	uincta (*così mi pare*)	uincta (*così pare*)

Consenso dei tre codici: 1 dissidium — 3 turbo — 7 parce tamen parce — 11 te — 11 sulphure — 14 **V** de veneranda (*quasi staccato*), **Ambr.** deveneranda, **Ber.** de veneranda — 20 sed — 28 et spicas — 30 adiuvet — 31 veniet (venient **Ambr.**) — 35 nothusque — 41 discedens — 42 et pudet et — 42 mea — 43 verbis — 45 talis — 45 nereis quae — 61 Pauper erit praesto. tibi praesto pauper adibit (*concordanza assai notevole*) — 74 ipse — 76 nam.

I 6 *Rubrica identica nei tre codici — In* **Ber.** *manca, come sempre, tranne nella prima elegia di questo libro, l'iniziale maiuscola miniata che doveva estendersi allo spazio di due righe in altezza, come in* **V**. *In questo si legge una* s *maiuscoletta, una* r *minuscola in* **Ber.**

6	callida	callida	calida (*vedi* I, 5, 48)
9	docui	docui	docuiṭ
			(*il puntino sotto* ṭ *pare già di* **Ber.**^{1})
12	nunc	tunc	tunc (*notevole!*)
14	impresso	in p̃esso (*quasi staccati*)	in presso

L'originale aveva in *staccato da* presso; *di ciò è prova anche l'***Ambr. V** *corresse.*

	V	Ambr.	Ber.
25	gemas	gemmas	gemmas
*52	didicisse	didicisse	dedisse

Ber.[2] *in margine, su rasura,* dedidicisse, *il che esclude il* post: *altra correz. in margine sinistro dà* verba dedisse *in luogo di* post didicisse. *Il copista di* **Ber.** *non deve aver compresa la correzione, che trovò nel suo esemplare diretto,* decidisse, *lezione accolta in antiche edizioni, e fece un* dedisse.

76 *In* **Ber.** *non è segnata marginalm. la lacuna dopo questo verso.*

	V	Ambr.	Ber.
77	ast	at	at
84	sit	sit	si (**Ber.**[2] sit) (*vedi sotto*)

Consenso dei tre codici: 5 iam — 7 tam multa — 11 nunc — 18 lasso (**Ber.**[2] *marginalm.* laxo) — 18 aperta (*in* **Ber.** aꝑta) — 34 servare frustra (**Ber.**[2] *segno di omissione, certo di un* et) — 38 detrecto (*anche in* **V** *si legge chiarissimo* detrecto, *e non, come altri volle,* detracto) (1) — 39 procul (**Ber.** ꝓcul) — 39 colit — 40 effluit — 42 stet procul aut alia stet procul ante via — 45 mota — 46 et amans — 47 violata — 53 attigerit — 56 illa: **V** ille (a sopra e) — 64 sit: *corretto su* si *in* **V** — 67 victa (**Ber.**[2] c con t sopra) — 70 possum — 71 putat ducorque (**Ber.**[2] ducarque) — 72 immerito proprias: **Ambr.** inmerito — 72 proripiorque (**Ber.**[2] proripiarque) — 75 nec — 84 quod (*notevole!*); *in margine* **Ber.**[2] *nulla*; **V**[2] quam — 84 sit: *propr. in* **Ber.** si; **Ber.**[2] *corresse. Lo scriba di* **Ber.** *non è diligente: l'errore è indubitato.*

I 7 *Rubrica identica nei tre codici.*

*6 **V**[1] victos (**V**[2] evinctos), **Ambr.**[1] vinctos (**Ambr.**[2] invinctos), **Ber.** evinctos (*come* **G**). *Notevole che in* **V** *l'aggiunta di* e- *colma insufficientemente lo spazio della rasura che contiene due lettere, ciò che darebbe fondamento all'ipotesi del* Cartault *di un* invictos *interpolato da* **V** *per ristabilire il metro contro un* vĭctos *dell'originale riprodotto fedelm. dall'***Ambr.** *e da una successiva rasura di* in, *come contrario al senso.* **Ber.** *avrà trovato* evinctos *come correzione del suo esemplare.*

---

(1) *Richiamo l'attenzione sulla mia lettura di* **V**, *perché il preteso* detracto *di questo codice ha richiamato la speciale attenzione di molti studiosi del testo Tibulliano (cfr. Rothstein:* de Tib. codd., *Berlin, 1880, p. 59, e Leonhard:* de codd. Tibullianis, Monachii, *1882, p. 28, ed altri).*

	V	Ambr.	Ber.
39	Bachus	Bachus	Bacchus
41	„	„	Bachus

Cito 39 e 41 solo per dimostrare quanto poco costante sia la grafia nei tre mss.

Consenso dei tre mss.: 8 nitidis — 9 tua bella — 10 Testis et occeani littora sanctonici (*esattamente identico in tutti e tre, compresi gli errori*) — 11 Rodanusque: **V** Rhodanusque — 11 garūna — 12 Carnoti — 13 At (*notevole*) — 15 ethereo: **Ber.** etereo — 16 taurus: **V** thaurus, *mentre molte altre volte* thaurus *è in* **Ambr.** *e in* **Ber.** — 16 arat — 22 abundet: **V** habundet — 28 memphitem: **V** menphitem — 29 solerti: **Ber.** sollerti — 30 sollicitavit: **V** *e* **Ber.** solicitavit — 35 iocundos — 41 affert — 42 cuspide — 45 chorymbis: **Ber.** corimbis — 49 centum ludos geniumque choreis — 54 mosopio — 54 mella — 55 subcrescat: **V** succrescat — 55 parentis: **Ber.** pa-i (2ª m.) rentes — 57 ne (*anche in* **V**: *errò* Hiller *leggendo* nec) — 57 quae — 61 canit — 61 agricola magna (*senza l'*a).

I 8 *Rubrica*

	pholoe	pholoe	philoe (*copista trascurato*)
2	ferant	ferat	ferat

*L'errore era dunque nell'originale che trascurò il trattino sull'*a.

2	lenia	levia	levia
14	colligit	colligat (**Ambr.**[1])	colligat

*Sia poi della prima o della seconda mano la rasura di parte dell'*a *in* **Ambr.**, *così che rimase solo l'asticciuola, ossia un* i, *la prima lezione concordante con* **Ber.** *dev'esser stata fedelmente trascritta dal comune originale.*

25 *Il verso termina con* dedisse, *il seg. comincia con* oscula. *In* **Ber.** *il 25 termina con* dedisse oscula. Oscula *è poi ripetuto al principio del 26 — Sbadataggine del copista.*

31	lenia (**V**[2] levia)	levia	levia (**Ber.**[2] lenia)
39	iuvant quae	iuvantque	non gemmae iuvant quae

In **Ambr.** *leggo* iuvantque, *perché il segno sull'*ā *non pare di seconda mano. Il* non *è sottolineato, cioè cancellato, in* **Ber.**, *quindi* **Ber.** *conferma la lezione di* **V**, *che è la corretta.*

	V	Ambr.	Ber.
41	iuventas	iuventaṣ	iuventas

Il punto sotto la ṣ *in* **Ambr.** *dev'esser di seconda mano.* **V**[1] *ha manifestamente* iuventas; *lo ammette anche il* Postgate *(1914), mentre nell'ediz. di Tibullo del 1905 leggeva in* **V**[1] iuventa.

51	sentita (**V**[2] *marg.* sentica)	sentita (**Ambr.**[1]) sontica (**Ambr.**[2])	sentica

L'originale aveva un o *mal riuscito, simile ad* e, *donde il* sentita *dei copisti di* **Ambr.** *e* **V** *che vollero scrivere una parola latina e lessero* t *per* c, *lettere che si scambiano facilmente. Il copista di* **Ber.** *non pensò a correggere.* Sentica *si legge per altro in molti codici.*

Concordanze dei tre mss.: 1 celare — 9 molles prodest — 10 comas — 11 fuco: *in* **Ber.** f *già corretto dalla* 1ª manus *che pare cominciasse a scrivere un* s — 17 pallentibus — 18 tempore: **Ber.** tp̑r — 35 invenit — 43 tunc mutatur: *in principio del verso* tum studium — 44 dissimilet — 45 tunc — 49 seu (**V**[2] neu) — 51 causa.

Come abbiamo sopra avvertito, il codice **Ber.** *manca del foglio 14 che conteneva i versi da I 8, 52 fino a I 9, 21.*

I 9, 36	et	et	**Ber.**[1] omise **Ber.**[2] et
65	Aut	At	At
*68	pectore (**V**[2] pectere)	pectore	pectere

Il copista di **Ber.** *s'è accorto dell'errore o l'ha trovato corretto in nota interlineare o marginale dell'originale suo. Era del resto facilissimo correggere l'errore grossolano anche ad un copista poco esperto di latino come quello di* **Ber.** *Tuttavia* pectere *è in* **G** *e altrove.*

*69	Ista persuadet *marginalm.* **V**[2] haec	Ista persuadet	Ista haec persuadet

*L'*haec *marginale dell'originale di* **Ber.** *è passato nel testo. Così almeno sembra probabile. Comunque, è emendamento di molti cdd.*

73	vicio *confusione comunissima di* c *e* t	vitio	vitio
81	pęne (**V**[2] *corresse* poena)	poena	poena

Consenso dei tre mss.: 23 nec — 23 celanti fas — 24 sit... vetet — 25 leve (*in* **V**[2] *e* **Ber.**[2] lene) — 31 tibi — 35 eriperet — 35 sydera — 36 fluminis — 40 exemplo sed — 44 sed latuit... adoperta (*l'abbreviaz. non è svolta in* **V**: adopta) — 44 clausos (**Ber.**[2] clausas) — 45 confisus — 45 tum — 48 et — 51 tu procul hinc absis — 57 semp **Ambr.** *e* **V**: semper **Ber.** — 61 convivia (*corretto su* convivam *in* **V**) — 73 haec — 75 hunc — 80 superba (*in* **Ambr.** *e* **Ber.** supba) — 81 dum.

I 10 *Rubrica di* **Ambr.** *e* **Ber.** *identica; solo da notare:*

	V	**Ambr.**	**Ber.**
	primam aetatem	aetatem primam	aetatem primam
4	aperta	apta	aperta
	Le abbreviazioni ora in uno, ora nell'altro, senza costanza.		
*21	unam (v)	uva	uvam
25	*dopo questo verso* **V**[2] *e* **Ber.**[2] *riconoscono lacuna, segnando* deficit.		
41	ut	at (*notevole!*)	at
49	bidens vomerq3 viderit **V**[2] *marg.* vigent	videns vomer viderit (*corretto in* nitens)	bidens vomerq3 vident (r) que *ed* r 2ª man.: ri *scambiato con* n

donde è lecito vedere che **V** *e* **Ber.** *non son copiati su* **A**, *che* **Ber.** *non è neppure copiato su* **V**, *che l'originale comune aveva l'errore* nidens *per* bidens, *e* nidens *fu letto da* **Ambr.** videns, *poi corretto* nitens. *Così si desume dalle raschiature.*

*51	e lucoq3	elutoque	e lutoque (*unito con un trattino in una parola sola da* 2ª manus). *Così leggono molte antiche edizioni.*
*68	praefluat	praefluat	perfimat **Ber.**[2] perfiluat (= perfluat) (ψ perfluat).

Ber. *non ha inteso l'abbreviaz., confondendo* prae *con* per?

Concordanze dei tre codici: 3 tunc caedes — 4 tum — 8 ciphus — 8 dapes — 11 vulgi — 18 veteres — 23 ipsa — 25 tela: **Ber.** tella — 26 porcus: **Ber.** portus (*errore mater. corretto da* 2ª manus) — 27 mirtoque canistra: **V** *ha* mirtoque sinistro canistra *con* sinistro *sottolineato, cioè cancellato* — 30 adverso: adversos **V**[2] — 33 accer-

sere: **V**[2] arcessere — 36 puppis — 37 percussisque — 42 fesso:
ss
Ber. fexo (*errore mater. corretto da 2ª* manus) — 46 curva — 51 ipso — 58 utrunque — 60 diripit — 61 perscindere.

II 1 *Rubrica*

	V	Ambr.	Ber.
	Incipit liber secundus de agri lustratione et venere invocanda	2us Incipit de agri lustratione et venerem invocandam	incipit II. De agri lustratione et venerem invocandam (1).

Dal confronto risulta che **Ber.** *non copiò* **Ambr.** *e nemmeno* **V.** *In* **Ber.** *c'è* II., *in* **Ambr.** 2us *è di mano ben più recente.* **V** *corresse qui l'errore dell'originale comune* (venerem invocandam), *come ne corresse altri. Il copista di* **Ber.** *copiò materialmente, come suole, il che dà, naturalm. sotto un certo aspetto, maggiore importanza al codice.*

	V	Ambr.	Ber.
22	ingerat	ingeret	ingeret
25	caelestibus	felicibus	felicibus
36	cilibus (**V**[2] *corr. marg.* caelitibus)	celicibus (*non è propriam. staccato in due, come altri lesse:* celi citus. *Il breve intervallo tra* i *e* c, *come tra due sillabe in genere, non separa la parola in due*)	celitibus (2)
38	l (2ª man.) grande	grande	glande (2)
42	supposuisse	suppotuisse	supposuisse (2)
58	hyrcus hauserat hyrcus oves	yrcus hauxerat hyrcus oves	h. haxerat h. oves (**Ber.**[2] auxerat)

---

(1) *È inutile dire che* venerem invocandam *si legge anche in altri codd., tra cui il Guarneriano.*

(2) *Non segno con l'asterisco che indica interpolazione o sospetto di interpolazione, perché qui in* **Ber.** *è corretto un evidentissimo errore di scrittura — dato che questo errore esistesse nell'originale comune —, la cui correzione non differisce da quella d'un errore qualunque d'ortografia. Il* celicibus *del v. 36 doveva esser proprio nell'originale, ed è notevole che il Leo nelle sue preziose osservazioni sul* **G**, *che seguirono a quelle del Goetz e del Loewe, aggiunga:* coelitibus *t* ex *c* et *ib* in ras. (*Cfr.* Cod. Guelf. 82. 6 Aug. photot. edit. praef. est Frid. Leo, Lugduni Batav., A. W. Sijthoff 1910. p. 10).

*come si vede, l'originale comune era illeggibile: l'*h *iniziale del verbo era un suo errore... leggibile.* Haxerat *dev'essere solo in* **Ber.**

	V	Ambr.	Ber.
67	V^1 Ipse quoque inter greges — *ma la parola* greges *non par scritta di getto; il secondo* g *è sospetto. Certo poi* V^2 *ha* Ipse agros interq^3 greges *e non come fu letto:* Ipse agros inter gregesque (*V. anche ediz.* Cartault, p. 200).	Ipse quoque inter agros	*come l'***Ambr.**
74	limen	limem (*errore mater.*)	limen (1)
77	timore	timore	timorem *errore di disattenzione*
79	Ah ó (V^2)	Ha	Ha
83	vacate	vocate	vocate
*88	Matris	Matris	Martis *può essere errore di disattenzione del copista di* **Ber.**, *ma per altro non è lezione nuova.*
89	halis	alis	alis

Concordanze dei tre codici: 1 valeat — 8 stare boves capite — 9 sunt (V^2 sint) — 13 veste — 22 ligna (*in* **Ambr.** *corretto su* lingua) — 23 satiri **Ambr.** *e* **Ber.**, *dunque l'originale*; satyri **V** — 34 ades — 41 tauros: **V** thauros — 42 servitium: **Ber.** servicium. *In questo, come in molti altri passi, abbiamo piuttosto il facile scambio nella lettura di* ci *e* ti, *che non il proposito di scrivere in un dato modo. Invero i due copisti non hanno coerenza* — 43 tunc... tunc — 44 tunc — 44 ortus — 45 antea tunc (2) — 49 ingerat — 50 et — 50 sedula: **Ber.** cedula: *corretto da* 2ª man. — 54 duceret — 65 assidue... textrix... minervam — 66 appulso — 73 opus — 86 frigio — 88 thoro — 89 fulvis.

(1) V. nota (2) a pagina precedente.

(2) tunc *non* tum, *come fu letto.*

II 2 *Rubrica*

	V	Ambr.	Ber.
	chorinthum	cornutum	cornutum

Notevole l'incertezza di **V** *tra* Chorinto (Cerintho) *e* Cornuto, *e ciò in uno dei migliori codici della tradizione di* **O**. *La lezione del* **Beriano** *conferma per altro che il* chorinthum *di* **V** *e l'incertezza del* cornute *di v. 9, pure in* **V**, *son dovuti probabilmente al copista di* **V**. *Il copista pensava a " Cerinto „ dei carmi sulpiciani. In v. 9 tuttavia egli scrive* cornute, *ma sotto l'ultima asticciola di* nu *c'è un puntino, come per ridurre il nome a* corinte. *Il copista di* **Ber.** *non pensa mai a innovare e copia fedelmente.*

19	vincula quae et	viuculaque (et (2ª man.))	vincula quae

L'origin. aveva o non aveva l'et? Si sarebbe indotti, confrontando la prima manus *di* **Ambr.** *e il Beriano, a credere di no. La lez. di* **Ber.** *è pure in altri cdd.*

Concordanze dei tre mss., e, dal v. 20 in poi, solo di **Ambr.** *e di* **Ber.**: 7 distillent — 13 nec... malueris — 15 undis — 17 utinam (*notevole!*) — 17 alis: **V**[1] halis (*cfr. II 1, 89*) — 21 hic veniat (*davanti a* **V**[2] *che ha lezione comune con gli interpolati*: hec veniet; *più comunem.* ψ veniat). *Come è noto, dal v. 20 manca la* prima manus *di* **V** *fino a 3, 49.*

II 3 *Rubrica. La nuova* manus *di* **V** *non si curò di indicare la scrittura al miniaturista. Manca pertanto qui la rubrica. In* **V** *mancano di solito le iniziali miniate e qui c'è solo la letterina di guida, una piccola* R: *all'iniziale era riservata l'altezza di due righe e lo spazio interno nel testo di circa 6 lettere. Altrettanto precisamente nel* **Ber.**

*12	**V**[2] cythera intonse	cithera intonse	cithera mihi tonse (2ª man. *corr.* cythara)
14	**V**[2] vaccas	vaccas	vachas
27	**V**[2] Delos	Delos	Delias (*errore mater.*) (**Ber.**[2] Delos).
57	ille (i (**V**[2]))	illi	illi
„	cernent (t (**V**[2]))	certent	certent

errori di disattenzione di **V**[1].

58	Affrica	Affrica	Africa
*59	liquor	liquor	loquor

L'originale comune aveva lo svarione, probab. corretto in qualche copia, oppure corretto più tardi interlinearmente o marginalmente. Ciò

è più probabile che non la correzione diretta del copista di **Ber.**, *incolto e disattento.* Loquor *è lezione comunissima.*

	V	Ambr.	Ber.
42	ut	et (*errore*)	ut
*60	Barbara bipsatos	Barbara bipsatos	Tartara bipsata (1)
66	addere	abdere	abdere
68	et	et (*aggiunta di* 2ª man.)	et
70	sulcos	sulcos	stultos (*errore materiale?*)
71	aspirabat	aspirabat	aspirat (ba (2ª m.))
78	iuvat	iuvet	iuvet

Concordanze dei due mss. **Ambr.** *e* **Ber.** *fino al v. 49; dei tre mss. dal v. 50 in poi: Rubrica identica, solo* **Ambr.** pretio, **Ber.** precio — 1 cornute (**V**[2] cormite) — 3 latos (**V**[2] letos) — 9 querer: **Ber.** querer (re) (*notevole:* **V**[2] querer) — 10 pustula — 11 armenti (**V**[2] admeti) — 14*a*-14*b* *Segni marginali di* 2ª manus *indicano in tutti e tre la lacuna* — 14*c* mixtus — 15 fiscella (**Ber.** fisella *per errore materiale*) — 17 quotiens (**V**[2] quociens) — 21 trepidis (**Ber.** trepidiis) — 27 phito — 31 ille — 33 est (**V**[2] es) — 34 *non è segnata lacuna.* — 38 propiorque: **Ber.** proprtiorque, **V** propriorque: *l'errore è comunissimo* — 38 cruor (**V**[2] furor) — 39 iussit geminare — 40 ratibus — 41 obsistere (*la lezione dell'originale garantita da* **Ber.**) — 43 tumulti (*notevole!*) — 46 negligat — 47 tibi.

53 gerit — 53 choa (**Ber.** coa, **Ber.**[2] choa) — 55 torret (**Ber.** terret; o (2ª m.); *correz. dell'errore di disattenzione*) — 59 quae — 61 **V**[1] *e* **Ber.** nemesis qui abducit: **Ambr.** ne *un po' staccato da* mesis, *ma non fino a far pensare a due parole. L'accordo dei tre codici è anche qui assai notevole.* — 62 terra — 74 redi, *scritto con carattere che sembra un po' incerto, in tutti e tre* — 75 *non è segnata lacuna.*

II 4 *Rubrica*

quod	et quod	et quod
munera	pretia	pretia

(1) *Il Leo (l. citato sopra) osserva che il* gypsatos *di* **G** *ha il* g *di seconda mano su rasura* — ut videtur — *corretto su* b, *e così sembra di vedere anche a me, pur sulla riproduzione fotografica del codice. L'originale comune aveva certo il* b, *e la strana interpolazione di* **Ber.**, *che non trovo altrove, conferma.*

	V	Ambr.	Ber.
*1	Ic (*si vede come una letterina marginale di* 2ª manus, *ma non si può dire se sia una* s)	sic *l'originale illeggibile?*	hic
*10	vitrei (**V**² vasti)	**Ambr.** *omise* (**Ambr.**² vitrei)	vasti (*come* **G**)

Vitrei *non è lezione nuova e difficilmente può essere interpolaz. diretta di* **V**. *Il copista di* **Ber.** *avrà trovato* vasti *come supplemento interlineare o marginale del suo originale diretto mancante del vocabolo, come l'***Ambr.**

3	teneroque cathenis (**V**¹)	teneorque cathenis	teneorque catenis *su sospetta rasura*
17	orbem (*sembra corretto su* urbem)	urbem	orbem

*L'*u *dell'originale era poco chiaro.*

27	smaraddos	smaragdos	smaragdos
33	sed pr.	sed pr.	si pr. *errore per il* si *che segue?*
43	veniat	veniet	veniet
55	quicquid	quidquam	quicquid

L'errore di lettura di **Ambr.** *è confermato.*

*59	si non (**V**² *marg.* modo)	si non	si modo (*come* **G** *e altri cdd.*)

Consenso dei tre codici: 2 pater ve (*notevole perché errore comune e per la forma* pater ve: *originale comune*) — 4 remittet (*notevole!*) 5 quid — 12 nam — 17 equalis — 29 hic dat avaritiae... choa (**Ber.** avariciae) — 31 clavem — 33 incerta — 36 attulit — 36 ipse — 38 hic deus — 38 esset — 40 portas (**V**² *e* **Ber.**² partas) — 44 obsequias — 56 tessala (*grafia com.*) *e così nel seguente* — 58 ypomanes 60 alias.

II 5 *Rubrica*

	laudes eius	eius laudes	eius laudes

Ber. *è fedele all'originale.*

5	devinctus	de vinctus	divinitus

uinitus *e* uinctus *si scambiano facilmente. Di qui l'errore di lettura di* **Ber.** *Il* de *era forse poco leggibile, nell'originale, ciò che spiegherebbe l'omissione prima di* **Ambr.** *Comunque il* divinitus, *senza senso, di* **Ber.**, *non è sospetto di interpolazione.*

Da II 5, 6 fino a 101 mancano i fogli 23 e 24. In calce al margine destro di 22[r]*, in senso verticale, si legge il richiamo* Dum cumul ≡ (*rasura*)*; cfr. II 5, 7. Proprio qui si hanno in* **Ambr.** *e* **V.** *due elegie separate al v. 39 e tutto fa supporre che identica separazione si sarà avuta anche nel* **Ber.**

II 5, 102 — *Ripresa del* **Ber.** *fol. 25*[r]*.*

	V	**Ambr.**	**Ber.**
112	repperisse	reperire	reperire
121	sic sint **V**[1] (sic tibi sint **V**[2])	sic tibi sint	sic tibi sint

Concordanze dei tre codici: 2 cithara (**Ambr.** cythara) — 3 cordas — 4 meas — 108 heu heu — 109 taceo — 110 et faveo morbo cum iuvat ipse dolor [*incerto tra* iuvat *e* vivat *in* **Ber.**] — 111 qua (**Ber.** *omise il segno e scrisse* q; *la* 2[a] manus *aggiunse sopra un* a, $\overset{a}{q}$) — 116 oppida (**Ambr.** *e* **V** opida)*: la correzione era così facile che può ben essere stata fatta anche dall'incolto scriba di* **Ber.** — 116 ferent (*notevole!*) — 117 laurus — 122 perpetua.

II 6 *Rubrica*

	V	**Ambr.**	**Ber.**
	in militiam	ni milicia	in miltia
	lenam	leenam	lena ≡
	phirne	phyrne	phirne (*sembra*)
4	allatus (**V**[1])	adlatus	ad latus

In **Ambr.** *pare una parola sola. L'originale aveva dunque* ad *e* latus *molto vicini, quasi a formare una parola sola.*

	V	**Ambr.**	**Ber.**
5	tu (**V**[1])	tua	tua
8	portat	portet	portet
14	venit redit	redit	redit
18	nefanda	nephanda	nephanda
*51	perdita	perdita	reddita (*errore di distrazione?*)
54	quotacunque	quota cumque	quotacunque

Concordanze dei tre mss.: 1 macer — 2 gerat — 5 ocia — 6 erronem (*Il copista di* **V** *si mostra incerto nell'*n *- probabilm. non capiva -,* **Ber.** *scrive sicuro, ma il vocabolo non era dei più facili a intendersi, perché la* 2[a] manus *scrisse marginalm. la chiosa* erro-nis) — 10 facta — 16 scilicet — 20 et fore cras semper ait melius — 22 reddat — 31 illa (illam **V**) — 32 ferant (feram **V**[2] *e* **Ber.**[2]*: notevole*) — 38 thorum — 45 vetat (*notevole*) — 45 phirne (**Ber.** phyrne) — 46 tuncque — 47 diro — 49 mihi promissa est.

III 1 *Rubrica*

	V	**Ambr.**	**Ber.**
	Albij Tibulli liber Secundus Feliciter Explicit. Incipit Tertius Ad Neeram Amasiam suam. Rubrica.	Liber explicit secundus. Incipit Tertius ad Neeram amasiam suam	Explicit lib. II. Incipit III feliciter Ad neeram amasiam suam

Né in **Ambr.** *né in* **Ber.** *è nominato Tibullo. Per converso* **Ber.** *ha il* feliciter *consueto, che manca in* **Ambr.** Neera *è scritto costantem. colla* e *semplice in tutti e tre i codd.*

	V	**Ambr.**	**Ber.**
7	pretio	precio	precio
11	protexit (a (2ª m.) sopra)	protexit (ꝑtexit)	protexat

Dal confronto risulta che l'originale comune aveva la forma erronea protexat *conservata in* **Ber.** *Di questa lezione rara non manca esempio; in* Broukh. *trovo:* protexat unus Statius. *È possibile che l'*i *sia una correzione dell'esemplare diretto di* **Ambr.** (*e di* **V**), *dato che* protexat *non è parola latina, mentre* protexit *è. Noterolissima intanto la differenza tra* **Ambr.** *e* **Ber.** *L'*a *della* 2ª manus *di* **V** *è una correzione probabilm. parziale di chi aveva sotto gli occhi un* praetexat. **G** *ha* praetexat, *e così* **C** (*= consenso di* c, d, e) *del* Lachmann. Protexat *è lez. sconosciuta ai codici Lachmanniani, dove* y *e il Parigino* **B** (*si noti bene*) *hanno* protexit.

	V	**Ambr.**	**Ber.**
*15	per vos (e *su rasura; sotto doveva esserci* a. *La* 2ª manus *separò anche le due parole, secondo una indicazione interlineare:* ꝑ vos).	parvos	per vos (*come in* **G**)
		L'errore parvos *dell'originale comune fu riconosciuto dal copista di* **Ber.**? *Sembra poco probabile.*	
*16	umbrosam (**V**[1]: umbram **V**[2])	umbrosam	umbram (*come* **G** *e altri codd.*)
21	meritum (**V**[1]) (**V**[2] *e* **G** meritam)	meritum	nuncium *svarione di lettura?*

Concordanze dei tre mss.: 1 romani (**Ber.** romane, *errore materiale subito corretto da un lungo* j *che traversa l'*e: **V** Romani *coll'iniziale maiuscola*) — 8 meis — 10 pumicet et — 11 carte — 20 an minor — 26 tibi.

III 2 *Rubrica*

V	Ambr.	Ber.
et discidio	discidio (*senza* et)	dissidio (*senza* et)
portat (V[1]: V[2] *marg.* optat)	portat	optat

portat *non ha senso.* **Ber.** *ha trovato la correz. sul suo esemplare diretto.*

	V	Ambr.	Ber.
	suo funeri	funeri suo	funeri suo
5	nostro	nostro (nr͡o)	nostra (nr͡a)

Il nr͡a *di* **Ber.** *è errore di inavvertenza per effetto del* patientia *che precede. Il* Belling (1) *e successivamente il* Postgate (*1914*), *esaminato attentamente l'***Ambr.**, *notarono che in questo verso le lettere* tia nr͡o *sono di altra mano che quella di* patien, *che* tia n *è scritto su rasura, che* ro *è scritto sulla pergamena intatta. Il* Postgate *vide che erano state rase non solo da tre a quattro lettere, ma ancora la notazione sopra* en. *Aggiungo che la scrittura fu male imitata nella correzione, dove l'abbreviazione di* nostro *è precisamente come l'ho trascritta di sopra.* **V** *e* **Ber.** *ci persuadono che le lettere scritte da* **Ambr.**[1], *e che non ci è dato di indovinare, dovevano essere una semplice svista, così da dare un testo senza senso.*

	V	Ambr.	Ber.
7	pudor (V[1])	pudor -	pudor est

*Probabilmente l'*est *era nell'originale e precisamente sotto la forma* ê, *e poco leggibile. Di qui l'omissione in* **Ambr.**, *dove tuttavia si vede un trattino segnato tra* pudor *e* vitaeque *seguente, e in* **V**, *dove c'è parecchio spazio tra* pudor *e* vitaeque. **V**[2] *scrisse interlinearmente* ê. *Non fa meraviglia pertanto che* **Ber.** *abbia l'*est *e non è necessario pensare ad un'interpolazione del suo esemplare diretto. Se questo fu, come è certo, un codice similissimo ad* **A**, *esso aveva, con ogni probabilità, l'*est. *La lez.* pudor est *è comunissima, forse propria di tutti i codd. Lachmanniani.*

Concordanze dei tre codici: 10 supra (**Ber.**[2] super, *come* **G**) — 15 rogatae (*in* **Ambr.** rogate, *dove di regola* e = ae, *come nelle prime pag. di* **Ber.**) — 19 lieo: *per altro in* **Ambr.** *e* **Ber.** lyeo — 21 ventis (**Ber.**[2] velis) — 23 illic — 23 dives — 24 dives — 29 Ligdamus — 29 cā (= causa) **V**[1], cara **V**[4] *in marg.* (*così vedo nel ms., e non come altri lesse*: cara **V**), cā **Ambr.** (= causa), causa **Ber.** (*scritto per esteso*).

---

(1) *In* Quaest. Tibullianae, *Berlin, 1894, p. 3 e 4.*

L'Accademico Segretario
Ettore Stampini.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Giugno 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci Salvadori, Naccari, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari, Balbiano, Panetti e Segre Segretario. — Scusa l'assenza il Vice-Presidente Camerano.

Letto e approvato il verbale della precedente adunanza, il Presidente comunica una lettera del Socio corrispondente Mittag-Leffler, in data 11 maggio scorso, con cui s'informa l'Accademia che in occasione del suo 70° anniversario (16 marzo 1916) il Prof. Mittag-Leffler, con la sua Signora, hanno legato per testamento la biblioteca, la villa a Djursholm, e tutto ciò che possiedono ad una istituzione internazionale per le matematiche superiori. — La Classe invia un plauso all'illustre matematico Svedese, che aggiunge così una nuova benemerenza alle altre che già s'era acquistate colle sue memorabili scoperte analitiche e colla fondazione e direzione dei gloriosi " Acta mathematica ".

Si dà lettura dei ringraziamenti inviati all'Accademia dal Dr. Mario Zucchi, cui fu conferito il premio Pollini nell'adunanza del 28 maggio scorso.

Il Socio Segretario informa la Classe dell'importante dono fatto all'Accademia, dal Direttore della Classe D'Ovidio, dell'intera collezione (53 volumi) del " Giornale di matematiche „ fondato dal Battaglini (1863-1915), non che delle serie 2ª e 3ª (1868-1916, 51 volumi) degli " Annali di Matematica „, di cui la Biblioteca accademica possedeva solo la 1ª serie. La Classe ringrazia vivamente il donatore.

Il Socio Guareschi offre in omaggio i seguenti suoi opuscoli: *La teoria atomistica e Sebastiano Basso, con notizie e considerazioni su William Higgins.* — *La Chimica e la guerra.* — *Correlazioni fra struttura chimica e digeribilità dei principii alimentari organici.*

Vengono presentate, per la stampa negli *Atti*, le Note seguenti:

N. Jadanza, *Note illustrative alla Biografia di Ignazio Porro*;

G. Cicconetti, *Strumenti diottrici ad obbiettivo composto usati in Geometria pratica.* Nota 2ª (dal Socio Jadanza);

B. Rainaldi, *La durata dello splendere del Sole sull'orizzonte di Torino*, dal Socio Naccari;

M. Panetti, *Rendimento dei rotismi epicicloidali con un asse principale fisso* (*);

C. Somigliana, *Sulle discontinuità dei potenziali elastici.*

(*) Questa Nota uscirà in una dispensa successiva.

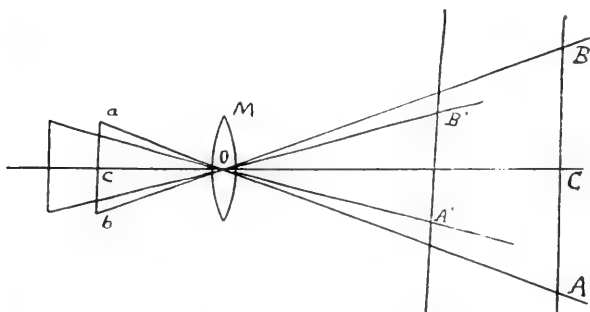
LETTURE

Note illustrative alla Biografia di Ignazio Porro

del Socio NICODEMO JADANZA.

Alle Notizie biografiche sul Porro che ho presentato ultimamente a quest'Accademia (*) aggiungo ora alcune note illustrative. Esse si riferiscono a passi che già in quello scritto erano stati espressamente contrassegnati.

Nota (*a*).

Tutto ciò che è detto nel testo si vede facilmente considerando la figura qui annessa, nella quale O è il centro ottico della lente obbiettiva del cannocchiale, ab è la posizione del

reticolo corrispondente alla posizione AB della stadia che si trova alla distanza $D = OC$ dall'obbiettivo del cannocchiale. Indicando con p la distanza Oc del reticolo dal punto O, i due triangoli simili aOb, AOB dànno

$$\frac{D}{AB} = \frac{p}{ab},$$

(*) V. a pag. 1077 del presente vol. degli " Atti ".

dalla quale, ponendo $AB = S$ ed $ab = s$, si deduce

$$(1) \qquad D = \frac{p}{s} \, . \, S,$$

colla quale si calcolavano le distanze misurando ciascuna volta la quantità S e supponendo costante il coefficiente $\frac{p}{s}$. Ora p è una funzione della distanza focale φ della lente M e della distanza D della stadia; essa si deduce dalla nota formola

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi},$$

donde $p = \frac{D\varphi}{D - \varphi}$, quindi la (1) darà

$$(2) \qquad D - \varphi = \frac{\varphi}{s} \, . \, S,$$

la quale dice che la distanza D dev'essere diminuita di φ per essere eguale al prodotto di una costante per la parte della stadia compresa tra i fili estremi del reticolo. L'errore adunque del metodo consisteva nel ritenere $D - \varphi$ eguale a D, e quindi l'errore relativo sulla distanza era $\frac{\varphi}{D}$ che diventa tanto più grande quanto più D è piccola. Così, per es., se $\varphi = 0^m{,}40$ si avrà

$$\text{Per } D = 200^m \qquad \frac{\varphi}{D} = \frac{0{,}20}{100},$$

$$\text{„} \quad D = 50 \qquad \frac{\varphi}{D} = \frac{0{,}80}{100},$$

$$\text{„} \quad D = 20 \qquad \frac{\varphi}{D} = \frac{2}{100},$$

$$\text{„} \quad D = 10 \qquad \frac{\varphi}{D} = \frac{4}{100}, \text{ etc.}$$

L'angolo al vertice del triangolo isoscele avente per base la distanza tra i fili estremi del reticolo e per altezza p è quindi variabile.

Nota (*b*).

La teoria del cannocchiale centralmente anallattico di Porro, come si trova in quasi tutti i trattati di *Geometria pra-*

tica (*), non è completa. Il PORRO l'ha soltanto accennata nei suoi libri, e tutti gli autori si sono occupati di far vedere che esisteva in un sistema composto di due lenti un altro punto *anallattico* (fuoco del sistema composto) che corrispondeva al fuoco anteriore dell'obbiettivo del semplice cannocchiale astronomico e ne aveva le medesime proprietà.

Non fa dunque meraviglia se in taluni libri si trova scritto che *la costruzione di un cannocchiale centralmente anallattico non era cosa da meccanici ordinari.* Da tale insufficienza ne è derivato che anche abili costruttori di strumenti topografici mettevano, senza un criterio determinato, una terza lente tra il reticolo e l'obbiettivo. Si veniva così a diminuire la distanza focale dell'obbiettivo del cannocchiale e perciò gli errori relativi sulle distanze erano minori. Cannocchiali cosiffatti erano chiamati *quasi anallattici* (!!).

Manca a quelle trattazioni la condizione fondamentale che: *un sistema composto di due lenti convergenti per essere obbiettivo di un cannocchiale deve essere tale che la distanza tra le due lenti* (supposte infinitamente sottili) *deve essere minore della distanza focale della prima delle due lenti di cui è composto.* Soddisfatta questa seconda condizione ne veniva di conseguenza che la distanza focale del sistema composto era minore della distanza focale di quella stessa prima lente e quindi veniva diminuito l'ingrandimento del cannocchiale. Per fare che la diminuzione dell'ingrandimento fosse piccola conveniva che la distanza tra le due lenti fosse di poco minore della distanza focale della prima lente.

Nel caso più generale possibile, supposta φ_1 la distanza focale dell'obbiettivo di un cannocchiale semplice astronomico che si voglia rendere *anallattico* rispetto ad un punto che disti di δ da detta lente obbiettiva, si troverà che la distanza Δ della lente anallattica dell'obbiettivo sarà data da

$$\Delta = \varphi_2 + \frac{\varphi_1 \delta}{\varphi_1 + \delta},$$

dove φ_2 è la distanza focale della lente anallattica.

(*) Basta consultare alcuni tra i migliori libri, che sono i seguenti:

SALNEUVE (J. F.), *Cours de Topographie et de Géodésie* (Paris, 1857);

SINISCALCHI VINCENZO, *Istituzioni teorico-pratiche di Topografia ed Agrimensura* (Napoli, 1875);

LEHAGRE A., *Cours de Topographie* (Paris, 1881);

HARTNER F., *Manuale di Geodesia inferiore*, tradotto in italiano dall'Ingegnere PASQUALE FANTASIA (Napoli, 1894);

JORDAN W., *Handbuch der Vermessungskunde* (Stuttgart, 1897);

SALMOIRAGHI ANGELO, *Istrumenti e metodi moderni di Geometria applicata* (Milano, 1907).

Ponendo $\Delta = \frac{n-1}{n} \varphi_1$ si avrà

$$\varphi_2 = \frac{n-1}{n} \varphi_1 - \frac{\varphi_1 \delta}{\varphi_1 + \delta}.$$

Dando δ, φ_1 ed n, si troveranno colle formole precedenti i valori di Δ e φ_2 convenienti a quel caso.

Per es. ponendo $\delta = \frac{\varphi_1}{2}$ (caso dell'anallattismo centrale) $n = 30$ si otterranno

$$\Delta = 0{,}967\, \varphi_1$$
$$\varphi_2 = 0{,}633\, \varphi_1$$

colle quali si può rendere centralmente anallattico qualunque cannocchiale semplice astronomico il cui obbiettivo avesse una distanza focale eguale a φ_1. L'obbiettivo composto avrà la distanza focale eguale a $0{,}950\, \varphi_1$ e l'ingrandimento del cannocchiale anallattico sarà 0,95 dell'ingrandimento del semplice cannocchiale astronomico.

Gli errori che derivavano dalla trattazione incompleta della teoria del cannocchiale anallattico si mostrano evidenti in un esempio numerico dato dal Salneuve.

Egli pone $\varphi_1 = 0^m{,}180$, $\delta = 0^m{,}200$ e poi calcola gli altri elementi e trova

$$\Delta = 0^m{,}400\,; \qquad \varphi_2 = 0^m{,}305, \text{ etc.}$$

Un cannocchiale costruito con questo obbiettivo avrebbe il 2° fuoco *virtuale* situato davanti all'obbiettivo e quindi perfettamente inservibile.

Calcolandolo colle formole generali date da noi si otterrebbe

$$\Delta = 0^m{,}174$$
$$\varphi_2 = 0\ \ {,}0893.$$

Il 2° fuoco sarebbe distante dalla lente anallattica di circa $0^m{,}006$ e la distanza focale equivalente $\varphi = 0^m{,}169$.

Volendo il medesimo cannocchiale *centralmente anallattico* col porre cioè $\delta = 0{,}09$, si otterrebbe

$$\Delta = 0{,}174\,; \qquad \varphi_2 = 0{,}114\,; \qquad \varphi = 0{,}171.$$

La vera teoria del cannocchiale anallattico fu data da Galileo Ferraris in una Memoria intitolata: *Sui cannocchiali con*

obbiettivo composto di più lenti a distanza (Cfr. vol. 16 degli " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", 1880-81, a pag. 45).

In un modo più semplice e più completa fu data da noi nella " Rivista di Topografia e Catasto ", a pag. 196 del vol. 7 (1894-1895), dove è inserita una nostra Memoria avente per titolo: *Teoria del cannocchiale anallattico.*

Nota (c).

A pag. 383 del vol. XVI (1849) degli " Annales des Mines " vi è una Memoria dell'Ingegnere delle miniere M. H. De Sénarmont avente per titolo; *Notices sur quelques instruments imaginés par* M. Porro, *pour abréger et simplifier les opérations de la géodésie, de la topographie, du nivellement et de l'arpentage.*

In questa Memoria è per la prima volta esposta la teoria dell'*anallattismo.* Dopo aver trovato la formola rigorosa per una lente semplice (obbiettivo di un cannocchiale astronomico)

$$D - \varphi = \frac{\varphi}{s} \cdot S$$

[D = distanza della stadia dal centro ottico della lente obbiettiva, S = parte della stadia compresa tra i fili estremi del reticolo la cui distanza = s; φ distanza focale della lente] dice che, sostituendola, in pratica, coll'altra

$$D = \frac{\varphi}{s} \cdot S$$

equivale in realtà a contare le distanze proporzionali alle lunghezze intercette fra i fili estremi del reticolo a partire dal centro ottico, mentre si dovrebbero contare a partire da un punto situato fuori del cannocchiale, sul suo asse ottico centrale avanti all'obbiettivo di una quantità precisamente eguale alla distanza focale principale di detta lente.

Quando si applica questo metodo alla misura delle distanze inclinate all'orizzonte, è necessario, in generale, contare queste distanze a partire dal centro dell'istrumento graduato che misura le inclinazioni. La correzione a fare per rendere all'osservazione tutto il suo rigore sarebbe egualmente facile come nel primo caso; la si trascura quasi sempre, e si può vedere che gli errori così commessi passerebbero spesso inavvertiti in mezzo *alle incertezze che presenta l'impiego della stadia osservata coi cannocchiali ordinari* . . . .
. . . .

È necessario di far comprendere mediante quale artifizio il Sig. Porro ha reso ogni correzione inutile, trasportando a volontà l'origine delle distanze in un punto qualunque dell'asse ottico del cannocchiale.

In ogni sistema ottico convergente, si può determinare sull'asse centrale un punto tale che tutti gli oggetti che, visti da questo punto, sottendono lo stesso angolo avranno le loro immagini coniugate della stessa dimensione.

Questo punto [che non è altro che il primo foco principale tanto in una semplice lente quanto in un sistema composto di lenti] fu chiamato dal Porro *centro di anallattismo.*

Nel caso di un sistema composto di due lenti, cercando il rapporto tra una dimensione S di un oggetto e la corrispondente s della sua immagine data dal sistema e di grandezza assegnata, giunge alle due equazioni

$$(1) \qquad \frac{b}{S} = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{(\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta) s} ; \qquad z = \frac{\varphi_1 (\Delta - \varphi_2)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}$$

[in queste equazioni φ_1 è la distanza focale della lente obbiettiva del cannocchiale, φ_2 quella della seconda lente, Δ la distanza delle due lenti che si suppongono infinitamente sottili, D la distanza dell'oggetto dall'obbiettivo e $b = D + z$].

La prima di tali equazioni dice che il rapporto tra l'immagine di un oggetto e l'oggetto stesso è uguale al rapporto tra la *distanza focale* (*) del sistema diottrico che dà quella immagine e la distanza dell'oggetto dal primo fuoco di quel sistema (precisamente come nel caso di una semplice lente). La seconda dà la distanza di esso fuoco dal centro ottico della prima lente.

Le equazioni (1), dice il Sig. De Sénarmont, contengono la teoria dell'anallattismo e la soluzione di tutte le quistioni che si debbono risolvere per la costruzione dei cannocchiali anallattici.

Si vede, infatti, che se l'angolo 2ω, la cui metà ω ha per tangente $\frac{S}{2b}$, è costante, s avrà un valore costante.

In virtù delle equazioni (1) si può disporre di due delle quantità φ_1, φ_2, Δ (la terza rimanendo libera e potendo servire a diminuire l'aberrazione) in modo da portare il centro d'anal-

---

(*) Il rapporto $\frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}$ non è indicato con questo nome dal Sig. de Sénarmont.

lattismo in un punto determinato dell'asse del cannocchiale, e a dare nello stesso tempo al numero

$$2 \operatorname{tg} \omega = \frac{s(\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta)}{\varphi_1 \varphi_2}$$

un valore egualmente assegnato.

Si comprende da ciò che la costruzione di cannocchiali anallattici dovette essere ritenuta come una cosa molto difficile e che pochi costruttori di strumenti geodetici avrebbero saputo fare.

Nota (*d*).

È di particolare interesse per la storia della *Celerimensura* il conoscere in qual modo essa fu introdotta in Francia.

Fin da quando gl'ingegneri piemontesi si occupavano della delimitazione del confine tra il Piemonte e la Savoia, il Capitano di Stato maggiore francese *De Lostende* aveva mandato al suo generale il seguente rapporto:

" Mon Général (*),

" Au mois de mai dernier j'eus l'honneur de vous entre-
" tenir d'un procédé simple pour mesurer rapidement, et sans
" les parcourir, les distances au-dessous de 400 mètres, propre,
" par conséquent, à faciliter et accélérer beaucoup le levé to-
" pographique. Depuis cette époque, un an d'expérience m'a
" confirmé les avantages que j'avais déjà reconnus à ce procédé.

" Je m'empresse d'en mettre les détails sous vos yeux,
" en vous priant, s'il vous semble utile, de vouloir bien le pré-
" senter au Comité du Dépôt de la Guerre.

L'idée de mesurer les distances au moyen d'un micromètre
" n'est pas nouvelle. Ce moyen aurait sans doute, depuis long-
" temps, remplacé la chaine, dont l'usage est si incommode, et
" si défectueux dans une foule de cas, si jusqu'à ce jour un mode
" simple et économique d'application du principe n'eût manqué.

(*) Cfr. *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, tome IV, année 1826, Paris, 1828; *Rapport sur la Stadia*, page 70 à 77.

È utile consultare anche il magnifico libro: *Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographique*, par le Colonel A. Laussedat, Membre de l'Institut, Directeur du Conservatoire national des Arts et Métiers, Paris, 1898 (Gauthier-Villars, imprimeur-libraire).

" Un ingénieur italien [questi era il Negretti] en a trouvé un, il y
" a quelques années, qui me semble réunir éminentement, à ces
" deux conditions, celles d'une grande rapidité dans les mesures,
" et d'une exactitude plus que suffisante pour les levés à l'échelle
" du dix-millième et au-dessous. Son procédé consiste à viser,
" sous un angle constant, une mire graduée . . . .
" . . . .

" L'ingénieur italien lui a donné le nom de *stadia* „.

Una Commissione composta del colonnello Bonne e del comandante Maissiat, incaricata di sperimentare tale metodo, aveva fatto un rapporto favorevole, la cui conclusione era che le misure ottenute colla stadia avevano lo stesso grado di esattezza che quelle fatte colla catena.

Fra sei distanze misurate in terreno unito, era detto nel rapporto di Maissiat, prima con la stadia, poi colla catena si sono avuti i seguenti risultati:

Con la stadia	$14^m,6$	$44^m,8$	$95^m,0$	$169^m,0$	$221^m,5$	$291^m,0$.
Con la catena	14 ,5	44 ,7	94 ,9	169 ,0	221 ,1	291 ,2.

In conseguenza e su proposta del Direttore generale del Dépôt de la Guerre, il Ministro aveva prescritto l'uso della stadia agl'ingegneri geografi, facendo compilare una istruzione che porta la data del marzo 1822. Ma tutto ciò fu platonico e, durante più di 25 anni, la stadia fu ignorata in Francia o piuttosto considerata come una curiosità più o meno interessante. I risultati sopra riferiti di esperienze comparative che comprendono misure di distanze da 15^m a 300^m erano tali da ispirare fiducia ai topografi, ma le novità sono quasi sempre sospette ed in questo caso i restii potevano obbiettare, come difatti obbiettarono, che dovendo movere l'oculare ed il reticolo per adattare il cannocchiale alle diverse distanze, l'angolo micrometrico variava e ciò portava un errore nel valutare le distanze.

Lo stesso colonnello Laussedat, dal cui libro abbiamo tolto queste notizie, scrive quanto segue nella nota (2) a piè della pagina 163 del volume primo dell'opera innanzi citata.

" Pendant des travaux topographiques dont il était chargé
" de 1846 à 1848 dans les Pyrénées, l'auteur de cette étude
" ayant vu la stadia recommandée par le chef de bataillon (depuis
" colonel) Leblanc, dans le n° 14 du *Mémorial de l'Officier du*
" *Génie*, année 1844, avait fait construire une mire spéciale et
" disposé un micromètre au $\frac{1}{100}$ au foyer de la lunette de l'une
" de ses bussoles; mais, en dépit d'expériences très encoura-

" geantes qu'il avait communiquées à son chef immédiat, il
" avait reçu pour toute réponse de celui-ci la défense formelle
" de se servir *d'un procédé qui ne pouvait donner que des résul-*
" *tats inexacts* „.

Coll'andata di Porro in Francia e specialmente dopo la Memoria dell'Ing. De Sénarmont pubblicata nel 1849 e quella del Porro stesso pubblicata nel 1852 le cose cambiarono. Ciò che fu considerato più importante, specialmente per la sua novità, fu il cannocchiale anallattico. Il Porro diceva giustamente che, il *cannocchiale diastimometrico* reso anallattico è suscettibile di essere applicato con vantaggio alle bussole, ai grafometri, ai teodoliti, etc., a condizione di proporzionare le dimensioni alla grandezza ed alla stabilità degli strumenti. Però il Porro esagerava nelle dimensioni dei primi strumenti ai quali aveva applicato un cannocchiale coll'obbiettivo di 60^{mm} di apertura e d'ingrandimento 80. Nè le modificazioni successive avevano fatto progredire la Tacheometria.

Mentre i servizi pubblici restavano indifferenti e che le prove fatte da qualche ufficiale erano piuttosto biasimate che incoraggiate, il Sig. ISIDORO MOINOT ingegnere civile, già appartenente alla Compagnia di Orléans, si mise risolutamente all'opera e dimostrò, in modo convincente, che nessun altro metodo poteva essere paragonato a quello della Tacheometria tanto per la rapidità quanto per l'esattezza nella esecuzione dei progetti delle strade ferrate. Ammiratore del Porro e dell' istrumento detto Tacheometro, gli scrisse una lettera in data 15 giugno 1856, che termina con queste parole:

" Il serait à désirer que tous les ingénieurs qui ont entre
" les mains votre instrument fissent connaître les bons résul-
" tats qu'il donne. J'ai la conviction que, s'il en était ainsi, il
" finirait par se propager, et *l'on abandonnerait les anciens*
" *procédés que je considère comme barbares* „ (*).

Nella Introduzione alla prima edizione del suo libro (**), dopo aver impiegato il Tacheometro di Porro, più o meno modificato, per circa dieci anni, dava l'estratto del rapporto di Lalanne del 1852 e soggiungeva:

" Il y a douze ans que ce rapport est publié et, malgré
" les termes flatteurs dans lesquels il est conçu, il est resté
" une lettre morte. En dehors des opérations que j'ai faites

(*) Questa lettera si trova nella prima pagina della *Tachéométrie* (nouvelle édition, Paris, 1858).

(**) I. MOINOT, Ingénieur civil, *Levés des plans à la stadia; notes pratiques pour études de tracés*, 1ª edizione, Limoges, 1864; 3ª edizione, Paris, Dunod, 1877.

" moi-même ou qui ont été faites par d'employés que j'ai formés,
" je crois qu'il serait difficile de citer une application impor-
" tante de la stadia aux études de projets „.

Il Moinot non aveva adottato il tacheometro di Porro così come questi l'aveva costruito; ne aveva fatto fare per suo conto dal distinto costruttore Richer, liberandolo da tutto ciò che era superfluo. Si era anche creato un metodo di operare un po' differente da quello di Porro, e questo metodo era già stato impiegato nel 1864 in più di 1500 chilometri di tracciati ferroviari e dagli impiegati che egli aveva formati fu applicato ad importanti lavori eseguiti nella Spagna ed in Italia:

" La sanction de la pratique est donc acquise — aggiun-
" geva il Moinot — car les tracés arrêtés sur les plans d'études,
" puis appliqués sur le terrain, ont rarement donné *une dif-*
" *férence d'un mètre par kilomètre* entre les longueurs prises gra-
" phiquement sur le plan et celles qui ont été chaînées avec
" tous les soins que l'on met à mesurer une base. Le profil en
" long sur l'axe et nivelé au niveau à bulle d'air n'a jamais
" présenté d'écart appréciable quand on l'a comparé au résultat
" fourni par les côtes du plan d'étude „.

Dopo tale successo ormai ripetuto ed incontestato del tacheometro, il suo uso si è generalizzato a dispetto della negligenza degli uni e della resistenza ostinata degli altri. Ingegneri ed artisti andavano a gara per perfezionare differenti apparecchi; tacheometri propriamente detti, alidade con ecclimetri per tavolette di precisione, stadia e regoli calcolatori. Una pleiade d'inventori entrò in campo, chi per fare una modifica e chi un'altra; altri, studiando meglio l'ottica, si accorsero che il cannocchiale semplice astronomico poteva essere egualmente adoperato per la misura delle distanze e che si poteva fare a meno della non facile costruzione del cannocchiale anallattico.

Nota (*e*).

Riproduciamo qui la parte che riflette il cannocchiale anallattico quale fu esposta dallo stesso Porro nella Memoria citata che trovasi negli " Annales des ponts et chaussées „, tome IV (3e série, 1853, 2e semestre). Ivi a pag. 281 e seguente si legge quanto segue:

" 10. Soit, en effet, s la distance entre deux fils tendus
" au foyer d'un objectif, parallèles entre eux et équidistants de
" l'axe optique: soit ω l'angle micrométrique que ces fils dé-
" terminent quand la lunette est mise au foyer d'un objet placé
" à une distance a, c'est-à-dire l'angle compris entre deux
" rayons qui se croisent au centre de l'objectif et qui viennent

" de deux points de l'objet observé tels que leurs images ont
" lieu sur lesdits fils; soient encore a, α les distances respec-
" tives de l'objectif à l'objet et à l'image; p la distance focale
" de l'objectif pour les rayons parallèles.

" L'équation fondamentale de dioptrique donne

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p} \qquad \text{d'où} \qquad \alpha=\frac{a-p}{ap};$$

" d'autre part, on a

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega=\frac{s}{a} \quad (*);$$

" donc,

$$\text{(B)} \qquad 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega=s \frac{a-p}{ap}.$$

" Donc, l'angle micrométrique, que l'on suppose constant dans
" l'instrument de W. Green, n'est pas tel du tout.

" 11. Mais si, au lieu de rapporter l'angle micrométrique
" déterminé par nos deux fils au centre optique de l'objectif,
" ainsi que nous l'avons fait, nous essayons de le rapporter au
" foyer antérieur, on aura, en désignant ce nouvel angle par ω',
" et vu la petitesse de ces angles:

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega'=2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega \frac{a}{a-p}.$$

" En mettant pour $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega$ sa valeur ci-dessus, il vient:

$$\text{(C)} \qquad 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega'=\frac{s}{p};$$

" quantité constante et indépendante de la distance de l'objet,
" ainsi que de l'effet des tirages de la lunette. Il y a donc un
" point *anallatique* dans les lunettes ordinaires à oculaire positif;
" mais ce point est en dehors de la lunette, au foyer antérieur
" de l'objectif.

" 12. Il ne serait pas commode pour la pratique de rap-
" porter ainsi les distances à un point pris en dehors de l'in-
" strument, en avant de l'objectif. C'est à l'objectif même, et

---

(*) Porro scrive sempre $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega$ invece di $2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega$. Trattandosi di un angolo ω piccolissimo la cosa non produce danno.

" plus souvent encore au centre de rotation de l'instrument,
" qu'on a besoin de les rapporter. C'est là ce que j'obtiens sans
" altérer la constance de l'angle avec un *système objectif*, com-
" posé de deux verres (l'objectif achromatique ne compte que
" pour un), tels que le foyer du système soit en dehors de la
" distance qui sépare les deux verres un peu au delà du deu-
" xième verre.

" Soient, en effet, a, α, p; b, β, q, les distances des objets
" des images et des foyers de deux verres; désignons par d la
" distance qui les sépare, et par k la distance entre le premier
" verre (l'objectif) et un point o de l'axe optique, auquel on
" veut rapporter les distances: soit ω'' l'angle micrométrique
" constant dont le sommet est le point O de l'axe optique,
" c'est-à-dire l'angle anallatique à obtenir.

" On aura d'abord, par rapport au deuxième verre, sembla-
" blement à ce qui vient d'être démontré:

$$\text{(D)} \qquad 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega'' = \frac{s}{q} .$$

" Le rayon qui satisfait à cette condition passe par le foyer
" antérieur du deuxième verre; il coupe donc l'axe à une di-
" stance de l'objectif $= d - q$. Ce rayon a, d'ailleurs, pour con-
" dition d'affecter, avant d'entrer dans l'objectif, une direction
" tendant au point dont la distance à l'objectif est k. On aura
" donc, d'après les lois fondamentales de la dioptrique:

$$\text{(E)} \qquad \frac{1}{d-q} - \frac{1}{k} = \frac{1}{p} ;$$

" d'où l'on tire

$$\text{(F)} \qquad q = d - \frac{pk}{p+k} .$$

" Équation qui détermine le foyer y du deuxième verre satis-
" faisant à la condition demandée.

" Par des considérations semblables à celles du n° 11, on
" pourra maintenant déterminer ω''' en observant que

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega''' = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega'' \frac{d-q}{k} .$$

" Éliminant k et ω'' au moyen des équations (F) et (D) il vient:

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega''' = \frac{s}{q} \cdot \frac{p+q-d}{p} ,$$

" quantité constante et indépendante de la distance de l'objet
" et de l'effet des tirages, puisqu'elle ne contient ni α ni β, et
" que d est constant. Le point o est donc un point anallatique.

" Si l'on voulait que l'angle micrométrique constant eût
" son sommet dans le centre même de l'objectif, comme on l'a
" supposé au n° 10, on aurait alors simultanément $k = 0$ et
" $q = d$; l'expression ci-dessus deviendrait

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega''' = \frac{s}{q} = \frac{s}{d},$$

" valeur non seulement constante, mais encore indépendante du
" foyer de l'objectif.

" Quand on donne à k une valeur quelconque, qui amène
" le foyer antérieur du deuxième verre à l'intérieur de la lu-
" nette, on a l'attention d'y placer un diafragme d'une ouver-
" ture convenable pour *centrer* les faisceaux des rayons lumi-
" neux sur les rayons anallatiques respectifs.

" Il reste maintenant à l'opticien à calculer des nouvelles
" courbures pour les verres qui, avec ces conditions de foyer
" et de position relative, ne doivent pas moins former une lu-
" nette exempte, le plus possible, d'aberration, de sphéricité et
" de réfrangibilité.

" Il est facile de voir que ce problème optique ne présente
" aucune difficulté d'après les théories connues. Au contraire, à
" part la très petite perte de lumière provenant de l'emploi d'un
" verre de plus, le système pourra être mieux délivré de l'aber-
" ration de sphéricité, et l'aberration de réfrangibilité de l'ocu-
" laire pourra être elle-même mieux corrigée que par l'oculaire
" de Ramsden tout seul, quoique pas mieux qu'avec l'oculaire
" astronomique négatif ".

I lettori che avranno letto le Note precedenti troveranno ragionevoli le osservazioni da noi fatte in esse e quelle che facemmo nell'articolo intitolato: *Per la storia della Celerimensura* che trovasi nella " Rivista di Topografia e Catasto " del 1894.

PUBBLICAZIONI DI IGNAZIO PORRO

NEI

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences.

1) *Micromètre à fils visibles par réflexion dans un horizon liquide ou dans un miroir, à l'usage de l'astronomie, et rectificateur catoptrique pour les instruments à niveler et pour la détermination directe des erreurs des cercles astronomiques verticaux.* XXXII, 677.
2) *Définition exacte du foyer des objectifs photographiques et description d'un instrument nouveau appelé " phozomètre „ pour en mesurer directement la véritable longueur focale.* XXX, 50.
3) *Note sur l'éclipse de Soleil du 28 juillet 1851, relevée héliographiquement par M. M. Vaillat et Thompson avec un objectif de l'auteur.* XXXIII, 128.
4) *Théorie générale des moteurs hydrauliques.* XXXIV, 172.
5) *Lettre concernant des expériences sur un moteur hydraulique de son invention, faites à Bologne (États-Romains) par M. Gualandi.* XXXV, 228.
6) *Application de la lunette réciproque avec micromètre parallèle et méroscope pan-focal.* XXXV, 299.
7) *Note sur un instrument désigné sous le nom de " polyoptomètre „.* XXXV, 433.
8) *Sur les raies longitudinales du spectre.* XXXV, 479.
9) *Nouvel appareil pour rendre sensible aux yeux la rotation de la Terre, au moyen de la fixité du plan d'oxillation du pendule.* XXXV, 855.
10) *Sur la lunette zénithale de M. Faye.* XXXVI, 482.
11) *Sur la discordance entre les deux nivellements faits en 1799 et 1847 à travers l'istme de Suez, et sur les méthodes et les instruments de nivellement en général.* XXVII, 118.
12) *Mémoire sur la construction des tubes de grandes lunettes.* XXXVII, 286.
13) *Note sur l'élimination absolue de la flexion des lunettes.* XXXVII, 752, 851.
14) *Sur la flexion des lunettes astronomiques.* XXXVIII, 734.
15) *Sur la visibilité des fils du micromètre par réflexion.* XXXVIII, 768.
16) *Méthode et instruments nouveaux pour le levé rapide des plans avec nivellement général et simultané.* XXXVIII, 875.
17) *Méromètre parallèle ou de transport, instrument fait pour évaluer de très petites fractions sur une échelle divisée.* XXXIX, 244.
18) *Sur la flexion des lunettes et l'illumination des fils.* XXXIX, 680.
19) *Lettre accompagnant l'envoi de sa Notice sur la tachéométrie.* XL, 318.
20) *Levé rapide des lignes courbes par une série de cercles osculateurs.* XL, 432.
21) *Note sur le micromètre parallèle indépendant.* XLI, 1058.
22) *Tachéomètre des mines, nouvel instrument propre à la fois aux levés souterrains et à ceux à ciel ouvert.* XLI, 1080.

23) *Note sur l'éclipse de Lune du 12 octobre 1856, accompagnée d'images photographiques de la Lune prises à différents moments de cette éclipse par M. Bertsch et de dessins coloriés des différentes phases par M. Bulard.* XLIII, 850.
24) *Sur l'occultation de Jupiter du 2 janvier 1857; conséquences relatives à l'atmosphère lunaire* (En commun avec M. Bulard). XLIV, 25.
25) *Découverte d'une nouvelle étoile dans le quadrilatère de la nebuleuse d'Orion.* XLIV, 1031.
26) *M. Porro adresse l'extrait d'une Lettre du P. Secchi relative à cette nouvelle étoile.* XLIV, 1279.
27) *Lettre concernant son objectif de 52 centimètres.* XLV, 39.
28) *Note sur l'emploi de sa lunette pan-focale comme ophtalmoscope.* XLV, 103.
29) *Note sur un hélioscope nouveau.* XLVI, 133.
30) *Nouveau micromètre à lignes lumineuses réfléchies pour les instruments d'astronomie.* XLVI, 325.
31) *Supplément aux Mémoires précédents sur son grand objectif de 52 centimètres de diamètre.* XLVI, 407.
32) *Considérations photodynamiques.* XLVI, 1082.
33) *Lumière cométaire; comparaison du spectre produit par la lumière de la comète de Donati et par celle de Arcturus.* XLVII, 873.
34) *Rapport sur diverses Notes et Mémoires concernant ses appareils pour la taille des verres d'optique*; Rapporteur M. de Sénarmont. XLVIII, 453.

Nel giornale “ Il Politecnico „:

35) Anno XI (1863). *Applicazioni della fotografia alla Geodesia.*
36) Anno XII (1864). *Sul valico delle Alpi col mezzo di una ferrovia*, pag. 447.
37) „ *Applicazione del cannocchiale diastimometrico agli strumenti di livellazione*, pag. 464.
38) Anno XIII (1865). *Corso di Celerimensura*, pag. 450.
39) „ *Teoria dei livelli a cannocchiale*, pag. 685.
40) Anno XIV (1866). *Guida pratica nell'acquisto di strumenti ad uso degl'Ingegneri*, pag. 295.
41) „ *Della possibile creazione del Gran Libro Fondiario*, pag. 121.
42) Anno XV (1867). *Sull'irrigazione dell'Alta Lombardia*, pag. 478.
43) „ *Teoria generale dei motori idraulici*, pag. 327.
44) „ *Passaggio delle Alpi Italo-Germaniche con ferrovie*, pag. 56.
45) „ *Relazione al corso di Celerimensura*, pag. 22.
46) „ *Corso di Celerimensura. Lez. prima*, pag. 685.
47) Anno XVI (1868). *Ottica Tecnologica ad uso degl'Ingegneri*, pag. 45.
48) „ *Corso di Celerimensura nel Regio Istituto Tecnico Superiore*, pag. 70.
49) „ *Sunto delle lezioni d'ottica dato all'Istituto Superiore*, pag. 73.
50) „ *Il progresso della Geodesia in Italia*, pag. 433.
51) „ *Sulle istituzioni di guarentigia della fede pubblica in genere*, pag. 5.
52) Anno XVIII (1870). *Sull'uso del barometro aneroide negli studi delle linee da eseguirsi nei lavori pubblici di grande comunicazione*, pag. 884.

53) Anno XIX (1871). *Sur la théorie dynamique orbitaire des ci-devant impondérables*, pag. 56.

54) Anno XX (1872). *Sui perfezionamenti di cui è ancora suscettibile il Cleps ad uso degli ingegneri*, pag. 205.

Negli " Annales de ponts et chaussées „:

55) Tome IV (3e série, 1852, 2e semestre). *Mémoire sur de nouveaux instruments et procédés de géodésie, de nivellement et d'arpentage.*

Nei " Rendiconti dell'Istituto Lombardo „:

56) Vol. 1865. *La fotografia applicata all'Astronomia e alla Geodesia.*

57) Vol. 1866. *Il problema dell'acromatismo, trattato colla teoria microdinamica della luce.*

OPERE PUBBLICATE A PARTE

La Tachéométrie ou l'art de lever les plans et de faire les nivellements avec une économie considérable de temps, par J. Porro, major du Génie militaire en retraite. Turin, 1850 (imprimerie Zecchi et Bona, rue Carlo Alberto).

Applicazione della Celerimensura alla misura generale parcellaria ed altimetrica dell'Italia. Creazione del Gran Libro Fondiario.

Quarta edizione e prima italiana contenente gli ultimi perfezionamenti della Celerimensura e l'applicazione razionale della fotografia alla geodesia. Firenze, 1862. Coi tipi di Giuseppe Mariani.

(La Introduzione a questo libro è stata stampata verso il 1868 a Milano). Con atlante di 16 tavole.

Manuale pratico di Geodesia moderna (*Celerimensura*), ad uso principalmente di quegli impiegati presso gl'ingegneri che non hanno fatto studi di matematica. Estratto dalle lezioni state date nel 1834 ai soldati del Genio militare in Genova, per cura del Prof. I. Porro. Milano, tipogr. e litogr. degli Ingegneri, via Lupetta, nn. 7 e 9. Con atlante.

Sur le perfectionnement pratique des Appareils optiques pour l'Astronomie et pour la Photographie (Paris, 1858, Mallet-Bachelier).

Strumenti diottrici ad obbiettivo composto usati in Geometria pratica.

Nota II di G. CICCONETTI.

4. Cannocchiale anallattico. — In un cannocchiale distanziometro dicesi *anallattico* il punto dell'asse dal quale l'intervallo H di mira compreso tra i fili del reticolo è visto sotto un angolo costante di modo che le distanze della mira da quel punto vengono computate proporzionalmente all'intervallo letto. Il punto anallattico di un cannocchiale distanziometro ad obbiettivo semplice L_1 è il fuoco anteriore F_1 dell'obbiettivo stesso.

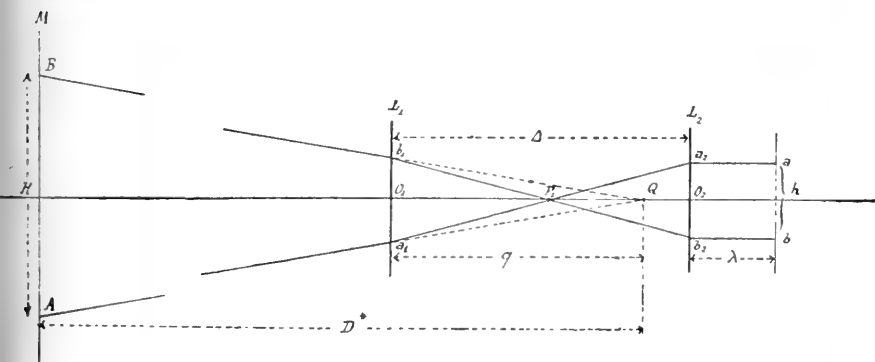



Fig. 4

Si supponga ora accoppiata all'obbiettivo semplice L_1 una seconda lente L_2 a distanza fissa Δ dalla prima (fig. 4) e sieno a, b le sezioni dei fili distanziometri secondo il piano verticale passante per l'asse.

L'aggiustamento del cannocchiale alle diverse distanze della mira M si effettua spostando il reticolo fino a raccoglierví l'immagine, cioè variando la distanza λ. Se si vuol dunque che col variare la distanza della mira rimanga costante l'angolo dei

due raggi che ne determinano l'intervallo letto fra i fili, occorre che questi due raggi siano indipendenti dalla distanza λ e poichè nel movimento del reticolo a e b si spostano su due parallele all'asse, i due raggi che soddisfano alla condizione anzidetta saranno quelli coniugati, rispetto al sistema $L_1 L_2$, dei raggi $a_2 a$, $b_2 b$ passanti per a e b e paralleli all'asse stesso. Determiniamoli. I coniugati di $a_2 a$ e $b_2 b$, rispetto L_2, sono rispettivamente i raggi $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ passanti per F_2 1° fuoco di L_2 e i coniugati di $a_1 a_2$ e $b_1 b_2$, rispetto L_1, saranno due raggi Aa_1, Bb_1 che determinano sulla mira l'intervallo $AB = H$ e che si tagliano nel punto Q dell'asse, coniugato di F_2 rispetto L_1. Evidentemente il punto Q è anallattico inquantochè i raggi tracciati rimangono invariabili col movimento del reticolo, epperò l'angolo AQB è costante. Inoltre Q, come punto di concorso delle rette di incidenza AQ, BQ che vengono trasformate dal sistema $L_1 L_2$ nelle rette di emergenza $a_2 a$, $b_2 b$ parallele all'asse, è anche il 1° fuoco F del sistema stesso.

Dalla costruzione eseguita risulta dunque che per un sistema obbiettivo di due lenti a distanza fissa:

1° Esiste un punto anallattico ed uno solo.

2° Esso coincide col 1° fuoco F del sistema e quindi è coniugato del 1° fuoco F_2 di L_2 rispetto L_1.

Lasciando inalterati gli altri simboli già adoperati, indicheremo con q l'ascissa in valore e segno del punto anallattico Q rispetto all'obbiettivo semplice L_1. Essa sarà anche l'ascissa, rispetto alla stessa origine O_1, del 1° fuoco F del sistema $L_1 L_2$ epperò la sua espressione si identifica colla (1) o (1').

Il problema di rendere anallattico un punto dell'asse di un cannocchiale mediante l'aggiunta di una lente L_2 coincide, per quanto si è detto, con quello di far cadere il 1° fuoco del sistema $L_1 L_2$ nel punto stesso e a questa condizione si potrà soddisfare disponendo opportunamente della distanza focale della nuova lente L_2 e della distanza Δ fra essa e L_1. La lente L_2 che ha l'ufficio anzidetto dicesi *anallattica*.

Supponiamo dapprima che essa sia divergente. La condizione perchè il 2° fuoco F' del sistema sia reale è allora la (5) e per la (1') si ha

$$q = \frac{\varphi_1 (|\varphi_2| + \Delta)}{\varphi_1 - |\varphi_2| - \Delta} \, .$$

Appunto per la (5), il secondo membro di questa relazione è essenzialmente negativo e ne deriva quindi che i punti dell'asse coi quali si può far coincidere il 1° fuoco F del sistema $L_1\, L_2$ quando la lente anallattica L_2 è divergente sono tutti anteriori all'obbiettivo semplice L_1.

Per riconoscere in quale intervallo si trovino questi punti scriviamo l'ultima eguaglianza sotto la forma

$$-\frac{1}{q}=\frac{|\varphi_2|+\Delta-\varphi_1}{\varphi_1\,(|\varphi_2|+\Delta)},$$

od anche

$$-\frac{\varphi_1}{q}=1-\frac{\varphi_1}{|\varphi_2|+\Delta}.$$

Questa espressione dimostra che il rapporto al primo membro è compreso fra i due valori limiti: *zero*, quando Δ assume il valor limite $\varphi_1-|\varphi_2|$ e *uno*, quando $|\varphi_2|$ si fa crescere indefinitamente.

Per

$$-\frac{\varphi_1}{q}=0 \qquad \text{si ha} \qquad q=-\infty$$

e per

$$-\frac{\varphi_1}{q}=1 \qquad \text{si ha} \qquad q=-\varphi_1,$$

cioè *con una lente anallattica divergente si possono rendere anallattici soltanto i punti anteriori ad* L_1 *ma che ne distano più del fuoco anteriore* F_1.

Supponiamo ora che la lente L_2 sia convergente. La condizione pel 2° fuoco reale è allora l'una o l'altra delle (4) e l'ascissa del punto anallattico, o 1° fuoco del sistema $L_1\, L_2$, è per la (1),

$$q=\frac{-\varphi_1(\varphi_2-\Delta)}{\varphi_1+\varphi_2-\Delta}.$$

Se è soddisfatta la condizione $\Delta>\varphi_1+\varphi_2$, il valore di q risulta sempre negativo e quindi con una lente L_2 convergente che disti dalla prima lente L_1 più di $\varphi_1+\varphi_2$ i punti coi quali si può portare a coincidere il 1° fuoco del sistema $L_1\, L_2$ sono

ancora anteriori all'obbiettivo L_1. Per vedere quali siano, si ponga l'ultima relazione sotto la forma

$$-\frac{\varphi_1}{q} = 1 - \frac{\varphi_1}{\Delta - \varphi_2}.$$

La frazione al secondo membro è compresa fra i valori: *zero* per Δ che cresce indefinitamente e *uno* per Δ eguale al suo limite inferiore $\varphi_1 + \varphi_2$; sicchè i valori limiti del primo membro sono 1 e 0.

Per

$$-\frac{\varphi_1}{q} = 1 \qquad \text{viene} \qquad q = -\varphi_1$$

e per

$$-\frac{\varphi_1}{q} = 0 \qquad \text{si ha} \qquad q = -\infty,$$

dunque *con una lente anallattica convergente e colla condizione* $\Delta > \varphi_1 + \varphi_2$ *si possono rendere anallattici gli stessi punti che possono rendersi tali con una lente divergente e cioè che sono compresi tra il fuoco anteriore dell'obbiettivo semplice* L_1 *e l'infinito negativo.*

Resta a considerare il caso di una lente L_2 convergente colla condizione $\Delta < \varphi_1$. Allora l'ascissa

$$q = \frac{\varphi_1(\Delta - \varphi_2)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}$$

risulta negativa, nulla o positiva secondochè

$$\Delta \lesseqgtr \varphi_2,$$

e quindi i punti sui quali si può far cadere il 1° fuoco del sistema $L_1 L_2$ sono anteriori o posteriori all'obbiettivo semplice L_1.

Posta l'ultima eguaglianza sotto la forma

$$\frac{\varphi_1}{q} = \frac{\varphi_1}{\Delta - \varphi_2} - 1$$

per $\Delta < \varphi_2$, facendo crescere indefinitamente φ_2 si giunge al valor limite

$$\frac{\varphi_1}{q} = -1 \qquad \text{cioè} \qquad q = -\varphi_1.$$

Per $\Delta = \varphi_2$ si ha

$$\frac{\varphi_1}{q} = \infty \qquad \text{ossia} \qquad q = 0$$

e finalmente per $\Delta > \varphi_2$, facendo convergere Δ verso il suo limite superiore φ_1 e φ_2 verso *zero* si ha il valor limite

$$\frac{\varphi_1}{q} = 0 \qquad \text{e quindi} \qquad q = +\infty .$$

Concludendo, *con una lente anallattica convergente e colla condizione* $\Delta < \varphi_1$ *si possono rendere anallattici tutti i punti compresi fra l'obbiettivo* L_1 *ed il suo fuoco anteriore soddisfacendo alla disuguaglianza* $\Delta < \varphi_2$ *e tutti i punti posteriori all'obbiettivo* L_1, *a qualunque distanza si voglia, tenendo* $\Delta > \varphi_2$.

Il caso limite $\Delta = \varphi_2$ corrisponde al *Cannocchiale stereogonico* di Porro (1823), nel quale il punto anallattico è il centro ottico dell'obbiettivo semplice L_1 o il suo 1° punto principale se la lente non si considera infinitamente sottile.

Da quanto si è detto in precedenza si conclude che scegliendo opportunamente i valori della distanza focale della lente anallattica e della sua distanza Δ dalla lente L_1 si può rendere anallattico un punto qualunque dell'asse di collimazione di un cannocchiale distanziometro. Indipendentemente dalla funzione distanziometrica del cannocchiale si può anche dire che colla opportuna scelta di L_2 e della sua distanza da L_1 si può far coincidere il primo fuoco F del sistema $L_1 L_2$ con un punto qualsiasi dell'asse. E siccome perchè un punto divenga anallattico i due elementi a disposizione φ_2 e Δ non debbono soddisfare a due equazioni che li determinino, ma soltanto ad una equazione che li lega al dato q e ad un'altra condizione di diseguaglianza, segue che l'anallattismo di un punto può ottenersi in infiniti modi, cioè con infinite combinazioni dei valori φ_2 e Δ.

In pratica non occorre mai di rendere anallattico un punto anteriore all'obbiettivo semplice L_1, epperò non è mai applicabile come lente anallattica nè una lente divergente nè una lente convergente colla condizione $\Delta > \varphi_1 + \varphi_2$. Invece il caso più generale, perchè corrisponde ad una effettiva utilità pratica, è

quello in cui si tratta di rendere anallattico il punto dell'asse del cannocchiale in cui esso incontra l'asse di rotazione attorno al quale il cannocchiale stesso è girevole negli strumenti di Topografia. Questo punto, detto *centro dello strumento,* cade sempre posteriormente all'obbiettivo semplice L_1 nella parte centrale del cannocchiale e quindi l'ascissa q è sempre positiva. Ne deriva che la lente anallattica è una lente convergente che insieme alla distanza Δ da L_1 deve soddisfare alle condizioni

$$q = \frac{\varphi_1 (\Delta - \varphi_2)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \qquad \varphi_1 > \Delta > \varphi_2 .$$

Un cannocchiale che abbia per punto anallattico il centro dello strumento dicesi *centralmente anallattico* o semplicemente *anallattico.* Esso fu costruito per la prima volta dal Porro poco dopo il 1850 ed il suo vantaggio rispetto ad un cannocchiale distanziometro semplice consiste nel fatto che la distanza D^* della mira dal centro dello strumento viene espressa da una formola monomia $D^* = KH$ anzichè dalla forma binomia $C + KH.$

Riferendoci alla fig. 4, nella quale si suppone ora che il punto anallattico Q sia il centro dello strumento al quale il cannocchiale appartiene, il valore della costante distanziometrica K risulta subito dalle considerazioni seguenti:

I triangoli simili QAB, Qa_1b_1 dànno

$$\frac{D^*}{H} = \frac{q}{a_1 b_1} .$$

Tenendo presente che $F_2 O_2 = \varphi_2$ e che quindi $O_1 F_2 = \Delta - \varphi_2$, dagli altri triangoli simili $F_2 a_1 b_1$, $F_2 a_2 b_2$ si ottiene

$$\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} = \frac{\Delta - \varphi_2}{\varphi_2} ,$$

da cui, se si indica con $h = a_2 b_2$ la distanza tra i fili distanziometri,

$$a_1 b_1 = \frac{h (\Delta - \varphi_2)}{\varphi_2} .$$

Risulta allora

$$\frac{D^*}{H} = \frac{q \varphi_2}{h (\Delta - \varphi_2)} ,$$

sicchè

$$D^* = \frac{q\,\varphi_2}{h(\Delta - \varphi_2)}\,H.$$

Il coefficiente

$$K = \frac{q\,\varphi_2}{h(\Delta - \varphi_2)}\,,$$

evidentemente invariabile, è la costante distanziometrica del cannocchiale anallattico. Per essa si assume il numero 100 od altro numero pel quale la moltiplicazione di H riesca immediata e si ricava allora la distanza tra i fili dalla formola

$$h = \frac{K(\Delta - \varphi_2)}{q\,\varphi_2}\,.$$

Per rendere un cannocchiale centralmente anallattico occorre l'applicazione di una lente convergente e così disposta che risulti $\Delta < \varphi_1$, quindi la distanza focale obbiettiva e l'ingrandimento subiscono una diminuzione che si cercherà di render poco sensibile scegliendo il valore di Δ *poco* minore di φ_1.

Esempio.

Si voglia rendere anallattico un cannocchiale il cui obbiettivo L_1 ha la distanza focale $\varphi_1 = 300^{mm}$ e nel quale l'ascissa del centro Q dello strumento rispetto L_1 è $q = 180^{mm}$.

Assunta, ad esempio, $\Delta = 270^{mm}$, dalla

$$q = \frac{\varphi_1(\Delta - \varphi_2)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}$$

si ricava

$$\varphi_2 = \Delta - \frac{q\,\varphi_1}{q + \varphi_1} = 157^{mm},5.$$

La riduzione dell'ingrandimento normale o della distanza focale obbiettiva è

$$\frac{I'_\infty}{I_\infty} = \frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} = 0,84.$$

Volendo la costante distanziometrica eguale a 100, la distanza fra i fili del reticolo risulta

$$h = \frac{100(\Delta - \varphi_2)}{q\,\varphi_2} = 2^{mm},52.$$

In luogo di fissare Δ, si potrebbe fissare la distanza focale φ (poco minore di φ_1) dell'obbiettivo composto $L_1 L_2$ e dalle due equazioni

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \qquad q = \frac{\varphi_1 (\Delta - \varphi_2)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}$$

ricavare gli elementi incogniti φ_2 e Δ che risultano

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 \varphi}{\varphi_1 + q} \qquad \Delta = \frac{\varphi_1 (\varphi + q)}{\varphi_1 + q} \text{ (*)}.$$

Poichè q e K dipendono da Δ, uno spostamento della lente anallattica produce uno spostamento del punto anallattico ed una variazione nel valore della costante distanziometrica.

Derivando la espressione di q rispetto Δ si ha subito

$$dq = \frac{\varphi_1^2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} d\Delta,$$

e giacchè il coefficiente di $d\Delta$ è essenzialmente positivo, col crescere o col diminuire di Δ cresce o diminuisce q, cioè *il punto anallattico si sposta nello stesso senso della lente anallattica.*

Coi dati dell'esempio precedente risulta

$$dq = 2{,}56\, d\Delta:$$

così, se la lente anallattica si spostasse, p. es., di 2^{mm}, il 1° fuoco del sistema $L_1 L_2$ si sposterebbe nello stesso senso di soli 5^{mm}, il che dimostra che anche per un notevole spostamento della lente L_2 lo spostamento che subisce il punto anallattico non è molto rilevante agli effetti della misura delle distanze.

Quanto alla costante distanziometrica, se nella sua espressione trovata si sostituisce per q il suo valore si ottiene

$$K = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{h(\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta)} = \frac{\varphi}{h},$$

(*) N. Jadanza, *Il cannocchiale panfocale di Porro e due problemi sull'anallattismo.* " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", vol. 51, 1915-16.

cioè, come nel cannocchiale distanziometro semplice, la costante distanziometrica eguaglia il rapporto della distanza focale obiettiva alla distanza tra i fili. Si ha ora

$$dK = \frac{d\varphi}{h},$$

e derivando φ rispetto Δ si ottiene

$$\frac{d\varphi}{d\Delta} = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{(\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta)^2} = \frac{\varphi}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} = \frac{\varphi^2}{\varphi_1 \varphi_2},$$

onde sostituendo

$$dK = \frac{\varphi^2}{h\,\varphi_1 \varphi_2}\, d\Delta = \frac{K\varphi}{\varphi_1 \varphi_2}\, d\Delta.$$

Il coefficiente di $d\Delta$ è positivo e quindi crescendo Δ cresce K, cioè allontanando la lente anallattica dall'obbiettivo semplice L_1 la costante distanziometrica aumenta. Coi dati dell'esempio numerico precedente si ha

$$dK = 0{,}533\, d\Delta,$$

cosicchè basta uno spostamento di meno di 2^{mm} della lente anallattica per far variare di 1 unità la costante K. E siccome si è già mostrato che tale spostamento della lente L_2 apporta una variazione più che tollerabile del punto anallattico, apparisce l'utilità di rendere spostabile la lente anallattica con una apposita vite di rettifica allo scopo di poter ridurre la costante distanziometrica esattamente eguale al suo valore normale qualora ciò non si verifichi.

Nel caso dell'esempio considerato, supposto che per K si fosse trovato sperimentalmente il valore 99,23 invece di 100, si riporterà la costante a quest'ultimo valore *allontanando* la lente anallattica dall'obbiettivo semplice L_1 di

$$d\Delta = \frac{dK}{0{,}533} = \frac{0{,}77}{0{,}533} = 1^{mm}{,}44,$$

con che il punto anallattico viene spostato verso l'oculare di

$$dq = 2{,}56\, d\Delta = 3^{mm}{,}7$$

in ogni caso trascurabile.

Per uniformità di trattazione si sono supposte anche nel caso del cannocchiale anallattico le due lenti L_1, L_2 infinitamente sottili. Ma le deduzioni alle quali si è pervenuti ed il modo di ottenerle non cambiano affatto se si considerano le due lenti coi rispettivi piani principali distinti, come apparisce dalla fig. 5 per la quale non fa bisogno alcuna spiegazione.

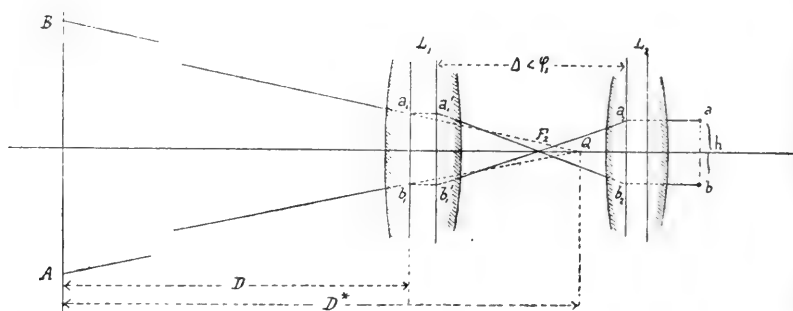



Fig. 5

Termineremo l'argomento osservando che l'anallattismo centrale, ed in generale relativo ad un punto dell'asse posteriore all'obbiettivo semplice L_1, si ottiene soddisfacendo alla espressione di q, colla condizione $\varphi_1 > \Delta > \varphi_2$ la quale coincide con quella propria del plesiotelescopio. Un cannocchiale anallattico potrebbe dunque funzionare anche come plesiotelescopio quando il dato relativo all'ascissa q lo rendesse praticamente possibile.

Nell'esempio preso in esame risultano

$$\lambda_\infty = \frac{\varphi_2(\varphi_1 - \Delta)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} = 25^{mm},5 \;, \qquad \lambda_{F_1} = \varphi_2 = 157^{mm},5 \;,$$

$$\lambda_0 = \frac{\varphi_2 \Delta}{\Delta - \varphi_2} = 378^{mm},0 \;,$$

sicchè la corsa massima del reticolo prenderebbe il valore

$$\lambda_0 - \lambda_\infty = 352^{mm},5$$

praticamente troppo elevato.

La possibilità di osservare una mira od una scala a distanza assai piccola potrebbe facilitare la verifica della costante distanziometrica.

II. — Cannocchiali a lunghezza costante e a visuale reciproca.

5. Cannocchiale panfocale di Porro (*). — Nel plesiotelescopio è fissa la distanza Δ fra le due lenti L_1, L_2 ed il cannocchiale si allunga o si accorcia per adattarlo alle diverse distanze dell'oggetto allo stesso modo che se si trattasse di un cannocchiale semplice. Si può invece tener fissa la distanza l fra l'obbiettivo semplice L_1 ed il reticolo R (fig. 6), cioè la lunghezza del cannocchiale, e far variare la posizione di L_2 rispetto L_1 in modo che l'immagine dell'oggetto osservato, posto a qualsiasi distanza, venga costantemente a formarsi sul reticolo R a distanza invariabile da L_1.

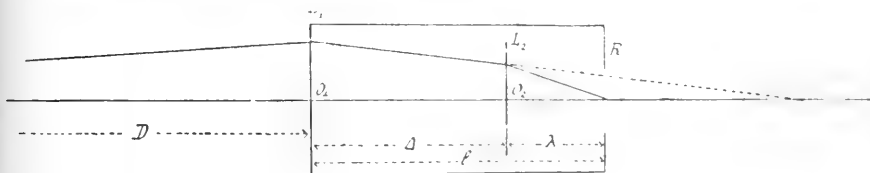



Fig 6

Supponiamo dapprima la lente L_2 convergente e riprendiamo la (9) la quale per essere

$$\lambda = l - \Delta$$

può scriversi

$$\frac{D\varphi_1}{D - \varphi_1} = \Delta + \frac{\varphi_2 (l - \Delta)}{\varphi_2 - l + \Delta}.$$

(*) Vedi anche: N. Jadanza, *Sopra alcuni sistemi composti di due lenti e sul livello di H. Wild.* " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1911.

Riducendo a forma intera, trasportando tutti i termini nel primo membro ed ordinando secondo le potenze decrescenti della variabile Δ si ottiene facilmente

$$(13) \quad (D - \varphi_1)\,\Delta^2 - \{(D - \varphi_1)\,l + D\varphi_1\}\,\Delta + (D - \varphi_1)\,l\varphi_2 + \\ + D\varphi_1\,(l - \varphi_2) = 0\,,$$

od anche

$$(13') \quad \left(1 - \frac{\varphi_1}{D}\right)\Delta^2 - \left\{\left(1 - \frac{\varphi_1}{D}\right)l + \varphi_1\right\}\Delta + \left(1 - \frac{\varphi_1}{D}\right)l\varphi_2 + \\ + \varphi_1\,(l - \varphi_2) = 0.$$

Se si pone $D = \infty$ e, al solito, indichiamo con Δ_∞ il valore corrispondente di Δ, quest'ultima relazione diviene

$$\Delta_\infty^2 - (l + \varphi_1)\,\Delta_\infty + l\varphi_2 + \varphi_1\,(l - \varphi_2) = 0\,,$$

da cui

$$\Delta_\infty = \frac{1}{2}\,(l + \varphi_1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(l + \varphi_1)^2 - 4l\varphi_2 - 4\varphi_1\,(l - \varphi_2)} \\ = \frac{1}{2}\,(l + \varphi_1) \pm \frac{1}{2}\,(\varphi_1 - l)\sqrt{1 + \frac{4\varphi_2}{\varphi_1 - l}}\,.$$

Ora è certamente $l < \varphi_1$ e dovendo essere $\Delta < \varphi_1$ il segno positivo del radicale è da scartarsi e può scriversi

$$\Delta_\infty = \frac{1}{2}\,(l - \varphi_1) + \varphi_1 + \frac{1}{2}\,(l - \varphi_1)\sqrt{1 + \frac{4\varphi_2}{\varphi_1 - l}}\,,$$

cioè

$$(\alpha) \quad \Delta_\infty = \varphi_1 - \frac{1}{2}\,(\varphi_1 - l)\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{4\varphi_2}{\varphi_1 - l}}\right\}.$$

Riprendendo l'equazione generale in Δ, poniamovi adesso $D = \varphi_1$ e indichiamo con Δ_{F_1} il valore corrispondente di Δ. L'equazione si riduce di 1° grado e diviene

$$-\,\Delta\varphi_1\,\Delta_{F_1} + D\varphi_1\,(l - \varphi_2) = 0\,,$$

dalla quale

$$(\beta) \quad \Delta_{F_1} = l - \varphi_2\,.$$

Questo risultato mostra che deve essere $\varphi_2 < l$.

Finalmente nell'equazione generale facciamo $D = 0$ e si ha, denotando con Δ_0 il valore relativo di Δ,

$$\Delta_0^2 - l\Delta_0 + \varphi_2 l = 0,$$

da cui

$$\Delta_0 = \frac{l}{2} \pm \frac{l}{2}\sqrt{1 - \frac{4\varphi_2}{l}}.$$

Perchè Δ_0 risulti reale occorre che sia

$$\frac{4\varphi_2}{l} \leq 1 \qquad \text{cioè} \qquad \varphi_2 \leq \frac{l}{4},$$

condizione che assorbe quella derivante dalla (β).

Riguardo al segno del radicale è facile vedere che quello positivo deve essere scartato. Basterebbe infatti sostituire $\frac{l}{2}$ in luogo di Δ nella relazione iniziale (9) e si troverebbe

$$D = \frac{\varphi_1 l\left(\frac{l}{4} - \varphi_2\right)}{(l - \varphi_1)\left(\frac{l}{4} - \varphi_2\right) - \varphi_1 \frac{l}{4}}.$$

Questa espressione per $\varphi_2 < \frac{l}{4}$ è essenzialmente negativa (oggetto a sinistra) e diversa da zero, e siccome avvicinandosi l'oggetto, per raccogliere l'immagine sul reticolo fisso la distanza Δ deve necessariamente essere diminuita, ne deriva che per $D = 0$ deve corrispondere un valore di Δ minore di $\frac{l}{2}$. Si ha dunque

$$(\gamma) \qquad \Delta_0 = \frac{l}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\varphi_2}{l}}\right).$$

I risultati (α), (β), (γ) colle condizioni $l < \varphi_1$, $\varphi_2 \leq \frac{l}{4}$ mostrano la possibilità di costruire un cannocchiale coll'obbiettivo composto di due lenti convergenti atto a produrre immagini in un piano a distanza fissa da L_1 per tutte le distanze dell'oggetto da infinito a zero col semplice spostamento longitudinale

della seconda lente L_2. In pratica questo movimento si rende possibile montando L_2 in un anello *a a* (fig. 7), interno al tubo del cannocchiale e che può scorrere lungo il medesimo in virtù di una cremagliera con rocchetto comandato da un bottone esterno.

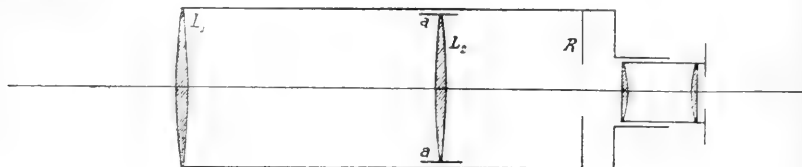



Fig. 7

Tale è il *cannocchiale panfocale* costruito dal Porro nel 1854 e che, come il plesiotelescopio, può servire da cannocchiale e da microscopio.

Per esempio, se

$$\varphi_1 = 300^{mm} \qquad l = 200^{mm} \qquad \varphi_2 = 40^{mm}$$

risultano

$$\Delta_\infty = 169^{mm},4 \qquad \Delta_{F_1} = 160^{mm},0 \qquad \Delta_0 = 55^{mm},3.$$

Lo spostamento massimo, cioè la distanza fra le posizioni estreme della lente mobile L_2 in corrispondenza alle collimazioni di un oggetto infinitamente lontano e di un oggetto aderente all'obbiettivo, risulterebbe di

$$\Delta_\infty - \Delta_0 = 114^{mm},1.$$

Quando però lo strumento dovesse servire soltanto da cannocchiale sarà sufficiente una latitudine di spostamento della lente mobile assai più ridotta come risulta dall'esempio precedente in cui Δ_∞ e Δ_{F_1} differiscono di soli $9,4^{mm}$.

Supponendo al solito che l'oculare sia una lente convergente semplice di distanza focale $\psi = 12^{mm}$ si calcolerà l'ingrandimento normale colla (11''') e risulta

$$I_\infty = -5,9.$$

Si ha

$$b_{F_1} = l + 2\psi = 212^{\mathrm{mm}} = b_0 ,$$

epperò colla (11′) si trova

$$I_{F_1} = -5,7$$

e colla (11″)

$$I_0 = -4,6.$$

Il cannocchiale semplice con obbiettivo L_1 e collo stesso oculare avrebbe per ingrandimento normale

$$\mathfrak{J} = 25.$$

Potrebbe un cannocchiale di questo genere servire come distanziometro munendo il reticolo di fili? Perchè ciò fosse possibile bisognerebbe che il cannocchiale avesse un punto anallattico, cioè che la distanza D fosse esprimibile mediante il prodotto dell'intervallo H letto sulla mira per un numero *fisso* K, aumentato di una costante C.

Dicendo H' l'immagine $A'B'$ che l'obbiettivo semplice L_1 dà dell'intervallo $AB = H$ letto sulla mira si ha

$$\frac{H}{H'} = \frac{D}{d} ,$$

e poichè rispetto alla lente L_2 la distanza h tra i fili distanziometri è l'immagine di H' si ha ancora

$$\frac{H'}{h} = \frac{d - \Delta}{\lambda} .$$

Moltiplicando membro a membro queste due relazioni si ottiene

$$\frac{H}{h} = \frac{D(d - \Delta)}{d\lambda} ,$$

da cui

$$d = \frac{h \Delta D}{Dh - H\lambda} , \tag{14}$$

onde eguagliando col valore (7) e togliendo il fattor comune D

$$\frac{\varphi_1}{D - \varphi_1} = \frac{h\Delta}{Dh - H\lambda} . \tag{15}$$

Se ora nella (9) si sostituisce per Δ il valore ricavato dalla (15) risulta con facili riduzioni

$$D = \varphi_1 + \frac{\varphi_1}{h}\left(1 - \frac{\lambda}{\varphi_2}\right) H. \tag{16}$$

Questa relazione è notevole perchè mostra che i cannocchiali del terzo tipo, nei quali λ è costante, hanno un punto anallattico che è il fuoco anteriore della lente L_1 come in un cannocchiale distanziometro semplice e il valore della costante è

$$K = \frac{\varphi_1}{h}\left(1 - \frac{\lambda}{\varphi_2}\right). \tag{17}$$

La (15) può anche scriversi, per essere $\Delta = l - \lambda$,

$$\frac{\varphi_1}{D - \varphi_1} = \frac{hl - h\lambda}{Dh - H\lambda}$$

e se ne cava

$$\lambda = h \frac{D\varphi_1 - (D - \varphi_1) l}{H\varphi_1 - (D - \varphi_1) h}. \tag{18}$$

Se questo valore si sostituisce nella (16) ne deriva, come si vede subito, una equazione del 2° grado sia rispetto a D sia rispetto ad H, epperò non è possibile ridurre l'espressione della distanza alla forma

$$D = C + KH.$$

Questo in via rigorosa. In pratica si può domandare se la variazione dell'origine delle distanze e della costante K, per valori di D compresi entro certi limiti, possano essere tollerabili.

L'ascissa, rispetto L_1, del 1° fuoco del sistema $L_1 L_2$, variabile adesso con Δ, è

$$q = \frac{\varphi_1(\Delta - \varphi_2)}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta},$$

nel caso presente sempre positiva.

Inoltre, parlando del cannocchiale anallattico, si è trovato come espressione della costante distanziometrica

$$K = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{h(\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta)}.$$

Riferendoci all'esempio numerico considerato si voglia che K assuma il valor normale 50 per la distanza $D = 50^m$. Allora posto nella (13) $D = 50$ caveremo il valore Δ_{50} che risulta $169^{mm},27$ e sostituendolo nell'ultima espressione se ne ottiene la distanza tra i fili

$$h = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{K(\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta_{50})} = 1^{mm},406.$$

Si possono allora considerare diversi valori di D, per es. $D = \infty$, $D = 100^m$, $D = 50^m$, $D = 20^m$, $D = 10^m$, $D = 1^m$, sostituirli nella (13), trarne i valori relativi di Δ e introdotti questi nelle espressioni di q e K ne daranno i valori corrispondenti.

Ecco ciò che si ottiene:

D	Δ	q	K
∞	$169^{mm},38$	$+ 227^{mm},49$	50,023
100^m	169 ,33	227 ,33	50,018
50	169 ,27	227 ,15	50,000
20	169 ,12	226 ,69	49,956
10	168 ,87	225 ,92	49,883
1	165 ,1	214 ,58	48,808.

Questi risultati mostrano che pel cannocchiale considerato lo spostamento del punto Q, fuoco anteriore del sistema $L_1 L_2$, è trascurabile e quanto alla costante distanziometrica, le distanze dall'obbiettivo L_1 maggiori di 20^m potranno essere ottenute con sufficiente approssimazione usando la formola

$$D = -0^m,23 + 50 \,.\, H.$$

6. Cannocchiale a lunghezza costante con lente mobile divergente (*). — Se il cannocchiale a lunghezza costante non deve servire per distanze assai piccole può anche essere ottenuto accoppiando all'obbiettivo semplice L_1 una lente L_2 divergente anzichè convergente.

(*) Vedi anche: C. Pasini, *Il nuovo livello H. Wild*. Venezia, 1911, " Atti del Collegio Veneto degli Ingegneri ".

La (10) può scriversi in tal caso

$$(19)\quad \lambda = |\varphi_2| \frac{-D\varphi_1 + (D-\varphi_1)\Delta}{D\varphi_1 - (D-\varphi_1)(\Delta + |\varphi_2|)} = |\varphi_2| \frac{-D\varphi_1 + (D-\varphi_1)\Delta}{D(\varphi_1 - |\varphi_2| - \Delta) + \varphi_1(\Delta + |\varphi_2|)}.$$

La condizione pel 2° fuoco reale è la (5):

$$\varphi_1 > \Delta > \varphi_1 - |\varphi_2|.$$

Ora, per la prima diseguaglianza, il numeratore della espressione di λ è negativo; se si vuole λ positiva, ossia l'immagine reale, dovrà esser negativo anche il denominatore. Per la seconda diseguaglianza il primo termine del denominatore è negativo e poichè l'altro è positivo dovrà essere

$$D(\Delta + |\varphi_2| - \varphi_1) > \varphi_1 (\Delta + |\varphi_2|),$$

cioè

$$D > \varphi_1 \frac{\Delta + |\varphi_2|}{\Delta + |\varphi_2| - \varphi_1}.$$

Il secondo membro di questa diseguaglianza è sempre maggiore di φ_1, quindi si vede che il cannocchiale non potrà servire per l'osservazione di oggetti molto vicini: in ogni caso l'oggetto dovrà esser più lontano del fuoco anteriore dell'obbiettivo semplice L_1.

Se nella (19) si pone $l - \Delta$ in luogo di λ si ha

$$l - \Delta = |\varphi_2| \frac{-D\varphi_1 + (D-\varphi_1)\Delta}{D(\varphi_1 - |\varphi_2| - \Delta) + \varphi_1(\Delta + |\varphi_2|)},$$

relazione che ridotta a forma intera e ordinata rispetto a Δ diviene

$$(20)\quad (D-\varphi_1)\Delta^2 - \{D\varphi_1 + (D-\varphi_1)l\}\Delta + D\varphi_1(|\varphi_2| + l) - (D-\varphi_1)l|\varphi_2| = 0.$$

Da questa si possono ricavare i valori di Δ corrispondenti ai diversi valori di D. Ad esempio, se dopo aver diviso l'equazione per D si pone $D = \infty$ si ottiene

$$\Delta_\infty^2 - (\varphi_1 + l)\Delta_\infty + \varphi_1(|\varphi_2| + l) - l|\varphi_2| = 0$$

dalla quale

$$\Delta_\infty = \frac{1}{2}(\varphi_1 + l) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varphi_1 + l)^2 - 4\varphi_1(|\varphi_2| + l) + 4l|\varphi_2|},$$

cioè, riducendo,

$$\Delta_\infty = \frac{1}{2}(\varphi_1 + l) \pm \frac{1}{2}(l - \varphi_1)\sqrt{1 + \frac{4|\varphi_2|}{l - \varphi_1}}.$$

Si osservi che in questo cannocchiale deve essere $l > \varphi_1$, altrimenti non si potrebbe raccogliere sul reticolo l'immagine di un oggetto lontanissimo, e perciò il radicale è sempre reale e maggiore dell'unità. Dei due segni della radice va evidentemente mantenuto il solo segno — perchè Δ dovendo essere minore di φ_1, e quindi di l, non può raggiungere e tanto meno superare $\frac{1}{2}(\varphi_1 + l)$. Rimane dunque

$$\Delta_\infty = \frac{1}{2}(l + \varphi_1) - \frac{1}{2}(l - \varphi_1)\sqrt{1 + \frac{4|\varphi_2|}{l - \varphi_1}}.$$

Si è già notato che il cannocchiale non può utilizzarsi per osservare oggetti assai vicini. Volendo la distanza minima si tenga presente che più l'oggetto si avvicina e più l'immagine

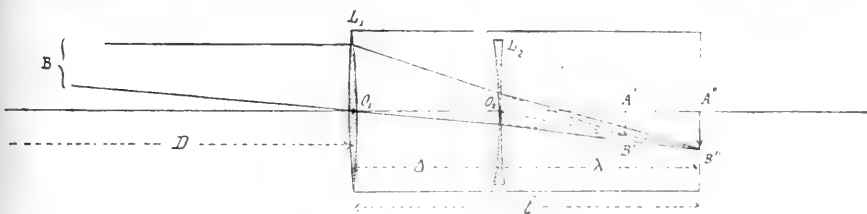



Fig. 8

datane da L_1 si allontana verso destra (fig. 8). La lente L_2, avendo per ufficio di ricondurre l'immagine nel piano fisso del reticolo, dovrà esercitare la sua azione divergente tanto meno quanto più l'oggetto si avvicina e quindi coll'avvicinarsi dell'oggetto dovrà allontanarsi da L_1. Ne segue che al minimo valore di D corrisponde il massimo valore di Δ che è φ_1 ed

allora per trovare il valor minimo della distanza a cui è visibile un oggetto si ricaverà D dalla (20), con che si ottiene

$$D = \frac{\varphi_1 |\varphi_2| l + \Delta \varphi_1 (l - \Delta)}{(|\varphi_2| - \varphi_1) l + (l - \Delta) \Delta - (|\varphi_2| - \Delta) \varphi_1},$$

e postovi $\Delta = \varphi_1$ se ne trae

$$D_{\text{min}} = \frac{\varphi_1}{|\varphi_2|} \left\{ \varphi_1 + \frac{|\varphi_2| l}{l - \varphi_1} \right\}.$$

Un cannocchiale di questo genere è quello recentemente costruito dalla Casa Zeiss (1909) dietro le indicazioni del professore H. Wild per applicarlo ad uno strumento topografico nel quale non interessava la collimazione di oggetti assai vicini. Il cannocchiale di Wild ha anche la particolarità di essere a visuale reciproca, ma di ciò parleremo nel parag. seguente.

I dati di questo cannocchiale sono

$$\varphi_1 = 149^{\text{mm}} \qquad |\varphi_2| = 500^{\text{mm}} \qquad l = 164^{\text{mm}}.$$

Risulta allora

$$D_{\text{min}} = 1^{\text{m}},683$$

che corrisponde a

$$\Delta_{\text{max}} = \varphi_1 = 149^{\text{mm}}.$$

Si ha inoltre

$$\Delta_{\text{min}} = \Delta_\infty = 69^{\text{mm}},6.$$

La corsa della lente mobile dalla osservazione di un oggetto a distanza infinita a quella di un oggetto alla distanza minima di $1^{\text{m}},683$ è dunque

$$149^{\text{mm}} - 69^{\text{mm}},6 = 79^{\text{mm}},4.$$

Tuttociò, s'intende, senza tener conto degli spessori delle lenti.

Riguardo all'ingrandimento, supposto ancora applicato al cannocchiale un oculare semplice di distanza focale $\psi = 12^{\text{mm}}$ si trova dalla (11''') che diviene

$$I_\infty = -\frac{\varphi_1}{\psi} \frac{|\varphi_2|}{\Delta_\infty + |\varphi_2| - \varphi_1},$$

$$I_\infty = -14,8.$$

L'ingrandimento normale del cannocchiale semplice con obbiettivo L_1 sarebbe

$$\mathfrak{J}_x = -\frac{\varphi_1}{\psi} = -12,4.$$

Un vantaggio del cannocchiale colla lente L_2 divergente su quello colla lente L_2 convergente sta appunto in ciò che il suo ingrandimento normale è maggiore di quello relativo al cannocchiale con obbiettivo semplice L_1.

L'ingrandimento relativo alla distanza minima alla quale si può osservare si ottiene dalla (11) scritta sotto la forma

$$I = -(D+b)\frac{\varphi_1}{\psi}\frac{|\varphi_2|}{(D-\varphi_1)(\Delta+|\varphi_2|)-D\varphi_1}$$

ponendovi per D il suo valor minimo trovato $1^m,683$, per Δ il valore corrispondente φ_1 e per b la costante $l+2\psi = 188^{mm}$. Risulta così

$$I_{D_{min}} = -15,60.$$

Quanto alla questione se un cannocchiale cosiffatto possa servire come distanziometro, valgono conclusioni analoghe a quelle tratte pel caso di L_2 convergente. In via rigorosa il cannocchiale non ha un punto anallattico, ma in pratica per distanze non troppo brevi esso potrà servire da distanziometro, specie se le distanze non si richiedono con un alto grado di precisione.

Pel caso numerico considerato, introducendo nella (20) diversi valori di D si trovano i seguenti valori di Δ

$D = \infty$	100^m	50^m	20^m	10^m	$1^m,683$
$\Delta = 69^{mm},57$	$70^{mm},33$	$71^{mm},10$	$73^{mm},45$	$77^{mm},54$	$149^{mm},00$.

Se si vuole che risulti $K = 100$ per $D = 50^m$, si ricaverà la distanza h dei fili dalla formola

$$h = \frac{\varphi_1|\varphi_2|}{K(\Delta+|\varphi_2|-\varphi_1)}$$

nella quale si deve porre per K il valore 100 e per Δ il valore $\Delta_{50} = 71^{mm},10$. Risulta così

$$h = 1^{mm},765.$$

Inoltre sostituendo nelle

$$q = -\frac{\varphi_1 (\Delta + |\varphi_2|)}{\Delta + |\varphi_2| - \varphi_1} \qquad K = \frac{\varphi_1 |\varphi_2|}{h (\Delta + |\varphi_2| - \varphi_1)}$$

i successivi valori di Δ già calcolati, si ottengono le ascisse da L_1 del 1° fuoco del sistema obbiettivo $L_1\, L_2$, in tal caso sempre negative, ed i valori di K corrispondenti alle diverse distanze. Si trovano i seguenti risultati:

D	q	K
∞	$-201^{mm},89$	100,36
100	201 ,70	100,18
50	201 ,60	100,00
20	201 ,30	99,45
10	200 ,81	98,50
1,683	193 ,40	84,42.

Anche qui lo spostamento del 1° fuoco del sistema $L_1\, L_2$ risulta senz'altro trascurabile e quanto a K le distanze della mira dall'obbiettivo L_1, superiori a 20^m, potranno dedursi con approssimazione in molti casi sufficiente mediante la formola

$$D = 0^m,20 + 100 \,.\, H.$$

Un altro scopo che si può raggiungere con un cannocchiale a lunghezza costante è quello di attenuare le variazioni dell'asse di collimazione che avvengono in conseguenza dell'aggiustamento del cannocchiale alle varie distanze di un oggetto osservato.

In un cannocchiale astronomico semplice l'asse di collimazione non ha nulla di assoluto se non si ammette che gli spostamenti del centro del reticolo avvengano lungo una retta che passa pel centro ottico dell'obbiettivo (lente sottile). Supponendo

questa condizione non soddisfatta, sia, (fig. 9), $x\,x$ una posizione dell'asse di collimazione di un cannocchiale semplice, che assumiamo come *normale*. Quando si collimi un punto alla distanza D

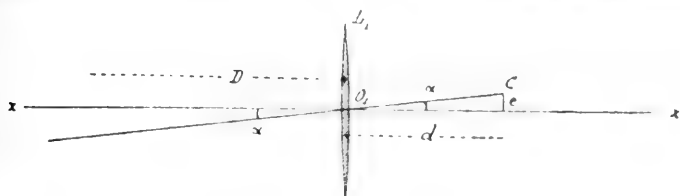



Fig. 9

sia C la posizione del centro del reticolo spostato rispetto $x\,x$ di una piccola distanza e. Lo spostamento dell'asse di collimazione è misurato dall'angoletto α che, detta al solito d la distanza del reticolo da L_1, viene espresso da

$$\alpha = \frac{e}{d},$$

cioè sostituendo per d il suo valore in funzione della distanza dell'oggetto

$$\alpha = e\,\frac{D - \varphi_1}{D\varphi_1}, \tag{21}$$

la quale mostra che per avere α piccolo conviene che sia grande la distanza obbiettiva φ_1.

Supponiamo ora di avere un cannocchiale a lunghezza costante con obbiettivo composto $L_1\,L_2$ essendo L_2 convergente (fig. 10) oppure divergente (fig. 11).

L'asse di collimazione *normale* in ciascuno di questi due cannocchiali può ritenersi definito dal centro ottico O_1 dell'obbiettivo L_1 e dal centro C del reticolo R fisso rispetto L_1. Indichiamo ancora con e la distanza O'_2O_2 del centro ottico O_2 della seconda lente, da questo asse O_1C per una certa posizione di L_2 relativa ad una distanza D dell'oggetto. L'occhio vedrà il punto collimato non già secondo l'asse normale CO_1, ma secondo la retta CO_2N la quale incontra il 2° piano focale di L_1 in M. Si conduca per M la parallela MM_1 a CO_1: la coniugata di questa retta rispetto L_1 e M_1F_1 e ad essa dovrà riuscir parallela la

coniugata di CO_2N rispetto L_1 perchè CO_2N e MM_1 si tagliano nel 2° piano focale di L_1. Sarà dunque NP, parallela ad M_1F_1

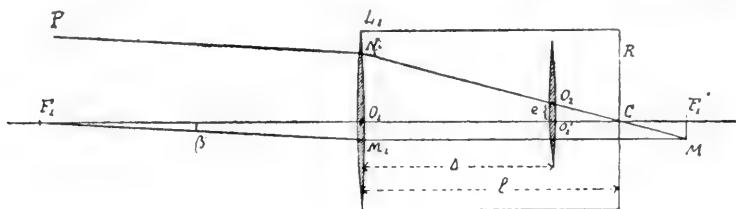



Fig. 10

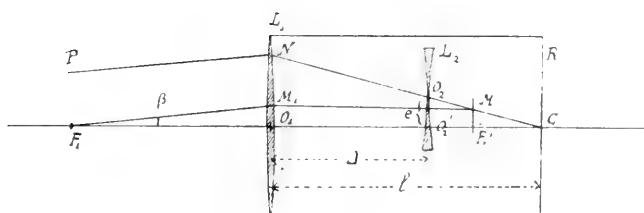



Fig. 11.

l'asse di collimazione attuale che forma con quello normale l'angoletto β.

Si ha ora

$$\beta = \frac{O_1M_1}{\varphi_1} = \frac{F_1'M}{\varphi_1}.$$

Ma dai triangoli simili $CF_1'M$, CO_2O_2' si trae, considerando come positivi i segmenti, come e, al di sopra dell'asse,

$$-F_1'M = e\frac{CF_1'}{O_2'C} = e\frac{\varphi_1 - l}{l - \Delta},$$

e quindi

$$\beta = -\frac{e}{\varphi_1}\,\frac{\varphi_1 - l}{l - \Delta}. \tag{22}$$

L'essere β positivo o negativo significa che lo spostamento dell'asse avviene nel senso di sollevarsi o di abbassarsi da sinistra verso destra. La differenza $\varphi_1 - l$ è costante e conviene che il suo valore assoluto sia piccolo acciocchè piccolo riesca β.

Per quanto riguarda la differenza variabile $l - \Delta$ che allo stesso scopo conviene sia grande, c'è da osservare che, avvicinandosi l'oggetto, la distanza Δ diminuisce o cresce secondochè L_2 è convergente o divergente, epperò nel primo caso; per uno stesso valore di e, l'angolo β diminuisce coll'avvicinarsi dell'oggetto e nel secondo caso avviene l'opposto. Volendo fare il confronto, per quanto riguarda gli spostamenti dell'asse di collimazione, fra un cannocchiale a lunghezza costante ed un cannocchiale semplice, supporremo che quest'ultimo non abbia una distanza focale obbiettiva invariabile, ma che per le diverse distanze D la distanza focale assuma gli stessi valori che prende quella variabile φ del sistema $L_1 L_2$ del cannocchiale composto per le stesse distanze. Bisognerà allora porre nella (21) φ in luogo di φ_1, essendo

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \qquad \text{oppure} \qquad \varphi = \frac{\varphi_1 \, |\varphi_2|}{|\varphi_2| + \Delta - \varphi_1},$$

nelle quali per Δ sono da introdurre i valori che si ricavano dalla (13) o dalla (20) per i considerati valori di D.

Facendo il rapporto di β ad α nella supposizione che siano eguali i valori di e e delle distanze D prese in esame, si ottiene

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{D}{D - \varphi} \, \frac{\varphi}{\varphi_1} \, \frac{\varphi_1 - l}{l - \Delta} \, . \tag{23}$$

Per l'esempio numerico già dato relativamente al cannocchiale di Porro:

$$\varphi_1 = 300^{mm} \qquad l = 200^{mm} \qquad \varphi_2 = 40^{mm}$$

si hanno i seguenti risultati:

$D = \infty$	100^m	50^m	20^m	10^m	1^m
$\frac{\beta}{\alpha} = -1{,}26$	$-1{,}25$	$-1{,}25$	$-1{,}25$	$-1{,}25$	$-1{,}24$,

ed essi dimostrano che per quanto si riferisce agli spostamenti dell'asse di collimazione il cannocchiale ad obbiettivo composto considerato presenta svantaggio rispetto al cannocchiale semplice di eguale distanza focale.

Ma se si considera quest'altro cannocchiale, pure con L_2 convergente:

$$\varphi_1 = 300^{mm} \qquad l = 295^{mm} \qquad \varphi_2 = 295^{mm}$$

col quale però per essere $\varphi_2 = l$ non è possibile osservare oggetti che non siano più distanti di F_1, si trovano gli altri valori

$D = \infty$	100^m	50^m	10^m	1^m
$\Delta = 259^{mm},34$	$256^{mm},12$	$253^{mm},49$	$219^{mm},23$	$152^{mm},36$
$\frac{\beta}{\alpha} = -0,12$	$-0,11$	$-0,11$	$-0,05$	$-0,03$

dai quali apparisce come gli spostamenti dell'asse di collimazione nel cannocchiale composto sieno fortemente ridotti.

Pel cannocchiale con lente mobile divergente preso in esame si ha

$D = \infty$	100^m	50^m	20^m	10^m	$1^m,683$
$\frac{\beta}{\alpha} = 0,31$	$0,31$	$0,31$	$0,31$	$0,31$	$0,30$

e questi valori attestano la convenienza del cannocchiale composto.

7. Cannocchiali a visuale reciproca. — Alle estremità di un tubo si immaginino rigidamente montati (fig. 12) due ob-

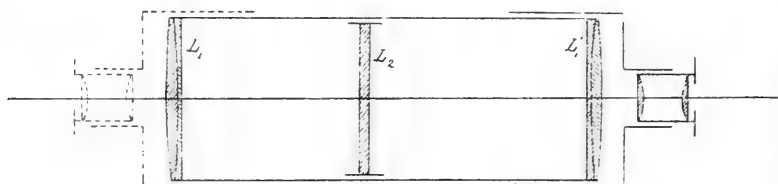



Fig 12

biettivi identici L_1, L_1', ciascuno composto di un accoppiamento acromatico fra le cui lenti sia inciso un reticolo e nell'interno del tubo sia mobile longitudinalmente, mediante un rocchetto a cremagliera, una lente L_2 che potrà essere convergente o

divergente. Poichè L_2 accoppiandosi coll'una o coll'altra delle due lenti estreme L_1, L_1' dà luogo ad un obbiettivo composto con distanza focale variabile, risulta evidente, per quanto si è detto in precedenza, che fissando opportunamente le distanze focali delle lenti e la lunghezza del tubo, un tale cannocchiale non solo sarà di lunghezza costante, ma anche a *visuale reciproca*; potrà cioè essere indifferentemente adoperato in un senso o nell'altro quando a mezzo di un tubo suppletivo si abbia modo di applicare davanti all'una o all'altra delle due lenti L_1, L_1' un oculare a fuoco esterno.

I cannocchiali a visuale reciproca vengono assai utilmente applicati nei livelli allo scopo di liberarsi dalla influenza di alcuni errori istrumentali, ed è appunto del tipo ora descritto, con una lente mobile divergente, il cannocchiale a visuale reciproca e lunghezza costante applicato al livello Wild (*). Quando una delle due lenti estreme funziona da supporto del reticolo, vi si adatta l'oculare in modo da vederne chiare le incisioni ed in questo caso i tratti incisi sull'altra lente che funziona da obbiettivo non si vedono e non producono alcun inconveniente.

III. — Cannocchiali nei quali è costante la distanza λ fra la lente L_2 ed il reticolo.

8. Cannocchiale con oculare negativo. — Si può accoppiare all'obbiettivo L_1 di un cannocchiale astronomico semplice (fig. 13) una seconda lente L_2 a distanza Δ variabile dalla prima e che nel suo movimento trasporti invariabilmente connesso il reticolo R, il quale viene così a mantenersi ad una distanza λ costante da L_2. Il tubo T' nel quale sono fissati la lente L_2 ed il reticolo R e che porta anche la lente oculare può scorrere entro quello T al cui estremo è montato l'obbiettivo L_1, e questa disposizione permette di accomodare lo strumento alla visione di oggetti a diverse distanze, vale dire di fare in modo che l'immagine venga costantemente a formarsi sul piano R.

(*) " Zeitschrift für Istrumentenkunde ", Novembre, 1909.

A questo punto ricordiamo che Huyghens, al doppio scopo di attenuare le aberrazioni sferiche prodotte da una sola lente

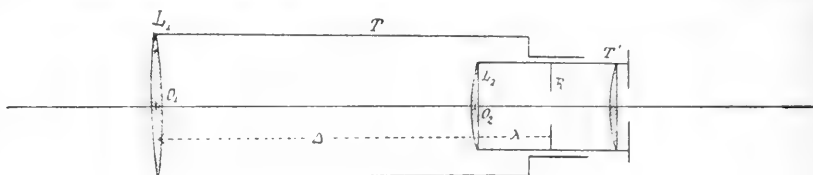



Fig. 13

oculare e di ingrandire il campo, sostituì all'oculare semplice un oculare composto di due lenti convergenti di distanze focali ψ_1 e $\psi_2 = \frac{1}{4}\psi_1$ fissate alle estremità di un tubetto alla distanza reciproca $\Delta = \frac{1}{2}\psi_1$. Airy (*) adoperò invece la combinazione di due lenti piano convesse rivolgenti la convessità verso la luce incidente e tali che $\psi_2 = \frac{1}{3}\psi_1$, $\Delta = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$. Quest'ultima condizione rende il sistema acromatico, quindi questo secondo oculare è più usato del primo, e siccome ambedue sono *negativi* o *a fuoco interno* l'oculare di Airy viene anch'esso comunemente chiamato di Huyghens.

Comunque, quando un cannocchiale con oculare negativo è munito di reticolo, questo deve esser disposto fra le due lenti. Ma occorrerà che il reticolo possa adattarsi alla visione distinta dei vari osservatori, ed allora, o mantenendo le lenti fisse si rende lievemente spostabile la piastrina dei fili fra di esse, o fissato il reticolo a distanza invariabile dalla lente collettiva, si rende mobile la vera lente oculare.

Se il cannocchiale serve solo per individuare direzioni nello spazio, cioè se il reticolo ha due soli fili in croce, la prima disposizione è certamente preferibile alla seconda, perchè, a differenza di questa, lascia inalterata la condizione di acromatismo dipendente dalla distanza fra le lenti. Ma se il cannocchiale è

(*) Vedi: N. Jadanza, *Teorica dei cannocchiali*, 2ª ediz., Torino, 1906, pag. 182 e 193-194.

distanziometro, diremo fra poco che la condizione perchè esso abbia un punto anallattico (che coincide col fuoco anteriore dell'obbiettivo semplice L_1) è che il reticolo stia a distanza fissa dalla lente collettiva e tutto al più questa distanza potrà lievemente variarsi solo per ridurre normale il valore della costante distanziometrica, ma non mai per l'accomodamento a vista dei fili. E allora non rimane che a spostare la lente oculare, con che non riesce più soddisfatta la condizione di acromatismo. Concludiamo dunque col dire che l'oculare negativo non conviene per cannocchiali distanziometri.

Finora abbiamo parlato di *oculare negativo* o *di Huyghens*, e con ciò si viene ad ammettere che la lente collettiva faccia parte di esso. Ma se si ritiene che in un cannocchiale il sistema obbiettivo sia quello destinato a dare dell'oggetto osservato una immagine reale nel piano del reticolo ed il sistema oculare sia il microscopio col quale si effettua l'osservazione contemporanea di questa immagine reale e dei fili, apparisce almeno lecito considerare come facenti parte del sistema obbiettivo tutte le lenti che si trovano *prima* del reticolo e come appartenenti all'oculare quelle che si trovano *dopo*. In base a ciò un cannocchiale con oculare negativo può considerarsi invece ad oculare semplice (la sola lente oculare propriamente detta) e ad obbiettivo composto di due lenti: l'una l'obbiettivo L_1 propriamente detto, l'altra la lente collettiva che indicheremo quindi con L_2. Le due lenti sono a distanza Δ variabile, ma il reticolo è a distanza λ fissa dalla seconda lente L_2, epperò il cannocchiale appartiene a quelli della terza categoria.

Considerando il caso generale e nella supposizione di L_2 convergente riprendiamo la (8)

$$d = \Delta + \frac{\varphi_2 \lambda}{\varphi_2 - \lambda}.$$

Se fosse $\lambda = \varphi_2$ il piano del reticolo coinciderebbe col 2º piano focale L_1, e quindi per potervi raccogliere l'immagine occorrerebbe che fra le due lenti L_1, L_2 i raggi corressero paralleli all'asse, cioè che i raggi incidenti passassero pel fuoco anteriore F_1 di L_1. In altri termini, il cannocchiale non potrebbe adattarsi per le diverse distanze dell'oggetto; funzionerebbe solo pel caso che l'oggetto fosse al fuoco anteriore di L_1,

e ciò accadrebbe per qualunque valore di Δ. Questo si vede anche dalla relazione ora scritta, la quale per $\lambda = \varphi_2$ non può essere soddisfatta che per $d = \infty$, cioè per $D = \varphi_1$, e allora Δ è indeterminata.

Escluso questo caso, la espressione di d, per essere il secondo termine del secondo membro costante, mostra che le variazioni di Δ sono le stesse di quelle di d, ossia per adattare il cannocchiale alle diverse distanze si richiedono gli stessi allungamenti ed accorciamenti che hanno luogo nel cannocchiale semplice di obbiettivo L_1. Inoltre se l'oggetto è al fuoco anteriore di L_1 risulta $d = \infty$, e poichè λ è diverso da φ_2 dovrà anche resultare $\Delta = \infty$, e quindi il cannocchiale non potrà funzionare pel valore della distanza D eguale a φ_1 e, praticamente, per valori di D poco superiori a φ_1.

Scriviamo la (8) sotto la forma

$$\frac{D\varphi_1}{D - \varphi_1} = \Delta + \frac{\varphi_2 \lambda}{\varphi_2 - \lambda}$$

e caviamone

$$\Delta = \frac{D\varphi_1}{D - \varphi_1} - \frac{\varphi_2 \lambda}{\varphi_2 - \lambda} .$$

Sia $\lambda > \varphi_2$.

Per $D = \infty$ si trae

$$\Delta_\infty = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 \lambda}{\lambda - \varphi_2}$$

che è un valor minimo di Δ.

Per $D > \varphi_1$ la distanza Δ risulta sempre positiva ed aumenta col diminuire di D fino a diventare infinita per $D = \varphi_1$.

Per $D < \varphi_1$ la distanza Δ risulterà positiva fino a che

$$\frac{\varphi_2 \lambda}{\lambda - \varphi_2} > \frac{D\varphi_1}{D - \varphi_1} ,$$

cioè per

$$D < \frac{\lambda \varphi_1 \varphi_2}{\lambda(\varphi_1 + \varphi_2) - \varphi_1 \varphi_2} .$$

Stabilito dunque un massimo di Δ, dalla relazione

$$\Delta_{max} = \frac{D'\varphi_1}{D' - \varphi_1} + \frac{\varphi_2 \lambda}{\lambda - \varphi_2}$$

si caverebbe il valore di D indicato con D', ed allora un cannocchiale di questo genere potrebbe funzionare nell'intervallo $D = \infty$, $D = D'$ oppoi nell'altro $D = \frac{\lambda \varphi_1 \varphi_2}{\lambda(\varphi_1 + \varphi_2) - \varphi_1 \varphi_2}$, $D = 0$, ma non nell'intervallo $D = D'$, $D = \frac{\lambda \varphi_1 \varphi_2}{\lambda(\varphi_1 + \varphi_2) - \varphi_1 \varphi_2}$ comprendente $D = \varphi_1$.

Sia ora $\lambda < \varphi_2$, ciò che corrisponde al caso ordinario.

Si ponga

$$\lambda = \mu \varphi_2$$

in cui $\mu < 1$ e con ciò risulta

$$\frac{\varphi_2 \lambda}{\varphi_2 - \lambda} = \frac{\mu}{1 - \mu} \varphi_2 .$$

Per $D = \infty$, l'espressione

$$\Delta = \frac{D \varphi_1}{D - \varphi_1} - \frac{\mu}{1 - \mu} \varphi_2$$

assume il valor minimo

$$\Delta_\infty = \varphi_1 - \frac{\mu}{1 - \mu} \varphi_2 .$$

e perchè Δ_∞ risulti positivo dovrà essere

$$\varphi_1 > \frac{\mu}{1 - \mu} \varphi_2 ,$$

cioè

$$\varphi_2 < \frac{1 - \mu}{\mu} \varphi_1 .$$

Assunto un valor massimo di Δ, dalla relazione

$$\Delta_{\max} = \frac{D \varphi_1}{D - \varphi_1} - \frac{\mu}{1 - \mu} \varphi_2$$

si cava il minimo valore di D

$$D_{\min} = \varphi_1 \frac{(1 - \mu) \Delta_{\max} + \mu \varphi_2}{(1 - \mu) \Delta_{\max} + \mu \varphi_2 - (1 - \mu) \varphi_1}$$

pel quale il cannocchiale può funzionare.

Esempio. — Sia data $\varphi_1 = 300^{mm}$.

Nel cannocchiale detto con oculare di Huyghens (Airy) è $\lambda = \frac{1}{3}\varphi_2$ essendo ora φ_2 la distanza focale della lente collettiva che consideriamo come seconda lente L_2 dell'obbiettivo composto $L_1 L_2$. Sarà $\mu = \frac{1}{3}$ e assunta per es. $\varphi_2 = 45^{mm}$ si avrà come distanza minima fra le due lenti

$$\Delta_\infty = \varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_2 = 277^{mm},5.$$

Volendo $\Delta_{max} = 317^{mm},5$, il che corrisponde ad una corsa massima del reticolo di 40^{mm}, risulta, calcolando la formola trovata,

$$D_{min} = 8,5\,\varphi_1 = 2^{m},490.$$

La lente oculare ha per distanza focale $\frac{1}{3}\varphi_2$ e quindi risulta di 15^{mm}.

Per $D = \infty$ la distanza focale del sistema $L_1 L_2$ è

$$\varphi_\infty = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta_\infty} = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_1 + \dfrac{\mu}{1-\mu}\varphi_2} = (1-\mu)\,\varphi_1,$$

minore cioè della distanza focale φ_1, e quindi l'ingrandimento normale I_∞ del cannocchiale composto è minore di quello $\mathfrak{J}_\infty$ del cannocchiale con obbiettivo semplice L_1, come d'altronde deriva subito dal fatto che $\Delta_\infty < \varphi_1$ o dalla (6') del paragr. 1.

Precisamente viene

$$I_\infty = (1-\mu)\,\mathfrak{J}_\infty,$$

quindi nel caso numerico considerato $I_\infty = \frac{2}{3}\mathfrak{J}_\infty$ ed essendo $\mathfrak{J}_\infty = \frac{\varphi_1}{\psi} = 20$ si ha $I_\infty = 13,33$.

Volendo l'ingrandimento alla distanza minima $D = 2^{m},490$ si sostituirà questo valore nella (6) ove

$$b = \Delta_{max} + \lambda + 2\psi = 362^{mm},5$$

e si ottiene

$$I_{D_{min}} = 17,10.$$

La distanza l del reticolo da L_1, quando si osserva un oggetto a distanza D, è

$$l = \Delta + \lambda = d - \frac{\mu}{1-\mu}\varphi_2 + \mu\varphi_2 = d - \frac{\mu^2}{1-\mu}\varphi_2 .$$

Se invece il cannocchiale fosse semplice col solo obbiettivo L_1 la detta lunghezza sarebbe

$$l' = d.$$

Si ha quindi

$$l' - l = \frac{\mu^2}{1-\mu}\varphi_2$$

che è l'accorciamento del cannocchiale considerato rispetto a quello semplice. Tale accorciamento è costante per qualunque valore di D e per $\mu = \frac{1}{3}$ coi dati del caso numerico preso in esame viene

$$l' - l = \frac{1}{6}\varphi_2 = 7^{\mathrm{mm}}{,}5$$

mentre il rapporto delle lunghezze telescopiche è

$$\frac{l_\infty}{l'_\infty} = \frac{\varphi_1 - \frac{\mu^2}{1-\mu}\varphi_2}{\varphi_1} = 1 - \frac{\mu^2}{1-\mu}\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 1 - \frac{1}{6}\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 0{,}975$$

e questo risultato mostra che la riduzione dell'ingrandimento del cannocchiale composto rispetto al cannocchiale semplice, già trovata di $\frac{1}{3}$, è molto più notevole della riduzione di lunghezza.

Al paragr. 5 si è già mostrato che un cannocchiale del tipo ora veduto, avente cioè la distanza λ fra la seconda lente L_2 ed il reticolo R costante può usarsi come distanziometro avendo per punto anallattico il fuoco anteriore dell'obbiettivo L_1 come un cannocchiale semplice. Ciò è reso evidente dalla (16). Solo che la costante distanziometrica invece che essere espressa dal rapporto fra la distanza focale di L_1 e la distanza h tra i fili è data da

$$K = \frac{\varphi_1}{h}\left(1 - \frac{\lambda}{\varphi_2}\right).$$

Si è già visto che in un cannocchiale anallattico si può ricondurre la costante distanziometrica al suo valore normale, qualora ne differisse, con un leggero spostamento della lente anallattica. Nel caso presente si offre la medesima possibilità, ma spostando invece il reticolo rispetto L_2, cioè variando opportunamente la distanza λ. Si ha infatti, considerando K come funzione di λ,

$$dK = -\frac{\varphi_1}{h\varphi_2}\,d\lambda$$

e sostituendo per h il suo valore

$$h = \frac{\varphi_1}{K}\left(1 - \frac{\lambda}{\varphi_2}\right)$$

si ricava

$$d\lambda = -\frac{\varphi_2 - \lambda}{K}\,dK.$$

Coi dati del nostro esempio, volendo $K = 100$, si trova

$$h = \frac{\varphi_1}{K}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2^{mm},0$$

e

$$d\lambda = -\frac{2}{3}\frac{\varphi_2}{K}\,dK = -0{,}30\,dK.$$

Se, per esempio, si è trovato sperimentalmente $K = 100{,}34$, per ridurre la costante al suo valor nominale 100 si dovrà spostare il reticolo di

$$d\lambda = +0{,}30 \times 0{,}34 = +0^{mm},10.$$

Il segno positivo indica che il reticolo deve essere *allontanato* da L_2.

Ad onta del vantaggio di poter rettificare la costante distanziometrica, l'applicazione dell'oculare negativo ad un cannocchiale topografico non è consigliabile per le ragioni già esposte.

La considerazione di un cannocchiale ancora colla distanza λ costante, ma colla lente L_2 divergente anzichè convergente, non offre interesse speciale, nè tale strumento sarebbe conveniente dal punto di vista delle aberrazioni.

IV. — Teleobbiettivi (*).

9. Generalità. — Un'altra condizione alla quale può assoggettarsi il sistema $L_1 L_2$ è quella di accrescere l'ingrandimento relativo alla sola lente L_1 senza rendere eccessive le dimensioni dello strumento al quale il sistema è applicato.

Se ad una camera oscura o ad un cannocchiale astronomico ad obbiettivo semplice L_1 di distanza focale φ_1 si suppone di cambiare l'obbiettivo mettendone un altro di distanza focale $n\varphi_1$, è evidente che l'ingrandimento normale nell'uno e nell'altro caso sarà divenuto n volte maggiore. In pratica però nei casi in cui occorrono forti ingrandimenti non si possono dare valori assai grandi alla distanza focale dell'obbiettivo a causa delle incomode dimensioni che assumerebbe lo strumento. Da ciò l'idea di accoppiare all'obbiettivo semplice L_1 una seconda lente L_2 la quale dia luogo ad un sistema $L_1 L_2$ di distanza focale $n\varphi_1$ ed il cui 2° piano principale cada posteriormente al reticolo o anteriormente ad L_1 in guisa che lo strumento, pur realizzando un ingrandimento corrispondente alla distanza focale $n\varphi_1$, richieda una lunghezza minore di quella che sarebbe necessaria con un obbiettivo semplice di distanza focale $n\varphi_1$.

Un tale accoppiamento di lenti prende il nome di *teleobbiettivo*.

Se un cannocchiale in luogo di un obbiettivo semplice ha un teleobbiettivo, dicesi anche *cannocchiale ridotto od accorciato*.

Un teleobbiettivo può ottenersi combinando la lente convergente primitiva L_1 sia con una lente L_2 convergente, sia con una lente divergente.

10. Teleobbiettivo con L_2 convergente. — Per le conclusioni tratte alla fine del paragr. 1 sappiamo già che se si vuole un aumento d'ingrandimento, delle due condizioni (4) per

---

(*) Vedi: N. Jadanza, *Il teleobbiettivo e la sua storia*. " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1898-99; *Alcuni sistemi diottrici speciali ed una nuova forma di teleobbiettivo*. " Idem. ", 1902-1903; V. Reina, *Teoria degli strumenti diottrici*. Hoepli, 1908, pag. 208 e seg.

l'immagine reale non è utilizzabile che la seconda $\Delta > \varphi_1 + \varphi_2$. In tal caso Δ potrà assumersi così poco superiore alla somma $\varphi_1 + \varphi_2$ che posto nella (12) $I_\infty = n\mathfrak{I}_\infty$ si verifichi

$$n = \frac{\varphi_2}{\Delta - \varphi_1 - \varphi_2} \tag{24}$$

ove si è tolto a Δ l'indice $_\infty$ perchè supponiamo le lenti L_1, L_2 a distanza reciproca invariabile.

Il cambiamento di senso della differenza al denominatore importa il cambiamento di segno del rapporto dei due ingrandimenti I_∞ e $\mathfrak{I}_\infty$, e ciò sta ad indicare che l'immagine ottenuta col teleobbiettivo $L_1 L_2$ è disposta in senso contrario a quello dell'immagine che si otterrebbe col solo obbiettivo L_1.

Dalla (24) si ricava

$$\Delta = \varphi_1 + \frac{n+1}{n}\varphi_2,$$

e allora sostituendo questo valore nella espressione della distanza del 2° fuoco F' del sistema $L_1 L_2$ dalla lente L_2 si ottiene

$$O_2 F' = \frac{\varphi_2(\Delta - \varphi_1)}{\Delta - \varphi_1 - \varphi_2} = (n+1)\varphi_2.$$

Ora se alla distanza Δ si aggiunge la distanza $O_2 F'$ si avrà la *lunghezza normale* l_∞ della camera oscura o del cannocchiale, corrispondente cioè ad una distanza infinita dell'oggetto osservato, e risulta

$$l_\infty = \Delta + O_2 F' = \varphi_1 + \frac{(n+1)^2}{n}\varphi_2.$$

Qualora lo stesso ingrandimento normale $I_\infty = n\mathfrak{I}_\infty$ fosse stato realizzato con un obbiettivo semplice, la lunghezza normale della camera oscura o del cannocchiale sarebbe stata

$$L_\infty = n\varphi_1,$$

quindi *l'accorciamento normale* ottenuto col teleobbiettivo è

$$a_\infty = L_\infty - l_\infty = (n-1)\varphi_1 - \frac{(n+1)^2}{n}\varphi_2$$

e ci sarà convenienza ad applicare il teleobbiettivo quante volte a sia positivo, cioè quando sia

$$(n-1)\,\varphi_1 > \frac{(n+1)^2}{n}\,\varphi_2 ,$$

ovvero

$$\varphi_1 > \frac{(n+1)^2}{n\,(n-1)}\,\varphi_2 .$$

Esempio. — Si abbiano $\varphi_1 = 1^m,000$, $\varphi_2 = 0^m,020$ e si voglia $n = 6$.

Si calcolano colle espressioni trovate:

$\Delta = 1^m,0233$ che soddisfa perchè si verifica $\Delta > \varphi_1 + \varphi_2$,
$l_\infty = 1^m,163$,
$a_\infty = 4^m,837$.

Con questo teleobbiettivo applicato ad una camera oscura lunga $1^m,163$ si ottiene lo stesso ingrandimento normale che si otterrebbe con un obbiettivo semplice adoperando una camera oscura della lunghezza di 6^m.

11. Teleobbiettivo colla lente L_2 divergente. — Ponendo nella (12′) $I_\infty = n\mathfrak{I}_\infty$ se ne ottiene

$$n = \frac{|\varphi_2|}{\Delta - \varphi_1 + |\varphi_2|} \tag{24'}$$

la quale può coesistere colle condizioni (5) necessarie per l'immagine reale.

Si ricava

$$\Delta = \varphi_1 - \frac{n-1}{n}\,|\varphi_2|$$

e con questo valore si ha

$$O_2F' = \frac{|\varphi_2|\,(\varphi_1 - \Delta)}{\Delta - \varphi_1 + |\varphi_2|} = (n-1)\,|\varphi_2|:$$

la lunghezza normale della camera oscura o del cannocchiale risulta quindi

$$l_\infty = \Delta + O_2F' = \varphi_1 + \frac{(n-1)^2}{n}\,|\varphi_2| = n\,\varphi_1 - (n-1)\,\Delta ,$$

onde l'accorciamento normale sarà

$$a_\infty = n\varphi_1 - l_\infty = (n-1)\varphi_1 - \frac{(n-1)^2}{n}|\varphi_2| = (n-1)\Delta$$

e ci sarà convenienza ad applicare il sistema $L_1 L_2$ quando sia

$$(n-1)\varphi_1 > \frac{(n-1)^2}{n}|\varphi_2|,$$

cioè

$$\varphi_1 > \frac{n-1}{n}|\varphi_2|.$$

Esempio. — Si abbiano $\varphi_1 = 0^m,110$, $|\varphi_2| = 0^m,030$ e si voglia $n = 6$.

Si calcolano colle formole trovate

$$\Delta = 0^m,085 \qquad l_\infty = 0^m,235 \qquad a_\infty = 0^m,425.$$

Il teleobbiettivo si applica con grande vantaggio alla camera oscura quando si richiedano fotografie dettagliate a grandi distanze, come accade per scopi militari. L'esempio precedente si riferisce ad un apparecchio di piccole dimensioni; ecco i dati per un teleobbiettivo di maggior potenza:

$$\varphi_1 = 0^m,60 \qquad |\varphi_2| = 0^m,20 \qquad \Delta = 0^m,41.$$

La distanza focale del sistema è

$$\varphi = \frac{\varphi_1 |\varphi_2|}{\Delta - \varphi_1 + |\varphi_2|} = 12^m,00$$

e quindi

$$n = \frac{\varphi}{\varphi_1} = 20.$$

Inoltre risultano

$$l_\infty = 4^m,21 \qquad a_\infty = 7^m,79.$$

Con questo teleobbiettivo applicato ad una camera oscura lunga $4^m,21$ (misurata dalla prima lente) si ottiene lo stesso effetto che con una camera oscura ad obbiettivo semplice di 12^m di profondità. Un edificio di 25^m fotografato alla distanza di 25 Chm. apparisce nel cliché con una dimensione di 12^{mm}.

Riprendiamo le espressioni (24) e (24') e in ciascuna di esse consideriamo m successivamente come funzione della sola Δ o della sola φ_1 o della sola φ_2. Si ottengono nei due casi le derivate seguenti:

$$\frac{dn}{d\Delta} = -\frac{\varphi_2}{(\Delta - \varphi_1 - \varphi_2)^2} \qquad \frac{dn}{d\Delta} = -\frac{|\varphi_2|}{(\Delta - \varphi_1 + |\varphi_2|)^2}$$

$$\frac{dn}{d\varphi_1} = \frac{\varphi_2}{(\Delta - \varphi_1 - \varphi_2)^2} \qquad \frac{dn}{d\varphi_1} = \frac{|\varphi_2|}{(\Delta - \varphi_1 + |\varphi_2|)^2}$$

$$\frac{dn}{d\varphi_2} = \frac{\Delta - \varphi_1}{(\Delta - \varphi_1 - \varphi_2)^2} \qquad \frac{dn}{d|\varphi_2|} = -\frac{\varphi_1 - \Delta}{(\Delta - \varphi_1 + |\varphi_2|)^2}\,.$$

Le prime relazioni mostrano che, sia per L_2 convergente, sia per L_2 divergente l'ingrandimento cresce col diminuire di Δ, perciò si possono costruire teleobbiettivi a distanza Δ variabile coi quali si potranno realizzare diversi valori dell'ingrandimento.

Dalle seconde espressioni si deduce che in ambi i casi l'ingrandimento del teleobbiettivo è tanto maggiore quanto è più grande la distanza focale della prima lente L_1.

Finalmente le ultime derivate fanno vedere che nel caso di due lenti convergenti l'ingrandimento del teleobbiettivo cresce col crescere della distanza focale della seconda lente, mentre nel caso che quest'ultima sia divergente l'ingrandimento cresce col diminuire del valore assoluto della sua distanza focale.

La durata dello splendere del Sole sull'orizzonte di Torino nel sessennio 1899-1905

(MANCA L'ANNO 1903).

Nota del Prof. B. RAINALDI
già Assistente all'Osservatorio della R. Università di Torino.

(Prima Parte).

Dei calcoli delle osservazioni eliofanografiche, fatte nel R. Osservatorio Astronomico e Meteorologico di Torino (Palazzo Madama) dall'anno 1890 all'anno 1909, mancavano ancora i calcoli che riguardano le osservazioni fatte negli anni che vanno dal 1899 al 1905. Con la presente pubblicazione, soddisfacendo anche all'impegno preso nel 1911, il sottoscritto colma la lacuna, dolente di non aver potuto rintracciare le cartine eliofanografiche del 1903; per conseguenza, della durata dello splendere del sole del detto anno mancano dati e calcoli, e il settennio 1899-1905 si riduce a un sessennio.

La struttura di questa Nota è simigliante a quella della Nota pubblicata pure dal sottoscritto nel 1911 sul soleggiamento durante il quadriennio 1906-1909: quindi, per la migliore intelligenza di essa (sulle notizie bibliografiche, sulla disposizione delle tavole, sul metodo, sul fine) il sottoscritto si richiama alla prefazione della Nota sul soleggiamento del citato quadriennio. Si osserva però:

1° che in questa pubblicazione non sono riferiti i risultati eliofanometrici diurni (e perciò manca per ogni anno la Tabella I);

2° che le osservazioni sul soleggiamento avvenuto nei singoli anni non sono esposte anno per anno come nella Nota del suddetto quadriennio, ma sono raccolte in un quadro sintetico posto alla fine di questa pubblicazione (Tabella VI).

Si osserva inoltre:

3° che il valore di B (durata teorica dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino) è stato preso dal calcolo fatto dal Dott. V. Balbi nel 1897 (v. " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, vol. XXXII, 1895-96, pag. 1048);

4° che i valori massimi e minimi e quelli degni di particolare rilievo sono stampati in carattere grassetto;

5° che questa Nota sarà stampata in due puntate, la prima delle quali, la presente cioè, contiene le prime due Tabelle di ogni anno, e l'altra che seguirà tra breve a questa, conterrà le altre tre Tabelle.

Non appena saranno pubblicati i calcoli sulla durata dello splendere del sole durante il biennio 1910-1911 (pubblicazione che il sottoscritto spera di fare tra breve), si potrà finalmente procedere al calcolo dei valori normali, determinare con maggiore approssimazione l'andamento dello splendere del sole nei giorni, mesi e stagioni dell'anno, e passare allo studio delle relazioni che intercedono tra il soleggiamento e le altre condizioni climatologiche di Torino.

TABELLA II. — **Risultati eliofanometrici decadici e mensili dell'anno 1899.**

A = Durata effettiva dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino, espressa in ore.

B = Durata teorica dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino, espressa in ore.

1899	1ª Decade			2ª Decade			3ª Decade			MESE		
	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$
	h	h		h	h		h	h		h	h	
Gennaio	27,4	88,6	0,309	45,8	91,2	0,502	8,4	104,4	0,080	81,6	284,2	0,287
Febbraio . . .	31,6	99,4	0,318	25,3	104,1	0,243	48,1	86,0	0,560	104,9	289,5	0,362
Marzo	46,5	113,5	0,410	62,3	118,7	0,525	81,7	136,6	0,598	190,5	368,8	0,516
Aprile	83,6	129,7	0,644	37,4	134,8	0,277	65,0	139,7	0,465	186,0	404,2	0,459
Maggio	65,7	144,2	0,455	64,2	148,3	0,433	63,2	167,0	0,379	193,1	459,5	0,420
Giugno	108,7	154,3	0,704	44,0	155,3	0,285	72,5	155,5	0,466	225,2	465,3	0,484
Luglio	97,0	154,4	0,628	83,9	152,1	0,552	90,9	163,6	0,556	271,8	470,1	0,582
Agosto	80,3	144,7	0,555	83,6	140,1	0,597	90,0	148,6	0,606	253,9	433,4	**0,586**
Settembre . .	68,0	129,8	0,524	67,6	124,7	0,542	23,7	119,5	0,198	159,3	374,0	0,426
Ottobre	29,1	114,3	0,255	33,0	109,2	0,302	52,8	114,3	0,461	114,9	337,8	0,340
Novembre . .	0,5	99,0	**0,005**	52,7	94,8	0,556	64,8	91,3	**0,709**	118,0	285,1	0,414
Dicembre . . .	27,1	88,7	0,306	11,1	87,3	0,127	3,1	95,9	0,302	41,3	271,9	**0,152**

TABELLA II. — **Risultati eliofanometrici decadici e mensili dell'anno 1900.**

A = Durata effettiva dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino, espressa in ore.

B = Durata teorica dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino, espressa in ore.

1900	1ª Decade			2ª Decade			3ª Decade			MESE		
	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$
	h	h		h	h		h	h		h	h	
Gennaio	10,6	88,6	0,119	34,4	91,2	0,377	32,1	104,4	0,307	77.1	284,2	0,271
Febbraio . . .	6.8	99.4	0,069	42,9	104,1	0.412	48.9	97,1	0,503	98,6	300.6	0.328
Marzo	68,9	113,5	0,605	55,8	118,7	0,470	45.1	136,6	0,330	169,8	368.8	0,460
Aprile	56.5	129.7	0.436	94,4	134.8	**0,700**	66.9	139.7	0.479	217.8	404.2	0.539
Maggio	51.1	144.2	0.354	48.4	148.3	0.326	79.2	167.0	0.474	178.7	459.5	0.389
Giugno	38.6	154.3	0.250	65.6	155,5	0.423	66.0	155.5	0.424	170.2	465.3	0.366
Luglio	81,7	154.4	0,529	89,9	152,1	0,591	112,6	163,6	0,688	284,2	470.1	**0,605**
Agosto	78.6	144.7	0.543	63.3	140.1	0.452	22.9	148,6	0.153	164.8	433,4	0,380
Settembre . .	46.1	129.8	0.355	37.9	124.7	0.304	19.1	119.5	0.159	103.1	374.0	0.276
Ottobre	51.3	114.3	0,449	40,4	109.2	0.369	48.1	114.3	0.421	139.8	337.8	0.414
Novembre . .	0.0	99.0	**0,000**	7.5	94.8	0,079	10.6	91.3	0.116	18.1	285.1	**0,063**
Dicembre . . .	44.2	88.7	0,498	49.0	87.3	0.561	40.9	95.9	0,426	134.1	271.9	0.493

TABELLA II. - **Risultati eliofanometrici decadici e mensili dell'anno 1901.**

A = Durata effettiva dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino, espressa in ore.

B = Durata teorica dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino, espressa in ore.

1901	1ª Decade			2ª Decade			3ª Decade			MESE		
	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$
	h	h		h	h		h	h		h	h	
Gennaio	11,5	88,6	0,130	49,2	91,2	0,539	73,5	104,4	0,704	134,2	284,2	0,472
Febbraio . . .	31,8	99,4	0,320	63,8	104,1	0,613	65,7	86,0	**0,764**	161,3	289,5	**0,557**
Marzo	48,6	113,5	0,428	1,1	118,7	**0,009**	52,4	136,6	0,383	102,1	368,8	0,277
Aprile	31,6	129,7	0,243	94,4	134,8	0,700	48,7	139,7	0,348	174,7	404,2	0,432
Maggio	67,6	144,2	0,469	56,1	148,3	0,378	64,2	167,0	0,384	187,9	459,5	0,409
Giugno	69,3	154,3	0,449	65,7	155,5	0,423	72,5	155,5	0,466	207,5	465,3	0,446
Luglio	62,7	154,4	0,406	80,4	152,1	0,529	36,3	163,6	0,222	179,4	470,1	0,382
Agosto	21,5	144,7	0,149	72,4	140,1	0,517	82,0	148,6	0,552	175,9	433,4	0,405
Settembre . .	27,8	129,8	0,214	31,0	124,7	0,249	8,2	119,5	0,069	67,0	374,0	0,179
Ottobre	43,6	114,3	0,381	26,4	109,2	0,242	13,9	114,3	0,122	83,9	337,8	0,248
Novembre . .	4,1	99,0	0,041	3,8	94,8	0,040	3,9	91,3	0,043	11,8	285,1	**0,041**
Dicembre . . .	53,1	88,7	0,598	20,9	87,3	0,239	14,6	95,9	0,152	88,6	271,9	0,326

Tabella II. — **Risultati eliofanometrici decadici e mensili dell'anno 1902.**

A = Durata effettiva dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino, espressa in ore.

B = Durata teorica dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino, espressa in ore.

1902	1ª Decade			2ª Decade			3ª Decade			MESE		
	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$
	h	h		h	h		h	h		h	h	
Gennaio. . . .	14,3	88,6	0.162	0,0	91.2	**0,000**	19.1	104.4	0.183	33.4	284.2	0.118
Febbraio . . .	13.8	99.4	0.139	16.8	104.1	0,161	16,3	86,0	0.189	46.9	289.5	0.162
Marzo.	57.6	113.5	0.508	80,4	118.7	0.677	71.7	136.6	0.524	209.7	368.8	**0.568**
Aprile.	45.3	129.7	0.349	26.7	134.8	0,197	35.3	139.7	0.252	107.3	404.2	0.265
Maggio	47.8	144.2	0.331	59.6	148.3	0.401	83.4	167.0	0.499	190.8	459.5	0.415
Giugno	39.6	154.3	0.256	59.5	155.5	0.383	82.1	155.5	0.527	181.3	465.3	0.389
Luglio	89.5	154,4	**0,578**	63.4	152.1	0.416	79.6	163.6	0.486	232.5	470.1	0.494
Agosto	69.9	144.7	0.480	75.9	140.1	0.541	51,0	148.6	0.343	196.8	433.4	0.453
Settembre . .	71.0	129.8	0.547	45.6	124.7	0.365	26.8	119.5	0.224	143.4	374.0	0.383
Ottobre	29.2	114.3	0.255	28.9	109.2	0.265	20.8	114.3	0.181	78.9	337.8	0.234
Novembre . .	13.1	99,0	0.132	15.3	94.8	0.161	2.1	91.3	0.023	30.5	285.1	**0.107**
Dicembre . . .	5,9	88.7	0.067	18,6	87,3	0.213	17.9	95.9	0.187	42.4	271.9	0.155

Tabella II. — **Risultati eliofanometrici decadici e mensili dell'anno 1904.**

A = Durata effettiva dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino, espressa in ore.

B = Durata teorica dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino, espressa in ore.

1904	1ª Decade			2ª Decade			3ª Decade			MESE		
	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$
	h	h		h	h		h	h		h	h	
Gennaio	0,0	88,6	**0,000**	3,7	91,2	0,041	8,2	104,4	0,078	11,9	284,2	**0,042**
Febbraio . . .	11,6	99,4	0,117	42,2	104,1	0,405	28,3	97,1	0,290	82,1	300,6	0,273
Marzo	4,7	113,5	0,041	38,3	118,7	0,322	48,8	136,6	0,357	91,8	368,8	0,249
Aprile	77,3	129,7	0,596	19,9	134,8	0,148	60,0	139,7	0,429	157,2	404,2	0,389
Maggio	64,1	144,2	0,444	68,4	148,3	0,461	70,0	167,0	0,419	202,5	459,5	0,441
Giugno	50,5	154,3	0,327	56,8	155,5	0,365	59,0	155,5	0,379	166,3	465,3	0,357
Luglio	78,4	154,4	0,508	79,4	152,1	0,522	103,8	163,6	**0,634**	261,6	470,1	0,556
Agosto	87,5	144,7	0,605	84,5	140,1	0,603	79,9	148,6	0,538	251,9	433,4	**0,581**
Settembre . .	49,7	129,8	0,383	52,9	124,7	0,424	28,8	119,5	0,241	131,4	374,0	0,351
Ottobre	52,4	114,3	0,458	38,3	109,2	0,351	14,6	114,3	0,127	105,3	337,8	0,312
Novembre . .	23,2	99,0	0,234	48,0	94,8	0,507	36,4	91,3	0,396	107,6	285,1	0,377
Dicembre . . .	26,8	88,7	0,302	49,6	87,3	0,569	17,0	95,9	0,177	93,4	271,9	0,343

Tabella II. — **Risultati eliofanometrici decadici e mensili dell'anno 1905.**

A = Durata effettiva dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino, espressa in ore.

B = Durata teorica dello splendere del sole sull'orizzonte di Torino, espressa in ore,

1905	1ª Decade			2ª Decade			3ª Decade			MESE		
	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$
	h	h		h	h		h	h		h	h	
Gennaio . . .	45.3	88.6	0.511	23.6	91.2	0,259	34.8	104.4	0.333	103.7	284.2	0.365
Febbraio . . .	49.9	99,4	0,502	53.7	104.1	0.516	11,4	86.0	**0,132**	115.0	289.5	0.397
Marzo	46.9	113.5	0.413	33.2	118.7	0,280	51.5	136.6	0.377	131.6	368.8	0.357
Aprile	62.0	129.7	0,478	45.4	134.8	0.337	53.7	139,7	0.384	161.1	404.2	0.399
Maggio	26,4	144.2	0,183	24.3	148,3	0.164	43.0	167.0	0.257	93.7	459.5	**0,204**
Giugno	43.6	154.3	0.283	34.9	155.5	0.224	47.2	155,5	0.304	125.7	465.3	0.270
Luglio	74.0	154.4	0,479	60.8	152.1	0,399	65.8	163.6	0.402	200.6	470.1	0,427
Agosto	57.6	144.7	0,398	68.5	140.1	0,489	58,8	148,6	0,396	184.9	433.4	0,427
Settembre . .	60,2	129.8	0.464	21.7	124,7	0.174	33.4	119,5	0,280	115.3	374.0	0,308
Ottobre	77.9	114,3	**0,681**	51.6	109.2	0,472	21.9	114.3	0.192	151.4	337,8	**0.448**
Novembre . .	25,5	99,0	0,258	25,2	94,8	0,266	14.4	91.3	0.158	65.1	285.1	0.228
Dicembre . . .	20,8	88.7	0.235	32.2	87.3	0,369	21,8	95.9	0.227	74.8	271.9	0.275

TABELLA III. — Riassunto annuo delle ore in cui splen

1899	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11
	h	h	h	h	h	h	h
Gennaio	—	—	—	0.0	3.5	8.5	11.9
Febbraio	—	—	—	0,8	6.3	9,7	12,6
Marzo	—	—	4,6	12,6	17,1	19.5	20,3
Aprile	—	—	4,5	12,6	15.0	15.9	17,6
Maggio	0,1	3,4	5,9	12,3	16,0	17,2	18,6
Giugno	0,6	7,1	15,0	17,0	19.1	18.8	19.4
Luglio	0,9	9,0	22,2	22,6	24.0	24.9	26,1
Agosto	—	0,0	6,5	16,1	21.2	24,2	27,2
Settembre	—	—	2,0	11,0	14,9	15.2	13.9
Ottobre.	—	—	0,7	2,7	6.0	9.0	11,5
Novembre	—	—	0,0	0,0	0.7	10,3	15.0
Dicembre	—	—	—	0,0	1,0	4,0	7,3
ANNO . . .	1,6	19,5	61,4	107,7	144,8	177,2	201,4

per ogni ora di ciascun mese dell'anno 1899.

13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	*A*	*B*	*A*/*B*
h	h	h	h	h	h	h	h	h	
11,9	10,7	8,0	0,6	—	—	—	81,6	284,2	0,287
14,7	17,0	15,9	0,0	0,0	—	—	104,9	289,5	0,362
18,5	18,4	18,1	16,1	8,7	0,0	—	190,5	368,8	0,516
19,1	19,0	16,9	17,9	8,3	0,0	—	186,0	404,2	0,459
15,7	16,5	16,4	16,5	11,8	3,1	0,0	193,1	459,5	0,420
16,8	17,6	16,6	15,6	15,5	7,9	0,5	225,2	465,3	0,484
19.5	15,5	17,1	18,9	17,8	8.3	0,1	271,8	470,1	0.582
24.5	24,5	24.2	20.8	10.3	0.6	—	253.9	433.4	**0,586**
19,4	19,0	16,3	13,4	3,0	0.0	—	159,3	374,0	0,426
13.6	15,7	14,5	10.9	4,2	—	—	114.9	337.8	0,340
17,5	17,6	17,1	9,4	—	—	—	118.0	285.1	0,414
6.0	5,5	4,5	0.4	—	—	—	41,3	271,9	**0,152**
197,2	197.0	185,6	140,5	79,6	19.9	0.6	1940.5	4443.8	0,436

Tabella III. — **Riassunto annuo delle ore in cui sple**

1900	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-1
	h	h	h	h	h	h	h
Gennaio	—	—	—	0,2	3,9	7,7	11,
Febbraio	—	—	—	5,2	10,5	10,9	9,
Marzo	—	—	4,5	10,7	14,5	16,2	17,
Aprile	—	—	3,6	15,9	21,3	21,4	21,
Maggio	0,0	0,0	6,1	14,6	15,0	16,2	18,
Giugno	0,0	4,4	11,7	15,5	15,2	14,0	16,
Luglio	0,0	8,4	25,1	26,3	24,2	25,9	26,
Agosto	—	3,0	10,7	12,4	12,8	13,8	15,
Settembre	—	—	2,5	9,2	12,3	10,1	4,
Ottobre	—	—	0,0	11,1	16,8	15,6	15.
Novembre	—	—	0,0	0,0	0,5	1,0	0,
Dicembre	—	—	—	2,5	6,2	13,3	16,
Anno . . .	0,0	15,8	64,2	123,6	153,2	166,1	173,

per ogni ora di ciascun mese dell'anno 1900.

13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	A	B	A/B
h	h	h	h	h	h	h	h	h	
12.2	8.8	8,1	3,5	—	—	—	77,1	284.2	0,271
11.3	8.7	8.0	5,9	5,0	—	—	98,6	300,6	0,328
16.5	16,8	17,1	14,6	6,0	0,6	—	169,8	368,8	0,460
22,0	19,7	19,4	19,5	8,7	0,0	—	217,8	404.2	0,539
14,9	14.9	17,2	14,3	7,3	2,8	0,6	178.7	459.5	0.389
11,1	12,4	13,0	13.5	9,5	2,7	0.0	170.2	465.3	0,366
20,1	19.7	18,6	19,7	16,4	4,0	0,0	284.2	470,1	**0,605**
14.9	13.6	13,1	14,2	10,3	0.2	—	164.8	433,4	0.380
12,1	13,5	12,1	11,2	3.3	0.0	—	103.1	374.0	0,276
15,4	12,1	11,2	8,0	0.3	—	—	139.8	337.8	0,414
2,7	4.0	4,0	2,6	—	—	—	18,1	285.1	**0,063**
19,2	19.6	16,7	3,1	—	—	—	134.1	271.9	0,493
72,4	163,8	158,5	130.1	66,8	10,3	0,6	1756,3	4455,8	0,394

TABELLA III. — **Riassunto annuo delle ore in cui splend**

1901	Da							
	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	1
	h	h	h	h	h	h	h	
Gennaio	—	—	—	3,9	9,1	16,3	17,8	
Febbraio	—	—	0,0	5,4	12,9	15,5	16,9	
Marzo	—	—	2,0	6,6	8,5	9,9	10,0	
Aprile	—	—	6,3	13,5	13,8	13,6	15,0	
Maggio	0,0	0,0	8,0	17,6	18,1	21,1	22,7	
Giugno	0,0	0,0	9,1	16,5	18,3	23,2	25,1	
Luglio	0,0	0,0	5,3	15,1	20,0	21,9	22,2	
Agosto	—	1,1	3,8	11,6	18,8	19,2	18,9	
Settembre	—	—	0,6	2,7	3,9	4,9	2,6	
Ottobre	—	—	0,0	4,1	7,2	8,3	8,6	
Novembre	—	—	0,0	1,6	2,5	3,4	3,8	
Dicembre	—	—	—	4,5	8,9	10,5	10,6	
ANNO . . .	0,0	1,1	35,1	103,1	142,0	167,8	**174,2**	

sole per ogni ora di ciascun mese dell'anno 1901.

e :

13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	A	B	A/B
	h	h	h	h	h	h	h	h	h	
.6	18.9	16.1	13.2	3.2	—	—	—	136.2	284,2	0.479
.0	19.9	19.1	18,3	9.6	0.5	—		161.3	289.5	**0,557**
.1	9.5	10.1	9.9	8.5	6.4	0.4	-	102.1	368.8	0.277
.6	16.7	17.2	18,3	16,7	10,8	0.3	—	174,7	404,2	0.432
6	17.4	12.2	12,1	13,0	5,9	0.3	0.0	187,9	459.5	0.409
0	19.0	18.8	18,6	13,2	0.2	0.0	0.0	207.5	465.3	0.446
8	16.5	14.4	14,5	10,3	0,0	0.0	0.0	179,4	470.1	0,382
2	17.7	17.1	17.2	8.8	4.5	1.1	-	175,9	433,4	0.405
5	10.5	11.0	8.9	8.5	3.6	0.0	—	67.0	374.0	0.179
2	10,4	9,1	7.9	7.3	1.0	—		83.9	337.8	0,248
0	0.0	0.0	0,0	0,0	—	—	—	11.8	285.1	**0,041**
5	11,4	7,8	5,5	4.4	—	—	—	88.6	271.9	0.326
1	167.9	152,9	144,4	103,5	32,9	2.1	0,0	1576.3	4443,8	0.354

TABELLA III. — **Riassunto annuo delle ore in cui splend**

1902	Da						
	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11
	h	h	h	h	h	h	h
Gennaio	—	—	—	0,3	3,0	4,0	4,9
Febbraio	—	—	0,0	0,0	0,0	3,0	4,0
Marzo	—	—	2,3	11,7	16,1	19,1	20.0
Aprile	—	—	0,0	3,8	8.6	10,8	11,0
Maggio	0.0	0,5	10.8	13,6	15,4	18,8	20,6
Giugno	0,0	2,7	11,2	12,9	14,1	14,0	15,1
Luglio	0,0	1,4	12,8	20,4	19,9	20,5	20,1
Agosto	—	1,5	7,7	12,6	17,4	18,3	18,1
Settembre	—	—	6,6	13,8	15,1	12,4	6,6
Ottobre.	—	—	0,0	1.2	4.9	5,9	7.2
Novembre	—	—	0,0	0,0	0,0	0.0	0,2
Dicembre	—	—	—	0,0	0.0	0,5	2,3
ANNO . . .	0,0	6,1	51,4	90,3	115,5	127,3	130,1

sole per ogni ora di ciascun mese dell'anno 1902.

e :

13	13–14	14–15	15–16	16–17	17–18	18–19	19-20	A	B	A/B
	h	h	h	h	h	h	h	h	h	
,0	3.5	4,0	3,0	1.7	—	—	—	33,4	284,2	0.118
,9	7.0	7.2	7.1	4.6	1.3	—	—	46.9	289.5	0.162
,1	21.8	21.9	19.7	18.2	15.4	0.0	—	209.7	368,8	**0,568**
,9	13.9	11.8	10.7	8.0	2.6	0.0	—	107,3	404.2	0,265
,2	17,8	17,9	13,1	12,8	9.8	1.0	1.0	190.8	459.5	0,415
,6	16.8	13,4	15.2	16,3	12.8	4.0	0.0	181.3	465.3	0,389
,2	20.8	18,3	19,7	18,3	10.7	2.8	0.0	232,3	470,1	0,494
,9	20,1	16,9	14,1	15.0	12.4	2.9	—	196.8	433.4	0.453
,7	18.0	18.5	15.7	13.5	5.9	0.0	—	143.4	374.0	0.383
,9	10.6	10,8	8.5	6.9	2.9	—	—	78.9	337.8	0.234
,1	4,5	8,1	9,0	5,8	-	—	-	30.5	285.1	**0,107**
,8	9.5	9,0	6.5	1.3	—		—	42.4	271.9	0.155
3	**165,3**	157,8	142,3	122,4	73,8	10.7	1,0	1493.7	4443,8	0.366

Tabella III. — **Riassunto annuo delle ore in cui splend**

1904	Da						
	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11
	h	h	h	h	h	h	h
Gennaio	—	—	—	0,0	0.0	1,7	3,0
Febbraio	—	—	0,0	1,1	3,3	5,2	7,4
Marzo	—	—	0,5	1,9	5,2	7,8	9,7
Aprile	—	—	1,0	9,1	13,7	15,3	16,0
Maggio	0,0	0,0	13,4	20,7	21,7	18,0	17,8
Giugno	0,0	1,1	9,4	11,7	13,4	17,0	18,4
Luglio	0,0	2,3	20,0	26,8	25,5	24,7	27,7
Agosto	—	0,8	15,6	22,2	23,2	20,7	23,3
Settembre	—	—	1,3	7,0	9,2	12,3	11,1
Ottobre	—	—	0,0	4,9	12,2	10,0	10,1
Novembre	—	—	0,0	0,0	3,1	7,8	10,7
Dicembre	—	—	—	0.0	2,8	11.2	12.3
Anno . . .	0,0	4,2	61,2	105,4	133,3	151,7	167,5

sole per ogni ora di ciascun mese dell'anno 1904.

e :

-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	A	B	$\frac{A}{B}$
h	h	h	h	h	h	h	h	h	h	
.7	1.0	1.0	0.5	0,0	—	—	—	11,9	284,2	**0,042**
.4	10.3	12.0	11.7	10,0	4,4	—	—	82,1	300,6	0,273
.1	11.1	12.3	10.6	7,4	4,1	0.0	—	91.8	368.8	0,249
.2	14,4	16.0	15,9	15,5	7,9	0.0	—	157,2	404.2	0.389
.5	15.3	15.6	16,2	14.8	12,2	0,5	0,0	202,5	459,5	0.441
.8	14.7	12.4	11,6	12,5	9,9	1.7	0,0	166,3	465.3	0,357
.7	19.1	19.8	17.3	17,7	13,4	0.5	0.0	261,6	470.1	0,556
.5	21,3	23.5	20,8	17.7	13,5	0.9	—	251.9	433,4	**0,581**
,1	12.6	17.5	16,4	12,1	3,5	0.0	—	131.4	374.0	0,351
.9	10.8	11.8	12,9	9.7	1,2	—	—	105.3	337,8	0,312
.2	18.1	17.3	12,9	4,7	—	—	—	107.6	285.1	0,377
.8	15.7	14.7	9,2	0,0	—	—	—	93.4	271,9	0.343
,9	164.4	173,9	156,0	122.1	70,1	3,6	0,0	1663,0	4455,8	0,373

Tabella III. — **Riassunto annuo delle ore in cui splende**

1905	Dal							
	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11
	h	h	h	h	h	h	h	
Gennaio	—	—	—	0,0	0,3	5,8	15,1	1
Febbraio	—	—	0,0	0,0	1,3	11,2	15,4	1
Marzo	—	—	0,0	3,9	9,7	14,7	14,6	1
Aprile	—	—	0,2	9,1	14,3	15,5	17,2	1
Maggio	0,0	0,0	1,1	6.2	7,9	9,8	9,6	1
Giugno	0,0	0,0	4,5	10.8	13,4	13,6	15,5	1
Luglio	0,0	0,1	8,0	13.0	17,7	21.4	25.4	2
Agosto	—	0,0	6,0	16,2	18,2	19,3	18,5	1
Settembre	—	—	0,7	6,0	10,2	13,2	13,9	1
Ottobre	—	—	0.0	4.7	10.5	14.6	18,9	2
Novembre	—	—	0,0	0.0	0,8	6,5	6,1	
Dicembre	—	—	—	0,0	0,4	5,5	8.2	1
Anno	0,0	0,1	20,5	69,9	104,7	151,1	178,4	18

sole per ogni ora di ciascun mese dell'anno 1905.

re:

-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	A	B	$\frac{A}{B}$
h	h	h	h	h	h	h	h	h	h	
6.3	17.9	16,7	11,6	3,6	—	—	—	103.7	284.2	0.365
6,3	16.3	15.5	14,0	8,9	0,6	—	—	115.0	289,5	0.397
4.3	14.1	15,9	14.5	12,4	3,7	0.0	—	131,6	368,8	0,357
7,4	16.0	16,1	18,0	14.3	6.2	0.0	—	161,1	404.2	0.399
0.2	9.8	9,8	7,4	7,0	4,4	0.0	0,0	93,7	459,5	**0,204**
3.0	11.4	10.4	9.8	8.0	3.0	0.0	0.0	125,7	465,3	0,270
1.7	17.7	15,8	14.3	13.7	8.5	0.3	0,0	200.6	470.1	0.427
0,2	15.3	13.8	14,3	12.1	8,0	3.3	—	184.9	433,4	0.427
3,7	11.3	12,4	11.1	6.6	0.8	0.0	—	115.3	374.0	0.308
8.2	17,0	16,3	16.6	11.6	1,7	—	—	151.4	337.8	**0,448**
0,5	9.5	9,8	9.5	4.2	—	—	—	65.1	285.1	0.228
4,3	13.7	12,8	7.4	0.7	—	—	—	74.8	271.9	0.275
6,1	170,0	165,3	148.5	103.1	36.9	0.0	0.0	1522.9	4443.8	0.343

(Continua).

Sulle discontinuità dei potenziali elastici.

Nota del Socio CARLO SOMIGLIANA.

È ben noto come nella teoria delle funzioni potenziali newtoniane le discontinuità di queste funzioni, e delle loro derivate, abbiano un ufficio essenziale sia per le loro proprietà analitiche, che per il loro significato fisico. Non altrimenti avviene nella teoria della elasticità statica. In questa teoria le funzioni che rappresentano la deformazione elastica non sono date direttamente mediante integrali di spazio e di superficie, ma sono definite mediante equazioni differenziali, i cui integrali però sono suscettibili di una rappresentazione per integrali definiti di spazio e di superficie, che conferisce loro delle proprietà analoghe a quelle delle funzioni potenziali newtoniane. Ed è appunto a tale analogia che si debbono quasi tutti i più recenti progressi nella teoria dell'elasticità.

In due quistioni di notevole importanza io ho avuto specialmente occasione di mettere in luce la necessità di una completa conoscenza delle discontinuità delle funzioni che sono integrali delle equazioni della statica elastica e che, per ovvia analogia, possiamo chiamare *potenziali elastici*. La prima è quella che riguarda le deformazioni che avvengono nei dielettrici interposti fra conduttori carichi di elettricità, quistione che si collega strettamente colle celebri vedute di Maxwell intorno al modo di agire delle forze a distanza. La seconda quistione riguarda le deformazioni provocate nei corpi elastici da tagli lungo determinate superficie e da successivi spostamenti arbitrari dei due lembi del taglio, deformazioni a cui dal Volterra fu dato il nome di *distorsioni*, e che costituiscono il più recente capitolo della statica elastica.

Mi è sembrato perciò essere ricerca di notevole interesse quella di determinare una volta per sempre, e in via generale,

tali discontinuità. Tanto più poi che tale ricerca può essere condotta con metodo semplice ed uniforme, quando si ammettano regolari e derivabili senza limitazione, quelle funzioni che hanno ufficio analogo a quello della densità nei potenziali newtoniani, ciò che del resto è conforme alla natura fisica del problema ed al giusto criterio di cominciare lo studio dei problemi nella loro forma più semplice. È possibile anche riassumere, almeno dal punto di vista del procedimento, il risultato generale a cui sono giunto, e che può presentarsi come una conclusione di queste ricerche, dicendo che tutto si riduce, in ultima analisi, al problema delle discontinuità delle derivate seconde delle funzioni potenziali ordinarie di superficie. Questo problema è stato studiato da vari analisti e ne fu data una soluzione completa dal Poincaré nella sua *Théorie du Potentiel Newtonien*. Con metodo diverso, basato sopra formole stabilite da C. Neumann ed E. Beltrami, ne ho indicato io pure una soluzione generale in una Nota recentemente comunicata a questa R. Accademia [1], appunto per preparare gli elementi analitici necessari alla soluzione delle quistioni trattate in questo lavoro.

Finalmente è assai importante notare che la conoscenza completa di queste proprietà di discontinuità permette di dare una interpretazione meccanica completa delle formole-integrali di rappresentazione, la quale mette in evidenza una perfetta concordanza fra i diversi tipi d'integrali, che l'analisi ci presenta, ed i diversi procedimenti meccanici, coi quali noi possiamo provocare le deformazioni.

I.

Le formole fondamentali.

Le componenti u, v, w del vettore, che dà lo spostamento elastico di un mezzo elastico deformato, si possono porre sotto la forma seguente, che è la più semplice e comprensiva, alla quale io abbia potuto ridurre le formole, trovate molti anni or

---

[1] SOMIGLIANA, *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di superficie*. "Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino", vol. LI, 1916.

sono [1], per rappresentare tali componenti mediante integrali definiti estesi allo spazio ed alla superficie del corpo deformato:

$$(1)\qquad \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

In queste formole le funzioni Φ, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 dipendono in modo semplice da altre funzioni A, B, C che sono potenziali biarmonici e da altre quattro φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3 che sono potenziali armonici o newtoniani di superficie. Si ha cioè

$$(2)\qquad \begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{8\pi(\lambda+2\mu)}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) - \frac{\lambda}{4\pi(\lambda+2\mu)}\varphi, \\ \Psi_1 &= \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{1}{4\pi}\psi_1, \\ \Psi_2 &= \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) + \frac{1}{4\pi}\psi_2, \\ \Psi_3 &= \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) + \frac{1}{4\pi}\psi_3, \end{aligned}$$

ove λ, μ sono le costanti elastiche del mezzo.

Le espressioni esplicite di questi potenziali sono finalmente le seguenti:

$$(3)\qquad \begin{aligned} A &= \int kXr\,dS + \int Lr\,ds + 2\mu\int u\frac{\partial r}{\partial n}\,ds, \\ B &= \int kYr\,dS + \int Mr\,ds + 2\mu\int v\frac{\partial r}{\partial n}\,ds, \\ C &= \int kZr\,dS + \int Nr\,ds + 2\mu\int w\frac{\partial r}{\partial n}\,ds. \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \begin{gathered} \varphi = \int\left(u\frac{\partial a}{\partial n} + v\frac{\partial b}{\partial n} + w\frac{\partial c}{\partial n}\right)\frac{ds}{r}, \\ \psi_1 = \int\left(v\frac{\partial c}{\partial n} - w\frac{\partial b}{\partial n}\right)\frac{ds}{r}, \qquad \psi_2 = \int\left(w\frac{\partial a}{\partial n} - u\frac{\partial c}{\partial n}\right)\frac{ds}{r}, \\ \psi_3 = \int\left(u\frac{\partial b}{\partial n} - v\frac{\partial a}{\partial n}\right)\frac{ds}{r}. \end{gathered}$$

---

[1] Somigliana, *Sulle equazioni dell'elasticità*. " Annali di Matem. ", 1889.

nelle quali:

r rappresenta la distanza del punto $(x\,y\,z)$ dal punto mobile nel campo d'integrazione $(a\,b\,c)$.

X, Y, Z le componenti unitarie delle forze di massa.

L, M, N le componenti unitarie delle forze superficiali.

k la densità, n la normale interna al corpo S, limitato dalla superficie s.

Queste espressioni delle formole di rappresentazione si prestano immediatamente alla introduzione dei simboli vettoriali, per chi preferisse servirsi dei metodi ora più frequentemente usati nella meccanica.

I potenziali (3), (4) hanno un significato ben determinato in tutto lo spazio, cioè anche esternamente al campo S, ed io ho già avuto occasione di mostrare l'utilità che deriva appunto, per certe applicazioni, dalla loro considerazione in tutto lo spazio infinito, come si fa degli ordinari potenziali newtoniani. Io mi occuperò quindi della ricerca delle loro singolarità quando si attraversa la superficie s, indipendentemente dal fatto che questa superficie sia o non sia il limite di un corpo di dimensioni finite.

Dalle formole precedenti appare pertanto che i secondi membri delle formole (1) sono formati colle derivate seconde dei potenziali biarmonici A, B, C e colle derivate prime dei potenziali newtoniani φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3. Volendo determinare le discontinuità di u, v, w non solo, ma anche delle componenti di deformazione e di tensione, dovremo quindi conoscere le formole che dànno le discontinuità delle derivate prime e seconde dei potenziali newtoniani di superficie; ed inoltre quelle da cui dipendono le discontinuità delle derivate prime, seconde e terze dei potenziali di spazio e superficiali biarmonici. Le discontinuità delle derivate prime e seconde dei potenziali armonici sono note. Noi faremo vedere anzitutto che anche le altre dei potenziali biarmonici si possono dedurre da queste. Potremo quindi prepararci facilmente tutte le formole occorrenti al calcolo che abbiamo di mira, senza ricorrere a quei procedimenti delicati di passaggio al limite che complicano straordinariamente le ricerche riguardanti quistioni di questo genere nella teoria del potenziale.

Abbiamo chiamati *biarmonici* i potenziali (3) A, B, C, poichè essi sono formati collo stesso procedimento degli ordinari po-

tenziali newtoniani, od armonici, di spazio, di superficie e di doppio strato; soltanto al posto del potenziale elementare $\frac{1}{r}$ compare la funzione r. Essi hanno perciò coll'equazione

$$\Delta_2 \Delta_2 \varphi = 0$$

relazioni analoghe a quelle che i potenziali newtoniani hanno coll'equazione di Laplace

$$\Delta_2 \varphi = 0.$$

Le formole fondamentali (1) sono formate colle derivate di potenziali biarmonici e di potenziali newtoniani. Così le espressioni (2) contengono potenziali delle due specie. Noi chiameremo genericamente *potenziali elastici* tutte le espressioni formate con somme di potenziali biarmonici ed armonici (o colle loro derivate), come appunto i secondi membri delle (1) e (2), e che soddisfanno alle equazioni indefinite dell'equilibrio elastico.

Siano n, n' le due direzioni opposte della normale in un punto di una superficie s. Siano f_n, $f_{n'}$ i valori di una funzione f sulle due faccie della superficie s corrispondenti a queste normali. Il salto che la funzione subisce nell'attraversare la superficie secondo la direzione n, sarà $f_n - f_{n'}$; noi introdurremo, per brevità, la notazione

$$f_n - f_{n'} = D[f].$$

Se U è un'ordinaria potenziale di superficie

$$U = \int h \frac{ds}{r},$$

ove h è una funzione regolare dei punti di s, si ha:

$$D[U] = 0,$$

e le formole delle discontinuità delle derivate prime si possono rappresentare nel modo seguente, quando si prendano gli assi diretti in modo che quello delle z abbia la direzione della normale n; e quelli delle x, y siano quindi paralleli al piano tangente nel punto che si considera:

$$D\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right] = 0 \qquad D\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right] = 0 \qquad D\left[\frac{\partial U}{\partial z}\right] = -4\pi h.$$

Le discontinuità delle derivate seconde si possono pure rappresentare in modo semplice se, oltre alla ipotesi precedente rispetto all'asse delle z, si suppone che gli assi delle x, y siano tangenti alle linee di curvatura della superficie s nel punto considerato. Si hanno in tal caso le seguenti relazioni:

$$(5)\qquad \begin{gathered} D\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] = -\frac{4\pi h}{R_1} \qquad D\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right] = -\frac{4\pi h}{R_2} \\ D\left[\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right] = 4\pi h\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \\ D\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\right] = -4\pi\frac{\partial h}{\partial x} \qquad D\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\right] = -4\pi\frac{\partial h}{\partial y} \\ D\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right] = 0, \end{gathered}$$

ove R_1, R_2 rappresentano i raggi di curvatura della superficie, corrispondenti rispettivamente alle linee di curvatura tangenti all'asse x ed all'asse y; inoltre i raggi di curvatura R_1, R_2 devono prendersi positivi quando la loro direzione (dal centro di curvatura verso la superficie) coincide con quella della normale positiva n, cioè nel nostro caso con la direzione positiva dell'asse delle z [1].

Mediante queste proprietà dei potenziali newtoniani possiamo ora stabilire le corrispondenti proprietà di discontinuità dei potenziali biarmonici e delle loro derivate.

II.

Discontinuità dei potenziali biarmonici.

α) **Potenziali di superficie.** — Sia

$$V = \int h\,r\,ds$$

un tale potenziale. Noi supporremo la funzione h regolare in

---

[1] Cfr. la Nota già citata: *Sulle derivate seconde, ecc.*

tutti punti della superficie s. Derivando, supposto il punto (x, y, z) fuori dalla superficie, si ha

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int h \frac{\partial r}{\partial x} ds = -\int h \frac{a}{r} ds + x \int h \frac{ds}{r}$$

quando si indichino con a, b, c le coordinate del punto corrente sulla superficie s e quindi

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}.$$

Le derivate prime della V sono quindi formate con funzioni potenziali newtoniane di superficie e non vi è quindi dubbio sulla loro continuità.

Consideriamo le derivate seconde; si ha

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int h \left(\frac{1}{r} + (x-a) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) ds,$$

ossia

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int h \frac{1}{r} ds + x \int h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} ds - \int h a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} ds.$$

Il primo integrale è continuo attraverso s, e gli altri due sono discontinui, ma le loro discontinuità sono uguali e contrarie di segno. Questa derivata seconda è quindi continua.

Analogamente si ha

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \int h (x-a) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} ds,$$

perciò anche questa derivata è continua, e lo stesso può dirsi di tutte le rimanenti derivate seconde.

Per le derivate terze si ha

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = 2 \int h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} ds + x \int h \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} ds - \int h a \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} ds,$$

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} = \int h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} ds + x \int h \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} ds - \int h a \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} ds.$$

Supposti gli assi orientati come abbiamo indicato alla fine del capitolo precedente (chiameremo *canonica* questa orientazione), si vede subito, in base alle formole delle discontinuità delle derivate seconde dei potenziali newtoniani di superficie, che queste derivate sono continue. Lo stesso avviene per ragioni di simmetria delle altre due:

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \qquad \frac{\partial^3 V}{\partial x\, \partial y^2}.$$

Inoltre le formole

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x\, \partial z^2} = \int h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, ds + \int h\,(z-c) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x}\, ds,$$

$$\frac{\partial^3 V}{\partial y\, \partial z^2} = \int h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\, ds + \int h\,(z-c) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial y}\, ds.$$

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \int h\,(x-a) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z}\, ds$$

provano la continuità di queste derivate. Ci resta a considerare unicamente la $\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}$, per la quale si ha

$$\frac{\partial^3 V}{\partial z^3} = 2 \int h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, ds + \int h\,(z-c) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\, ds,$$

dalla quale risulta subito

$$D\left[\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}\right] = -8\pi h. \tag{6}$$

Possiamo dunque concludere:

Tutte le derivate prime e seconde dei potenziali biarmonici di superficie sono continue attraversando la superficie agente.

Delle derivate terze, supposta canonica la orientazione degli assi, è discontinua la sola $\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}$ *ed il salto corrispondente è* $-8\pi h$.

β) Potenziali di spazio. — È assai facile dimostrare che il potenziale biarmonico di uno spazio S,

$$U = \int k r\, dS$$

ove k è la funzione analoga alla densità, e le sue derivate prime, seconde e terze sono continue quando si attraversa la superficie s che limita lo spazio S.

È ovvia infatti la continuità della U; e per le derivate prime si ha

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\int k \frac{\partial r}{\partial a} dS = \int k r \alpha d\sigma + \int \frac{\partial k}{\partial a} r dS,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int_s k\alpha \frac{\partial r}{\partial x} ds + \int \frac{\partial k}{\partial a} \alpha r ds + \int \frac{\partial^2 k}{\partial a^2} r dS,$$
$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = \int k\alpha \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} ds + \int \frac{\partial k}{\partial a} \alpha \frac{\partial r}{\partial x} ds + \int \frac{\partial^2 k}{\partial a^2} \frac{\partial r}{\partial x} dS$$

e formole analoghe per le altre derivate.

Ora la prima di queste formole dimostra la continuità delle derivate prime; la seconda quella delle derivate seconde, tenuto conto della continuità, già dimostrata, delle derivate prime dei potenziali biarmonici di superficie. Finalmente dalla terza risulta la continuità delle derivate terze per la continuità già dimostrata delle derivate seconde dei potenziali biarmonici di superficie.

I potenziali biarmonici di spazio, e le loro derivate 1ᵉ, 2ᵉ *e* 3ᵉ, *sono continui attraverso la superficie che limita lo spazio occupato dalla massa.*

γ) Potenziali di doppio strato. — Supponiamo dapprima che la superficie sulla quale è distribuito il doppio strato, di momento g, sia chiusa. Il potenziale sia

$$W = \int g \frac{\partial r}{\partial n} ds,$$

e supponiamo inoltre che la funzione g sia continuata nell'interno senza interruzione di continuità nemmeno per le sue derivate. Avremo allora pel lemma di Green, indicando con S lo spazio racchiuso da s,

$$\int \left(g \frac{\partial r}{\partial n} - r \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds + \int (g \Delta_2 r - r \Delta_2 g) \, dS = 0,$$

e questa formola sarà valida, tanto se il punto $(x\,y\,z)$ sarà interno, quanto se sarà esterno ad S; poichè, se fosse interno,

si vede facilmente che il solito integrale d'esclusione ha per limite zero.

Ciò posto ne risulta per la funzione W l'espressione

$$W = \int \frac{\partial g}{\partial n} r\,ds - 2\int g \frac{dS}{r} + \int r\Delta_2 g\,dS$$

valida in tutti i punti dello spazio. Questa formola riconduce la ricerca delle discontinuità di W a quella delle discontinuità dei potenziali di superficie e di spazio già studiate e dei potenziali newtoniani di spazio che sono note, e si possono facilmente trovare coi metodi già usati in precedenza. È chiaro poi che la limitazione circa la superficie s, che abbiamo supposta chiusa, non è essenziale e si può facilmente togliere osservando che, se fosse aperta, basterebbe prolungarla in modo qualunque fino a chiuderla, continuando arbitrariamente, ma conservando la continuità, la funzione g.

Ciò posto possiamo scrivere

$$W = W_1 - 2W_2 + W_3$$

ponendo

$$W_1 = \int \frac{\partial g}{\partial n} r\,ds, \qquad W_2 = \int g \frac{dS}{r}, \qquad W_3 = \int r\Delta_2 g\,dS.$$

Queste tre funzioni e le loro derivate prime sono continue attraverso s; lo stesso quindi accadrà di W e delle sue prime derivate.

Le derivate seconde di W_1 e W_3, per quanto si è visto, sono continue; mentre per quelle di W_2 si trova facilmente che, colla orientazione canonica degli assi, sono tutte continue all'infuori di $\frac{\partial^2 W_2}{\partial z^2}$ che ha un salto di $-4\pi g$; ne segue che per W avremo

$$D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right] = 8\pi g \tag{7}$$

e le rimanenti derivate seconde saranno continue.

Abbiamo già visto come si comportano le derivate terze di W_1 e W_3; per quelle di W_2 si trovano le formole seguenti

$$D\left[\frac{\partial^3 W_2}{\partial z^3}\right] = 4\pi\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) - 4\pi\frac{\partial g}{\partial z},$$

$$D\left[\frac{\partial^3 W_2}{\partial x^2 \partial z}\right] = -\frac{4\pi}{R_1}g, \qquad D\left[\frac{\partial^3 W_2}{\partial x \partial z^2}\right] = -4\pi\frac{\partial g}{\partial x},$$

$$D\left[\frac{\partial^3 W_2}{\partial y^2 \partial z}\right] = -\frac{4\pi}{R_2}g, \qquad D\left[\frac{\partial^3 W_2}{\partial y \partial z^2}\right] = -4\pi\frac{\partial g}{\partial y},$$

mentre le rimanenti sono continue. In base a queste formole ed a quelle precedentemente trovate per W_1, W_3 si possono stabilire le discontinuità delle derivate terze di W. Si può così concludere:

Delle 10 derivate terze del potenziale biarmonico di doppio strato 5 sono continue, coll'orientazione canonica degli assi; le discontinuità delle altre 5 sono determinate dalle formole seguenti:

$$D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial z^3}\right] = -8\pi\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)g,$$

$$(8) \qquad D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial z}\right] = \frac{8\pi}{R_1}g, \qquad D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial z^2}\right] = 8\pi\frac{\partial g}{\partial x},$$

$$D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial z}\right] = \frac{8\pi}{R_2}g, \qquad D\left[\frac{\partial^3 W}{\partial y \partial z^2}\right] = 8\pi\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Notiamo che i valori di queste discontinuità si esprimono mediante g e le derivate $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ e che queste quantità dipendono soltanto dai valori di g sulla superficie s. L'intervento dei valori ausiliari arbitrari di g in tutto lo spazio S, che abbiamo considerato, non ha quindi alcuna influenza sul risultato finale.

III.

Discontinuità dei potenziali elastici.

Per studiare le discontinuità delle espressioni fondamentali (1) per lo spostamento elastico e delle corrispondenti componenti di deformazione e di tensione che ne derivano, noi con-

sidereremo separatamente le espressioni che in queste formole dipendono dai potenziali biarmonici di spazio, di superficie e di doppio strato, contenuti in A, B, C, e finalmente quelle che dipendono dai potenziali newtoniani ψ_1, ψ_2, ψ_3. La deformazione generale risulterà così decomposta in quattro tipi di deformazioni (poichè è facile verificare che ciascuna soddisfa alle equazioni dell'equilibrio), di cui studieremo separatamente le proprietà caratteristiche; mediante queste poi potremo ricomporre le proprietà delle espressioni complete, rappresentate dalle formole (1).

1° Tipo.

Per questa deformazione dobbiamo prendere

$$A = \int kXr\,dS, \qquad B = \int kYr\,dS, \qquad C = \int kZr\,dS,$$

e quindi nelle formole (1):

$$\Phi = \frac{1}{8\pi(\lambda+2\mu)}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right),$$

$$\psi_1 = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right), \qquad \psi_2 = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right),$$

$$\psi_3 = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right).$$

Gli spostamenti potrebbero essere posti anche sotto la forma

$$(9_*) \qquad (u, v, w) = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\frac{\partial \Phi}{\partial(x, y, z)} + \frac{1}{8\pi\mu}\,\Delta_2(A, B, C).$$

In questo caso A, B, C sono potenziali biarmonici di spazio, e sono quindi continui in tutto lo spazio insieme alle loro derivate 1^e, 2^e e 3^e. All'infinito A, B, C diventano infiniti, ma si conservano finite, e anzi si annullano, le loro derivate seconde; perciò u, v, w sono finite e continue in tutto lo spazio e si annullano all'infinito. Le componenti di deformazione e di tensione parimenti si conserveranno finite e continue in tutto lo spazio, annullandosi all'infinito. Questa deformazione non presenta quindi singolarità alcuna. Essa è stata trovata da W. Thomson, per

rappresentare la deformazione prodotta in uno spazio indefinitamente esteso da forze di masse agenti sopra una porzione finita di esso [1].

2° Tipo.

Questa deformazione può porsi ancora sotto la forma (9), intendendo che A, B, C abbiano i valori

$$A=\int Lr\,ds\,,\qquad B=\int Mr\,ds\,,\qquad C=\int Nr\,ds\,.$$

Essi sono potenziali biarmonici di superficie, le loro derivate 1e e 2e sono tutte continue attraverso la superficie s; le derivate 2e si annullano all'infinito, quindi la deformazione (9) non ha discontinuità, e si annulla all'infinito.

Le componenti di deformazione invece, essendo formate linearmente colle derivate di u, v, w, vengono a contenere le derivate 3e di A, B, C; e queste abbiamo veduto come siano in generale discontinue. Per studiare tali discontinuità in un punto di s, possiamo supporre l'orientazione degli assi canonica rispetto al punto che si considera sulla superficie, ed allora potremo senz'altro applicare le formole per le discontinuità precedentemente stabilite. Il passaggio ad assi comunque orientati si può fare colle formole solite di trasformazione.

Introducendo le solite notazioni pei coefficienti di deformazione,

$$x_x=\frac{\partial u}{\partial x}\,,\qquad y_y=\frac{\partial v}{\partial y}\,,\qquad z_z=\frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

$$y_z=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\,,\qquad z_x=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\,,\qquad x_y=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\,,$$

le discontinuità di queste espressioni si potranno immediatamente stabilire in base alla (6), che dà la sola discontinuità

[1] W. Thomson, *Note on the integration of the Equations of Equilibrium of an Elastic Solid* (" Cambridge and Dublin Math. Journ. ", 1848; " Math. a. Phys. Papers ", vol. I, art. XXXVII); Thomson and Tait, *Treatise of Natural Philosophy*, sect. 731.

non nulla delle derivate terze dei potenziali biarmonici di superficie. Si trova così dalle (1)

$$(9)\qquad \begin{gathered} D[x_x]=0\,, \qquad D[y_y]=0\,, \\ D[z_z]=\frac{1}{8\pi}\,\frac{1}{\lambda+2\mu}\,D\left[\frac{\partial^3 C}{\partial z^3}\right]=-\frac{1}{\lambda+2\mu}\,N. \end{gathered}$$

Analogamente si trova

$$(9')\qquad D[y_z]=-\frac{1}{\mu}\,M, \qquad D[z_x]=-\frac{1}{\mu}\,L, \qquad D[x_y]=0.$$

Mediante queste relazioni, sostituendo nelle espressioni delle componenti di tensione,

$$\begin{aligned} X_x &= \lambda\theta+2\mu x_x\,, & Y_z &= \mu y_z\,, \\ Y_y &= \lambda\theta+2\mu y_y\,, & Z_x &= \mu z_x\,, \\ Z_z &= \lambda\theta+2\mu z_z\,, & X_y &= \mu x_y\,, \end{aligned}$$

ove θ rappresenta il coefficiente di dilatazione cubica

$$\theta=x_x+y_y+z_z\,,$$

si hanno le discontinuità di tali tensioni, che sono le seguenti:

$$(10)\qquad \begin{aligned} D[X_x] &= -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,N\,, & D[Y_z] &= -M, \\ D[Y_y] &= -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,N\,, & D[Z_x] &= -L\,, \\ D[Z_z] &= -N\,, & D[X_y] &= 0. \end{aligned}$$

Consideriamo ora un elemento superficiale normale all'asse z; le componenti della tensione agente sulla faccia positiva saranno X_z, Y_z, Z_z, e sulla faccia negativa X_{-z}, Y_{-z}, Z_{-z}, e per le formole precedenti avremo

$$X_z+X_{-z}+L=0\,, \qquad Y_z+Y_{-z}+M=0\,, \qquad Z_z+Z_{-z}+N=0.$$

Ora queste sono precisamente le equazioni che devono essere soddisfatte perchè l'elemento considerato si trovi in equilibrio

sotto l'azione delle due tensioni elastiche che agiscono sulle sue due faccie e di una forza esterna superficiale, le cui componenti unitarie sono L, M, N. Più generalmente abbandonando l'orientazione canonica degli assi, le ultime relazioni potranno essere scritte

$$X_n + X_{-n} + L = 0 , \qquad Y_n + Y_{-n} + M = 0 , \qquad Z_n + Z_{-n} + N = 0 ,$$

che sono appunto le equazioni che debbono essere soddisfatte sulla superficie s per l'equilibrio quando essa è considerata come interna al corpo e soggetta all'azione di forze esterne L, M, N.

Queste proprietà dànno immediatamente il significato meccanico della deformazione del tipo qui considerato. Essa rappresenta la deformazione di un mezzo indefinito, quando sopra una superficie s, situata a distanza finita, agiscono delle forze superficiali le cui componenti unitarie sono L, M, N, ed il mezzo si suppone omogeneo ed immobile all'infinito.

Questa deformazione può considerarsi come la deformazione limite, a cui si riduce la deformazione del 1° tipo, quando lo spazio in cui agiscono le forze di massa diventa una superficie.

Un'osservazione interessante si può fare in base alle formole (10). Consideriamo un elemento superficiale che passi per l'asse z, sia cioè normale all'elemento ds considerato prima, ed abbia per normale l'asse x. Le componenti della tensione ad esso corrispondente sono X_x, Y_x, Z_x; ed i valori che queste quantità hanno quando l'elemento superficiale si considera come appartenente alla regione, nella quale penetra la z positiva, sono diversi da quelli che si hanno quando l'elemento appartiene alla regione della z negativa. Difatti dalle (10) si ha

$$D[X_x] = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} N, \qquad D[Y_x] = 0 , \qquad D[Z_x] = -L,$$

mentre queste differenze dovrebbero essere tutte nulle se quelle tensioni fossero uguali.

Se l'elemento considerato avesse per normale l'asse y si avrebbe invece

$$D[X_y] = 0, \qquad D[Y_y] = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}, \qquad D[Z_y] = -M.$$

Un fatto analogo sussiste quindi per qualunque elemento superficiale passante per l'asse z, ossia per la normale alla superficie s nel punto considerato.

Questo fatto singolare però non impedisce che l'equilibrio elastico continui a sussistere per gli elementi considerati, poichè le tensioni elastiche sono continue quando si attraversano tali elementi nel senso della loro normale, e quindi essi sono sempre soggetti a tensioni uguali e contrarie nella regione del corpo alla quale appartengono.

3° Tipo.

La deformazione di questo tipo, se noi poniamo

$$A = \int u \frac{\partial r}{\partial n} ds, \qquad B = \int v \frac{\partial r}{\partial n} ds, \qquad C = \int w \frac{\partial r}{\partial n} ds,$$

può essere scritta nella forma (9_*)

$$\begin{aligned} 4\pi u &= \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) + \Delta_2 A, \\ 4\pi v &= \alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) + \Delta_2 B, \qquad \alpha = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}. \\ 4\pi w &= \alpha \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) + \Delta_2 C, \end{aligned}$$

Supposta l'orientazione canonica degli assi, sono discontinue soltanto le derivate seconde rispetto a z dei tre potenziali biarmonici di doppio strato A, B, C, e tali discontinuità sono determinate dalla formola (7). Si trova cioè subito

$$(11) \qquad D[u] = 2u, \qquad D[v] = 2v, \qquad D[w] = 2(\alpha+1)w,$$

nelle quali relazioni i valori di u, v, w dei secondi membri sono quelli stessi che compaiono negli integrali A, B, C. Per calcolare le discontinuità delle componenti di deformazione ricordiamo che sono continue le derivate terze dei potenziali di doppio strato corrispondenti ai simboli di derivazione

$$D_x^3, \qquad D_y^3, \qquad D_x^2 D_y, \qquad D_x D_y^2, \qquad D_x D_y D_z.$$

Abbiamo perciò

$$4\pi D[x_x] = D\left[\alpha \frac{\partial^3 C}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 A}{\partial x \partial z^2}\right],$$

$$4\pi D[y_y] = D\left[\alpha \frac{\partial^3 C}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 B}{\partial y \partial z^2}\right], \text{ ecc.}$$

I risultati che si ottengono, applicando le formole relative a queste discontinuità (8), sono le seguenti:

$$(12) \quad \begin{aligned} D[x_x] &= 2\alpha \frac{w}{R_1} + 2\frac{\partial u}{\partial x}, \\ D[y_y] &= 2\alpha \frac{w}{R_2} + 2\frac{\partial v}{\partial y}, \\ D[z_z] &= 2\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - 2\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) w, \\ D[y_z] &= 4\alpha \frac{v}{R_2} + 2(2\alpha + 1)\frac{\partial w}{\partial y}, \\ D[z_x] &= 4\alpha \frac{u}{R_1} + 2(2\alpha + 1)\frac{\partial w}{\partial x}, \\ D[x_y] &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

da cui

$$D[\theta] = 2(\alpha + 1)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Queste formole portano alle seguenti discontinuità per le componenti di tensione

$$(13) \quad \begin{aligned} D[X_x] &= 2\lambda(\alpha + 1)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 4\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{w}{R_1}\right), \\ D[Y_y] &= 2\lambda(\alpha + 1)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 4\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \alpha \frac{w}{R_2}\right), \\ D[Z_z] &= -2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - 4\mu\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) w. \end{aligned}$$

Le altre tre componenti di tensione hanno discontinuità proporzionali ai secondi membri delle ultime tre equazioni (12).

Il significato meccanico di questo 3° tipo di deformazione risulta dalla sua composizione col 4° che ora studieremo.

4° Tipo.

In base alle formole (1), (2) la deformazione del 4° tipo può scriversi

$$4\pi u = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z},$$

$$4\pi v = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x},$$

$$4\pi w = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y},$$

ove le funzioni φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3 sono definite dalle formole (4).

Questi spostamenti sono discontinui attraverso la superficie s, come sono discontinue le derivate prime dei potenziali newtoniani di superficie. Tenuto conto delle formole che dànno queste discontinuità e dell'orientazione canonica degli assi, che ammettiamo ancora, si trova subito

$$D\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] = 0\,, \qquad D\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = 0\,, \qquad D\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] = -4\pi w,$$

$$D\left[\frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right] = -4\pi u\,, \qquad D\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right] = -4\pi v,$$

$$D\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right] = 0\,.$$

di qui segue

$$(14) \qquad D[u] = -u\,, \qquad D[v] = -v\,, \qquad D[w] = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}w,$$

ove, come nel caso precedente, i valori di u, v, w dei secondi membri sono quelli stessi che compaiono negli integrali (4).

Per stabilire le discontinuità delle componenti di deformazione ricordiamo che se indichiamo i coseni di direzione della normale alla superficie s con α, β, γ, e prendiamo per origine il punto di essa nel quale dobbiamo studiare tali discontinuità, supposta canonica l'orientazione degli assi, si ha per equazione della superficie, tenendo conto solo dei termini di 2° ordine rispetto ad x e ad y,

$$z = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right)$$

quando pei segni dei raggi di curvatura si conservi la convenzione precedentemente usata.

Abbiamo allora

$$\alpha = -\frac{\partial z}{\partial x}\gamma, \quad \beta = -\frac{\partial z}{\partial y}\gamma, \quad \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

e nell'origine delle coordinate

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{R_1}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{1}{R_2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0.$$

Ciò posto ed applicando le formole (5) troviamo

$$D\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right] = -4\pi\frac{w}{R_1}, \quad D\left[\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x\, \partial y}\right] = 0,$$

$$D\left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x\, \partial z}\right] = -4\pi\left[\frac{\partial}{\partial x}(w\alpha - u\gamma)\right]_0 = -4\pi\left(\frac{w}{R_1} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

e così via. I risultati che ne derivano per le discontinuità delle componenti di deformazione sono i seguenti:

$$
\begin{aligned}
& D[x_x] = -2\alpha\frac{w}{R_1} - \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad D[y_y] = -2\alpha\frac{w}{R_2} - \frac{\partial v}{\partial y}, \\
& D[z_z] = 2\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)w + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\
(15) \qquad & D[y_z] = -4\alpha\frac{v}{R_2} - 2(2\alpha + 1)\frac{\partial w}{\partial y}, \\
& D[z_x] = -4\alpha\frac{u}{R_1} - 2(2\alpha + 1)\frac{\partial w}{\partial x}, \\
& D[x_y] = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),
\end{aligned}
$$

da cui segue

$$D[x_x + y_y + z_z] = 0.$$

Per le componenti di tensione si ha perciò

$$
(16) \qquad
\begin{aligned}
& D[X_x] = 2\mu\, D[x_x], \text{ ecc.} \\
& D[Y_z] = \mu\, D[y_z], \text{ ecc.}
\end{aligned}
$$

Resta così completata la ricerca delle discontinuità relativamente ai quattro tipi di deformazione che compaiono nelle formole fondamentali (1).

Ma per avere il significato meccanico della deformazione che nelle (1) dipende dai valori superficiali u, v, w dobbiamo considerare la deformazione che risulta dalla composizione dei due tipi ultimamente considerati. Le proprietà di discontinuità corrispondenti a questa deformazione risultante si deducono immediatamente sommando i secondi membri delle (11), (14), delle (12), (15), delle (13), (16) rispettivamente. Troviamo in tal modo le seguenti proprietà caratteristiche per le discontinuità della deformazione indicata:

$$D[u]=u\,,\qquad D[v]=v\,,\qquad D[w]=w\,, \tag{17}$$

cioè i salti, che le componenti di spostamento subiscono nel passaggio attraverso alla superficie s, sono precisamente uguali ai valori delle funzioni u, v, w che compaiono sotto gli integrali φ, ψ. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} &D[x_x]=\frac{\partial u}{\partial x}\,, && D[y_z]=0\,,\\ &D[y_y]=\frac{\partial v}{\partial y}\,, && D[z_x]=0\,,\\ &D[z_z]=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), && D[x_y]=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

e per le componenti di tensione

$$\begin{aligned} &D[X_x]=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\,,\\ &D[Y_y]=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\,,\\ &D[Z_z]=0\,,\\ &D[Y_z]=0\,,\qquad D[Z_x]=0\,,\qquad D[X_y]=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Sono queste le proprietà di discontinuità delle componenti di deformazione e di tensione per la deformazione considerata. Ma è facile vedere, come ho avuto occasione di dimostrare re-

centemente [1], che se alle condizioni (17) si associano le tre del quadro precedente

$$D[X_z] = 0, \qquad D[X_z] = 0, \qquad D[Z_z] = 0,$$

le quali, abbandonando la orientazione canonica, si possono scrivere

$$D[X_n] = 0, \qquad D[Y_n] = 0, \qquad D[Z_n] = 0, \tag{20}$$

e si devono supporre verificate su tutta la superficie s, la deformazione corrispondente dello spazio indefinitamente esteso risulta completamente ed univocamente determinata, e questa deformazione, per quanto precede, non è altro che quella considerata risultante dalla composizione dei tipi 3° e 4°.

Dal punto di vista meccanico il significato di tale deformazione è il seguente:

Essa è la deformazione prodotta in un corpo elastico indefinitamente esteso, quando venga praticato un taglio lungo una superficie finita s, *e le due faccie del taglio vengono spostate l'una rispetto all'altra in modo che ogni punto subisca uno spostamento rappresentato dal vettore* (u, v, w), *mentre nessuna forza, nè di massa nè superficiale, agisce sul corpo.*

È chiaro che le condizioni analitiche a cui dovranno soddisfare in tal caso le componenti u, v, w (oltre la continuità in generale e la evanescenza all'infinito) saranno precisamente, per la superficie s, le relazioni (17). Mentre per le tensioni dovrà essere soddisfatta la condizione che quelle provocate dalla deformazione sulle due faccie del taglio si equilibrino tra loro. E questa condizione è precisamente quella rappresentata dalle relazioni (20). Così l'intuizione meccanica concorda col risultato analitico che il problema è da tali condizioni univocamente determinato.

E possiamo quindi concludere che la deformazione rappresenta *una distorsione* dello spazio elastico indefinitamente esteso, supposto immobile all'infinito, nel significato che ho dato a questa

---

[1] " Rend. della R. Acc. dei Lincei ", 1914-15.

denominazione in alcune recenti ricerche, già precedentemente citate. Anzi questa deformazione è precisamente quella di cui mi sono servito in quella occasione per uno studio generale del problema delle distorsioni elastiche.

Conviene qui ricordare che si deve specialmente al Weingarten di aver richiamato l'attenzione dei meccanici sopra questa classe di deformazioni con una Nota inserita nei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „ del 1901. E che in seguito, nel 1905, il Volterra negli stessi " Rendiconti „ pubblicò una serie interessantissima di ricerche. nelle quali le particolarità di queste deformazioni sono studiate nei casi che più si prestano alla loro realizzazione fisica. Le condizioni però che sono stabilite dal Weingarten per i due lembi del taglio sono più restrittive di quelle che risultano dalle (20), in quanto egli suppone che tutte le sei componenti di tensione debbano essere continue attraversando il taglio.

Le condizioni che debbono essere soddisfatte, perchè ciò si verifichi, risultano subito dalle nostre formole (18), (19). Il vettore (u, v, w) lungo il taglio non è più in tal caso arbitrario, ma deve soddisfare per tutti i punti della superficie alle condizioni

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

in cui le variabili x, y s'intendono riferite all'orientazione canonica.

Le condizioni del Volterra sono ancora più restrittive, poichè, oltre alle condizioni del Weingarten. egli suppone che siano continue attraverso il taglio anche le *derivate prime e seconde* delle componenti di tensione, il che porta a condizioni ancora più limitate pel vettore (u, v, w). Esso risulta tale che le due faccie del taglio non possono subire che spostamenti relativi rigidi.

L'opportunità di una definizione più larga, quale fu da me proposta, delle deformazioni prodotte nei corpi elastici da tagli e successivi spostamenti relativi delle due faccie, risulta dal fatto che essa ci è imposta dalla realtà fisica, in quanto, procedendo altrimenti, verremmo ad escludere dalla teoria fenomeni che effettivamente esistono in natura, come ho indicato in varie occasioni.

Ma anche da un punto di vista analitico assai importante, la definizione proposta si presenta spontanea. Poichè, accettata questa definizione, in base ai risultati ottenuti in questa Nota, e come sua conclusione la più generale, possiamo enunciare la proposizione seguente:

Qualsiasi deformazione di un corpo elastico isotropo limitato è la sovrapposizione di tre deformazioni provocate in uno spazio elastico omogeneo, indefinitamente esteso e supposto fisso all'infinito: 1° da un sistema di forze di massa agenti nello spazio occupato dal corpo; 2° da forze superficiali agenti sulla sua superficie; 3° da una distorsione dovuta ad un taglio lungo la superficie del corpo ed a spostamenti relativi nei diversi punti del taglio uguali ai valori superficiali dello spostamento (1).

L'analogia di questo teorema colla proprietà dei potenziali newtoniani di poter essere sempre considerati come la sovrapposizione di potenziali di spazio, di superficie e di doppio strato, è evidente. Esso caratterizza in certo modo analiticamente i potenziali elastici, stabilisce il significato meccanico dei diversi tipi di integrali che compaiono nelle formole generali, e può considerarsi come il più generale fondamento per l'applicazione dei metodi della teoria del potenziale ai problemi dell'equilibrio elastico.

(1) Cfr. Gebbia, *Le deformazioni tipiche dei corpi solidi elastici.* "Annali di Matematica ", S. III, T. VII; Maggi, *Sull'interpretazione del nuovo teorema di Volterra sulla teoria dell'elasticità.* " Rend. Acc. Lincei ", 1905, 2° sem.; Id., *Sugli spostamenti elastici discontinui.* " Rend. Acc. Lincei ", 1908, 1° sem.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Giugno 1916.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE GIAMPIETRO CHIRONI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, Patetta, Vidari, Prato, e Stampini Segretario della Classe.

È scusata l'assenza del Presidente Boselli e dei Soci Carle, Ruffini, D'Ercole e Sforza.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente del 28 maggio u. s.

Il Presidente Chironi è lieto d'iniziare i lavori dell'odierna adunanza chiamando giorno di festa per la nostra Accademia questo in cui due nostri Colleghi salgono al governo della cosa pubblica; Paolo Boselli, dalla fiducia del Re e della Nazione chiamato a costituire il Ministero Nazionale; Francesco Ruffini, scelto a dirigere con la sua ben nota competenza l'istruzione pubblica del Paese. Propone — e la Classe con unanimi applausi approva — che siano mandati due telegrammi di felicitazione e di augurio ai due insigni Colleghi.

Il Socio Stampini, prendendo la parola, crede di avere interpretato l'unanime sentimento dei Colleghi dettando in lingua latina ed in forma di iscrizione un ordine del giorno in onore di Paolo Boselli e a gloria di tutti i valorosi che combattono

per la Patria. Legge l'ampia iscrizione in cui è espressa la ferma certissima speranza che Paolo Boselli, formando un Ministero Nazionale, continuerà pertinacemente e sapientemente l'opera coraggiosa intrapresa fra tante difficoltà e pericoli da Antonio Salandra; mentre, sotto gli auspici del Re e sotto la condotta di Luigi Cadorna, l'esercito di terra rintuzza con meraviglioso coraggio i reiterati attacchi del nemico e prende l'offensiva; mentre l'armata, sotto gli auspici ed il comando del Duca degli Abruzzi, dà prova di straordinario valore e perizia evitando e frustrando le molteplici insidie natanti e subaquee delle mine e dei sottomarini austriaci, e sfida ad aperta battaglia le grandi navi da guerra che si tengono al sicuro nei porti nemici; mentre i nostri velivoli infrangono le minacce della flotta aerea austriaca, ne vendicano le incursioni e portano il terrore e la confusione nel territorio nemico. Termina l'iscrizione augurando che, sotto il governo di Paolo Boselli, rifulga finalmente alla Patria nostra quella pace, nella quale, vinti e domati i nemici, ridata la libertà ai Trentini, ai Triestini e ai Dalmati restituiti finalmente all'abbraccio dell'antica madre, le armi, le leggi, le istituzioni d'Italia, per stabile diritto di vittoria, dominino per le terre e pei mari dovunque la lingua del divino poeta, dolce nelle bocche sonante, denunzi il sangue, il carattere, la mente, la volontà dell'Itala gente.

La Classe accoglie con applausi la lettura, e il Presidente propone — e la Classe unanime approva — che della iscrizione del Socio Stampini, la quale sarà pubblicata negli *Atti*, sia inviato un esemplare anche a S. M. il Re, a S. A. R. il Duca degli Abruzzi, ad Antonio Salandra e a Luigi Cadorna.

Il Presidente Chironi presenta, anche a nome del Socio Brondi, con parole di altissimo elogio, che saranno inserite negli *Atti*, il libro recente di A. De Cupis intitolato *Competenza e giurisdizione*, 2ª ediz. (Roma-Milano-Napoli, Società editrice libraria). Presentando inoltre, a nome così della Cassa Nazionale d'assicurazione per gl'infortuni degli operai come del suo Presi-

dente Senatore Cesare Ferrero di Cambiano, un volume dal titolo *Per la riforma della legge infortunii* (Roma, 1915), non che i due primi numeri della corrente annata della *Rassegna di assicurazioni e previdenza sociale*, dice le seguenti parole:

" Quanto ora pubblica la Cassa Nazionale di Assicurazione speciali benemerenze aggiunge a quelle ond'è segnalata l'opera generosa che, per autorità di direzione e sapiente concorso di consiglieri, altamente svolge secondo l'esser suo: opera di cui più larghi e poderosi effetti s'avrebbero per l'educazione ed il benessere dei lavoratori, al cui beneficio è vôlta, se la legge desse all'istituto special vigoria facendolo organo unico e generale di quelle funzioni di social previdenza per le quali venne fondato. Il volume or pubblicato, se dà miglior conoscenza, anche pei difetti suoi, della legge vigente sugli infortuni degli operai sul lavoro, mostra come da tali deficienze l'ordinamento legale sia reso manchevole, con danno dei lavoratori per una parte, con danno per l'altra degli enti assicuratori, esposti a frodi le cui maniere hanno e varietà e difficoltà non lievi di tecnico accertamento. Così il lavoro, assai commendevole, mostra la necessità delle riforme, e in pari tempo la via migliore per attuarle: utile pertanto agli studiosi di cose sociali; utilissimo al legislatore. E ben s'accompagna alle altre pubblicazioni delle quali l'istituto s'è reso iniziatore e patrono: segnalata fra tutte la " Rassegna „ divulgata sotto forma di " bollettino mensile „, ricchissima di contenuto per ogni questione che attinga alle assicurazioni dei lavoratori, perspicua nell'ordinamento che all'abbondante materia vi è dato, nella trattazione che dei singoli argomenti vi è fatta „.

Il Socio Brondi presenta, a nome dell'autore dott. Carmelo Caristia, il volume *Il diritto costituzionale italiano nella dottrina recentissima* e ne espone il contenuto, mettendone in luce le tendenze e i criterî metodici.

Il Socio Vidari presenta la sua traduzione della *Dottrina del diritto* di E. Kant, che è la prima parte della *Metafisica dei*

costumi (Milano, Studio editoriale Lombardo), e fa seguito alla *Dottrina della virtù* la quale è già stata tradotta dallo stesso autore e a suo tempo presentata in omaggio all'Accademia. La *Dottrina del diritto*, ora per la prima volta recata in italiano, è opera ragguardevolissima del sommo pensatore di Königsberg non solo per il rapporto con tutto l'organismo del pensiero kantiano, del quale la *Dottrina del diritto* è applicazione, ma anche per la singolare importanza che ha nel momento presente, di fronte alle teorie e alla pratica dello Stato fondato sulla forza, il pensiero kantiano circa i fondamenti del diritto, la natura e i fini dello Stato, l'organizzazione di rapporti giuridici fra gli Stati e il diritto cosmopolitico. Il Socio VIDARI ritiene che l'opera del KANT possa nel momento attuale essere accolta e letta con particolare interesse, e contenga principî che meritano di essere altamente riaffermati per la universale ed eterna loro verità e per la profondità onde sono nel libro indagati e svolti.

Il Socio VIDARI presenta pure un volume, *Per l'educazione nazionale* (Torino, Paravia), contenente alcuni suoi saggi di filosofia morale e di pedagogia, in cui analizza e determina nel loro valore i concetti di patria, di nazione, di umanità, e ne trae le conseguenze nel campo della educazione e della scuola. Taluni di tali saggi sono nuovi, altri eran già stati pubblicati in riviste quando il pensiero della educazione nazionale non era ancora così largamente penetrato nelle coscienze come oggi accade, sotto lo stimolo dei grandi avvenimenti di guerra. Nel volume sono anche inseriti tre discorsi per la causa nazionale tenuti dall'Autore qui in Torino e altrove a spiegazione e illustrazione delle cause e delle ragioni ideali e storiche della nostra guerra.

La Classe si rallegra col Socio VIDARI e lo ringrazia.

Il Socio BRONDI presenta una *Nota* del Dott. Emilio BETTI su la *Responsabilità morale o peculiare, e responsabilità del pater (dominus) ne' limiti dell'arricchimento in diritto romano classico*. Sarà pubblicata negli *Atti*.

Il Socio Patetta legge una sua *Nota*, relativa a *La dichiarazione di principî della vendita carbonaria di Londra nel 1823*. Sarà pubblicata negli *Atti*.

Il Socio Vidari presenta una prima *Nota* della Dottoressa Giuseppina Bientinesi, dal titolo *Vincenzo di Beauvais e Pietro Dubois considerati come pedagogisti*. Sarà pubblicata negli *Atti*.

Il Socio Stampini presenta una seconda *Nota* del Professore Ferruccio Calonghi su *Il Codice Beriano di Tibullo. Confronti e osservazioni*, che sarà parimente pubblicata negli *Atti*.

Il Socio Segretario Stampini legge una lettera direttagli dal Socio Sforza che richiama l'attenzione di lui, quale Segretario della Classe, sul fatto che il nostro Socio corrispondente Roberto Davidsohn fu recentemente espulso dall'Accademia della *Crusca*, della quale era Socio, per aver ricambiato, come dice lo Sforza, col veleno e col fango l'ospitalità fraterna datagli dall'Italia. Legge inoltre un articolo di un giornale, che dà notizia della adunanza della *Crusca*, la quale solo in questi ultimi tempi potè deliberare, essendo finalmente venuta in possesso della rivista in cui il Davidsohn insultò il nostro Paese.

Su proposta del Presidente, affinchè la Classe possa deliberare con piena conoscenza dell'atto compiuto dal Davidsohn, nessuno dei presenti avendo letto lo scritto di lui, si nomina una Commissione composta dei Soci Einaudi, Patetta e Vidari, perchè riferisca alla Classe nella prima adunanza che si terrà alla ripresa de' suoi lavori, chiudendosi con l'adunanza odierna i lavori dell'anno corrente accademico.

Dopo di che il Presidente scioglie l'adunanza salutando i colleghi coi migliori auguri per tutti i presenti e per i Soci assenti.

LETTURE

HONORI

PAVLI · BOSELLI

GLORIAE

TERRESTRIS · EXERCITVS

MARITIMAE · ATQVE · AERIAE · CLASSIVM

PRO · PATRIA · PVGNANTIVM

D

QVOD

PAVLVS · BOSELLI

EQVES · ORDINIS · SVPREMI

VIRGINIS · DEI · MATRIS · RENVNTIATAE

ET · REGIS · ADMINISTER

MAGISTERIO · EQVITVM · MAVRITIANORVM · LAZARIANORVM · EXERCENDO

MIRIFICA · PRINCIPIS · ET · VNIVERSAE · ITALIAE · CONCORDIA

AD · SVMMVM · REI · PVBLICAE · FASTIGIVM · ELATVS

ET · REGIS · ADMINISTRORVM · CONSILIO · PRAEFECTVS

VIROS · RERVM · CIVILIVM · PERITISSIMOS

AC · PRINCIPES · REI · PVBLICAE · PARTIVM

SOCIOS · SIBI · CONSORTESQVE · NEGOTIORVM · REGENDORVM · ADIVNXIT

VT · CONSPIRANTEM · OMNIVM · POPVLI · ORDINVM · CONSENSVM

IN · PATRIAE · SALVTEM · ET · GLORIAM · CONFERRET

ORDO · SODALIVM · REGIAE · ACADEMIAE · TAVRINENSIS

DISCIPLINARVM · MORALIVM · HISTORIAE · PHILOLOGIAE

FINIBVS · PROVEHENDIS

COLLEGAE · AMPLISSIMO · ATQVE · EXCELLENTISSIMO · GRATVLANTVR

VEHEMENTERQVE · LAETANTVR

SVNT·ENIM·OPTIMA·SPE·CERTISSIMAQVE·FRETI

PAVLVM·BOSELLI

OPVS·INTER·TOT·TANTAQVE·DISCRIMINA·RERVM

AB·ANTONIO·SALANDRA·STRENVE·AVDACTER·SVSCEPTVM

IMPENSE·PERTINACITER·SAPIENTER·PERSECVTVRVM·ESSE

DVM·FELICISSIMIS·AVSPICIIS

VICTORII·EMMANVELIS·III

OMNIVM·REGVM·STRENVISSIMI

ET·DVCTV·ALOISII·CADORNA

AD·QVEM·PROPTER·INSIGNEM·REI·MILITARIS·PRVDENTIAM·ET·VSVM

MERITO·SVMMA·TOTIVS·TERRESTRIS·BELLI·DELATA·EST

EXERCITVS·NOSTER

IAM·SEMPITERNAE·GLORIAE·COMMENDATVS

IN·ALPIBVS·FORTISSIMA·PECTORA·HOSTIBVS·OPPONIT

ITERATOS·AVSTRIACI·FVRORIS·IMPETVS·CONTVNDIT

VICTRICIA·ARMA·VLTRO·IN·HOSTEM·INFERT

DVM·CLASSIS·NOSTRA

FORTITVDINE·CONSTANTIA·PRVDENTIA·ADMIRABILIS

IMPERIO·AVSPICIOQVE

ALOISII·AMADEI·APRVTII·DVCIS

DECORIS·ET·LVMINIS·EIVS·SABAVDICAE·STIRPIS

CVI·SEMPER·FVIT·METVS·IGNOTVS

CVI·EST·FORTIVM·AVDACIA·INNATA

HOSTILIVM·NAVIVM·SVB·MARI·NAVIGANTIVM

INSIDIAS·ET·SPES·IRRITAS·FACIT

ET·SVBMERSA·VEL·AQVIS·INNATANTIA·MACHINAMENTA

OFFENSV·DISSILIENTIA·VITANS

VIRTVTE·SVA·VIRIBVS·SVIS·FEROX

MAIORA·NAVIGIA

CLADIS·FORMIDINE·IN·PORTIBVS·DELITESCENTIA

NEQVIQVAM·AD·PVGNAM·PROVOCAT

DVM·MVLTIFORMES·ITALAE·MACHINAE

CELERI · VOLATV · PER · CAELVM · DVCTAE

AERIAS·MINAS·FRANGVNT·INCVRSIONES·VLCISCVNTVR

TERROREM · AC · TVMVLTVM · IN · HOSTIVM · FINIBVS · PROPAGANT

VTINAM·PAVLO·BOSELLI·REGNI·GVBERNACVLA·TRACTANTE

EA·TANDEM·PAX·PATRIAE·NOSTRAE·ADFVLGEAT

VT·HOSTIBVS·DEVICTIS·ET·DOMITIS

TRIDENTINIS · TERGESTINIS · DALMATIS · IN · LIBERTATEM · VINDICATIS

ATQVE·IN·SINVM·ET·COMPLEXVM·ANTIQVAE·MATRIS·RESTITVTIS

ITALIAE·ARMA·LEGES·INSTITVTA

STABILI·VICTORIAE·IVRE·PER·MARIA·AC·TERRAS·DOMINENTVR

VBICVMQVE·DIVINI·POETAE·LINGVA

DVLCE·IN·ORIBVS·SONANS

GENTIS·ITALAE·SANGVINEM

INGENIVM·MENTEM·VOLVNTATEM·DENVNTIET

A·D·XIV·KAL·IVL·AN·MCMXVI

SCRIPSIT HECTOR STAMPINI

Competenza e giurisdizione.

Nota del Socio nazionale Senatore GIAMPIETRO CHIRONI
(a proposito di una recente pubblicazione:
De Cupis, *Competenza e giurisdizione*. Milano, 1916).

Fra quanti studi di ragion pubblica arricchirono di recente la nostra letteratura giuridica, tien questo il luogo più alto: la gravità dei problemi che vi son discussi, il processo tenuto nell'indagarli, i risultati cui l'insigne autore intende, e ch'egli in gran parte definitivamente riesce a fermare, lo segnalano ai giuristi, lo impongono alla meditazione di quanti s'affaticano intorno alle questioni così intricate e complesse di competenza e di giurisdizione. La struttura salda del lavoro apparisce già nella originalità del disegno e dell'esecuzione: non incomincia esso con disquisizioni astratte e con la formulazione di " verità assolute „ intorno ai poteri dell'autorità giudiziaria nei riguardi degli atti delle pubbliche amministrazioni: il processo seguìto è induttivo: grande raccolta di fatti constituiti dalle decisioni delle supreme magistrature, acuta disamina per accertarne o raffrontarne le risoluzioni, e acutissima critica: questo il metodo che consentì allo scrittore di affermare la dottrina sua con la virtù di superare la dottrina opposta, o quanto meno di farla non debolmente vacillare. Com'è ricca così di osservazioni se non sempre convincenti, profonde sempre, la ricerca sull'azione giuridica dello Stato operante *iure imperii* o *iure gestionis*! Perchè, mostrato quanto abbia di assurdo il dire non potersi differenziare il diritto privato dal pubblico, e movendo dalla concezione sociale e giuridica dello " Stato „ e delle funzioni sue, a fermare quella distinzione tende tutta la prima parte dello scritto: e con perspicua novità di argomenti vien dichiarata come insita nella natura stessa dell'ente pubblico, in

vario modo operante secondo le finalità sue. Ma lo scrittore — e questo è pregio speciale del lavoro — non si lascia trarre dalla distinzione accolta, alle viete esagerazioni inducenti la irresponsabilità assoluta dell'ente per gli atti suoi d'impero: si potrà ben discutere, e dissentire intorno la compiutezza dei limiti ch'egli pone: ma entro precisi termini fissa la responsabilità, bene aggiustando alla dottrina sua taluni casi in cui altri può scorgere una forma di responsabilità contrattuale inserta nelle funzioni di ragion pubblica, e argomentando con perspicuità e novità d'idee del concetto di " causa ". Onde trae opportunamente occasione di contrastare efficacemente quelle dottrine civilistiche che vorrebbero togliere o snaturare questo elemento essenziale del negozio giuridico.

Ma particolarmente ricca di applicazioni è la concezione difesa nei vivi dibattiti in materia di competenza: e convien dire, che ai criterî già tenacemente propugnati dall'autore in talune compiutissime relazioni scritte come avvocato generale erariale, e in questo lavoro ripresi, illuminati e rafforzati di considerazioni nuove, s'informa l'atteggiamento che s'avverte nell'opera delle Supreme Corti.

E come tanto autorevole assenso hanno le dottrine contenute in questa prima parte dello scritto, è così desiderabile che i voti giustamente espressi nella seconda parte intitolata dalla giurisdizione siano senza tardanza accolti dal legislatore: gli ordinamenti, così saggi, sulla giustizia amministrativa, hanno bisogno di compimento, la giurisdizione amministrativa male può compiere alla delicatezza dell'officio, se non è constituita nella pienezza dei suoi poteri. Cosa desiderabile s'è detto: più veramente si deve soggiungere ch'è necessaria per la normale e sollecita amministrazione della giustizia.

Responsabilità nossale o peculiare, e responsabilità del pater (dominus) ne' limiti dell'arricchimento in diritto romano classico.

Nota del Prof. EMILIO BETTI

Per un atto giuridico — delitto o negozio — compiuto dal soggetto a potestà (filius o servus), l'avente in potestà (pater o dominus) può nel diritto romano classico rispondere di fronte al terzo — leso o contraente — in una duplice qualità giuridica. Egli può essere responsabile anzitutto *a) quale avente in potestà* (quasi pater, vel quasi dominus), ossia quale legittimo padrone del *corpo* o del *peculio* del soggetto a potestà; responsabile insomma *in nome* di costui nel senso più rigoroso di questa espressione (ex persona filii vel servi, nomine filii vel servi). Nella quale ipotesi l'azione con cui l'avente in potestà è tenuto, sarà un'actio noxalis o un'actio de peculio, secondo che l'atto giuridico del soggetto a potestà, per cui quegli risponde, sia un atto illecito o un negozio. Ma l'avente in potestà può anche essere responsabile non come tale bensì *b)* quale avente causa (per così dire) dal soggetto a potestà, ossia *quale subietto del patrimonio a cui l'atto giuridico in questione ha apportato un aumento*: in questo lato senso, responsabile in nome proprio. Nella quale ipotesi l'azione, con cui l'avente in potestà è tenuto, sarà la medesima actio ex delicto o ex contractu che spetta contro il soggetto (o che almeno spetterebbe contro di lui se fosse un libero), ma volta con opportune modificazioni a uno *scopo divergente*: a.° ex delicto utilis, o a.° de in rem verso, secondo che l'arricchimento provenga da un delitto o da un negozio.

Laddove il *fondamento* della responsabilità nossale o peculiare è la *padronanza del caput noxium o del peculium* (considerati l'uno e l'altro quale *oggetto di soddisfazione* pel terzo leso

o contraente), il fondamento di questa seconda responsabilità è l'*arricchimento come tale*. Tale differenza nel fondamento importa una differenza anche nella *misura della responsabilità*, che si esprime nella differente litis aestimatio delle rispettive actiones. In generale, la responsabilità del pater o dominus o è *limitata* nella sua quantità, ovvero, dove siffatta limitazione non ha luogo, è *condizionata* nella sua esistenza. Egli insomma *non* risponde mai *in solidum*: di che la ragione giuridica è che egli risponde dell'atto compiuto dal soggetto a potestà, *come di un atto altrui a cui egli è restato* del tutto *estraneo*. Nelle ipotesi infatti in cui l'avente in potestà non vi sia restato estraneo — come quando egli abbia autorizzato il soggetto a concludere il negozio, lo abbia preposto a un'azienda commerciale o a una nave, ovvero non lo abbia trattenuto, sapendo e potendo, dal commettere il delitto —, la sua responsabilità è in solidum (a.° quod iussu, a.° institoria, a.° exercitoria, a.° noxalis detracta noxe deditione) (1). In tali ipotesi, che stanno fuori della nostra considerazione attuale, l'avente in potestà risponde dell'atto compiuto dal soggetto così *come* risponderebbe *di un atto proprio*; ne risponde però pur sempre in via adiettizia, non in via principale e diretta (2).

(1) La responsabilità in solidum viene giustificata per l'appunto con la costruzione di una *partecipazione diretta* del pater (dominus) al negozio del filius (servus): Ulp. 863 D. 15, 4, 1 pr. merito ex iussu domini *in solidum* adversus eum iudicium datur, *nam quodammodo cum eo contrahitur qui iubet*; Gai. I. 4, 71 exercitoria locum habet cum pater dominusve... praeposuerit... cum *enim* ea quoque res *ex voluntate patris dominive contrahi videatur* aequissimum esse vissum est *in solidum* actionem dari.

(2) Quanto alle actiones ex contractu è da notare che il dir. romano ignora il principio della rappresentanza diretta. Quanto alle actiones ex delicto è da notare che esse, pur detracta noxae deditione, restano sempre *nossali*. La connivenza (scientia) dell'avente in potestà è infatti qualcosa di negativo e di ben diverso dal mandato (iussus), o eccitamento, a delinquere: nel qual caso il soggetto è un puro strumento della sua volontà. Conseguenza pratica: Paul. 368 [de noxali ex lege Aquilia actione] D. 9, 4, 17 pr. si ex duobus dominis uno sciente, altero ignorante servus deliquit, si ante cum altero qui nesciebat actum sit et noxae dediderit servum [iniquum est vilissimi hominis] ⟨constat⟩ *deditione* alterum quoque *liberari*: arg. da Paul. 110 D. 9, 4, 4, 3 si cum eo qui scit cum noxae deditione actum sit, amplius in dominum detracta noxae deditione *danda actio non est*.

La misura, per contro, della responsabilità peculiare non va oltre i limiti del valore economico rappresentato da quel complesso di beni di cui l'avente in potestà ha concesso l'*amministrazione autonoma* al soggetto (peculium). La misura della responsabilità nossale non eccede il valore economico rappresentato dal servus o filius quale *capitale personale,* in quanto il dominus o pater può liberarsi col trasferire al terzo la propria potestà sul soggetto (noxae dedere). La misura della responsabilità nella ipotesi *b* non oltrepassa i limiti dell'*aumento patrimoniale* effettivo, ossia di ciò che, in conseguenza dell'atto del soggetto, è entrato nel patrimonio dell'avente in potestà (id quod in rem patris dominive versum est, id quod ad patrem dominumve pervenit). Siffatte limitazioni di responsabilità si esprimono nella condemnatio della formola in particolari taxationes (dumtaxat de peculio, dumtaxat de eo quod in rem patris d. ve versum est etc.) o in una particolare adiectio (aut noxae dedere).

Ora non è chi non veda come la limitazione della responsabilità all'ammontare dell'aumento patrimoniale (id quod in rem versum est, id quod pervenit) sia cosa affatto *diversa* e indipendente dalla limitazione di essa all'ammontare del peculio, e per contro abbia in sostanza il *medesimo* carattere giuridico, qualunque sia stata la fonte dell'aumento, tanto se sia stata un negozio quanto se sia stata un delitto. La quantità dell' " in rem versum „ proveniente da negozio concluso col soggetto a potestà non coinciderà mai, se non per un puro accidente, con la quantità di ciò ch'è " in peculio „. E in conseguenza differirà la soddisfazione che il terzo creditore potrà ottenere secondo che dovrà intentare l'actio ex contractu *α*) soltanto " de peculio „ (senza ulteriori aggiunte) — dato che al momento della litis contestatio risulti non esserci stata alcuna " in rem versio „ da parte sua —, ovvero *β*) soltanto " de in rem verso „ (senza la clausola " de peculio „) — dato che risulti la inesistenza attuale di alcunchè " in peculio „ senza che ci sia stato un " dolo facere quo minus quid peculii esset „ da parte dell'avente in potestà. Quantunque in pratica il caso *β* possa verificarsi di rado, e di regola l'actio de in rem verso soglia venire intentata quale azione *supplementare* in un con l'actio de peculio, pure in astratto, dal punto di vista dogmatico, la *separabilità* dell'una azione dall'altra non può sembrar dubbia. Invero l'estremo dell'actio de in rem verso

come tale non è l'esistenza di un peculio, ma tutt'al contrario: anzitutto o l'*inesistenza* di un " *quid in peculio* " (quindi anche l'inesistenza di un peculium) o la sua insufficienza a coprire il debito (Ulp. 855 D. 15, 3, 1 pr. si... nihil in peculio habeant, vel habeant, non in solidum tamen), inoltre una " in rem versio " da parte del creditore (si in rem eorum quod acceptum est conversum sit): versio per cui gli aventi in potestà contraggono una responsabilità *autonoma*, in nome proprio (quasi *cum ipsis* potius contractum videatur) (1).

Dalla piena autonomia dogmatica dell'actio de in rem verso di fronte all'actio de peculio balza fuori nettamente il suo carattere giuridico di vera *azione di arricchimento* e la sua analogia con l'azione di arricchimento (de eo quod pervenerit) che nasce dal delitto del soggetto a potestà; analogia confermata dallo stesso linguaggio de' giuristi (2). Come *dal delitto* del sog-

---

(1) La separabilità è attestata anche da Ulp. 855 D. 15, 3, 1, 1, 2 e Ulp. 860 D. 15, 2, 1, 10. Essa venne di recente negata dal Solazzi, *Peculio e " in rem versio " nel diritto classico* (negli *Studi per Brugi*) partendo da una interpretazione che ci sembra sforzata di Gai. I. 4, 74 (habere peculium etc.). Oltre la ragione giuridica di principio detta nel testo non possiamo in questo luogo addurre altri argomenti se non, a mo' d'esempio, la netta *contrapposizione* delle due azioni in Gai. I. 4, 74 (habere peculium — *vel* versum esse) in Paul. 218 D. 4, 4, 24, 3 (quod pervenerit — quod *non* pervenerit) e in Gai. 221 D. 14, 5, 1 (sive *neutrum* eorum sit).

(2) I giuristi usano infatti a designare l'estremo dell'actio de in rem verso quello stesso termine che è tecnico per designare l'arricchimento: " *pervenire* ". Ulp. 856[1] D. 15, 3, 3, 10... creditorem de in rem verso habere actionem. an et venditor habeat *quia res eius pervenerunt in rem domini.* Ulp. 856[2] D. 15, 3, 5, 3 placet non solum eam pecuniam in rem verti quae statim a creditore *ad dominum pervenerit*, sed et quae prius fuerit in peculio. hoc autem totiens verum est, quotiens servus *rem domini gerens locupletiorem eum facit nummis peculiaribus, alioquin*... Tryph. 3 D. 15, 3, 6... de in rem verso teneretur, quia hoc ipso, quod servus rem in peculio *haberet, locupletior fieret*, quod aperte falsum est. Ulp. 856[3] D. 15, 3, 7, 4 et si hereditatem a servo emero, ut quod mihi ab ipso servo debebatur compensarem, licet nihil solvi, tamen consequi me ex empto *quod ad dominum pervenit* (così Labeo). ego (Ulp.) autem non puto de in rem verso esse actionem emptori nisi hoc animo gesserit servus, ut in rem domini verteret. Ulp. 852[3] D. 15, 1, 9, 8 si quid ei (scil. servo) creditum est iussu domini... deducendum (scil. de peculio) Julianus l. XII dig. (195[2]) scribit. sed hoc ita demum verum puto *si non in rem domini quod acceptum est*

getto a potestà accanto all'azione nossale può nascere — sempre che arricchimento vi sia stato — un'azione d'arricchimento, così *dal negozio* del soggetto a potestà accanto all'azione peculiare, a *complemento* o in *vece* di essa, può nascere — nella medesima ipotesi — un'azione ch'è pure di arricchimento (1). La

---

pervenit (nel qual caso per la quantità versata il dominus non dovrebbe più esser convenuto de peculio bensì de in rem verso). Paul. 218 D. 4, 4, 24, 3 si servus vel filius familias minorem circumscripserit, pater dominusve *quod ad eum pervenerit* restituere iubendus est; *quod non pervenerit* ex peculio eorum praestare (ove il *iubere* è bensì da intendere quale comando diretto del pretore nella *restitutio in integrum*, ma sta per l'appunto *in funzione* della condanna del giudice sulla base rispettivamente della clausola "de in rem verso„ e "de peculio„). Paul. 457 D. 14, 3, 17, 4 Proculus ait, si denuntiavero tibi ne servo meo praeposito *crederes*, exceptionem (scil. in factum) dandam: "si ille illi non denuntiaverit ne illi servo crederet„. sed si ex eo contractu [peculium habeat! aut] *in rem meam versum* sit nec velim *quo locupletior sim* solvere, replicari de dolo malo oportet [nam — quaeram]. § 5 ex hac causa (dalla mutui datio fatta a un institor diffidato dal dominus) etiam [condici] ⟨de in rem verso agi⟩ (con la condictio certae creditae pecuniae se fu dato danaro) posse verum est (quantunque si tratti di un institor: perchè l'actio institoria può essere paralizzata dalla exceptio in factum). Si confronti infine il modo di esprimersi di Gai. 101 D. 4, 3, 26 a proposito dell'azione per l'arricchimento data contro l'erede del doloso (*eatenus* daturum se eam actionem proconsul pollicetur *quatenus ad eum pervenerit*: in contrapposto con l'actio *in solidum* data contro l'autore del dolo) col modo di esprimersi di Gai. 221 D. 14, 5, 1 a proposito dell'actio de in rem verso (sive enim iussu eius cuius in potestate sit negotium gestum fuerit, *in solidum* eo nomine iudicium pollicetur: sive non iussu sed tamen in rem eius versum fuerit, *eatenus* introducit actionem *quatenus in rem eius versum fuerit*: sive neutrum eorum sit, de peculio actionem constituit).

(1) Considerata nella sua funzione *vicariante*, la condemnatio de in rem verso sta con la condemnatio de peculio in un rapporto analogo a quello in cui la exceptio rei in iudicium deductae sta con la exceptio rei iudicatae: delle quali si applica l'una o l'altra *secondo i casi* (Betti, *Su la formola*, p. 26[5]). Se non che la condemnatio de in rem verso ha di regola una semplice funzione supplementare. — Che anche da un *negozio* e non soltanto da un delitto possa discendere un'azione limitata all'arricchimento anzi che in solidum non si deve in linea di principio negare. Ciò avviene tutte le volte che dal negozio non derivi, per la mancanza di un presupposto, l'obbligazione in solidum e l'azione propria che da esso suole altrimenti derivare. Esempî: negozi conclusi dal pupillo sine tutoris auctoritate; negozi conclusi sine iussu (praepositione) patris dominive dal filius o servus

differenza tra le due azioni d'arricchimento sta soprattutto in ciò, che quella proveniente da negozio è o *supplementare* dell'azione peculiare (quando viene intentata insieme con essa) o, per lo meno, *surrogatoria* di essa (in quanto persegue il medesimo scopo di rei persecutio); laddove l'azione d'arricchimento proveniente da delitto non può essere come tale nè supplementare nè surrogatoria dell'azione nossale.

Di qui derivano importanti conseguenze per la questione della concorrenza dell'azione d'arricchimento con l'azione peculiare o nossale.

A) Tra l'a.° de in rem verso e l'a.° de peculio, quando entrambe spettino eiusdem debiti nomine e l'una di esse venga esperita prima, separatamente dall'altra, esiste *concorrenza di solutio*. Il che significa che la prestazione effettiva eseguita in base all'una estingue l'altra in proporzione. O infatti *a*) la prestazione è fatta dal pater o dominus in base all'actio de peculio per una quantità *almeno eguale* all' " in rem versum "; e allora *viene a mancare* per ciò stesso nel patrimonio di lui quell'aumento economico che è l'estremo giuridico dell'actio de in rem verso. Egli diventa più povero per una quantità almeno eguale a quella per cui era diventato più ricco: onde l'azione per l'arricchimento vien meno (cessat). Questa è la costruzione di Giuliano: Ulp. 855[1] D. 15, 3, 1, 2: si... sit... actum de peculio, de

> in rem verso actio an cesset videndum. et refert Pomponius Julianum existimare de peculio actione peremi de in rem verso actionem (*quia in peculium conversum est quod in domini rem erat versum* et pro servo solutum est quemadmodum si ipsi servo a domino fuisset solutum), sed ita demum, *si praestiterit* ex actione de peculio dominus *quod* servus in rem eius *verterat*: ceterum si non praestiterit manet actio de in rem verso (1).

---

al quale non sia stato concesso un peculium, o che sia impubere (D. 15, 1, 1, 4) o che sia un'ancilla (C. 4, 26, 11); deposito con vendita della cosa da parte dell'erede sine dolo malo (D. 16, 3, 1, 47). Le azioni d'arricchimento che ne derivano *non* sono actiones *ex contractu* propriamente dette.

(1) Ulp. 15, 3, 1, 2 fa l'ipotesi che il credito peculiare appartenga a più creditori solidali, dei quali uno abbia compiuto una versio in rem domini, e che il credito comune venga domandato in giudizio mediante

Ovvero *b*) la prestazione è fatta dal pater o dominus in base all'actio de in rem verso per una quantità eguale al debito peculiare, o almeno — quando il peculio è insufficiente a coprirlo — per una quantità eguale al peculio, e allora viene a mancare uno dei presupposti dell'actio de peculio, il debito o il peculio stesso: poichè ciò che il pater o dominus presta in nome del soggetto va a diminuire ipso iure il peculio (Ulp. 852[3] D. 15, 1, 9, 2: cfr. D. 15, 1, 9, 8 e D. 15, 3, 1, 2) (1).

B) Tra l'actio de eo quod ad patrem dominumve pervenerit e l'actio noxalis non esiste, per contro, concorrenza di

—

actio de peculio pura e semplice, da uno degli altri. Orbene il credito unico soggiace bensì alla consunzione processuale in base alla intentio della formola, ma dal punto di vista del diritto materiale la pretesa de in rem verso del concreditore solidale viene perenta soltanto sino a concorrenza di ciò che il domino presta. Poniamo che il credito peculiare sia di 100, che il peculio esistente al momento della condanna ammonti a 90 e il versum in rem domini a 80; il domino condannato " de peculio „ cioè a 90 presta 90. Potrà essere convenuto de in rem verso dall'altro concreditore solidale per ciò che manca alla soddisfazione integrale del credito, ossia per 10? Si risponde di no, perchè ciò che il domino presta (90) deve scomputarsi dall'aumento patrimoniale ch'egli ne ha ricavato e che per tal modo da 80 si riduce a una quantità negativa (— 10). — Poniamo per contro che, ammontando il credito peculiare a 100, il versum in rem domini a 80, la quantità esistente nel peculio sia di 50; il domino condannato " de peculio „ presta 50. Egli potrà essere ancora convenuto de in rem verso dall'altro concreditore solidale, ma non per 80, nè per 50 bensì, per la *differenza* tra ciò che ha pagato pro servo (50) e ciò che è stato in rem versum (80), ossia per 30. S'intende da sè che per rendere possibile l'azione pel *residuo* è indispensabile la *rescissione parziale* della esperita actio de peculio (cfr. per analogia SOLAZZI, *Studi sull'actio de peculio*, p. 48) poichè con l'esperimento dell'actio de peculio l'intero credito peculiare (indicato nella intentio) è stato consunto.

(1) Importante è a questo riguardo l'osservazione di Ulp. 852[3] D. 15, 1, 9, 8 alla decisione di Giuliano riferita alla n. 2 a p. 4: sed hoc (scil. de peculio deducendum esse) ita demum verum puto, si non *in rem domini* vel patris quod acceptum est *pervenit*: alioquin (scil. si pervenit) **secum** *debebit compensare*. Il " secum compensare debere „ significa che il dominus o pater, convenuto con l'actio de peculio, non potrà imputare *sul peculio* il debito contratto con la versio, bensì lo dovrà imputare *sul patrimonio proprio*, poichè egli ne risponde soltanto in quanto e finchè il suo patrimonio è arricchito. Sul peculio potrà imputarlo solo allorquando lo avrà pagato. — La *congiunzione* della condemnatio de peculio con la condemnatio de

solutio diretta e bilaterale come quella veduta or ora, bensì indiretta e unilaterale. Le possibili ipotesi qui sono tre; e la concorrenza non ha luogo che in una sola. O infatti *a*) il pater o dominus, convenuto prima con l'actio noxalis, preferisce prestare la litis aestimatio (poena); e siffatta prestazione *annulla* l'aumento patrimoniale derivatogli dal delitto del soggetto. L'ammontare, invero, di essa litis aestimatio, quale poena, sarà di solito un multiplo della diminuzione avvenuta nel patrimonio del leso, o per lo meno l'equivalente di tale diminuzione, calcolato coi criteri più larghi (p. es. nell'a.° rerum amotarum); laddove l'aumento patrimoniale dell'avente in potestà non potrà mai eccedere l'equivalente così calcolato. Ora, una volta venuto meno l'arricchimento, viene meno (cessat) anche l'azione diretta a colpirlo. Ovvero *b*) il pater o dominus convenuto con l'actio noxalis, preferisce " noxae dedere " il delinquente; e allora egli potrà sempre esser convenuto per l'arricchimento derivatogli dal delitto, e per tutto intero l'arricchimento, senza essere ammesso a chiedere che dall'importo dell'azione d'arricchimento venga scomputato il valore economico del noxae deditus. Questa regola viene affermata con riguardo all'a.° de peculio da Ulp. 852[4]

D. 15, 1, 11 pr.: si noxali iudicio conventus dominus litis aestimationem obtulerit, *de peculio deducendum* est: *quod si noxae dederit, nihil est deducendum*. E inoltre da Ulp. 1524[1]

D. 43, 16, 1. 15: dominus... servos... noxae dedendo indemnis erit: quod enim noxae dedere compellitur, *in damn⟨um⟩ non debet reputare*, cum servus hoc possit domini deteriorem condicionem facere (1). Ovvero infine *c*) il pater

in rem verso ha il risultato pratico di prevenire così la *imputazione* sul peculio di quanto il dominus o pater paga de in rem verso come la imputazione sul versum di quanto egli paga de peculio e di render possibile la *soddisfazione cumulativa* del creditore *tanto dall'uno che dall'altro cespite*.

(1) Da questi fr. (ai quali possono aggiungersi Paul. D. 2, 10, 2 nec domino obesse nisi hactenus ut ipso careat e Gai. I. 4, 75) risulta confermata l'interpolazione di Paul. 368 D. 9, 4, 17 pr. [et, si quid amplius est in damni persecutione, consequetur *computato pretio hominis noxae dediti*]. In un solo caso eccezionale i giuristi classici ammettevano il *computo* del valore del noxae deditus: nel caso dell'edictum si familia furtum fecisse dicetur, appunto perchè tale edictum disponeva che il domino della familia potesse liberare la familia prestando al derubato una volta per tutte

o dominus, convenuto prima con l'azione per l'arricchimento, presta ciò di cui si è arricchito; e allora, convenuto di poi con l'actio noxalis, non sarà ammesso a chiedere che dalla litis aestimatio di questa azione venga scomputato il valore di ciò che ha prestato. Quella litis aestimatio ha invero il carattere di una poena, la quale è commisurata alla diminuzione avvenuta nel patrimonio del leso *al momento* e in conseguenza *del delitto*, non alla diminuzione *attuale*. Ma il pater o dominus del delinquente potrà sempre, se ciò gli conviene, anzi che pagare l'intera litis aestimatio, liberarsi esercitando la facoltà di noxae dedere. — Che la concorrenza dell'actio noxalis con l'actio de eo quod ad patrem dominumve pervenerit si configuri in diritto classico ne' modi ora descritti è attestato da una serie di passi. A proposito di un interdictum restitutorium che contro l'avente in potestà si dà come noxale (Paul. 1860 D. 43, 1, 5), l'interdictum unde vi per deiectio compiuta dalla familia dei servi, osserva Ulp. 1524[1] D. 43, 16, 1, 15: quod igitur additur (scil.

> in interdicto unde vi) " aut familia tua deiecit " merito scriptum est in eum casum, in quem familia mea vi deiecit. [ceterum si iussit ipse deiecit: gloss.] nec gravari debet dominus [qui non iussit], si servorum suorum factum praestare[t] ⟨ paratus sit ⟩, etsi non iussu eius deiecerunt: [nam-nomine] quippe cum *aut pervenit ad eum aliquid et restitue[re]t, aut non pervenit et ipsos servos* maleficii causa *noxae dedendo* indemnis erit.

Lo aut-aut non deve trarre in inganno: esso non significa che l'interdictum per l'arricchimento e l'interdictum noxale stiano in rapporto di reciproca esclusione. Significa soltanto che il *presupposto giuridico* dell'uno (il pervenisse) e quello che *in pratica* suole essere il presupposto *di fatto* dell'altro (il non pervenisse) (1) *si escludono a*

" quantum consequeretur si liber id furtum fecisset, id est et poenae nomine duplum et condictionis simplum " (D. 47, 6, 1, 3. 2 D. 9, 4, 31). Onde Paul. 1142 D. 9, 4, 31: Sabinus et Cassius putant *pretium quoque noxae deditorum imputari debere*, quod Pomponius probat et est verum: nam et si servus indefensus ductus sit, aestimatio eius imputanda est.

(1) Il presupposto giuridico è la padronanza del caput noxium, a prescindere dal fatto se il fondo oggetto dello spoglio fosse pervenuto o no in possesso del padrone. Ma si capisce che in pratica costui non aveva

vicenda, in modo analogo come si escludono il presupposto giuridico dell'actio de in rem verso e il presupposto di fatto dell'actio de peculio (Gai. 221 D. 14, 5, 1 *sive neutrum* eorum *sit*, de peculio actionem constituit). La vicendevole esclusione può essere anche qui *parziale*. *Per la parte* di cui il dominus (o pater) è venuto in possesso, egli risponde suo nomine, senza facoltà di noxae deditio; *per la parte* di cui non è venuto in possesso, egli risponde servi (vel filii) nomine, cum noxae deditione. Ciò risulta da Ulp. 1524[1] D. 43, 16, 1, 19: si quis neget se servum

vel familiam defendere, *tamen* cogendus est pati hoc interdictum, *ad hoc* scilicet *ut quod ad eum pervenit restituat* (1).

E inoltre da Ulp. 851[2] D. 43, 16, 16: in interdicto unde vi dicendum est. ut *eius causa, quod ad patrem pervenit, ipse* (scil. suo nomine) *teneatur*.

Il padrone della familia delinquente, oltre che esser tenuto come tale con l'interdictum noxale, può esser tenuto con un interdictum *utile* (2), in quanto il fondo occupato con la violenza ovvero il vantaggio economico ricavatone sia, almeno in parte, pervenuto a lui stesso. Se il fondo è pervenuto per intero a lui ed egli ne compie la restituzione integrale, allora viene meno il presupposto dell'actio noxalis ex interdicto, poichè l'unde vi è un interdictum restitu-

alcun interesse ad accettare l'actio noxalis ex interdicto quando con la restituzione del fondo poteva ad un tempo liberarsi e dalla responsabilità nossale e dalla responsabilità per l'arricchimento.

(1) Il "non defendere" — in quanto trae con sè come conseguenza la ductio del servus o della familia, ossia il trapasso della proprietà pretoria allo spogliato — è per questo rispetto affatto analogo al "noxae dedere" dianzi considerato. Ciò che vale nell'una ipotesi vale anche nell'altra, come si vede dall'argomentazione per analogia in Paul. 1142 D. 9, 4, 31 (nam et).

(2) Da Ulp. 1524[1] D. 43, 16, 1, 19 risulta trattarsi qui di interdictum utile (*con taxatio*). Altrove per contro i giuristi sono discordi circa il mezzo più adatto per domandare in giudizio l'arricchimento: alcuni propongono l'interdictum utile, altri una speciale actio in factum. Ulp. 1603 [si opus novum nuntiatum erit] D. 39, 1, 20, 8 si quaeratur an in heredem eius, qui opus fecit, *interdictum hoc* competat, sciendum est Labeonem existimasse *in id quod ad eum pervenit dumtaxat* dari oportere vel si quid dolo malo ipsius factum sit, quo minus perveniret. nonnulli putant *in factum esse dandam* ⟨*actionem* potius⟩ quam interdictum, quod verum est.

torium (1). Se l'avente in potestà, anzi che prestare obbedienza all'interdictum o al iussus iudicis con la restituzione della res, si lascia condannare nell'actio noxalis ex interdicto e presta la litis aestimatio piuttosto che noxae dedere, allora viene meno il presupposto dell'interdictum utile, ossia l'arricchimento (2). Tale presupposto, per contro, sussisterebbe pur sempre, se l'avente in potestà, convenuto con l'actio noxalis, preferisse noxae dedere la familia (3): soltanto in questa ipotesi, *dopo* avere esperito l'interdictum noxale potrà lo spogliato esperire l'interdictum utile. *Di primo acchito* lo spogliato potrà invece esperire l'interdictum utile — ma soltanto l'interdictum utile — contro l'originario padrone del deliquente, purchè arricchito, quando sia venuto meno in lui il presupposto *giuridico* dell'interdictum noxale — la padronanza della familia noxia — per morte o alienazione della familia sopravvenuta prima che lo spogliato agisse ex interdicto (4). Nel caso di alienazione si pro-

(1) Ulp. 1527 D. 43, 16, 1, 31 pristina... causa restitui debet, quam habiturus erat (qui vi deiectus est), si non fuisset deiectus.

(2) Una chiara distinzione delle varie eventualità che possono verificarsi fa Paul. 1860 D. 43, 1, 5 a proposito di un altro interdictum noxale (quod vi aut clam): *a*) officio iudicis continetur ut dominum *sua impensa opus restituentem* absolvat; *b*) *patientiam* tollendo operi *praestantem noxae dedere* iubeat [et absolvat]; *c*) si non dedat, *quantum impensae* in tollendo operi *erogatum sit* tanti *condemnet*; *d*) si neque patientiam praestet neque ipse tollat, cum possit, in tantum condemnet, in quantum iudex aestimaverit, *atque si ipse fecisset.* Le eventualità *b c* formano un'alternativa: Nerat.-Ulp. 1593[2] D. 43, 24, 7, 1 eum, cuius servus vi aut clam fecit, *aut sua impensa* ex interdicto opus *restituere* debere, *aut patientiam* restituendi *praestare et* servum *noxae dedere.*

(3) La noxae deditio nell'interdictum unde vi non esime dalla responsabilità per l'arricchimento, a quel modo che nell'interdictum quod vi aut clam la noxae deditio non esime dalla responsabilità per " patientiam restituendi operis praestare " (nella eventualità *b* i due doveri vengono dai giuristi combinati insieme: v. nota preced.). L'una responsabilità e l'altra stanno rispettivamente con l'uno e con l'altro interdictum in una relazione affatto *analoga.* Il parallelismo tra di esse è evidente (v. anche nota seg.).

(4) Siffatta ipotesi è contemplata a proposito dell'interdictum quod vi aut clam da Ulp. 1593[2] D. 43, 24, 7, 1 plane si *mortuo alienatore* servo interdiceretur, *patientiam* (scil. restituendi) *dumtaxat praestare debere* (scil. dominum operis), ita ut et *emptor* ex interdicto possit conveniri, *ut impensam praestet aut noxam* (= corpus quod deliquit) *det*: dominoque operis

durrà una *divisione* della responsabilità tra il nuovo padrone dei delinquenti — contro il quale ormai si dirige l'interdictum noxale — e il vecchio padrone in quanto abbia tratto profitto dalla deiectio. — Parimenti, a proposito di un'azione che contro l'avente in potestà si dà come nossale e che presuppone mancata la previa restituzione della res (o almeno del quanti ea res erit (?)), l'actio quod metus causa, dice Ulp. 381 D. 4, 2, 16, 1:

> si servi metum adhibuerint, *noxalis* quidem actio *ipsorum nomine* erit, poterim autem quis dominum *ad quem res pervenerit* convenire (scil. *suo nomine*): qui conventus (suo nomine) sive rem sive, secundum quod iam dictum est, [quadruplum] ⟨quanti ea res est⟩ (?) (1) praestiterit, proderit et servis. *si* vero noxali conventus *maluerit noxae dedere,* nihilo minus *ipse* poterit conveniri (suo nomine) si ad eum res pervenit.

Da quest'ultima decisione si argomenta a contrario che, se il domino, convenuto con l'actio noxalis, ha preferito prestare la litis aestimatio (il quadruplum) anzi che noxae dedere, egli non potrà più esser convenuto per

(scil. quasi defensore servi venditi: nello scopo di prevenire l'azion di evizione) sua impensa restituente aut damnato quia non restitueret, emptorem liberari. eadem et si contra dominus (scil. emptor) servi vel opus restituisset vel litis aestimatione damnatus esset: *quod si tantum noxae dedisset,* adversus dominum operis *utiliter interdici* (scil. ut patientiam tollendi operis praestet). Così aveva già deciso Jul. 666[2] D. 43, 24, 14 si servus meus ignorante me opus fecerit (scil. in fundo meo) eumque *vendidero*..., mecum *in hoc solum* (ex interdicto) *agi poterit, ut patiar opus tolli,* cum *emptore* autem servi ut *aut noxae dedat aut impensam,* quae in restitutione facta fuerit *praestet.* Tra il nuovo dominus servi e il dominus operis (vecchio dom. servi) la responsabilità viene divisa: contro l'uno si dirige l'interdictum noxale, contro l'altro l'interdictum utile per la patientia. Per un caso analogo che si presenta nel procedimento di esecuzione moderno v. Weismann, *Lehrbuch d. d. Zivilproz.* I 232 III.

(1) La nostra opinione (sostenuta in *Studii sulla litis aestimatio* II p. 17 in nota) è che i più tardi giuristi classici giungessero a *equiparare* la previa restituzione del *quanti ea res erit* — base del quadruplum (D. 4, 2, 14 § 7. § 1) — alla previa restituzione della *ipsa res.* Dice infatti per l'actio doli Ulp. 394 D. 4, 3, 17 pr. si plures dolo fecerint et unus restituerit, omnes liberantur: quod si unus *quanti ea res est* praestiterit, *puto* adhuc ceteros liberari. La sostituzione di " quadruplum " in D. 4, 2, 16, 1 potrebbe esprimere la medesima tendenza della sostituzione di " poenam " a " quanti ea res est " in D. 2, 10, 1, 4: la tendenza a negare il *cumulo* delle azioni penali.

ciò che gli è pervenuto, poichè questo suo arricchimento è stato annullato dal pagamento del quadruplum. Nella ipotesi del metus l'azione per l'arricchimento contro il dominus non è una pura actio utilis e reipersecutoria diretta al semplice arricchimento come nella ipotesi della deiectio, bensì un'azione diretta e penale al quadruplo dell'arricchimento. Ma è questa una particolarità dell'actio metus quale actio in rem scripta (1): ciò non toglie che l'analogia sia innegabile. — Parimenti, a proposito di un'azione che si dà come nossale, ma che — a differenza dall'actio metus e dall'actio ex interdicto unde vi — è indipendente dalla previa restitutione della res (Gai. D. 47, 8, 5), l'actio vi bonorum raptorum, affermano Diocl. et Max. C. 3, 41, 4:

> si servus, ignorante domino vel sciente et prohibere nequeunte, res tuas vi rapuerit, dominum eius apud praesidem provinciae, si necdum utilis annus excessit, quadrupli. quod si hoc effluxit tempus, simpli *noxali iudicio* convenire potes; qui, *si noxae maluerit servum dedere, nihilo minus cum ipso* (scil. suo nomine), *quantum ad eum pervenit, experiri non prohiberis.*

Se per contro il domino, convenuto con l'azione nossale, avrà preferito " litis aestimationem sufferre ", non potrà più esser convenuto per l'arricchimento, perchè allora questo sarà venuto meno. Quale è l'azione d'arricchimento contro il domino nel caso dei bona vi rapta? Ulp. 1322 (D. 47, 2, 26-7) ci fornisce un indizio per la risoluzione di tale questione, là dove tratta la questione consimile, quale azione debba darsi contro gli eredi del raptor. La responsabilità di costoro, considerati come terzi arricchiti in conseguenza del delitto, è in sè analoga alla responsabilità che grava sul domino nella qualità giuridica di terzo arricchito dal delin-

---

(1) Codesta particolarità dell'actio metus va tenuta presente anche per l'azione d'arricchimento data contro l'erede. L'erede, *entro l'anno* dal delitto, risponde *come qualsiasi terzo* a cui sia pervenuta la cosa estorta: onde non occorre una *speciale* azione contro di lui, se lo si conviene entro l'anno. Essa occorre invece se lo si vuol convenire *dopo che l'anno è trascorso.* Questa considerazione getta luce sull'osservazione di Gai. 96 D. 4, 2, 19: quod autem in heredem eatenus pollicetur actionem proconsul quatenus ad eum pervenerit, intelligendum est *ad perpetuo dandam* actionem pertinere. Cfr. *Rendic. Istit. Lombardo*, vol. 49, p. 248.

quente. Ulp. si domanda infatti se contro gli eredi del raptor debba darsi un'actio " in id quo locupletiores facti sunt ": la quale potrebbe essere o la medesima actio ex delicto come utilis ovvero anche una speciale actio in factum. Ma risponde subito: et ego puto ideo praetorem non esse pollicitum in heredes in id quod ad eos pervenit, quia putavit *sufficere condictionem.* Di qui sembra a noi risultare che ogni qual volta il delitto contenesse in sè la fattispecie del *furtum* (come la contiene il " bona vi rapere "), si sia in diritto classico considerata quale mezzo sufficiente a colpire l'arricchimento la *condictio ex causa furtiva.* Ora è vero che con la condictio ex causa furtiva l'erede è tenuto in solidum e non nei limiti dell'arricchimento (Ulp. 889[2] D. 13, 1, 9) e che passivamente legittimati ad essa condictio sono soltanto l'ipse fur e lo heres di lui (Paul. 1802[1] D. 13, 1, 5; Ulp. 673 D. 12, 2, 13, 2; Gai. I. 4, 4). Ma ciò non poteva punto impedire che la stessa condictio ex c. furtiva venisse data *come utilis* contro un *terzo* arricchito in conseguenza del furtum e che, in tale configurazione, si applicasse ad essa, mediante taxatio nella formola, il *limite* dell'arricchimento. Per ciò che riguarda l'avente in potestà questa congettura riceve piena conferma dai testi. Ulp. 2901 [de condictione] D. 18, 1, 29: quotiens servus

> venit, non cum peculio distrahitur: et ideo [sive] ⟨etiam si⟩ non sit exceptum [...], ne cum peculio veneat, non cum peculio distractus videtur. unde si qua res fuerit peculiaris a servo subrepta, *condici* potest videlicet *quasi furtiva*: hoc ita, *si res ad emptorem pervenit.* E Afr. 95[1]

D. 19, 1, 30 pr.: servus quem de me *cum peculio* emisti, prius-

> quam tibi traderetur, furtum mihi fecit. — si iam traditus furtum mihi fecisset, [aut omnino] *condictionem* eo nomine (scil. *ex causa furtiva*) *de peculio non haberem,* [aut] ⟨sed⟩ *eatenus haberem, quatenus ex re furtiva auctum peculium fuisset.* Da questi due fr. risulta che la condictio

ex causa furtiva per furtum commesso dal servo venduto si dà contro il nuovo domino di lui nei limiti dell'aumento che il patrimonio di costui ne ha ricevuto. Nella seconda ipotesi prospettata da Africano, poichè il servo è stato venduto insieme col peculio e l'utile ricavato dal furto compiuto nell'ignoranza del nuovo domino è entrato direttamente nel peculio venduto, l'aumento del patrimonio del nuovo domino *coincide* con l'au-

mento del peculio acquistato e *consiste* in tale aumento. Perciò in quella ipotesi l'azione per l'arricchimento del domino si configura come un'azione *per l'arricchimento del peculio* acquistato.

Azioni dirette a colpire il semplice *arricchimento* del peculio derivano anche da negozio invalido concluso dal soggetto a potestà incapace: filius o servus impubere (D. 15, 1, 1, 4 ita dabitur in dominum vel patrem de peculio, si locupletius eorum peculium factum est) ovvero ancilla (C. 4, 26, 11 adversus dominum in quantum locupletius eius peculium factum est... dandam actionem non ambigitur). Ma siffatte azioni per l'arricchimento del peculio che possono derivare così da un furto come da un negozio invalido sono da tenere nettamente distinte dalle vere e proprie actiones de peculio, le quali sono sempre actiones ex contractu e colpiscono *tutto il peculio* sino a concorrenza dell'intero debito peculiare (1). Perciò Africano *nega* nel modo più reciso che, anche quando la res furtiva sia entrata nel peculio, la condictio ex causa furtiva possa darsi *de peculio*. Il peculio entra qui in considerazione come per accidente: la condictio ex c. furtiva non si dà contro l'avente in potestà che per l'arricchimento pervenutogli attraverso il peculio. Ma se contro di lui quella condictio non si dà de peculio, essa *non si dà neanche come noxalis*. Non si dà *nè de peculio nè noxalis* per la semplice ragione che di fronte ad essa l'avente in potestà non risponde in nome del soggetto, quale padrone del suo peculio o del suo corpo, bensì risponde in nome proprio, quale terzo arricchito dal furto. Nè *accanto* alla condictio ex c. furtiva utilis, in funzione di azione per l'arricchimento, poteva esservi posto in diritto classico per una condictio ex c. furtiva *noxalis* diretta a conseguire l'eventuale *residuo*. Nell'unico

---

(1) Perciò quando in un determinato caso si afferma recisamente che l'azione contro il domino si dà " de peculio „ deve destar sospetto una successiva *limitazione* di codesta azione *all'arricchimento del peculio*. Così in Paul. 310 D. 11, 5, 4, 1 si servus (scil. aleae ludendae causa) acceperit pecuniam, dabitur in dominum *de peculio* actio, *non noxalis, quia ex negotio gesto agitur* [. sed *non amplius* cogendus est praestare quam *id quod ex ea re in peculio sit*] [?]. Ma forse proprio in questo caso la limitazione potrebbe esser dovuta ai criteri generali secondo cui si determina la misura della responsabilità nella condictio dati ob iniustam causam.

passo dove tale condictio de residuo sembra essere attestata (1), proprio le due parole decisive (in residuum) sono di certo interpolate: Ulp. 2873[1] [de furtis] D. 13, 1, 4: si servus [...] furtum commiserit, *condicendum* est domino *id quod ad eum pervenit*: [in residuum] ⟨...⟩ noxae servum dominus dedere potest. Per fortuna la interpolaz. non è difficile a provarsi anzitutto perchè è molto simile a un'altra già nota, con la quale ha comune quella tendenza che fu già chiamata " la completomania dei compilatori giustinianei „. Vogliam dire l'itpz. di Ulp. 19, 1, 13, 7: si pupillus auctoribus eis (scil. tutoribus) vendidit, in tantum tenetur, in quantum locupletior ex eo factus est [tutoribus *in residuum* perpetuo *condemnandis* etc.]: dove parimenti la classica (2) azione per l'arricchimento viene completata con un'azione residuale. Non si vuol dire con ciò che il diritto classico non ammettesse actiones de residuo: codesto preconcetto de' cacciatori d'interpolazioni è ormai sfatato (3);

---

(1) Codesto passo è servito di base al Pampaloni (*Studi sopra il delitto di furto* II, I [Sopra la condictio furtiva] p. 65 e segg.) per costruire la sua teoria della *nossalità* della condictio furtiva: la quale teoria — sia detto senza ombra d'irriverenza — non è nulla più che un castello in aria (l'altro passo C. 3, 41, 4 che il P. cita non suffraga per nulla la sua tesi). Il P. muove dalla premessa che ogni azione dovesse darsi contro l'avente in potestà *o de peculio o noxalis* e ne trae la conseguenza che la condictio furtiva, poichè non poteva darsi de peculio, dovesse darsi noxalis. Ma la premessa è errata: per l'a.° de effusis et deiectis due testimonianze concordanti (Jul. 134 Gai. 506[2] D. 44, 7, 5, 5 e Ulp. 687 D. 9, 3, 1, 7) affermano che essa non si dà *nè de peculio nè noxalis* e concludono entrambe che, quando si tratti di un filius familias — di persona cioè capace di stare in giudizio — l'azione debba darsi *direttamente contro lui stesso* (cum ipso filio agendum). Orbene che l'azione possa darsi soltanto direttamente contro il filius familias è affermato parimenti per la condictio ex c. furtiva da Paul. 1802[1] D. 13, 1, 5: ex furtiva causa filio familias (tantum) condici potest: *numquam enim ea condictione alius quam qui fecit tenetur* aut heres eius. Dalla motivazione risulta che il potest va inteso in senso restrittivo.

(2) Cfr. Solazzi, *Le azioni del pupillo e contro il pupillo*, estr. pp. 204-5; del contrario avviso, ma senza sufficienti ragioni Albertario in *Rendiconti dell'Ist. Lomb.* 46 [1912-13], pp. 579-80.

(3) Ci riferiamo ai finissimi *Studi sull'actio de peculio* del Solazzi, in particolare pp. 48-49 dell'estr. (su D. 15, 1, 47, 3 in venditorem utile iudicium *in reliquum*), pp. 56-57 (su D. 15, 1, 30, 5 hactenus subveniri ut ab emptore *residuum* consequatur), pp. 78-79 (su D. 15, 1, 19, 1 *in super-*

ma le ammetteva quali actiones rescissoriae fondate su una rescissione parziale, colà dove fosse evidente la loro opportunità pratica. Ora nel n. fr. non solo non si parla di rescissione parziale ma al contrario sembra trattarsi di una formola unica con due condemnationes distinte, di cui l'una avente carattere reipersecutorio, l'altra carattere penale: una figura *ibrida* che sarebbe un vero monstrum di formola (1). Ma, ciò che più monta, l'opportunità di una siffatta actio de residuo era nel caso concreto assai discutibile, perchè la lacuna che essa avrebbe servito a colmare era in pratica ben poco rilevante. Di regola ciò che in conseguenza del furto era entrato di fatto nel patrimonio del domino sotto qualsiasi forma, *diversa* dalla ipsa res furtiva, non doveva essere di molto inferiore al valore massimo della cosa rubata. Nè bisogna dimenticare che, finchè questa non fosse perita, il derubato ne conservava la rei vindicatio contro qualsiasi terzo detentore. E, anche a prescindere da ciò, quando la cosa rubata aveva un valore così alto che il suo duplum superava il valore del servo ladro, allora il domino avrebbe prefe-

---

fluum is cui quaesitum non est conveniatur), per contro pp. 98-100 (sulla interpolaz. dell'actio *de residuo* in D. 15, 1, 30, 4). Su D. 15, 1, 27, 6. 47, 4 v. Solazzi, Condemnatio cum deductione. È genuina l'actio residui ma interpolata la *divisio dell'actio residui* tra i più fideiussores indemnitatis così in Pap. D. 27, 7, 7 come in C. 4, 18, 3; arg. da Pap. D. 46, 6, 12.

(1) Essa dovrebbe all'incirca ricostruirsi così (nel caso, ad. es., di un furto di frumento): si paret N.[m] N.[m] A.[o] A.[o] tritici Africi optimi modios decem — qui A.[o] A.[o] furto Stichi servi absunt, qui in N.[i] N.[i] potestate est — dare oportere, q. d. r. a., quanti ea res est, tantae pecuniae *dumtaxat quod ex ea re ad N.[m] N.[m] pervenit*; et *si quid ex ea re ad N.[m] N.[m] non pervenit* eius aut Stichum servum noxae dedere iudex N.[m] N.[m] A.[o] A.[o] condemnato s. n. p. a. Che la responsabilità per l'arricchimento si facesse valere *congiuntamente* con la responsabilità nossale — a quel modo che l'actio de in rem verso si intenta congiuntamente con l'actio de peculio — può ammettere soltanto chi non vede la differenza profonda che separa l'una dall'altra: ben più profonda di quella tra actio de in rem verso e actio de peculio, reipersecutorie entrambe. E difatti il Pampaloni (op. cit., p. 66) ammette che l'azione nossale si convertisse, per morte del caput noxium dopo la litis contestatio, in azione d'arricchimento: quasi che la litis contestatio non perpetuasse l'obbligazione (D. 15, 1, 3, 11; D. 5, 1, 57) e questa non si convertisse, per la morte del caput, di alternativa in semplice (D. 9, 1, 1, 13. 16)!

rito noxae dedere il servo una volta per tutte, e con la noxae deditio si sarebbe liberato ad un tempo dall'actio furti e dalla condictio de residuo. Così che proprio colà dove ce ne sarebbe stato un bisogno pratico maggiore, la pretesa condictio de residuo avrebbe offerto al derubato un vantaggio puramente illusorio (1). Come nossale, siffatta condictio sarebbe venuta a concorrere indirettamente con l'azione penale da furto perimendola, in quanto con la noxae deditio sarebbe venuto meno il presupposto di quest'ultima. Ora in diritto classico può bensì accadere che il pagamento della litis aestimatio di un'azione penale annulli il presupposto di un'azione reipersecutoria (l'arricchimento); nè è inaudito il caso inverso, che la soddisfazione di un'azione reipersecutoria (p. es. della rei vindicatio) annulli il presupposto di un'azione penale distinta (p. es. l'a.° rerum amotarum). Ma questo caso è possibile soltanto quando il presupposto dell'azione penale è la mancata previa restituzione della res. Ciò ch'è inaudito in diritto classico è che un'azione *reipersecutoria*, tendente cioè al ricupero della res o del quanti res est — qual'è la condictio ex c. furtiva — possa essere *nossale*, possa cioè ammettere soddisfazione mediante una prestazione *diversa* dalla res o dal quanti res est! Un'azione ripersecutoria-nossale è, al lume de' principî classici, una contradizione in termini, perchè la *noxae* deditio è *irriducibile* al concetto della praestatio *rei*. Il diritto classico infatti è giunto bensì a riconoscere azioni reipersecutorie-penali (Gai. I. 4, 6. 9) e ad ammettere l'*assorbimento* della

(1) Vero è che quando il duplum del valore della cosa rubata, sommato insieme con la differenza tra l'arricchimento e il solidum, non superava il valore del servo ladro, allora l'actio de residuo avrebbe potuto servire a colmare una piccola ma innegabile *lacuna*. Ma che tale *lacuna* in diritto classico ci fosse in realtà, si arguisce dal fatto che secondo i giuristi l'effetto pratico della *eccezionale* equiparazione del furto di più servi al furto di un *liber* (D. 47, 6, 1 pr. 3) era che l'attore non solo conseguisse l'intero duplum con l'actio furti ma anche conseguisse *l'intero simplum con la condictio ex causa furtiva* (D. 47, 6, 2 id est et poenae nomine duplum *et condictionis* simplum; D. 9, 4, 31 non tantum duplationis sed *et condictionis* rationem habendam). Il servo infatti, a differenza del filius, non essendo liber non ha la capacità di stare in giudizio; onde non può, a differenza del filius (D. 13, 1, 5; D. 9, 3, 1, 7-8), esser convenuto in persona propria, ossia in solidum, con la condictio ex c. furtiva.

res nella poena pecuniaria riscossa in precedenza; ma non ha mai riconosciuto in linea di principio (Ulp. D. 15, 1, 11 pr.; D. 43, 16, 1. 15) la *computabilità* del valore del noxae deditus nel quanti ea res est. Siffatta computabilità (D. 9, 4, 17 pr.) e in conseguenza la possibilità di azioni reipersecutorie-nossali sono riconosciute per contro nel diritto giustinianeo. Basti un esempio: Pomp. 499 D. 30, 48 pr. si heredis servus rem legatam

> (scil. per damnationem) ignorante domino subtraxisset et vendidisset, Atilicinus in factum dandam actionem ut [vel noxae servum dederet] dominus[, vel] ex peculio praestaret *quod ex venditione eius rei* (servus) *haberet*.

L'actio in factum mira a ottenere ciò che è entrato nel peculio in conseguenza del furto e della vendita compiuti nell'ignoranza del domino. È un'azione per l'arricchimento, nella fattispecie della quale l'arricchimento del domino è costituito dall'arricchimento del peculio. Non può trattarsi di un legatum per vindicationem e di una subtractio compiuta dopo che il legatario abbia acquisita la proprietà della cosa (post aditam hereditatem): perchè allora al legatario — a prescindere dalla rei vindicatio contro il compratore — spetterebbe contro il padrone del ladro, oltre l'actio furti noxalis, la *condictio* ex causa furtiva *utilis* nei limiti dell'arricchimento e non sarebbe *necessaria* (D. 47. 8, 2, 27) una particolare actio in factum, come credono Atilicino e Pomponio. Deve pertanto trattarsi di legatum per damnationem e di subtractio avvenuta ante aditam hereditatem, perchè se la cosa legata fosse, con l'aditio, *già* passata in proprietà dell'erede, questi ne conserverebbe la rei vindicatio contro il terzo acquirente e non sarebbe assolto dall'obbligo di prestarla in solidum. L'actio in factum è destinata a *sostituire* l'actio ex testamento venuta meno pel fatto che l'erede si trova senza sua colpa nella impossibilità di prestare la cosa *non sua*. Orbene con siffatta azione d'arricchimento non si vede che cosa mai abbia a fare la facoltà di noxae dedere. Bisogna dunque concludere che così nel fr. 48 come nel fr. 4 (D. 13, 1) noi ci troviamo di fronte a interpolaz.[1] le quali esprimono la *tendenza* de' compilatori *a contaminare* (nell'uno) *e a confondere* (nell'altro) *l'azione d'arricchimento con l'azione nossale*. L'osservazione che il giurista classico dovè fare nella seconda parte del fr. 4 (D. 13, 1) può per fortuna ricostruirsi a senso con la maggiore probabilità di avvi-

cinarsi al vero mediante il confronto con la citata const. 4 (Cod. 3, 41). Come Diocl. et Max. osservano che l'azione penale, quando il domino se ne sia liberato con la noxae deditio, non esclude la condictio ex c. furtiva per l'arricchimento (non così quando il domino abbia pagato la poena), così per converso Ulp. 13, 1, 4 dovè osservare che la condictio per l'arricchimento nè esclude l'azione penale nè importa una *riduzione* della poena alla differenza tra l'arricchimento prestato e il duplum, per la ragione che, convenuto poi con l'azione di furto, il domino può sempre liberarsene con la noxae deditio. Tale ricostruzione, che è confortata anche dalla rubrica di Ulp. 2873 [de furtis], può proporsi ne' termini seguenti: ... condicendum est domino id

> quod ad eum pervenit: ⟨quod autem eo nomine praestiterit, dominus *furti actione* conventus in litis aestimationem *non debet reputare* cum⟩ noxae servum dedere possit.

Decisione che sarebbe conforme a Ulp. 43, 16, 1, 15, ma che doveva ripugnare a coloro che nella concorrenza delle azioni davano importanza decisiva al principio della equa soddisfazione (1). — Accanto alla tendenza a contaminare e a confondere l'azione d'arricchimento derivante *da furto di servi* con le azioni nossali troviamo nella compilazione *la tendenza a contaminare e a confondere l'azione d'arricchimento* derivante *da furto di filii familias con le azioni peculiari.* L'una tendenza è parallela all'altra. Entrambe le innovazioni hanno in realtà piuttosto carattere formale che materiale. Alla classica condictio ex c. furtiva utilis che si dà contro l'avente in potestà ne' limiti dell'arricchimento i compilatori giustinianei vogliono dare, nel caso di servi, la *qualifica di actio noxalis*; nel caso di filii, *la qualifica*

---

(1) Già messo in luce dallo Eisele (*Archiv. f. d. civil. Praxis*, vol. 77 e 79). Si potrebbe pensare del resto che le parole " in residuum " provenissero dal testo Ulpianeo, che Ulp. facesse appunto (come in D. 43, 16, 1, 15 aut pervenit – aut non pervenit, e come Paul. D. 4, 4, 24, 3 quod pervenerit – quod non pervenerit) distinzione tra la responsabilità reipersecutoria per ciò che è pervenuto e la responsabilità penale per il resto, e soggiungesse: in residuum condictio non datur: nihil enim amplius de ipsa re sed de poena dominus tenetur et noxae... potest. Ma a quella distinzione osta qui la circostanza che per l'actio furti è indifferente che la cosa sia o non sia pervenuta e in conseguenza venga o non venga restituita prima.

di actio de peculio. Occorre però aggiungere subito che laddove i giuristi classici non discutono mai la *possibilità* che la condictio ex c. furtiva si dia come noxalis (perchè per loro tale possibilità non esiste), essi discutono per contro la possibilità che quella condictio — azione *reipersecutoria* come essa è — si dia " de peculio ". Negano — è vero — recisamente che essa si dia " de peculio " (Afr. 95[1] D. 19, 1, 30 pr.); ma, appunto per rispondere in senso negativo, essi devono essersi posta la questione di tale possibilità. Sul modello di Afr. 95[1] D. 19, 1, 30 pr. deve pertanto ricostruirsi all'incirca ne' termini seguenti Ulp. 851[1] [de peculio et in rem verso] D. 15, 1, 3, 12:

> ex furtiva causa filio quidem familias condici posse constat (1). *an* vero in patrem [vel in dominum] *de peculio* ⟨condictio⟩ danda [est] ⟨sit⟩ *quaeritur.* et est verius, ⟨sicuti si servus furtum commisisset,⟩ in quantum locupletior dominus factus esset ex furto facto ⟨condictio in eum utilis dari deberet (2), ita et in patrem de eo quidem, quod ex re furtiva ad eum pervenerit, condictionem utilem dandam esse,⟩ *de peculio* ⟨vero⟩ actionem ⟨, cum non ex negotio gesto veniat,⟩ *dandam* ⟨*non esse*⟩. idem Labeo probat ⟨in servo fure⟩ quia iniquissimnm es⟨se⟩t ex furto servi dominum [locupletari impune] ⟨amplius quam de eo quod ad eum pervenerit teneri⟩. nam et circa rerum amotarum actionem filiae familias nomine in id ⟨tantum⟩ quod ad patrem pervenit ⟨utilis condictio datur (3); praeterea *nulla*⟩ competit actio *de peculio.*

Che il giurista *si ponesse*

---

(1) Ciò non metteva in dubbio nessuno: Paul. 1802[1] D. 13, 1, 5: e in ciò stava la *differenza* tra il furto compiuto dal *filius* e il furto compiuto dal *servo*: Ulp. 2873[2] D. 5, 1, 57 (connesso per contrapposto con D. 13, 1, 4) L'incapacità del servo a essere convenuto in persona propria è affermata in D. 2, 7, 3 pr.; D. 50, 17, 32. 107. L' " obligari " in D. 44, 7, 14 riguarda la passibilità della noxae deditio.

(2) È questa la condictio attestata ne' fr. già esaminati: D. 18, 1, 29; D. 19, 1, 30 pr.; D. 13, 1, 4. La menzione del dominus e del furtum servi nel n. fr. non ha altra spiegazione plausibile se non quella proposta nel testo: che il giurista *argomentasse per via di analogia* dal caso del furtum servi al caso del furtum filii.

(3) È questa la condictio che vedremo attestata da Jul.-Paul. 1039 D. 13, 1, 19, ove il " *dandam* esse " allude a una cond.° *utilis.*

la questione, se la condictio ex causa furtiva si dia de peculio, risulta non solo dalla rubrica ma da tutto il contesto della trattazione (de peculio et de in rem verso), nel quale altrimenti il § 12 verrebbe a trovarsi isolato (1). Ma egli non poteva risolverla che in senso negativo, perchè è vero bensì (e qui sta appunto la ratio dubitandi) che la condictio ex c. furtiva è una azione reipersecutoria, ma ciò non basta perchè possa darsi de peculio. Presupposto indispensabile di ogni actio de peculio è infatti che essa derivi da un *negotium* gestum cum eo qui in alterius potestate est (Ulp. 849 D. 15, 1, 1, 2 cfr. Ulp. 687 D. 9, 3, 1, 7-8). Anche se il vantaggio economico ricavato dal furto fosse andato a immediato profitto del peculio, questa circostanza non sarebbe di alcuna rilevanza giuridica per legittimare l'actio de peculio. La condictio ex c. furtiva competente contro il pater non può avere il carattere di actio de peculio bensì il carattere di actio de eo quod pervenerit. I compilatori mantennero quest'ultima azione ma soppressero la distinzione e qualificarono a sproposito l'azione per l'arricchimento di actio de peculio. — Che le cose stiano in realtà così può argomentarsi anche da una tendenza consimile a riavvicinare l'una azione con l'altra, che essi manifestano altrove a proposito dell'actio Pauliana. azione penale — e perciò nossale — derivante dall'interdictum de his quae in fraudem creditorum facta sunt, anch'esso restitutorium. Labeo 147[3]-Ulp. 1452 D. 42, 8, 6, 12

> quaeritur, si servus ab eo, qui solvendo non sit, ignorante domino, ipse sciens rem acceperit, an *dominus* teneretur. et ait Labeo *hactenus* eum *teneri* (scil. utili interdicto) *ut restituat quod ad se pervenit* [*aut* dumtaxat *de peculio* damnetur vel si quid in rem eius versum est] ⟨, de eo quod non pervenit noxali iudicio servi nomine teneri⟩. eadem in filio familias probanda sunt. sed si dominus scit, suo nomine convenietur.

L'actio Pauliana non poteva in dir. classico darsi de peculio perchè derivava da una fattispecie che il pretore aveva considerata come *delittuosa.* Tra il servus (filius) e il fraudator v'è stato bensì un negotium gestum,

---

(1) Ciò non venne considerato dal Pampaloni quando (op. cit., p. 71) propose di sopprimere nel fr. tutto ciò che alludeva all'actio de peculio.

dal quale il fraudator potrebbe agire de peculio; ma *di fronte ai terzi creditori*, defraudati così dei loro crediti e agenti con l'interdictum fraudatorium, quel negotium ha il carattere di un atto illecito e doloso, in base del quale non si può agire che in via nossale (1). Quantunque l'interdictum fraudatorium non facesse parola del gestum cum servo vel filio (onde il " quaeritur "), pure l'analogia intrinseca con l'interdictum unde vi (D. 43, 16, 1, 15) doveva consigliare la medesima decisione. — Che poi l'actio " in id quod ad patrem ex rebus amotis pervenit " mentovata da Ulp. 851[1] verso la fine del cit. § 12 sia una condictio ex c. furtiva utilis risulta non solo da tutto il contesto (nam et) ma anche da un altro fr., dove alla condictio utilis in patrem è stata parimenti dai compilatori attribuita quella qualifica di actio " de peculio " che forse il giurista classico anche qui le negava. Jul. 350 [de condictione ex c. furtiva] — Paul. 1039 D. 13, 1, 19: Julianus ex persona filiae quae res amovit dandam in patrem condictionem ⟨utilem⟩ in [peculium] (2) ⟨id quod ad eum pervenit ex rebus amotis⟩ respondit. Poichè Giuliano — e con lui la maggioranza de' giuristi classici (Sabino, Procolo, Aristone, Trifonino, Ulpiano, Paolo) — riteneva che l'amotio rerum da parte della mulier contenesse in realtà la fattispecie del furtum (Paul. 1773[1] D. 25, 2, 1), non può esser dubbio che egli, pur denegando l'actio furti, riconoscesse l'esperibilità della condictio ex c. furtiva contro la mulier (3), e quindi di essa condictio come utilis contro il pater della mulier filia

---

(1) Concorde su questo singolo punto Pampaloni (op. cit., p. 73).

(2) L'espressione " dare condictionem in peculium " è, come nota il Pampaloni (op. cit., p. 71), inusitata; essa ricorda l'espressione scorretta " persecutio in peculio manebit adversus dominum " di D. 47, 2, 42 pr.; nè è confortata da Gai. I. 4, 69 (actio qua in peculium agitur).

(3) Ciò è da osservare contro Faber, *De erroribus*, dec. 79 err. 1 [IV, pp. 111-114] e contro Zanzucchi, *Il divieto delle azioni famose* II pp. 17-20. Una dimostrazione particolare del contrario escirebbe dai limiti di questa Nota: onde ci riserviamo di darla altrove. Basta per ora osservare che la condictio concessa da Jul.-Paul. D. 13, 1, 19 *non può* essere una " *condictio ex iniusta causa* " come lo Zanzucchi (p. 18) propone, per la semplice ragione che la cond. ex iniusta causa quale generica azione d'arricchimento è una figura non classica bensì bizantina (così benissimo Pflüger, *Cond.° ex iniusta causa*, in *Sav. Z.* 32, 168-179, il quale a p. 176 sostiene, mutando

familias. Non sembrano per contro aver riconosciuta l'esperibilità della condictio ex c. furtiva contro la mulier e quindi neanche contro il pater i due giuristi Mela e Fulcinio; nè potevano riconoscerla quegli altri che (come Nerva, Cassio e Pedio) negavano addirittura che l'amotio rerum contenesse la fattispecie del furtum. Tutti costoro sembrano aver proposto di dare quale azione per l'arricchimento contro il pater la stessa *actio rerum amotarum come utilis*; e anche questa, come la condictio, viene dai compilatori convertita in actio de peculio. Paul. 1774 D. 25, 2, 3, 4 si filia familias res amoverit, Mela Fulcinius aiunt

> *de* [peculio] ⟨*eo quod ad patrem pervenerit*⟩ dandam actionem ⟨rerum amotarum, non condictionem ex causa furtiva⟩ quia displicuit eam furti obligari [vel-actionem]. *sed* si pater adiuncta filia rei uxoriae agat, non aliter ei dandam actionem, quam si filiam rerum amotarum iudicio *in solidum* et cum satisdatione defendat. sed mortua filia (scil. post iudicium rei uxoriae acceptum) in patrem rerum amotarum actionem dari non oportere Proculus ait, nisi (scil. utilem) *quatenus ex ea re pater locupletior sit.*

La classica motivazione " quia displicuit eam furti obligari " non ha senso alcuno nel testo, così com'è riferito nella compilazione: perchè un'azione si dia de peculio non basta ch'essa non sia un'actio ex furto, bensì occorre ch'essa sia un'actio ex negotio gesto. La congettura che si trattasse invece di un'actio utilis cum taxatione diretta a ottenere l'arricchimento non solo è resa molto probabile dalla successiva contrapposizione (sed) con l'actio *in solidum* (sempre rerum amotarum) ma è confermata da una decisione di Papiniano, inspirata forse alla opinione

---

il suo precedente parere [Ciceros Rede 68-69], che anche la cond. di Marci. 25, 2, 25 è la cond. ex c. furtiva). Ammessa poi la nostra tesi, trovano facile spiegazione le numerose menzioni della cond.° ex c. furtiva nel tit. 25, 2, la quale i compilatori hanno inteso a contaminare e a confondere con l'actio rerum amotarum. Il passo principale che ha servito di base alla tesi contraria, D. 25, 2, 3, 2 (Paul. 1774), deve, a nostro avviso, restituirsi come segue: sed et cum uxore furti agere possibile est, si ei cui heredes simus furtum fecit vel nobis antequam nuberet: [tamen – personarum] ⟨nam⟩ in utroque caso ⟨*non*⟩ *furtivam tantum condictionem* competere (come nel caso normale, in cui l'actio furti è esclusa) [non] ⟨*sed*⟩ etiam furti actionem dicimus (a differenza del caso normale).

di Mela e Fulcinio. Pap. 191 [de rebus amotis] D. 25, 2, 5:

> viva quoque filia, *quod ad patrem ex rebus amotis pervenit utili iudicio* (scil. rerum amotarum) petendum est.

E parimenti quale actio utilis ne' limiti dell'arricchimento, non quale actio de peculio si dava in diritto classico contro il pater un'altra azione che spettava anch'essa contro la mulier. Vogliam dire l'azione che il pretore prometteva nell'editto " si, ventris nomine muliere in possessionem missa, eadem possessio dolo malo mulieris ad alium translata esse dicatur „. Ulp. 988 D. 25, 5, 1, 5

> et si filia familias sit quae dolo fecit, *in patrem* dabitur actio (scil. utilis) *si quid ad eum pervenerit*.

Condizione negativa dell'actio utilis è che non ci sia stato dolo da parte del pater, perchè in tal caso questi risponderebbe direttamente e in solidum (D. 25, 5, 1. 1). L'actio *utilis* — limitata, com'essa è, a ciò che al pater è effettivamente pervenuto — non esclude l'actio *noxalis* per quella parte che al pater non sia per avventura pervenuta. L'actio noxalis viene esclusa per intero — in quanto ne viene eliminato il presupposto, ossia la translatio possessionis — soltanto dalla *restituzione integrale* della possessio. Pertanto solo quando ciò che è pervenuto al pater è l'intero, la *soddisfazione effettiva* dell'actio utilis (non già il semplice esperimento di essa) estinguerà l'actio noxalis. Che questa fosse la relazione dell'actio utilis con l'actio noxalis risulta, oltre che da quanto si disse in materia d'interdicta restitutoria, da Paul. 218 D. 4, 4, 24, 3:

> si servus vel filius familias minorem circumscripserit, pater dominusve *quod ad eum pervenerit restituere iubendus* est, *quod non pervenerit ex peculio* eorum *praestare*: *si ex neutro satisfiet* et dolus servi ⟨vel filii⟩ intervenerit, aut [verberibus castigandus] ⟨litis aestimatio praestanda⟩ (1) aut ⟨ipse⟩ *noxae dedendus* erit. sed et si filia familias hoc fecit, ob dolum suum [condemnabitur] ⟨noxae dedetur, nisi maluerit pater litis aestimationem sufferre⟩.

L'actio doli noxalis spetta soltanto allora che nè l'una nè l'altra pretesa del leso — nè la pretesa

---

(1) Le ragioni della interpolaz. segnalata sono già state da noi dette a proposito di Ulp. 1360 D. 47, 10, 17, 4 itp. nel medesimo senso (*Studii sulla litis aestimatio* I pp. 41-42).

a riottenere l'arricchimento dell'avente in potestà, nè la pretesa a soddisfarsi sul peculio per il resto — siano state soddisfatte. Di una pretesa de peculio c'è ragione di parlare qui (a differenza che in D. 42, 8, 6, 12) perchè il negotium è stato concluso tra l'attore e il soggetto del convenuto, e il delitto del dolus viene in considerazione solo in seconda linea, essendo l'actio doli un'azione sussidiaria (D. 4, 3, 1, 1).

L'esame dei testi conferma dunque pienamente le regole enunciate in principio circa la relazione in cui la responsabilità nossale o peculiare sta con la responsabilità ne' limiti dell'arricchimento del pater e del dominus. La distinzione tra l'una e l'altra responsabilità, limpida e netta in diritto classico, si è nel diritto giustinianeo qua e là intorbidata e smarrita nel modo che si è tentato di mostrare (1).

(1) Questa Nota è parte di uno studio sulla misura della responsabilità nella condictio e la responsabilità ne' limiti dell'arricchimento. Nel quale ci proponiamo di dimostrare come, dall'un lato, la funzione propria della condictio classica sia la *ripetizione* dell'oggetto *prestato* nell'*intero* valore suo; e come, d'altro lato, il diritto classico — in una numerosa serie di casi in cui mancano gli *estremi*, ben definiti e circoscritti, della condictio — ammetta una responsabilità *limitata all'arricchimento effettivo*: e a farla valere in giudizio provveda con actiones *in factum* o con actiones *utiles*. Queste ultime tal volta sono actiones *ex delicto*, tal volta *condictiones*: le quali vengono così destinate ad adempiere una funzione *anormale*, differente da quella lor propria. Dalla struttura classica delle azioni di ripetizione e delle azioni penali non si può davvero trarre argomento (come fa l'Albertario) per negare in linea di principio la classicità di codeste azioni di arricchimento: quasi che il dir. romano, per necessità logiche di struttura, fosse affatto impotente di fronte alle sempre nuove esigenze della vita pratica e incapace di ovviare a stridenti iniquità. Per contro l'innovazione giustinianea qui è consistita non nel *creare ex novo* dei tipi di responsabilità ignoti al dir. classico, bensì nella tendenza a fondere insieme e ad estendere a nuovi casi i tipi preesistenti.

Dichiarazione di principii d'una Vendita di Carbonari italiani in Londra nel 1823

Nota del Socio FEDERICO PATETTA

1. La Classe di Scienze morali, storiche e filologiche sta per chiudere l'anno accademico 1915-1916 con una solenne affermazione di fede inconcussa nei destini della Patria, facendo sue le parole, colle quali l'illustre Collega Prof. Ettore Stampini, rievocando coll'antico idioma lo spirito di Roma antica, auspica la sola pace, che possiamo desiderare, la pace vittoriosa e rivendicatrice d'ogni nostro diritto.

Queste parole (1), le quali (se io mal non le interpreto) alla lingua, fattore importantissimo di nazionalità, non dànno un valore decisivo se non quando serva ad esprimere il volere e le aspirazioni nazionali del popolo che la parla, ed escludono conseguentemente ogni idea di coercizione, ci richiamano alla mente molte pagine di storia antica e moderna, e, volendoci restringere ai tempi più vicini a noi, molti propositi e programmi di ricostituzione della nazione italiana; da quelli dei cospiratori militari del 1814 e dal proclama di Rimini alle affermazioni contenute negli scritti dei Carbonari e nel secondo paragrafo dell'*Istruzione generale per gli affratellati nella Giovine Italia*, e così via via fino ai superbi sogni dei più ardenti nazionalisti del giorno d'oggi.

(1) Ea tandem pax patriae nostrae adfulgeat, ut, hostibus devictis et " domitis, Tridentinis, Tergestinis, Dalmatis in libertatem vindicatis atque " in sinum et complexum antiquae matris restitutis, Italiae arma, leges, " instituta stabili victoriae iure per maria ac terras dominentur, ubicumque " Divini Poetae lingua, dulce in oribus sonans, gentis italae sanguinem, " ingenium, mentem, voluntatem denuntiet ".

Troppo lungo sarebbe, e forse inopportuno, istituire raffronti. Mi lusingo invece di far opera consona, pur nella sua modestia, al sentimento patriottico che ci anima, comunicando un'importante *dichiarazione di principii* fatta, nel 1823, da Carbonari italiani rifugiati in Londra e contenente uno precisamente dei programmi, ai quali ho testè accennato. È infatti naturale e giusto, che il nostro pensiero si volga in questo momento alle generazioni passate; e non solo ai valorosi, che ci conquistarono col loro sangue una patria libera e grande, ma anche a tutti coloro, che, per vie diverse, con maggiore o minor forza d'ingegno, con maggiore o minor fortuna, fra errori, debolezze e talvolta colpe, che sarebbe stato, del resto, ben difficile evitare, mirarono costantemente a mantener viva la fiamma delle idealità italiane.

2. Documenti e studi sulle società segrete, che operarono in Italia nella prima metà del secolo decimonono, furono pubblicati in buon numero; ma scrivere una storia completa e veramente critica della Carboneria sarebbe ciononondimeno impresa non ancora tentata e che risulterebbe senza dubbio molto ardua, sia per la difficoltà di sceverare il vero fra le millanterie, le narrazioni fantastiche e le finzioni, a volta a volta apologetiche o calunniose, di ammiratori e di nemici, sia per il disgregamento e la varietà nei propositi e nell'azione carbonara secondo le persone, i tempi ed i luoghi.

Questa varietà o incertezza, che dir si voglia, dipendeva in gran parte dal fatto, che la Carboneria, additando ai suoi adepti come scopo supremo *l'unità, la libertà e l'indipendenza d'Italia,* lasciava loro piena libertà d'opinione sulla questione della forma di governo più conveniente agli Italiani, e quindi anche, di necessità, sui mezzi più adatti ad assicurarne l'attuazione.

Appunto questa *fede,* o piuttosto *mancanza di fede politica,* fu aspramente criticata dal Mazzini; nè forse a torto. S'affermò, è vero, in difesa della Carboneria, che nell'aver *riservate* o *lasciato impregiudicate* certe questioni stava precisamente *la parte più savia e lodevole della sua organizzazione,* e che viceversa la premessa repubblicana rigidamente posta dal Mazzini *non giovò*

certo all'espansione dell'opera sua (1). Ma se teoricamente parlando poteva sembrar cosa giusta e ragionevole il voler procedere per gradi, e assicurar prima l'unità e l'indipendenza dell'Italia dallo straniero e lasciar poi che gli Italiani si scegliessero la forma di governo, che reputassero migliore, in pratica la questione dei mezzi, con cui raggiungere l'agognata indipendenza, e delle persone da porre a capo del movimento, non poteva esser risolta se non dopo risolta, almeno nella parte sostanziale, quella del futuro assetto della nazione italiana. Si potrà quindi, tenendo conto delle condizioni in cui si trovavano l'Italia e l'Europa, giudicar errata la soluzione in senso repubblicano data dal Mazzini, non biasimarlo d'aver considerato la questione come necessariamente pregiudiziale.

Fra i Carbonari non mancavano i repubblicani convinti e più o meno intransigenti. Molti erano invece partigiani del regime monarchico costituzionale, ma si dividevano ancora in due gruppi, propendendo alcuni per la famigerata costituzione spagnuola del 1812, altri per la francese del 1814, desiderata, non del tutto disinteressatamente, dalla nobiltà, specie in Piemonte (2).

---

(1) E. Masi, *Il segreto del re Carlo Alberto*, ecc., Bologna, 1891, pag. 217.

(2) L'avversione alla costituzione di Spagna fu non ultima causa del fallimento della rivoluzione piemontese del 1821, come fu subito riconosciuto e dai liberali e dagli stessi funzionari del Governo. Ricordo fra i primi il celebre Giacomo Giovanetti, in una sua preziosa relazione sincrona sugli avvenimenti del 1821, da me posseduta: fra i funzionari il conte di Pollone, incaricato d'affari del re di Sardegna a Londra, del quale così scrive il dott. Giovanni Fossati nell'*Autobiografia*, di cui dirò in seguito: " Discorrendo famigliarmente con lui [il 24 ottobre 1821], venni a sapere " che la Rivoluzione del Piemonte mancò perchè non andarono d'accordo " i nobili coi civili sulla scelta della costituzione da proclamarsi: la nobiltà " voleva quella della Francia, e gli altri quella della Spagna „. Si confronti anche la relazione ufficiale del 12 aprile 1824 sulle trame lombardo-sarde, in Cantù, *Il Conciliatore e i Carbonari*, Milano, 1878, pag. 161; Manno, *Informazioni sul Ventuno in Piemonte*, Firenze, 1879, pag. 10, ecc. Sulla proclamazione della costituzione di Spagna nel Napoletano, meritano d'esser viste le *Denkschriften über die geheimen Gesellschaften im mittäglichen Italien, und insbesondere über die Carbonari*, Stuttgart u. Tübingen, 1822, pag. 71 e segg. Noto di passaggio che un primo, informe abbozzo di quest'opera veramente importante era stato tradotto dal francese in inglese e pubblicato a Londra nel 1821 col titolo di *Memoirs of the secret societies of the South of Italy, particularly of the Carbonari*. Una traduzione italiana dei

C'era poi chi propugnava una confederazione fra gli Stati italiani, più o meno ridotti di numero, e chi vagheggiava invece la completa fusione in un solo Stato; ma anche qui sorgevano, almeno fra i monarchici, gravi cause di scissione, perchè, passando in rivista i possibili candidati al trono d'Italia, dopo che furono tramontate fin dal 1814 le speranze poste da alcuni in Napoleone, non si trovava un personaggio di tali precedenti o di tanta importanza da concigliargli senz'altro l'universalità dei suffragi, o almeno una forte maggioranza.

Da uomini animati da convinzioni e da sentimenti così diversi era vano attendere un'azione durevole ed efficace. La Carboneria doveva invece fatalmente frazionarsi in gruppi, e fra questi gruppi nascere competizioni, dissensi e sospetti d'ogni genere, diffusi all'occorrenza ed acuiti con cosciente malvagità dagli agenti segreti dei vari governi italiani.

3. La *dichiarazione di principii,* che pubblico (1), è precisamente la risposta data il 17 giugno 1823 dai Buoni Cugini

---

Memoirs si trova nella " Bibliot. stor. del Risorgimento „, S. IV, vol. 2, Roma-Milano, 1904. Non conoscendo l'opera definitiva tedesca, e partendo anzi dal falso presupposto che il testo inglese sia *senza dubbio* una semplice *traduzione da un originale italiano,* la traduttrice, Anna Maria Cavallotti, vide necessariamente *riuscir vana* ogni sua *ricerca per stabilire il possibile autore del libro.* L'avrebbe invece potuto mettere sulla buona via l'attribuzione ad un Bertholdi fatta dal Bolton King, benchè questi, interpellato, non sapesse darne la spiegazione. L'autore dovrebbe infatti essere non Bertholdi, ma Bartholdy, noto diplomatico prussiano di ricchissima famiglia israelitica, il quale, dopo aver preso parte ai lavori del Congresso di Vienna, fu in Italia dal 1815 al 1825, anno di sua morte, in qualità di console generale di Prussia e d'incaricato d'affari e di missioni speciali a Roma, Firenze, Napoli. In una notizia molto ampia su di lui, nel Supplemento alla *Biographie universelle,* vol. 57 (Parigi, 1834), s'accenna anche ad una sua opera *sur le Carbonarisme.* Naturalmente il buon tedesco, onorato di particolar fiducia da Metternich e da Hardenberg, si proponeva lo scopo stesso perseguito contemporaneamente, con abilità molto minore, dal Principe di Canosa nei *Piffari di montagna* ed in altri scritti; voleva cioè impedire che il movimento costituzionale italiano e le società segrete, che l'avevano favorito, incontrassero all'estero, e specialmente in Inghilterra, approvazioni e simpatie.

(1) Questo documento, al pari d'ogni altro manoscritto che avrò occasione di ricordare nel presente lavoro, è di mia proprietà.

componenti la Vendita degli Italiani rifugiati a Londra ad *alcune sinistre e mendaci voci artifiziosamente fatte correre per rispetto alle loro intenzioni.*

I Buoni Cugini appartenenti alla Vendita di Londra, i cui nomi figurano a piedi del documento, sono in numero di undici. Più tardi il documento stesso fu portato a Parigi, e firmato, come vedremo, da due altre persone nel 1830 e da una terza nel 1832.

I primi firmatari, nell'ordine in cui si trovano, sono Pietro Muschietti, il conte Luigi Porro, Luigi Angeloni, il dottor Francesco Tadini, Gaetano Demarchi, il dottor Prati, il marchese Ercole Turinetti di Priero, il conte Cornaro, il capitano Pietro Garda, il generale Giacomo Filippo De Meester e Carlo Asinari di San Marzano, il quale si sottoscrisse quasi a piè di pagina, a buona distanza dalle firme precedenti, per modo che lo spazio rimasto in bianco non solo bastò per le tre sottoscrizioni aggiunte in seguito, ma sopravvanzò.

Tutti i nominati, salvo forse il Prati (1), sono conosciuti; e la maggior parte conosciutissimi. Ne dirò dunque assai bre-

---

(1) Sul Prati non ho che scarse notizie. Trovo il suo nome in una sincrona *Nota di diversi Patrioti italiani riuniti* [verso la fine del 1830] *su diversi punti della Francia od altrove* [a Londra, a Bruxelles e nella Svizzera]. Il Prati era appunto a Londra; e di là, nell'aprile del 1831, si recò a Parigi, provveduto della seguente commendatizia per il dottor Fossati:

" Compatriota carissimo,

" Il latore della presente è l'ottimo nostro D.re Prati, membro di " questa nostra Unione. Egli viene costì per adoperarsi con ogni suo mezzo " a pro' della nostra causa; e però ve lo raccomandiamo e vi preghiamo, " come nostro Deputato, a raccomandarlo al Direttorio affinchè lo assista " con tutti que' mezzi che potranno condurlo a mandare ad effetto sì ge- " nerosa e lodevole risoluzione. E con distinta stima vi salutiamo.

" Di Londra, li 11 aprile 1831.

" *La Commissione dell'Unione Italiana:*

G. F. De Meester Huyoel
F. Prandi
C. Beolchi
B. Albano ".

Il *Direttorio*, di cui si parla nella lettera, è il *Direttorio liberatore*, che formatosi in marzo del 1831, era già scomparso prima del luglio. Lo com-

vemente, indugiandomi alquanto solo per quelli, sui quali posso dare qualche notizia finora sconosciuta.

Sei dei nostri Carbonari erano fra i piemontesi compromessi nella Rivoluzione del Ventuno (1): quattro, Muschietti, Tadini, Priero e San Marzano, condannati a morte; Garda alla galera perpetua; Demarchi, non so se condannato egli pure, certo esule.

Il Muschietti, scrive il Manno, era torinese, figlio d'un banchiere. Dopo la sua condanna, " al padre, pel dolore, diè volta " il cervello. Egli vagò misero e bisognoso, e morì al Messico, " trucidato da' ladri „ (2). Secondo una nota a lapis, probabilmente di mano del Berchet, in un esemplare della prima, o di una delle prime edizioni della *Clarina* (3), Gismondo, l'eroe di questa celebre romanza, sarebbe per l'appunto il Muschietti (4).

Sul medico Francesco Tadini, di Cameri nel Novarese, potrei dare copiose notizie, avendo di lui una trentina di lettere, in parte molto interessanti, oltre a parecchi documenti

---

ponevano Filippo Buonarroti, nascosto sotto lo pseudonimo di *Raimond*, Francesco Salfi e Pietro Mirri. Il Porro fungeva da cassiere e il Fossati, come diremo, da segretario generale. L'*Unione Italiana in Inghilterra*, della cui Commissione, oltre ai firmatari della lettera riportata, faceva parte Gabriele Rossetti, si *dichiarò sciolta* nel novembre dello stesso anno 1831.

(1) Si veda per i primi cinque il *Dizionarietto dei compromessi* in Manno, *Informazioni sul Ventuno*, pag. 142 e segg.: del sesto dirò in seguito.

(2) Cfr. Beolchi, *Reminiscenze dell'esilio*, pagg. 209-210, cit. in Vannucci, *I martiri della libertà italiana*, 7ª ediz., Milano, 1887, vol. I, pag. 288.

(3) *Clarina, e il Romito del Cenisio, Romanze Due di* Giovanni Berchet, Londra, nella stamperia di Riccardo Taylor, MDCCCXXIII; opusc. in-8°, di pp. 32. Noto di passaggio, che il testo differisce in più luoghi da quello che è nelle *Opere di* G. B. *edite ed inedite*, Milano, 1863, pag. 97 e segg., riprodotto dall'edizione di Londra, 1824 (Ho con questa data un'edizione delle *Poesie* in-8° piccolo, frontispizio inciso e pp. 102, con la numerazione delle pagine, da iv a ci, in numeri romani e la pag. 102 in bianco).

(4) L'annotazione, scritta in un francese da italiano ..... emigrato in Inghilterra, si riferisce al primo verso della seconda strofa e dice testualmente: " On fait allusion au fils du Banquier Muschietti, qui se distingua " d'une maniere si heroique au moment (*que*) la Revolution Piemontese " ecllata (*à*) Turin dans le mois de mars 1821 „. Presumo che possa trattarsi d'un autografo del Berchet in seguito al confronto colla firma del poeta riprodotta a facsimile nell'edizione citata del 1863. Le poche lettere supplite tra parentesi mancano perchè recise dal legatore.

sulla sua attività politica durante l'esilio. Mi restringerò per altro a pochi cenni. Egli, dopo i moti del Ventuno, s'era rifugiato in Francia, e nel febbraio del 1822 era a Parigi, dove rimase, all'insaputa della polizia, fino a novembre inoltrato. Ma essendo, l'11 o il 12 novembre (1), morto di tifo il poeta e improvvisatore Bartolomeo Sestini, esso pure rifugiato politico, il prefetto di polizia venne a sapere che fra i medici curanti era stato anche " *un sieur Tadini* „ del quale s'ignorava la dimora, " *condamné par contumace à la peine de mort comme l'un des chefs* " *de la dernière révolution du Piémont* „ (2). Gli agenti segreti della polizia furono quindi in moto: e uno di essi diede subito prova della sua abilità, rivelando, in un rapporto in data 4 dicembre, che il ricercato si chiamava *Taldini* e non Tadini, e fornendo tutte le indicazioni necessarie per far arrestare in sua vece un altro dei medici che avevano visitato il povero Sestini, cioè il dott. Giovanni Fossati, che dimorava a Parigi da più di due anni, conosciutissimo e in perfetta regola col Governo francese e col piemontese. Il Fossati fu arrestato e condotto davanti al Prefetto, il quale, dopo essersi lungamente ostinato a veder in lui *Taldini* nascosto sotto falso nome, dovette cedere all'evidenza e lasciarlo in libertà. Secondo un nuovo rapporto del

---

(1) Nell'*Autobiografia* del Fossati si trova, sotto la data del 9 nov. 1822: " Oggi fui pregato dal conte Orloff di visitare il S.r Sestini, improvvisatore " italiano e rifugiato politico. Lo trovai gravemente ammalato di tifo, in " sopore e in stato disperato. Era in cura a diversi medici, e più partico- " larmente a Tadini. Morì tre giorni dopo, il 12, e Gall mi pregò di pren- " dere la forma della sua testa in gesso, il che feci a mie spese, e d'avere, " se fosse possibile, anche il cranio, il che feci egualmente. Il gesso ed il " cranio di Sestini sono ora al Giardino delle Piante colla collezione di " Gall. L'autopsia si fece il giorno 13 „. Nei dizionari biografici si dà comunemente come giorno della morte del Sestini l'11 novembre, o anche il 10; e in alcuni dei più recenti si legge, per errore, 1825 invece di 1822.

(2) La lettera, qui citata, del Prefetto di polizia, in data 23 nov. 1822, e gli altri documenti polizieschi, che ricorderò in seguito, si trovano nella curiosa raccolta pubblicata fin dal 1829 a Parigi, in quattro volumi, *Le livre noir de Messieurs Delavau et Franchet, ou répertoire alphabétique de la police politique sous le ministère déplorable*... (vol. IV, pagg. 211-213). L'arresto del Fossati è narrato da lui stesso nella sua *Autobiografia*. Da essa e da note sparse dello stesso Fossati sono tolte anche le ulteriori notizie sul Tadini.

9 febbr. 1823, la Polizia, oltre all'essersi rivolta per informazioni all'Ambasciata di Sardegna, aveva *esplorato* invano sei alloggi, nei quali “ *diverses données semblaient annoncer que le docteur* “ *Taldini pourrait demeurer* „. Il Tadini, ricercato con tanto accanimento per più di due mesi, fu finalmente scoperto e, come il Garda ed altri compromessi del Ventuno, imbarcato per l'Inghilterra. Pochi mesi dopo egli faceva parte della Vendita di Londra, la cui dichiarazione di principii portò con sè a Parigi non appena le giornate di luglio del 1830 gli permisero di farvi ritorno. Scrisse il Manno che, quantunque *la polizia rappresentasse* il Tadini *fra gli agitatori dei Comitati di Londra* (e, si sarebbe dovuto aggiungere, di Parigi), egli *ebbe una prima grazia (14 gennaio 1840), e fu poi compreso nell'indulto del 1842.* Bisogna osservare, a questo proposito, che il Tadini, pur continuando a cospirare, cercava da tempo di non rendersi troppo inviso al Governo piemontese; e perciò fin dal giugno 1831, stando, come egli diceva, per pubblicare un suo lavoro sulla *cospirazione dei partigiani del Duca di Modena contro la Casa dei Principi di Savoia-Carignano,* aveva scritto una lettera, dichiarando che *nel caso questa cosa potesse dispiacere al presente Re Carlo Alberto,* se ne sarebbe *astenuto sino a nuovo ordine.* Naturalmente la pubblicazione non ebbe luogo.

Ottenuto l'indulto, il Tadini, secondo che narra il suo amico Fossati nell'*Autobiografia*, partì il 18 ottobre 1842 da Parigi per Novara, *dove si proponeva di riprendere* (e riprese infatti) *l'esercizio della medicina. Morì,* in seguito, *pazzo in un ospizio vicino a Torino,* non so in che anno, ma certo in età abbastanza avanzata, poichè in una lettera dell'aprile 1811 egli si firmava già col titolo di dottore, e l'ultima lettera, che ho di lui, è del 14 dicembre 1852.

Carlo Asinari, marchese di Caraglio e conte di San Marzano, primogenito del noto ministro di Re Vittorio Emanuele I, è indicato dal Tadini, in un piccolo elenco di patrioti scritto nel 1830, come *eccellente e valoroso* (1). Viceversa il Giovanetti, nella già citata relazione sul Ventuno, lo dice *testa leggiera.*

(1) Gli stessi epiteti sono dati a Guglielmo Moffa di Lisio e a Giacinto Provana di Collegno. Invece, accanto al nome del Baronis, che fu poi

E forse da qualche sua *leggerezza*, e non da una semplice corsa da Costigliole a Torino, ebbe origine il misterioso sfratto dal Piemonte intimatogli dopo che già aveva ottenuto di rimpatriare. Il fatto è così narrato dal Manno: " Nell'ottobre 1835 " [*il San Marzano*] potè rientrare alquanto in Torino e villeg- " giare nel suo castello di Costigliole. Il ministro per l'Interno " era in quel tempo il suo cognato conte di Pralormo e ciò non " ostante la polizia lo adocchiava, e scoperto come d'improv- " viso fosse ritornato dal castello in città ne avvisò il coman- " dante di Torino, marchese della Planargia, il quale, senza " altri complimenti, gli intimò lo sfratto ". Parrebbe da ciò che lo sfratto fosse intimato nel 1835 o poco dopo. Lo fu invece nel 1840, come appare dalla seguente pietosa lettera che trovai con parecchie altre dirette a Monsignor Alessandro di San Marzano, residente in Roma:

Costigliole, 9 febbraio 1840.

Mio carissimo Alessandro,

Ho ricevuto a tempo debito la tua carissima delli 31 Dic. scorso. Non a dimenticanza, non a poco affetto tu devi attribuire il non averti io risposto prima; tu ne sarai persuaso, lo spero. Ma già fin d'allora travagliava il mio spirito sotto il peso dei dispiaceri e di tristi pensieri. Ora la bomba è scoppiata, e tu mi devi compiangere, se mi ami. Maggior dolore di quello che ho provato e provo tuttora, non lo ho provato mai: la mia salute persino ne soffre. Io ti racconterò il tutto a viva voce, giacchè avrò presto la consolazione di abbracciarti. Io sono costretto ad uscir dalla Patria: vado a Roma. Non parlare del mio arrivo se non come di un viaggio a diporto. Non ti posso ancora indicare esattamente l'epoca del mio arrivo in Civitavecchia. Partirò da Genova non prima del 15, ma quel giorno stesso o poco dopo. Ti prego dunque di scrivermi posta restante in Civitavecchia, mandandomi il tuo indirizzo. Intanto guarda ch'io possa alloggiarmi in piazza di Spagna, per es. all'Albergo dell'Europa: ma informati solamente, senza ancora arrestar l'appartamento. Io sono qui negli affari e negli impicci di una partenza frettolosa. Ho dismesso Salaroglio. Roberto, che è qui, ti abbraccia, ed io pure. Amami e credimi di tutto cuore

Il tuo aff.^mo^ CARLO (1).

---

nel 1834 uno dei comandanti dell'infelice spedizione in Savoia, il Tadini scrisse: " Dopo la vile scappata fatta a Novara in faccia a Tedeschi *non* " *nominetur in nobis* ".

(1) Nell'indirizzo si legge: " *A Sua Eccellenza Rev.^ma^ Monsignor Ales-*

Che i rinnovati dolori nuocessero alla salute del povero San Marzano, sembra confermato dalla morte che lo colse poco dopo, cioè (se è vero quel che si legge nel *Dizionario biografico* del Garollo) nel 1841. Era nato nel 1791.

Aggiungo ancora, che anche il San Marzano aveva lasciato l'Inghilterra per la Francia, probabilmente dopo la rivoluzione del 1830. Appunto nella seconda metà del 1830 è indicato come residente a Parigi nella *Nota di diversi Patrioti italiani*, già citata. Nel 1835 era a Ginevra, come appare dalle notizie date dal Manno.

Nè la *Nota* nè gli altri documenti da me conosciuti parlano del Turinetti di Priero, il quale, sbolliti i primi entusiasmi, doveva essersi appartato. Infatti fin dal 1833, dimorando in Bruxelles, potè, per concessione sovrana, esser visitato dalla famiglia; fu nel 1834 graziato in parte e compreso poi nell'indulto del 1842.

Di Gaetano Demarchi (o De Marchi), giureconsulto piemontese, scrisse il Brofferio (1): " si conosceva per qualche lavoro " letterario e più ancora per le proscrizioni del 1821. D'ingegno " e di coltura non mancava; ma, facile alle irritazioni di parte, " guastava col fiele ogni cosa ". Invece il Beolchi (2) lo ricorda fra gli esuli italiani che *ebbero nome grazioso ed onorato e fama di sapere*. Ci è detto dallo stesso Beolchi che aveva preso dimora in Edimburgo. Una sua lettera scritta di là il 29 marzo 1832 a Camillo Ugoni fu, non è molto, pubblicata dal prof. M. Lupo Gentile (3). Vi si legge, fra altro, che doveva omai *pensare seriamente agli anni della vecchiaia, che si veniva avvicinando a gran passi*; e che il Re non aveva voluto *concedergli ciò che meritamente era stato concesso all'Ornato*. Secondo il Manno, l'Ornato,

---

sandro di S. Marzano. Roma ": e nelle impronte dei bolli postali: "*Asti, 11 Febb.* ": "*Roma. Arrivo. 18 Febb. 1840* ". Il Roberto ricordato in fine della lettera potrebbe essere Roberto di Pralormo, primogenito del Ministro dell'Interno e quindi nipote del San Marzano.

(1) Citato da T. Sarti, *Il Parlamento subalpino e nazionale*, Roma, 1896, pag. 375.

(2) *Reminiscenze dell'esilio*, pag. 201, cit. dal Vannucci, *I martiri della libertà ital.*, II, pag. 289, n.ª 1.

(3) *Voci d'esuli*, Milano, 1911, pag. 176 e segg.

stimandosi compromesso, aveva preso volontario la via dell'esilio, senza aver avuto alcuna condanna. Potrebbe essere che lo stesso sia avvenuto per il Demarchi; e che il Re non abbia voluto permettergli di rimpatriare. In ogni modo il già citato *Dizionario* del Manno non fa cenno di lui, ma solo di un Vincenzo Demarchi, tenente nella brigata Genova, considerato come disertore. Promulgato lo Statuto, il Demarchi fu per le prime quattro legislature deputato di Mongrando, poi, per la quinta, di Biella.

Del capitano Garda abbiamo a stampa i *Ricordi*. Egli s'era rifugiato a Londra nel 1822, ma proprio nei giorni in cui si stava preparando la *Dichiarazione* della Vendita, alla quale apparteneva, s'imbarcò per recarsi a combattere in difesa dei Costituzionali di Spagna; e con lui s'imbarcò per lo stesso scopo un altro dei *Buoni Cugini,* cioè il *conte Cornaro, già aiutante di campo del vicerè d'Italia Beauharnais* (1). Il Garda incaricò quindi per iscritto il Tadini di firmare per lui, mentre il Cornaro dava egual mandato all'Angeloni.

Il biglietto del Garda, senza data, è del tenore seguente:

Mio caro Dottore Tadini,

Per la dichiarazione de' nostri principii che si ha da fare nella nostra Vendita, io me ne rapporto interamente a te. Tu puoi dunque sottoscrivere il mio nome accanto al tuo. Sta sano.

P.·. Garda.

Molto più interessante è la lettera del Cornaro, nella quale, specialmente per riguardo alla federazione degli Stati italiani e all'invocato esempio degli Stati Uniti d'America, si possono ravvisare i principii stessi propugnati dal destinatario Angeloni:

Londra, 9 giugno 1823.

Mio caro Angeloni,

Mi sono dimenticato di parlarvi ieri sull'oggetto per cui invece sono obbligato a scrivervi.

Io parto per la Spagna, ma desiderando di lasciar un pegno de' miei sentimenti, nella certezza che non varieranno giammai per cangiar di

---

(1) *La rivoluzione del 1821. Ricordi del comm.* Pietro Alessandro Garda, Ivrea, 1879, pag. 116 e segg.

tempo o di circostanze, vi prego a porre il mio nome a canto al vostro nella sottoscrizione della carta, che dovrà contenere i nostri principii.

Che la sovranità debba risieder nel popolo soltanto; che ogn' Italiano debba attendere alla felicità generale d'Italia, e non soltanto alla parziale del suo paese nativo; che ciò che può maggiormente convenire all' Italia sia una confederazione di stati uniti all' incirca come quelli d'America, ecco il mio credo politico.

Possano queste teorie divenir pratiche al più presto possibile: io non mancherò certamente, per quanto potrò, di far ogni sforzo per contribuirvi. State sano per voi, pei vostri amici e per il bene del nostro paese. Addio

Il vostro amico P. CORNARO.

Ciò che il Garda ed il Cornaro, il quale aveva il grado di colonnello, operarono in Ispagna, e come essi abbiano poi fatto ritorno in Inghilterra, è narrato dallo stesso Garda nei suoi *Ricordi*.

Luigi Angeloni, *il Nestore,* come diceva il Principe di Canosa (1), *dei giacobini italiani,* era nato in Frosinone nel 1759. Aveva dimorato per più anni a Parigi, dove già nel 1814 era sorvegliato dagli agenti austriaci e indicato come una delle persone, a cui facevano capo tutti gli Italiani malcontenti del nuovo stato di cose (2). Aveva poi nel 1818 pubblicato i suoi *Ragionamenti* sull'Italia (3), dedicandoli agli Italiani con parole, che

(1) *In confutazione degli errori storici e politici da Luigi Angeloni esposti contro... Maria Carolina d'Austria Defunta Regina di Napoli. Epistola...*, 2ª ediz., Marsiglia, 1831, pag. 6.

(2) Si veda la relazione del Conte di Bombelles al Principe di Metternich, in data di Parigi, 16 luglio 1814, pubblicata dal Barone von HELFERT, *1814. Ausgang der französischen Herrschaft in Ober-Italien*, ecc., in "Archiv für österreich. Gesch. „, LXXVI, 2, Vienna, 1890, pagg. 540-541: "J'aurai "l'oeil aussi sur les demarches d'un certain Angeloni, homme de lettres, "romain de naissance, et sur celles d'un médecin nommé Cornara. Ces "deux individus sont le point de raillement à Paris de tous les Italiens "mécontents. Ils sont de plus en correspondance avec des Russes et beaucoup "de Polonais „ (Mi balena il dubbio che il Cornara, di cui non so nulla, possa essere il nostro Cornaro). Una traduzione italiana del lavoro dell'Helfert, non sempre esatta, fu stampata a Bologna, dallo Zanichelli, nel 1894.

(3) *Dell'Italia uscente il settembre del 1818. Ragionamenti IV*... Parigi, appresso l'Autore... 1818, 2 voll.

furono probabilmente ricordate dal Manzoni e compendiate, in modo mirabile, in alcuni celebri versi dell'Ode per il 1821 (1). Prima degli avvenimenti di tale anno, e forse appunto in seguito alla pubblicazione dei *Ragionamenti*, egli era entrato in stretta corrispondenza coi patrioti piemontesi e collo stesso Principe di Carignano (2); era stato visitato dal Principe della Cisterna e dal generale Gifflenga, e da quest'ultimo aveva avuto in dono un anello con cammeo contenente la nota rappresentazione dell'*Italia piangente e dimessa*, ma quasi esortata a sperare col fatidico motto: *non semper*. Fallita in seguito la Rivoluzione, essendo egli più che mai circondato da esuli e cospiratori d'ogni parte d'Italia, il Governo francese finì col farlo arrestare, appunto in principio del 1823, e imbarcare per l'Inghilterra, dove rimase poi fino alla morte, avvenuta nel 1842.

Del conte Luigi Porro Lambertenghi, che nel 1818 aveva fondato il *Conciliatore* e nel 1822 era stato dal Governo austriaco

---

(1) Il Manzoni disse l'Italia

" una d'arme, di lingua, d'altare,
di memorie, di sangue e di cor ".

L'Angeloni aveva scritto: " a tutti voi, uomini d'Italia, che quantunque " separati per più maniere di governi, meritissimamente pur vi tenete... " per cittadini d'una stessa patria, siccome quelli, che, oltre ad una mara- " vigliosa conformità d'indole d'ingegno e di costumi, avete in comunità " una medesima religione, una medesima lingua, una medesima storia po- " litica, scientifica e letteraria ... " (o. c., I, pag. 1).

(2) Si veda specialmente la biografia dell'Angeloni scritta da G. La Cecilia, nel I volume del *Panteon dei martiri della libertà italiana*, Torino, 1851, pagg. 367-400. Corse voce che l'Angeloni avesse scritto una memoria sulla Rivoluzione piemontese del 1821, e che Carlo Aberto abbia potuto, non so come, impedirne la pubblicazione. Il dono dell'anello, fatto dal Gifflenga per mezzo del Principe della Cisterna, è confermato dal Fossati nella sua *Autobiografia*, nella quale si legge, sotto la data del 21 febbraio 1821: " Andai da Angeloni, che mi fece vedere un anello datogli " dal Generale Gifflenga, consistente in un cameo rappresentante l'Italia " piangente e dimessa, col motto: *non semper*. Al didentro dell'anello, " scolpito nell'oro, leggesi: *All'ottimo italiano Luigi Angeloni* ". Ho dell'Angeloni sette lettere, in parte lunghissime e molto interessanti, dirette al Fossati da Londra fra il 1826 ed il 1833.

condannato a morte in contumacia ed impiccato in effigie, è superfluo parlare (1).

Il generale barone Giacomo Filippo de Meester Huyoël (e non *Huydel*, ovvero *Haydel*, come si legge comunemente (2)), era nato a Milano nel 1765, da famiglia d'origine olandese. Condannato dall'Austria ad otto anni di fortezza per la congiura militare del 1814, era stato liberato dopo espiata metà della pena; aveva però di nuovo cospirato con Federico Confalonieri e compagni, cosicchè, mentre, fuggito in tempo, sottoscriveva in Londra la dichiarazione di fede carbonara, s'istruiva contro di lui il processo, che finì il 21 gennaio 1824 colla sua condanna *alla pena di morte da eseguirsi colla forca*. Ulteriori notizie sul De Meester, morto a Lugano in dicembre del 1852, si possono vedere nel magnifico elogio, che è nel Vannucci (o. c., I, pag. 388).

4. La *Dichiarazione di principii* dei Carbonari di Londra non è datata, ma nella quarta pagina rimasta in bianco si legge, di mano del Tadini: "*Dichiarazione de' B. C. Italiani resid. in Londra del 17 giugno 1823*": la qual data è confermata dalla data della lettera del Cornaro, già integralmente riferita. Nel 1830 il Tadini, trasferendosi, come s'è detto, a Parigi,

---

(1) La firma *L. Porro* apposta alla *Dichiarazione* non è chiarissima; ma l'autenticità è messa fuor di dubbio dal confronto con tre lettere, che posseggo, e specialmente con una del 9 luglio 1817, scritta di mano del Pellico e firmata appunto *L. Porro*.

(2) *Haydel* si trova costantemente nella *Cronistoria* del Cantù, nel Vannucci, nel Tivaroni e via dicendo, mentre nella sentenza del 1824 si legge veramente *Huydel*. L'Helfert, già citato, scrive sempre *Huyoel*. Io ho presenti quattro firme autografe, e in tutte si legge chiaramente *Huyoël*, precisamente come nell'interessante lettera pubblicata dal Gallavresi nel *Carteggio del Conte Federico Confalonieri*, P. II, sez. II, Milano, 1913, pag. 751 e segg. Quanto al primo nome, l'Helfert scrive *De Meestre*, mentre gli altri hanno *De Meester*, come pare si legga anche nelle sottoscrizioni autografe. Un cenno, antipatico, sul nostro, trasformato in *Demenster*, si legge già a pag. LXXXIII della *Storia dell'Amministrazione del Regno d'Italia* di FEDERICO CORACCINI (pseudonimo di C. G. LA-FOLIE), Lugano, 1823. *De Maester* scrive il La Cecilia: *Deemester* il CUSANI, *Storia di Milano*, vol. VII, Milano, 1873, pag. 203, dicendolo di famiglia oriunda delle Fiandre. D'origine olandese lo dice l'Helfert.

portò con sè il prezioso documento, e lo fece firmare anche da G. B. Marochetti e dal dottor Fossati, apponendo alla prima firma la data " *30 agosto 1830 in Parigi* ", alla seconda quella: " *Paris, 2 7.bre 1830* ". Più tardi firmò ancora un Mariani, che non so bene chi sia (1), ponendo di proprio pugno la data " *Paris, 13 mars 1832* ". Perchè le date aggiunte non dessero luogo ad equivoci, il Tadini alla sua volta scrisse accanto alla prima firma, a quella cioè del Muschietti, la data " *17 agosto 1823, Londra* "; ponendo, evidentemente per semplice svista, *agosto* in luogo di *giugno*.

Il primo dei nuovi firmatari, Giambattista Marochetti (così egli si firma costantemente, non *Marocchetti*), appartiene esso pure alla schiera dei Piemontesi condannati a morte per i fatti del 1821. Era nato a Biella, e prima della Rivoluzione esercitava l'avvocatura. Nel 1836 (11 luglio) scriveva ad un suo nipote, dimorante in Torino, d'aver sessantaquattro anni. e che si preparava a morire da buon cristiano (2). Fu poi compreso

---

(1) Si potrebbe forse pensare a Livio, ministro e poi triunviro, *in articulo mortis*, della Repubblica Romana: non certo a Paolo Mariani, compagno dei fratelli Bandiera, semplice marinaio. In una lunghissima *Nota*, scritta dal Fossati a Parigi nell'agosto del 1831, *de' rifugiati italiani, che fanno diverse domande*, trovai inserito un bigliettino col ricordo di un Costantino Mariani, di 42 anni, nato a Genova, ma originario corso, il quale chiedeva d'entrare nella Legione straniera, dichiarando d'essere *un des plus anciens capitaines de l'armée sarde*.

(2) Ho presenti, oltre a questa, tre altre lettere del Marochetti scritte durante l'esilio e dirette allo stesso nipote e ad un cugino. Le prime due lettere, del 1833 e 1836, hanno la data di Parigi; le altre due, del 1839 e 1841, di Marsiglia. Gioverà riportarne alcuni brani: [1836, 11 luglio] " La mia salute è sempre e più che mai languente. Ogni giorno mi si " rivela un nuovo malanno, una nuova infermità, a cui non posso arrecare " nemmeno un alleviamento provvisorio per mancanza di mezzi. Non dubito " che ben presto andrò a raggiungere mio fratello. D'altronde quando si " hanno sessantaquattro anni è tempo di partire, e vi assicuro che non " cesso di occuparmi del gran viaggio nel modo che conviene ad un buon " cristiano. Due cose sole vorrei però ottenere prima d'andarmene: la " prima che mi fosse levata la confisca, onde poter disporre de' miei ar- " retrati che mi son dovuti; la seconda di fare la vostra conoscenza per- " sonale e di serrarvi al mio seno prima di partire. Ditemi quel che mi " occorre sperare di questi due oggetti . . . ": [1839, 8 luglio] " Io non so " in coscienza dove e come andrò a fissare l'ultimo mio asilo, nel caso di

nell'indulto del 1842: ma tornò definitivamente in patria solo nel 1848, e il giorno della promulgazione dello Statuto *illuminò la sua casa e pose sopra la porta l'epigrafe " Nunc dimittis servum tuum, Domine "*, vantandosi in tal occasione, *lepidamente, d'esser stato appiccato quattro volte per la causa d'Italia* (1).

Il dott. Giovanni Fossati era nato a Novara il 30 aprile 1786 e morì a Parigi il 20 dicembre 1874. Nel suo quarantesimo anno d'età, cioè nel 1826, prese a scrivere la sua autobiografia; ma giunto nella narrazione agli ultimi mesi del 1820, gli parve più conveniente continuarla sotto forma di giornale, e la continuò infatti, con rara costanza, fino al 16 aprile del 1872. Quest'autobiografia, o giornale che dir si voglia, nonostante le mutilazioni perpetrate dagli eredi nella parte meno antica (dove cioè si trattava presumibilmente di questioni di famiglia), consta tuttora di quasi 700 pagine di fittissima scrittura, e contiene spesso notizie molto interessanti; cosicchè, insieme colle poche lettere e carte del Fossati miracolosamente sfuggite al fuoco e al macero, potrebbe dar materia ad un grosso volume (2). Accennerò per ora soltanto a ciò che riguarda più direttamente il nostro argomento.

Laureatosi in medicina nell'Università di Pavia fin dal 1808, il Fossati s'era stabilito a Milano, dove fu presente, nel 1814, all'eccidio del Prina e al mutamento di governo. Legatosi allora

---

" amnistia. Quanto al rimanere a Marsiglia, impossibile: questo soggiorno
" mi è troppo disagradevole ad ogni titolo. Amerei quello di Torino, ma
" non vorrei esser a carico di nessuno, e poi, abituato come sono alla
" libertà personale, mi sarebbe troppo duro il rinunciarvi... Basta, vedrò.
" Non facciam conti senza l'oste. Questa idea però non cessa di logorarmi
" di continuo il cervello quantunque fondata finora su d'un'illusione. La
" mia salute peggiora ogni dì più, e declino a occhi veggenti... ".

(1) Vannucci, o. c., I, pag. 256, n.ª 1; Manno, o. c., pagg. 175-176.

(2) Sul Fossati sono a stampa parecchie notizie biografiche, tra le quali merita speciale ricordo, sopratutto per ciò che riguarda l'azione politica, quella riveduta da lui stesso e inserita nella *Biographie des hommes du jour par* Germain Sarrut *et* B. Saint-Edme, t. V, p. I, Parigi, 1840, pagg. 176-186. Si veda anche la *Nouvelle Biographie générale*, t. XVIII (1857), e Belhomme, *Notice sur la vie et les ouvrages du D.r Fossati*, Parigi, 1875 (opuscolo di pp. 44; l'elenco degli scritti del Fossati, a pagg. 30-31, è incompletissimo ed inesatto).

strettamente col celebre Rasori e con altri patrioti, si distinse nel consigliare un'azione energica e senza riguardi: ma capì ben presto d'essersi inutilmente compromesso, e cominciò a vagheggiar l'idea di lasciar l'Italia e stabilirsi a Parigi. " Io era " convinto (scrive egli nell'*Autobiogr.*, f. 53[a]) che non avrei mai " percorso alcuna carriera brillante sotto quel detestato Governo " Austriaco. Aggiungasi ch'io mi trovava compromesso per le " mie relazioni con Rasori e con molti patrioti ardenti; nè io " vedeva come la buona causa dell'Italia, nella situazione in cui " eravamo, potesse trionfare. Quando, *in certe riunioni*, io pro- " poneva qualche misura energica, i miei amici si spaventavano, " dicevano che bisognava far una rivoluzione senza spargere " sangue, e mi chiamavano terrorista, etc. Io aveva un bel ri- " petere loro che non sarei rimasto in Milano per farmi impic- " care come un imbecille, vittima de' loro sciocchi progetti; che " nulla ci obbligava a prender parte nel giuoco delle Rivolu- " zioni, ma quando ci si era, bisognava mettere testa contro " testa. Mi ridevano in faccia. Gli avvenimenti del 1821 mi det- " tero sgraziatamente ragione ". A questi avvenimenti il Fossati non era però presente; poichè fin dall'agosto del 1820 si era recato a Parigi, dove si stabilì e rimase poi definitivamente, acquistandovi buon nome come frenologo, collaboratore e seguace del Gall, e accumulando nell'esercizio pratico della medicina una cospicua fortuna. Non avendo per nulla rinunciato alle sue convinzioni politiche, e persistendo anzi, a quanto pare, nell'indirizzo terroristico inutilmente propugnato a Milano, egli fondò il 13 agosto del 1830 una *Società dei Patrioti Italiani*, della quale tenne la presidenza. I membri, di cui ho l'elenco, erano in numero di sessanta; alcuni pochi francesi (fra cui il Cavaignac), quasi tutti allievi della scuola politecnica; gli altri italiani d'ogni regione, fra i quali il Tadini, il Linati, Celeste Menotti, Pietro Giannone, l'incisore Calamatta, il medico Cerise d'Aosta e molti altri più o meno noti. La Società fu poi sciolta il 30 ottobre 1830, perchè, a quanto narra il Fossati nell'*Autobiografia*: " i Napoletani con qualch'altro avevano formato un par- " tito a parte, che aveva per iscopo di accattar denaro a nome " della Società intiera e di disporre ed agire indipendentemente " dalla Società stessa ". Il Fossati e molti altri entrarono allora in una Società, che s'intitolava *Società centrale della libertà ita-*

liana, ma che era comunemente detta per brevità *della Rue Taranne.* Subito però il Fossati osservava che in questa Società *ciascuno vuol comandare,* e " che gli elementi che la compongono " non *sembrano* fatti per cementarsi insieme ", aggiungendo, quasi a spiegazione, che vi si trovavano *molti de' rifugiati nobili piemontesi del 1821.* Egli diede quindi le dimissioni fin dal 22 novembre " per agire (scrive nell'*Autobiografia*) come io la " intendo con alcuni italiani e francesi: Mislej, Manzini, Me" notti, Lepeletier, De Schonen, Lafayette, ecc. ". Nel marzo del successivo anno 1831 la *Società della Rue Taranne fu modificata, creando un Direttorio liberatore,* ed egli vi accettò allora l'ufficio di *Segretario Generale.* Dire dell'opera delle varie Società e di quella personale del Fossati nella preparazione dei moti italiani del 1831, sarebbe cosa troppo lunga. Falliti questi moti, il Fossati diventa sempre più pessimista, finchè al 1° gennaio del 1834 scrive nell'*Autobiografia:* " Non ho riflessioni a " fare sulle cose politiche; nulla è successo e non v'è nulla a " sperare prossimamente. I popoli d'Europa sono in istato di " fermentazione latente, ed il momento dell'esplosione non è vi" cino. I grandi movimenti politici de' popoli maturano lenta" mente, e quando un colpo è mancato, ci vogliono degli anni " prima di poterlo rifare. Questo vo ripetendo a miei compa" trioti impazienti ". Parole e consigli certamente saggi dal punto di vista dell'interesse personale; se egualmente utili alla causa italiana, non so. È ad ogni modo curioso che alle parole riportate segua immediatamente il primo accenno ad un uomo nuovo, rappresentante nuove idee e un nuovo indirizzo: " Vi è " un certo Mazzini, genovese, rifugiato politico, che lavora a far " proseliti ". Il Mazzini aveva allora ventott'anni, il Fossati quarantotto: l'uno aveva fede in Dio, credeva all'immortalità dell'anima e considerava l'opera propria, indipendentemente dall'esito, come un apostolato, cui sarebbe stato colpa il sottrarsi; l'altro professava l'ateismo e il materialismo più assoluto, e ritenendo che *nulla ci obblighi a prendere parte nel giuoco delle Rivoluzioni,* era perfettamento logico non solo nel pretendere di giuocar testa contro testa, ma anche nel volersi tirare in disparte quando un rigoroso calcolo delle probabilità facesse apparire il giuoco troppo arrischiato.

5. Detto brevemente dei firmatari della *Dichiarazione*, è ormai tempo di farne conoscere il testo:

La Vendita carbonaria degl'It.[ni] *Rif.*[ta] (1) *al Tam.*

Considerato che alcune sinistre e mendaci voci si sono artifiziosamente fatte correre per rispetto alle intenzioni che aver possano i BB. CC. che compongono essa Vendita:

Considerato che è stretto loro dovere il tosto smentire quelle menzognere imputazioni per non dar appicco a malevoli d'eccitar discordie tra gl'Italiani con danno gravissimo della nostra comune patria:

Considerato oltracciò che una manifestazione novella di que' principj, che sono sempre stati la vera base delle patrie opere dell'insigne nostro ordine, oltre all'essere una solenne mentita che si darà a quelle false imputazioni, sarà altresì un ravvivare e rinvigorire, non meno ne' nostri proprj animi che in quello (!) di tutti gli altri nostri BB. CC. altrove dimoranti, quell'amor patrio, che dovrà finalmente prestarci tanta sagacità, tanta perseveranza e tanto volere, quanto basti a poter discacciare i barbari d'Italia, perchè ella divenga indipendente, tutta fratellevolmente collegata, libera e felice:

Ne viene a mettere in mostra, ed a fermare con la soscrizione di ciascuno dei BB. CC. che la compongono, i principj seguenti:

I. Il Popolo solo è il naturale e vero Sovrano in qual si sia Stato.

II. Al Popolo si appartiene esclusivamente di determinare sopra le istituzioni, che lo debbono reggere, e di modificarle.

III. Dal principio stesso, oltre alle tante altre irrepugnabili conseguenze che trar si potrebbero, ne seguirà anche principalissimamente, che ciò che opera per sè stesso il Popolo intero d'uno Stato, o la più gran parte de' suoi cittadini, e massime se non sono essi del tutto rozzi e barbari, non può essere se non che utile alla libertà loro universale: alla diffusione la maggiore che si possa avere dell'ammaestramento pubblico; al miglioramento della costumatezza e della morale in ogni famiglia: all'annichilamento d'ogni privilegio ereditario, come cosa che non può essergli se non che nociva: alla più stretta parsimonia in ogni parte delle spese pubbliche, acciocchè le famiglie, e sopratutto le più povere, sieno il men che si possa gravate di tasse; all'esecuzione senza parzialità veruna di quella giustizia, che per le sue proprie leggi avrà il Popolo stesso statuita; ed in fine all'assequimento di tutti que' beni,

---

(1) Così è scritto chiaramente. Penso che si debba interpretare *rifugiata*, e che sia forse un *lapsus calami* per *rifugiati*.

che derivano dall'essere il Popolo regolatore e moderatore delle comuni cose, come ogni uomo è della sua propria famiglia; tanto che, non, secondo quello che pe' loro privati interessi hanno mendacemente affermato i dominatori europei a questi ultimi tempi, si venga a sovvertire l'ordine e la quiete pubblica, anzi si rassodi e fondi l'una e l'altra cosa co' più saldi umani vincoli, e massime con lasciar ad ognuno non solamente il pieno possesso de' suoi beni e de' frutti della sua industria, ma con menomare altresì il più che far si possa quella parte che lor se ne toglie per via d'imposte, acciocchè in particolare più ampio sia di ciascuno il benessere e in generale più distesamente diffusa la felicità pubblica.

IV. Oltre a tutte queste cose di politica generale, la Vendita crede che non le disconvenga di metter qui in mostra ad un'ora quell'altra vital cosa di politica nazionale nostra, cioè: che ogni B. C. debba sempre con ogni suo studio e con ogni sua cura ed opera (senza lasciarsi predominare dall'interesse locale del paese in cui è nato, dello stato di cui esso paese fece o fa parte nelle varie divisioni territoriali del suolo d'Italia) procacciare che di tutto il Continente italiano, come di tutte le adjacenti Isole che progressivamente sono all'Italia connesse, non si possa far altro che un solo, libero, collegato Stato, quest'essendo la sola via di poterla rendere tanto forte quanto ella esser dee, perchè, discacciati i stranieri, mai più poi possan essi venirla ad opprimere e straziar nuovamente.

P. Muschietti [*17 agosto 1823 Londra*] (1)
L. Porro
Angeloni
Tadini
G. Demarchi
Prati
Prié
Angeloni per Cornaro, a nome e per commissione avuta in iscritto e consegnata al G. M.
Tadini a nome e commissione del Capitano Garda, come da mandato consegnato al G. M.
G. F. de Meester Huyöel
G. B. Marochetti [*30 agosto 1830 in Parigi*]
G. Fossati [*Paris 2 7bre 1830*]
Mariani, Paris 13 mars 1832
S. Marzano

---

(1) Le parole stampate, qui e in appresso, in corsivo e chiuse fra parentesi furono aggiunte, come s'è detto, dal Tadini.

6. La *Dichiarazione* fin qui trascritta occupa, colle sottoscrizioni, tre pagine di un foglio di carta da lettere di grande formato. Nella filigrana della carta si legge: *J. Budgen 1822.* A piedi della terza pagina, a sinistra, quasi accanto alla sottoscrizione del San Marzano, è impressa una piccola targa, incisa in rame od in acciaio, contenente le lettere *TAIRDV*, maiuscole, corsive e legate l'una all'altra. Si tratta evidentemente delle iniziali d'altrettante parole. Se si dovesse leggerle in senso inverso, si potrebbe congetturare: " *Vendita dei rifugiati italiani al Tamigi* "; quale però sia il vero significato, non so, e lascio volentieri che altri si occupi, se vuole, di questo piccolo enigma. Alla quarta pagina (rimasta in bianco, fino a che il Tadini non vi scrisse l'annotazione già riportata) furono attaccate, per mezzo di ostie, le lettere originali del Garda e del Cornaro, consegnate, secondo l'esplicita dichiarazione dei loro mandatarii, al Gran Maestro. Deve dunque trattarsi dell'esemplare appartenente al Gran Maestro stesso o conservato nel piccolo archivio della Vendita. Accanto a questo esemplare dovevano poi esisterne parecchi altri; cioè, probabilmente, uno per ogni firmatario, oltre a quelli inviati ad altre Vendite. Nel numero relativamente grande degli esemplari sta forse la ragione del fatto, che la *Dichiarazione* sia stata scritta piuttosto trascuratamente e da mano che sembra diversa da quella di qualsiasi firmatario.

Chi fosse il Gran Maestro non è detto; ma è ovvio pensare al primo che appose la sua firma, cioè al Muschietti. Avendo egli lasciato in seguito l'Inghilterra per l'America, si capirebbe anche facilmente come le carte a lui affidate potessero trovarsi fin dal 1830 in mano del Tadini. Il San Marzano, che firmò a piè di pagina, fungeva probabilmente da segretario o guardasigilli.

Venendo al testo della *Dichiarazione*, essa, quanto al contenuto, non ha bisogno di commento; o, tutt'al più, si può far notare l'ambiguità delle espressioni sul futuro assestamento dell'Italia, non essendosi evidentemente voluto escludere nè l'eventuale creazione d'uno Stato unico nè la confederazione di Stati apertamente vagheggiata nella lettera del Cornaro. Quanto alla forma, è facile ravvisare l'influenza preponderante

dell'Angeloni, del quale son noti lo stile artificioso e le manie di purista (1).

Colpisce inoltre la mancanza così d'ogni formula simbolica e misteriosa come del solito gergo carbonaro, fatta solo eccezione per pochissime parole delle più comuni. Ciononostante la *Dichiarazione* non era certo destinata ai profani, com'è provato, oltrecchè dalle sottoscrizioni coi nomi veri di tutti i componenti la Vendita, dall'esplicita affermazione, che si voleva con essa *ravvivare e rinvigorire l'amor patrio nell'animo di tutti i Buoni Cugini*, ovunque dimorassero. Si tratta dunque d'un documento destinato ai soli iniziati, e per il quale si può quindi invocare la presunzione di sincerità.

---

(1) Riferisce il La Cecilia, per averlo inteso dal De Meester, che, essendo l'Angeloni a Londra membro d'un comitato italiano, ricusò di firmare un processo verbale contaminato da una parola *ch'ei non riteneva per cruscante* (l. c., pag. 399). Il Principe di Canosa dice addirittura che scriveva *le sue opere colla lingua delle XII Tavole* (o. c., p. 21).

VINCENZO DI BEAUVAIS e PIETRO DUBOIS considerati come pedagogisti.

Nota I della dt.ssa GIUSEPPINA BIENTINESI.

Al glorioso risveglio della Chiesa Cattolica, avvenuto sotto il regno di Luigi IX il Santo, partecipò o meglio ebbe parte importante VINCENZO DI BEAUVAIS (1), la cui figura rievocata accanto a quelle incomparabilmente superiori di Tomaso di Aquino e di Alberto Magno non brilla di vivida luce perchè offuscata da numerose incertezze circa il tempo in cui visse (n. fine del secolo XII, † 1264). Semplice frate domenicano prima del 1220 a Parigi, passò nel convento di Beauvais fra il 1228 ed il 1229, dove attese seriamente a studî profondi, interrotti da lezioni di carattere puramente teologico e da prediche elevate tanto da indurre il re a chiamarlo a Royaumont (2). Non faceva egli parte del convento de' Cistercensi, ma continuava ad occuparsi alacremente di ricerche scientifiche e filosofiche, pur disimpe-

(1) BARTH, *Die Geschichte der Erziehung in soziologischer und geistigeschichtlicher Beleuchtung*. Leipzig, Reisland, 1911. — BOURGEAT J. B., *Études sur Vincent de Beauvais, théologien, philosophe, encyclopédiste ou spécimen des études théologiques, philosophiques et scientifiques au moyen âge, XIII siècle, 1210-1270*. Paris, Durand, 1856. — DAUNOU, *Vincent de Beauvais. - Histoire littéraire de la France*, tome XVIII. Paris, Didot et Treuttel & Wurtz, 1835, p. 449 sgg. — FRIEDRICH RICHARD, *Vincentius von Beauvais als Pädagog nach seiner Schrift " De eruditione filiorum regalium "*. Leipzig, Druck von Oskar Peters, 1883. — SCHUMANN. *Lehrbuch der Pädagogik*. Hannover, 1876, p. 98 sgg. — STÖCKL A., *Geschichte der Pädagogik*. Mainz, 1876, p. 177 sgg. — UEBERWEGS-BAUMGARTNER, *Grundriss der Geschichte der Philosophie*. Berlin, Ernst Siegfrid Mittler und Sohn, 1915, Zweiter Teil, pp. 256, 307, 321, 337, 395, 412 f., (414), 424, 429, (430 f.), 156* f.

(2) *Hist. litt.*, p. 453; FRIEDRICH, p. 5.

gnando l'ufficio di Lettore, per cui veniva spesso richiesto di consiglio e di aiuto circa l'educazione e l'istruzione de' principi e la vita di corte (1).

Ingegno robusto e versatile Beauvais, spiegò la sua operosità ne' campi più svariati della scienza, non senza una certa originalità, quando si pensi che occorreva uniformarsi a' tempi e adattare la materia non sempre riducibile in un quadro armonico, sintetico, compiuto. Era perciò lavoro che richiedeva infinita pazienza unita a conoscenza profonda e perspicacia non comune nel saper comporre numerosi riassunti, radunare in un tutto organico l'abbondante messe del materiale raccolto, non circoscritto ad una parte speciale, ma con maggiori vedute e con più alti intenti esteso sì da abbracciare tutta la dottrina degli scrittori antichi e contemporanei. Fu appunto nel 1256 che lo *Speculum majus* cominciò a godere grande fama, perchè, anche esaminato in uno sguardo complessivo, resta sempre una vera e propria enciclopedia, architettonicamente costrutta sulle basi del patrimonio scientifico d'allora e tale da gettare maggior luce sulle scoperte e le invenzioni, sulle ipotesi più inverosimili, sugli ardui e astrusi problemi, che agitavano la mente del secolo XIII (2).

Pietro Dubois invece (n. 1250-60, † 1321) per la sua attività poderosa e mirabile non sollevò grandi entusiasmi e grandi invidie e, se pure fece sentire la sua influenza presso la corte di Filippo IV il Bello, appoggiato come era da alcuni amici potenti, da Richard Leneveu e da Jean de la Forête, ebbe poca od alcuna importanza politica (3). Di origine borghese, nativo di Nor-

(1) *Hist. litt.*, p. 454; Friedrich, p. 4.

(2) *Hist. litt.*, pp. 518 e 519; Bourgeat, pp. 24-32. — Jacobi Bruckeri, *Historia critica philosophiae a Christo nato ad repurgatas usque literas.* Lipsiae, apud Bernh. Christoph. Breitkoph., 1743, tomus III, p. 784.

(3) Boutaric Edgard, *Not. et Extr.*, XX, 2, p. 166 sgg. — Id., *La France sous Philippe le Bel.* Paris, Plon, 1861. — Id., " Comptes rendus des séances de l'année 1864 „, T. VIII, pp. 84-106. — Delaville le Roulx, *La France en Orient au XIV^{e} siècle.* Paris, 1886, due volumi, specialmente vol. I, p. 48 sgg. — De Wailly Natalis, " Mémoires de l'Institut National de France „ (Académie des Inscription et Belles-Lettres), T. XVIII. Paris, Imprimerie Nationale, 1849, pp. 435-494. — Dubois Pierre, *De recuperatione Terre Sancte* (Collection de textes pour servir à l'étude et à l'enseignement

mandia e forse di Coutances, completò i suoi studi alla Università di Parigi, dove insegnavano due uomini illustri, ma fra loro nemici acerrimi: Tomaso di Aquino e Sigieri di Brabante, di cui subì l'influsso potente come si rileva da' suoi scritti, che presentano insieme con teorie averroistiche le contrarie dottrine tomistiche (1). Su lui convergono anche i raggi luminosi e potenti di Ruggero Bacone e di Raimondo Lullo; ne subisce l'influenza benigna e non sa liberarsi, non pretende di erigersi a loro critico (astrazion fatta dal filosofo catalano), ma di buon grado ne riconosce la superiorità ed a tutti reverente s'inchina quale umile scolaro davanti a sapienti e dotti maestri.

Molto competente in materia giuridica, Dubois si compiaceva di mostrare in tutta la pienezza e vigoria lo svolgersi del suo pensiero: non è probabile quindi che egli abbia compiuti gli studi di diritto civile e canonico a Parigi e senza dubbio deve essersi fatto esperto all'Università di Orléans, quando la giurisdizione laica prese realmente il sopravvento su quella ecclesiastica e si operò, a detta del Renan, una vera rivoluzione nel campo della giudicatura francese (2). Fin dal 1300 lo troviamo a Coutances avvocato delle cause regie e fin d'allora osserviamo la solerte operosità di scrittore, che si rivela subito col trattato *Summaria brevis et compendiosa doctrina felicis expeditionis et abbreviationis guerrarum ac litium Regni Francorum*, in cui si trovano svolte le principali idee del pubblicista, pre-

---

de l'histoire), publié d'après le manuscrit du Vatican par Ch.-V. Langlois. Paris, Picard, 1891. — Renan Ernest, *Pierre Dubois, légiste. - Histoire littéraire de la France*, tome XXVI. Paris, Firmin Didot et Frères, Fils et C°, 1873, pp. 491-536. — Scholz R., *Kirchenrechtliche Abhandlungen* hg. von Stutz. 6/8 Heft. Stuttgart, 1903, pp. 375-443. — Zeck Ernst, *De recuperatione Terre Sancte. - Ein Traktat des Pierre Dubois* (*Petrus de Bosco*). I. Einleitung und Analyse der drei ersten Hauptteile des Traktats. II. Schluss der Analyse. Dubois als Publizist. Bedeutung des Traktats (Ausserordentliche wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Leibniz-Gymnasiums zu Berlin. Ostern, 1905-1906). Berlin, Weidmannsche Buchhandlung, 1905-1906. — Id., *Der Publizist Pierre Dubois, seine Bedeutung im Rahmen der Politik Philipps IV des Schönen und seine literarische Denk- und Arbeitsweise im Traktat "De recuperatione Terre Sancte"*. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung, 1911.

(1) *De recuperatione*, § 63, p. 53; § 132, p. 121.

(2) *Hist. litt.*, tome XXVI, p. 473.

occupato della riforma dell'esercito, del riordinamento nell'amministrazione della giustizia, del miglioramento nelle istituzioni ecclesiastiche, delle varie e molteplici deficenze da riparare per render la Francia padrona assoluta dell'Europa.

Tuttavia l'opera considerata come fondamentale è il *De recuperatione Terre Sancte* (fra il giugno del 1305 e il luglio del 1306), che offre molti punti di contatto col primo trattato, anzi si può ritenere che con poche varianti sia l'ampliamento o meglio il rifacimento dello stesso materiale. Si tratta adunque dell'egemonia della Francia: per raggiunger lo scopo bisogna sbarazzare il terreno da molti pregiudizî, da usanze inutili e viete, ma con tutto il buon volere dello scrittore appaiono qua e là la debolezza meschina de' mezzi e l'instabilità dell'edificio, sovra cui l'ideale deve trasformarsi in atto.

Tratteggiare lo speciale atteggiamento preso da Beauvais e Dubois nel campo pedagogico, senza allargare le ricerche all'esame attento dell'operosità enciclopedica del frate e della attività solerte del pubblicista: ecco entro quali limiti intendo ristretta la mia indagine (1). Perciò quel che occuperà una parte importante nell'articolo sarà l'analisi accurata di tutti gli elementi, che contribuiscano a dare un concetto esatto delle idee de' due autori nel *De eruditione filiorum regalium* (2) (stampato per la prima volta nel 1477) e in una parte (§§ 60-90) del *De recuperatione Terre Sancte*: trattati che presentano sin da principio indirizzi diametralmente opposti, perchè, se l'uno si ispira all'estasi della vita contemplativa, l'altro trae saldo argomento dall'amor di patria e sostiene validamente il partito del re contro il potere temporale.

---

(1) Ueberwegs-Baumgartner, pp. 151-152*; Zeck, *Der Publizist Pierre Dubois*, pp. xi-xvi.

(2) Per quante ricerche abbia fatto finora in Italia ed in Isvizzera, non ho potuto procurarmi il testo latino, nè le dissertazioni dello Schlosser (Fr. Christoph): *Vincent von Beauvais*, Frankfurt a. M., 1819, e del Münch W.: *Gedanken über Fürstenerziehung aus alter und neuer Zeit*, München, 1909.

***

Prima d'inoltrarci nella esposizione delle dottrine pedagogiche de' due trattati in questione conviene fissare alcuni punti per render chiaro ed esatto il pensiero degli scrittori e non ritornare sui propri passi aggiungendo notizie via via che se ne presenti l'occasione, volendo riparare a una dimenticanza e nello stesso tempo non essere tacciati di disordine.

Educazione aristocratica per eccellenza è quella tratteggiata da Vincenzo Bellovacense o per lo meno dovrebbe esser tale; infatti, quando si accinse a scrivere il trattato, distogliendosi da' suoi lavori, aveva bene quest'intenzione (1), e d'altra parte si comprende facilmente che il *De eruditione filiorum regalium* si addica tanto a' figli de' re e de' nobili quanto a quelli di condizione più modesta (2). Per Dubois, al contrario, l'educazione

---

(1) Friedrich, p. 6, nota (2); *Hist. litt.*, p. 467, v. Appendice.

(2) Franklin Alfred, *Écoles et Collèges*, nella raccolta *La vie privée d'autrefois*. Paris, Plon, 1892. — Giesebrecht Guglielmo, *L'istruzione in Italia ne' primi secoli del medio evo*, trad. di Carlo Pascal. Firenze, Sansoni, 1895. – " Biblioteca Critica della letter. italiana " diretta da Francesco Torraca, N° 1. — Giuffrida Sante, *Storia della pedagogia*. Torino, Grato Scioldo, 1901. — Guex François, *Histoire de l'Instruction et de l'Éducation*. Paris, Alcan, 1906. — Langlais Jacques, *L'éducation en France avant le XVI^e sciècle*. " Revue de Renaissance ", VI, 5-6. — Id., *L'ancienne France, l'École et la Science jusqu'à la Renaissance*. Paris, 1893. — Langlois Ch.-V., *La vie en France au Moyen-Age d'après quelques moralistes du temps*. Paris, Hachette, 1908. — Manacorda Giuseppe, *Storia della scuola in Italia*. Vol. I: Il Medio Evo. – Parte I. Storia del diritto scolastico. – Parte II. Storia interna della scuola medievale italiana nella collezione " Pedagogisti ed educatori antichi e moderni " diretta da Giuseppe Lombardo-Radice. — Ozanam A. F., *Le scuole e l'istruzione in Italia nel Medio Evo*, traduzione di G. Z. I. Firenze, Sansoni, 1895. " Biblioteca Critica della lett. italiana " diretta da Francesco Torraca, N° 2. — Raumer (K. von), *Geschichte der Pädagogik*. Guterslöh, Druck u. Verlag von C. Bertelsmann, 1889-1902. — Salvioli Giuseppe, *L'istruzione pubblica in Italia nei secoli VIII, IX e X*. Parte I. Firenze, Sansoni, 1898. " Biblioteca Critica della lett. italiana " diretta da Francesco Torraca, N° 25. — Id. *L'istruzione in Italia prima del Mille*. Firenze, Sansoni, 1912. — Schmid Geo., *Geschichte der Erziehung*. Stuttgart, Cotta, 1898. — Williams Samuel, *The history of mediaeval education*. New York, Bardeen, 1903.

morale ed intellettuale, la dottrina scientifica devono mirare non a uno scopo individuale ed egoistico, bensì a un alto ideale, che nulla sa degl'interessi particolari, cioè alla supremazia della Francia: accomuna egli i ricchi con i poveri che devono godere di tutte le agevolazioni possibili, obbligando i primi a non essere a carico (1) della " provisione „ (2).

Un'altra differenza notevole consiste appunto in ciò che, mentre il pubblicista detta e determina scrupolosamente le linee generali e gli speciali caratteri del piano di studi, il frate si affida al valore ed alla perizia del maestro, che saprà tener alto il prestigio dell'insegnamento, sia avvivandolo con illuminata dottrina, sia rendendolo efficace con accorgimenti paterni ed austeri. Non le norme direttive dell'istruzione costituiranno lo scopo precipuo, il fine ultimo del sistema pedagogico, ma la rettitudine de' sentimenti e la nobiltà dell'animo, la perfezione morale, che farà degno l'uomo del regno di Dio. Il còmpito da assolvere sarà troppo arduo e forse irraggiungibile per la fragilità e l'incostanza della natura umana, ma quale seria e profonda concezione dell'opera educativa!

Non giunge, no, a vette così eccelse il pensiero di Dubois, che viveva della vita agitata della corte di Filippo il Bello ed era esperto maestro nell'additare i mezzi più spicci per raggiungere l'intento: salda cultura e fine perspicacia da' più intelligenti (3), e da quelli di mente poco sveglia alcune nozioni indispensabili, abilità nel maneggiare le armi e prontezza nello escogitare tutte le astuzie per vincere un nemico insidioso (4).

Nel *De recuperatione Terre Sancte* poi la figura del maestro diventa scialba e sbiadita, perchè, avendo già tracciato il cammino, la sua personalità non ha libero campo di agire; quella dell'educatore è una professione nè più nè meno, non una missione vera e propria come il frate esige nel *De eruditione filiorum regalium*. Con l'esempio insuperabile, con la capacità intellettuale il maestro deve imprimere indelebili impronte nella mente del

(1) *De recuperatione*, § 60, p. 50.
(2) V. Appendice.
(3) *De recuperatione*, § 76, p. 64.
(4) *Ibid.*, § 74, p. 62; § 76, p. 73; § 84, p. 68.

fanciullo e fuggire risolutamente ogni prolissità artificiosa ed ogni studiata ricercatezza nel linguaggio per non soddisfare il meschino orgoglio del suo sapere (1). Possono adunque i genitori riporre piena fiducia nell'arte sapiente di chi adopra la dolcezza, la pazienza infinita, la sollecitudine amorosa e, quando occorra, la severità, pur di educare, sviluppare l'intelligenza e sopra tutto infondere con la disciplina gl'insegnamenti della virtù, che illumina la mente, rafforza la volontà e dà un concetto pienamente esatto del dovere (2).

Gli scolari di Dubois, tutti pensanti non con la propria testa, ma secondo le esigenze de' " provisores „ (3), dovevano prestare obbedienza cieca, incondizionata, che si poteva fino ad un certo punto ottenere, dati i numerosi mezzi per redarguire a tempo, per impedire il rinnovarsi di certi fatti, che avrebbero seriamente nociuto alla disciplina ed alla serietà stessa della scuola (4). Eppure il legista non fa la minima allusione a' sistemi punitivi, efficaci e spesso brutali, usati nel medio evo; tuttavia simile dimenticanza non può destare grande meraviglia, quando si rifletta che Dubois ha omesso di parlare circa un argomento, a suo parere, inutile. — Non così la pensa Beauvais (5), che per la formazione di un vero carattere considera indispensabile un trattamento energico e severo, capace di combattere sin da principio le cattive inclinazioni, a seconda delle indoli, chè non tutti richiedono la stessa rigidità ne' comandi, la proibizione autorevole, per cui si ricorre, in caso d'infrazione, a' castighi corporali, somministrati con la verga e con la " ferula „. È caratteristica del piano di studi tracciato nel *De eruditione* la scrupolosa osservanza de' doveri, la corretta e spigliata finezza delle maniere, la continua sorveglianza nel reprimere i vizi e nel guidare gli educandi sul retto sentiero, unita alla correzione amorosa ed al benigno compatimento (6). Questa parte morale occupa un posto non indifferente nel trattato, che non

(1) Friedrich, pp. 14-15.
(2) Id., pp. 18-19.
(3) V. Appendice.
(4) Manacorda, *L'istruzione*, ecc., vol. I, parte II, p. 97 sgg.
(5) Friedrich, p. 32 sgg.
(6) Id., p. 33.

contiene aride e vuote disquisizioni, ma utili, assennati e preziosi insegnamenti in corrispondenza perfetta con i pensieri, con i sentimenti e con la lunga esperienza del frate predicatore. Più della " disciplina interna „ (1), che deve esser considerata unicamente come una dottrina del dovere, tutta a base di restrizioni e di obblighi, interessa esaminare le norme della " disciplina esterna „ (2), riguardante esclusivamente i rapporti sociali. Si deve attendere all'educazione del fanciullo regale non nel più completo isolamento, bensì nella scelta compagnia de' buoni, atti ad accrescere le cognizioni, a rafforzare il carattere ed a riuscire " la più eloquente scuola di virtù e il rimprovero più severo del vizio „. Nel così detto " galateo „ aristocratico (3) poi si dànno brevi accenni e calde raccomandazioni circa il modo di comportarsi in società, ma fin d'ora è bene avvertire che questa parte tanto importante nella educazione de' principi è solo complementare, mancando di speciali e sintomatiche impronte, che bastino da loro stesse a contraddistinguere in modo assoluto e categorico lo scopo precipuo del trattato (4). Un'attenuante si potrebbe trovare nel fatto che Beauvais dia qui a mo' di esempio alcuni consigli avendo in mente di occuparsi di detta educazione in altro lavoro più morale che pedagogico, di cui ho intenzione di trascrivere il testo (5). Tuttavia c'è della forza di osservazione e della pratica immensa nel prescrivere la condotta de' re futuri, che alle cure della politica dovevano unire lo studio assiduo e trovarsi a loro agio tanto su' campi di battaglia che nelle splendide sale e ne' sontuosi banchetti.

Dubois invece, dal cui trattato traspare un senso di vigorosa iniziativa, non si cura affatto di scrivere " un codice del gentil costume „, non vuole i giovani della " provisione „ metodici e compassati, ma baldanzosi e fieri uomini di azione, che riconquisteranno la Terra Santa sia con le armi in pugno che con la persuasione della parola: richiede altresì l'opera de' de-

(1) Friedrich, pp. 35-36.

(2) Id., pp. 36-37.

(3) Id., pp. 37-38.

(4) Cfr. Franklin Alfred, *Le repas. La civilité de la table,* nella raccolta *La vie privée d'autrefois.* Paris, Plon, Nourrit et C°, 1889.

(5) Codice manoscritto della Biblioteca del Vaticano.

boli e degl'imbelli, che resteranno in Francia a preparare nuove schiere per l'effettuazione dell'ideale da lui prefisso. È vissuto alla corte di Filippo IV il Bello, ma non ne ha ammirato l'apparato fastoso, bensì la politica travolgente, febbrile, affannosa, che tendeva a menomare nonchè ad abbattere il potere del papa.

Ed ora veniamo ad esaminare i sistemi pedagogici di ambedue gli scrittori, riserbandoci di stabilirne i confronti e di farne risaltare i difetti e le manchevolezze nella parte ultima dell'articolo.

Anzitutto Pietro Dubois ritiene giusto prendere ed iniziare i fanciulli sin dalla più tenera età all'effettuazione del suo piano di studi, li vuole accolti in appositi collegi (*studia*), dove l'organizzazione scolastica non differisce molto da quella de' conventi, giungendo persino a proibire allo scolaro di tornare a casa, salvo il caso in cui i genitori stessi siano disposti a rifondere alla “ provisione „ le spese subìte per essi. Ed a proposito conviene notare che tutto era predisposto con cura minuziosa, tanto che vi erano commissioni di vario grado, che sorvegliavano attivamente sull'andamento scolastico-politico degli istituti (1). Da' quattro a' cinque anni, ed anche a sei, fino a' dodici, a fanciulli e fanciulle (2) viene impartito l'insegnamento della lingua latina, materia fondamentale dell'istruzione inferiore e superiore, svolta molto opportunamente perchè diretta a predisporre la mente dell'alunno intelligente e volonteroso alle difficoltà de' testi più svariati.

Così dalla lettura del Salterio, accompagnata dallo studio della grammatica del Donato (*more romano*), si passa successivamente a quella della Bibbia, che richiede abilità maggiore, e man mano progredendo si giunge alla spiegazione ed illustrazione del Gradale, del Breviario, dell'*Aurea Legenda Sanctorum* (3). Come si può agevolmente inferire, si tratta di ripetizioni meccaniche, pedanti e attaccate alla gretta e fastidiosa minuzia delle regole, facilitate da molti riassunti e da composizioni, che riuscivano utili all'apprendimento delle nozioni impartite. Inoltre

---

(1) *De recuperatione*, § 60, p. 50.
(2) *Ibid.*, § 60, p. 50; § 71, p. 58.
(3) *Ibid.*, § 71, p. 59; v. Appendice.

per affinare l'ingegno dello studente si ricorre pure all'opera di poeti, che, se per la fama non possono reggere al confronto di Omero e di Virgilio, hanno per altro avuto il loro momento di fortuna: Catone, Teodulo, Tobia ed altri diano col senso della bellezza estetica alti insegnamenti morali (1). Fra' più indispensabili lavori da consultarsi richiamano l'attenzione il Dottrinale di Alessandro di Villanova e il Grecismo di Everardo di Béthun (2), testi che servono a ordinare e a rischiarare le idee, a porre riparo alle numerose lacune, a dissipare i dubbî, che sempre si accavallano come neri nuvoloni, quando si arricchisce la mente di nuova dottrina.

Compiuti gli studî della scuola primaria, occorre passare in altro collegio, dove il pubblicista pretende a dodici anni lo studio della logica, del greco e delle lingue orientali (3), che dovevano servire non come semplice passatempo, bensì come mezzo per diffondere la religione di Cristo nella Terra ricuperata. Con l'apprendimento della Logica alla coerenza de' ragionamenti segue la scoperta del vero, concatenando e sistemando le analisi più fini e le ricerche più coscienziose: insegnamento che richiede cure assidue, valendosi di speciali riassunti fatti da un competente in materia, che con abile maestria sappia evitare tutte le scabrosità e le divergenze che appaiono in Aristotele: così da questo studio facile e piano si potrà passare senz'altro alla lettura completa de' *Logicales* (4). — Non si deve poi all'ignaro giovinetto di quattordici anni metter davanti tutto ad un tratto i *Naturalia* di frate Alberto, ma indicargli il modo per iniziarlo alle grandi bellezze della natura, sorvolando sulle difficoltà del testo e sulle note tironiane, con la compilazione di un libretto (5). Questa lettura deve esser graduale cominciando senza alcuna discussione, perchè le idee trovino agio di sistemarsi e disporsi nella mente dello scolaro, che potrà in seguito leggere lo stesso riassunto aggiungendovi le questioni opposte da Alberto Magno

(1) *De recuperatione*, § 71, pp. 58-59.
(2) *Ibid.*, § 71, p. 60.
(3) *Ibid.*, § 72, p. 60.
(4) *Ibid.*, § 72, p. 60.
(5) *Ibid.*, § 72, pp. 60-61.

nel suo lungo comento all'*Organon* di Aristotele; allargano infine il campo delle cognizioni apprese le *Quaestiones Naturales* di frate Tomaso, di Sigieri e di altri, che devono insegnarsi con degli *Extracta de scriptis* convenientemente compilati (1). Analogo procedimento è usato per le scienze morali: dalla semplice lettura del riassunto de' dieci libri dell'*Etica* di Ermanno il Tedesco si passa alla discussione di alcuni argomenti, che per il loro numero esiguo non possono portare scompiglio e confusione (2).

Si può dire che a questo punto si rende necessaria la ripartizione fra gli studi de' chierici e de' secolari, fra l'occupazione degli scolari (*rudiores*), di quelli *modici temporis* e gli alunni di mente sveglia. Da' chierici van però distinti i predicatori futuri, per cui è tracciato un breve programma: la *Bibbia* spiegata *biblice* (3), insegnata per due o tre anni, il *Liber Summarum* di Pietro Ispano con le discussioni omesse ne' *Naturalia*, lo studio delle *Leges* del *Corpus juris* per un biennio, il *Decreto* di Graziano e le *Decretali* di Gregorio IX. L'istruzione poi impartita a' chierici propriamente detti non è davvero di carattere trascendente, occorrendo appena la conoscenza del *Decreto* e delle *Decretali* senza cognizione alcuna di leggi, nè molto differiva da quella de' secolari, che si limitava a notizie di diritto civile e canonico, all'apprendimento delle leggi morali ed anche all'applicazione della storia naturale negli studî di medicina. — Il corso di studî degli scolari, cui natura non ha largito robustezza, nè spiccate facoltà intellettuali, è basato sopra un avvedimento giusto ed umanitario, che tende non ad affaticare invano la mente con lezioni troppo elevate, e si sforza invece, almeno per le nozioni indispensabili, di creare, con chiarezza e semplicità di intendimenti, non degli spostati, ma degli uomini attivi e utili alla società. Un po' di logica, qualche notizia di storia naturale, di chirurgia e di veterinaria (4) (a' più capaci lo studio della medicina), una certa cultura legale desunta da

(1) *De recuperatione*, § 72, p. 61.
(2) *Ibid.*, § 73, p. 61.
(3) *Ibid.*, § 74, p. 62; v. Appendice.
(4) *Ibid.*, § 61, pp. 60-61; § 74, p. 62; v. Appendice.

un libretto apposito, un riassunto del *Decreto*, una conoscenza più che sommaria delle *Decretali* costituisce l'istruzione degli scolari *rudiores* (1). Inoltre agli studenti di diritto (*modici temporis*) tornerebbe utile possedere un breve e chiaro riassunto delle leggi divise per materia, contenenti ciascuna schiarimenti su una data questione tali da non ricorrere all'aiuto del maestro: ciò renderebbe possibile l'approfondirsi nella scienza giuridica a quelli di condizione disagiata ed a quelli che desiderino averne conoscenza sufficiente, ma, quel che più importa, servirebbe egregiamente per governare ed amministrare la giustizia nelle grandi città (2). Impareranno infine il mestiere del fabbro e del carpentiere gl'incapaci (*rudes*) (3) allo studio delle lettere, cui gioverà molto l'aureo libretto di Ruggero Bacone *De utilitatibus mathematicarum*, rivolto ad iniziarli a' secreti da utilizzarsi in tempo di guerra e ritenuto dagli studenti di matematica come guida sicura per la conquista definitiva di Terra Santa (4).

Nel progetto di educazione femminile le donne non somigliano davvero alle pallide vergini oranti de' primi tempi del Cristianesimo, alle monache devote e mediocremente istruite, nè alle donne intelligenti e colte de' castelli e delle corti e neppure alle semplici e rozze figlie del popolo (5): ben altra è la loro attività, che richiede mente sveglia e squisita gentilezza, poichè con la forza dell'esempio e con argomenti persuasivi si tratta di convertire al Cristianesimo (6) anime prive di ogni conforto divino o, quel che è peggio, combattute da dubbî atroci,

(1) *De recuperatione*, § 74, p. 62.

(2) *Ibid.*, § 76, p. 63.

(3) *Ibid.*, § 84, p. 68.

(4) *Ibid.*, § 79, p. 65.

(5) Arrighi G. L., *La storia del femminismo*. Firenze, Razzolini, 1911. — Frati Lodovico, *La donna italiana*. Torino, Bocca, 1899. — Jourdain, *Mémoire sur l'éducation des femmes au moyen âge*, dans " Mém. de l'Académie des inscriptions et belles lettres ". T. XXVIII, partie I^{e}, p. 79 sgg. — Hentsch Alice A., *De la littérature didactique du moyen âge s'adressant spécialement aux femmes*. Cahors, Imprimerie Coueslant, 1903. — Rodocanachi T., *L'éducation des femmes en Italie*. " Revue des questions historiques ", XL, n. 156. — Rousselot Paul, *Histoire de l'éducation des femmes en France*. Paris, Didier et C^{ie}, 1883.

(6) *De recuperatione*, § 61, p. 51.

che rendono ancor più penosa l'esistenza. La donna poi è chiamata col suo mite sorriso a lenire i dolori, a confortare con parola affettuosa i lamenti de' sofferenti e, pur obbedendo all'impulso di carità, deve esser al corrente delle nozioni di chirurgia e di medicina (1) per diventare cooperatrice attenta delle cure del medico, sostituendolo talvolta (2). Caratteristica invero questa collaborazione fatta per agevolare ed estendere la missione grandiosa, escogitata nello stesso tempo come uno de' mezzi che avrebbero procurato risultati soddisfacenti. A ciò si aggiunga lo studio delle lingue orientali, studio che aveva, sia per influsso dell'educazione cavalleresca (3), sia per i progetti avanzati da Ruggero Bacone, assunto anche nell'istruzione della donna una grande importanza, specialmente quando fosse unito alla grammatica latina, a' *Logicalia* ed a nozioni di storia naturale (4). Si ricordi poi la cura del pubblicista nel guardarsi bene dal trascurare alcuna cosa, la cui dimenticanza avrebbe portato pregiudizio alla riuscita de' suoi disegni, e non ci si stupirà di trovare, a proposito della salute malferma di molte fanciulle, disposizioni a che siano preposte ne' collegi all'insegnamento e all'impratichirsi della medicina, della chirurgia e della farmaceutica (5). Alle altre la vita solerte, l'opera altamente morale, intellettuale e sociale consistente nella diffusione della religione cristiana in quelle terre per mezzo di matrimonî principeschi (6): poichè convertiti i capi del paese, istruiti i figli nella sacra dottrina, si verrebbe coll'andar del tempo a nuovi e validi risultati, cui concorrerebbero anche cappellani appositamente nominati per alleviare il già difficile còmpito di queste fanciulle (7), mantenute a spese della *provisione*, che non pretenderà soltanto riconoscenza e gratitudine, bensì restituzione completa della somma sborsata (8). — Per arricchire

(1) *De recuperatione*, § 61, pp. 51-52.
(2) *Ibid.*, § 74, p. 62.
(3) Gautier Léon, *La Chevalerie*. Paris, 1895.
(4) *De recuperatione*, § 85, p. 71.
(5) *Ibid.*, § 85, p. 71.
(6) *Ibid.*, § 61, p. 51.
(7) *Ibid.*, § 61, p. 52.
(8) *Ibid.*, § 61, p. 51; v. Appendice.

di nuovi proseliti la Chiesa v'ha un altro mezzo, consistente nello stabilire in Terra Santa rapporti di amicizia od anche di scambievole simpatia fra le donne malate e le medichesse cristiane, che efficacemente le soccorrerebbero nelle loro infermità unendo al sollievo materiale il conforto dell'anima (1). Quasi a titolo di curiosità si potrebbe notare che le ricche dotazioni dei conventi femminili per la riforma proposta da Dubois (2) dovevano esser devolute a beneficio dell'istruzione di queste fanciulle, che il legista vuole libere da ogni pregiudizio, educate e colte in rapporto alle facoltà di cui dispongono, onde servirsi della loro collaborazione per la missione politico-sociale in Oriente.

Al contrario nel *De eruditione filiorum regalium* di Vincenzo Bellovacense il corso di studi non si allontana dalla caratteristica e tipica impronta medievale, perchè addita come meta ultima e definitiva la *Scientia scientiarum*, la Teologia (3): insieme però organico di precetti e di nozioni, sistema complesso e ordinato, che, pur richiedendo una buona memoria, mirava a dare, oltre che un indirizzo letterario e scientifico, un'istruzione rigorosamente ascetica e profondamente monastica. L'educazione fisica non occupa un posto speciale accanto a quella morale ed intellettuale, rivolta com'è alla cura del corpo e de' sensi (4): curioso infatti è il constatare che, mentre si riconosce necessario il riposo dopo il lavoro, non si consigli punto la libertà de' movimenti, che riescono un giusto svago dopo un'assidua occupazione. E poi, se si avvezza l'educando sin dall'età del discernimento (5) ad esser moderato nel mangiare e nel bere, se si cerca di contemperare la fatica con la quiete, perchè non si pretende da lui anche l'allenamento al nuoto, alle cavalcate, l'addestramento nel maneggiare le armi per riuscire vincitore di giostre e di tornei, che allora costituivano alcune delle principali qualità di un perfetto cavaliere? Una dimenticanza non può essere, perchè Beauvais, pur vivendo nel tranquillo e solitario

(1) *De recuperatione*, § 61, p. 52.
(2) *Ibid.*, § 102, p. 82.
(3) Friedrich, p. 27.
(4) Id., pp. 20-21.
(5) Id., p. 17.

ritiro di Royaumont, aveva modo di tenersi informato della vita di corte e d'altra parte la regina, affidandogli l'incarico di scrivere un trattato di educazione per i suoi figli, doveva riporre in lui fiducia piena ed illimitata: forse egli ha parlato dell'educazione fisica solo per dare un breve cenno, lasciando ad altri la cura di rinvigorire, con ogni sorta di esercizî ginnastici, il corpo de' nobili allievi.

Ed a chi è affidata l'educazione de' primi anni? Non è davvero prudente lasciar crescere i fanciulli nella più completa ignoranza, senza circondarli di cure affettuose e materne in ispecial modo, senza istillare ne' loro piccoli cervelli sani e retti principî. Sarà la religione (1) la prima materia d'insegnamento, non semplicemente accessoria e tanto meno preparatoria, chè ciò non fa parte delle intenzioni del frate: fa egli comprendere assai chiaramente esser questa la base fondamentale del piano pedagogico, ma ha il torto di non indicare il mezzo più acconcio per tale educazione. Sia detto però a sua discolpa che Beauvais giudica fuor di luogo ricordare che è dovere di madre avvezzare i figli nel santo timor di Dio: educazione naturale, dunque, che non va affatto disgiunta dalla ulteriore istruzione letteraria e filosofica. È poi degno di nota il fatto che il nostro autore, pur diffondendosi in lunghi e complessi programmi, non manca di dar consigli ispirati dalla esperienza, dal buon senso ed anche da un certo intendimento pedagogico. Appaiono invero qua e là quando meno ci si aspettano, il che deriva principalmente dal punto di vista da cui il frate parte: il trattato deve servire di guida al maestro, che considererà il problema dell'istruzione non dal lato del benefico e sensibile influsso sulla società, quanto dal lato del miglioramento morale degli educandi, per levarli al di sopra di ogni volgarità e di ogni miseria, per indirizzarli a nobili e generosi ideali (2).

Curva illos a pueritia eorum! (3). Non bastano l'istruzione e la disciplina per assicurare il profitto e la riuscita degli allievi: è ufficio del maestro conoscere altresì le indoli diverse.

---

(1) Friedrich, pp. 38-39.

(2) Id., p. 15 sgg.

(3) Id., p. 17.

affinchè possa studiarne l'ingegno ed il sentimento e conseguentemente prodigare cure intelligenti e assidue (1), pretendere con buone maniere quel che la voce severa e spesso iraconda non può ottenere (2), guardarsi dal torturare le piccole menti in istudi aridi e pesanti (3), usare la massima pazienza con i più tardi, esser infine padrone delle discipline da insegnare (4), il che faciliterà immensamente il suo còmpito. Come i libri non dànno l'ingegno, così il metodo non si può imparare dalla cattedra, perchè non deve esistere artificiosità nel magistero potente della parola, che dissipa col suo raggio vivificatore le atre nebbie del pensiero, scuote e ravviva i cuori. La disciplina, che deve andare di pari passo con l'istruzione (5), varia a seconda del naturale degli educandi; ora la calma, la dolcezza, la persuasione, talvolta l'energia, la severità, non mai la collera e l'ira, concorreranno a formare con altri ingegnosi artifici un complesso molteplice e, direi quasi, infinito, di piccoli mezzi, che non si possono apprendere a furia di studio e di volontà (6).

Occorre adunque che lo scolaro sia dotato di carattere docile per ricevere con *umile mente* (*mens humilis*) gli ammaestramenti, e conduca una *vita tranquilla* per una seria e profonda *meditazione* (*scrutinium tacitum*), cui aggiunga la *povertà* e la *terra straniera*! (7). Si nota poi una quadruplice divisione degli educandi: *incipientes*, *proficientes*, *provecti* e *perfecti* (8), che devono con l'attenzione, con la buona volontà, con la perseveranza agevolare l'opera del maestro (9): in tal modo la *subjectio discipuli* sarà ridotta a ben poca cosa, se si stabilirà fra insegnante e scolaro un affettuoso scambio d'idee, che varrà a diminuire la distanza fra il saper dell'uno e l'ignoranza dell'altro (10). All'uno

(1) Friedrich, p. 19.
(2) Id., p. 33.
(3) Id., p. 15.
(4) Id., p. 19.
(5) Id., pp. 18-19, 32.
(6) Id., p. 32 sgg.
(7) Id., p. 22.
(8) Id., p. 23.
(9) Id., pp. 23-26.
(10) Id., pp. 23.

infatti spetta promovere l'attenzione col fascino del sapere (1), senza pedanteria cattedratica, senza prolissi e contorti ragionamenti, ma con larghezza di vedute, con chiari e precisi dati (2), cercando di stabilire un nesso logico fra la teoria e la pratica, di dare opportuni giudizi su argomenti controversi, di destar l'interesse nell'allievo (3), rivelando al tempo stesso profonda e vasta dottrina (4): all'altro rielaborare la materia, scomporla nelle singole sue parti, verificare e intender bene quel che ha appreso, meditare ed organizzare infine il tutto secondo il modo particolare di pensare e di agire (5). È forse presumere un po' troppo delle forze intellettuali dell'educando; però, se egli tenga esercitata la memoria (6), se perseveri con deliberato proposito di vincere le difficoltà (7), v'ha probabilità di riuscita: guai se si mostri pigro o restio ad ogni sforzo, oppure se tenti di ripetere meccanicamente (8), perchè allora non potrà mai affinare l'ingegno, una delle principali doti per trar profitto dallo studio!

Quanto al sistema pedagogico di Vincenzo Bellovacense si può osservare che, salvo qualche piccola modificazione, le sette arti liberali erano ritenute come la preparazione più adatta allo studio della Teologia, che utilizzava il Trivio e il Quadrivio per dare una giusta interpretazione a' testi sacri e combattere a spada tratta le maldestre insinuazioni de' profani, per esaminare con sereno discernimento la ricca e varia sapienza de' libri teologici e confutare in seguito le questioni più difficili, risolvendo gli studiati dilemmi e gli abili sofismi degli avversari. Nel *De eruditione filiorum regalium* si riscontrano perciò tendenze ascetiche, che nella divisione delle singole materie risentono delle sottili e lambiccate teorie medievali: va distinta sopra tutto la *conoscenza delle parole* (*cognitio vocum*) da quella *delle*

---

(1) Friedrich, pp. 23-24.
(2) Id., p. 25.
(3) Id., p. 25.
(4) Id., p. 25.
(5) Id., p. 24.
(6) Id., p. 24.
(7) Id., p. 23.
(8) Id., p. 24.

cose (*cognitio rerum*), la forma dalla natura. Concezione unilaterale (1), predominante in massima fino al Rinascimento, passa da' primi rudimenti della lingua materna allo studio della *grammatica*, dall'*ars nobilissima* per le dispute, la *dialettica* va alla *retorica*, la *scientia bene dicendi,* con cui finiscono le materie letterarie e cominciano quelle scientifiche. L'*aritmetica* per lo più si riduce al solo computo consistente nello studio dell'abaco, della tavola e nell'aiuto delle dita (2) e si completa con l'apprendimento della *musica* e di brevi nozioni di *geometria*; segue appresso l'*astronomia*, non ancora vera scienza, sostituita nelle sue funzioni dall'*astrologia*, che dallo spostamento degli astri riesce a determinare la Pasqua e le feste mobili; vanno infine sotto il nome di *fisica* varie notizie di storia naturale, di medicina e di chirurgia, desunte per lo più da glossarî ed enciclopedie. Non credo quindi fuor di proposito dare un prospetto della ripartizione del programma di studi:

Cognitio vocum { in pronunciatione; grammatica / in significatione; dialectica } rhetorica.

Cognitio rerum { in forma { arithmetica / musica / geometria / astronomia } / in natura; physica.

Rigido conservatore, Beauvais si scaglia contro l'impostura e la falsità della coltura pagana, giudicandola eretica e piena di tranelli insidiosi, fino al punto da preferire un ingegno più

(1) Migne, *Patrologia latina* (*saeculum XII*). Parisiis, apud Garnier fratres editores et J.-P. Migne successores, 1879, T. CLXXVI: *Hugo de S. Victore,* t. II. Pars II: *Dogmatica. Eruditionis didascalicae,* liber V, col. 751 sgg. — Friedrich, p. 28.

(2) Salvioli, op. cit., p. 169.

che mediocre (1), non fosse altro perchè non corrotto da subdole e accreditate opinioni (2). Questa spiccata antipatia per i classici non reca alcuna meraviglia, quando si pensi che il frate, mantenutosi ligio agl'insegnamenti del suo tempo, non voleva scaldar troppo la fantasia de' giovinetti dietro racconti imaginosi e spesso ridicoli, sapendo invece ritrarre grande efficacia dalla lettura de' poeti cristiani (come Juvenco, Aratore, Prospero, Prudenzio, Sedulio, Matteo, Pietro di Riga) per la preponderanza dell'elemento religioso, tratto dalle sacre scritture. Ciò per altro non esclude che il frate riconosca l'utilità degli scritti riferentisi alle sette arti liberali, su cui si basava il sapere medievale.

Inoltre la lettura (3), la meditazione (4), la scrittura (5), e la disputa non costituiscono parti attinenti allo svolgersi del programma, bensì i mezzi per l'assimilazione del materiale: così agl'*incipientes*, a quelli cioè che non sanno neppure leggere, Vincenzo consiglia di stare attenti alle parole del maestro, che cercherà in seguito con letture facili e piane e col tempo più complicate di abituare i *progredientes* a non leggere senza comprendere e a non ingolfarsi in indagini e ricerche sopra argomenti astrusi (6). Indi occorre la meditazione, il pensiero profondo e raccolto, la calma e arguta prudenza nell'investigare l'origine e la causa, nel saper determinare la misura e nell'ascrivere la utilità di una data questione; meno male che il frate giudica lavoro di mente matura le traduzioni, i comenti e le monografie (nonchè i riassunti e le compilazioni)! Quando poi lo scolaro abbia conseguito la potenza incisiva del pensiero e la forza suggestiva della scorrevolezza nell'esposizione, rispondente al vero, può considerarsi libero dalle regole fisse e prestabilite del programma pedagogico.

(1) Friedrich, p. 29.

(2) Migne, *Erud. didascal.*, lib. IV, coll. 778-790.

(3) Migne, op. cit., lib. III, capp. IX e X, coll. 771-772; lib. VI, cap. XII, col. 810.

(4) Migne, op. cit., lib. III, cap. XI, col. 772; lib. VI, cap. XIII, coll. 809-810. - *Mystica*, Pars III, *De meditando seu meditandi* (opusculum aureum), coll. 993-998.

(5) Migne, op. cit., lib. III, cap. IV, coll. 768-769.

(6) Friedrich, pp. 30-31.

L'educazione femminile par quasi tracciata secondo lo schema segnato da S. Girolamo (1), con qualche leggera variante, trattandosi di donne che avrebbero mostrato vanto delle loro virtù, più che nelle sale della corte, nella cerchia ristretta della famiglia (2).

I sani principî della religione, non spinta all'eccesso dal fervore e dalle pratiche del culto, devono instillare alla fanciulla l'amore dell'operosità solerte, che guarda dalle tentazioni e dagli oziosi pensieri: sappia maneggiare la conocchia e filare con agili dita, canti gl'inni in lode del Signore e si mantenga pudica e virtuosa. Non le si addice invero un'educazione frivola e scapigliata, chè nelle sale da ballo, ne' teatri affollati e ne' sontuosi banchetti le libere eleganze e gli astuti artifizî abbagliano e promettono gioie ineffabili, facendo apparire meschini e senza scopo gli schietti esempî del bene, le opere generose e modeste.

Esperto conoscitore della società di allora, Vincenzo propone quindi una vita ritirata, lontana, per quanto è possibile, da ogni profana conoscenza che corrompa l'onestà e la purezza de' costumi: vuole egli, accanto al raccoglimento della preghiera, la semplicità dell'acconciatura, il portamento dignitoso, la modestia del volto, la scelta più che scrupolosa di donne attempate, vigili custodi di virtù incorruttibile (3).

---

(1) Migne, *Patrologia latina* (saecula IV-V), tomus 22. - *Hieronymus*, ep. CVII, col. 872 sgg.

(2) Festa G. B., *Un galateo femminile italiano del 300*. Bari, Laterza, 1910.

(3) Friedrich, pp. 39-40.

Il Codice Beriano di Tibullo

Confronti e osservazioni

Nota II di FERRUCCIO CALONGHI

	V	Ambr.	Ber.
III 3 *Rubr.*	Ad Neeram	*in tutti e tre*	
5	aut ut multa	aut ut multa	ut (2a manus) aut multa (*semplice omissione*)
5	tauri	thauri	thauri
*24	Et (V² At)	Et	At
*24	regum	regum	regnum (**Ber.**² regum: regnum *è errore di antiche edd.*)
27	voventur	voventur	noventur (*scambio di* u *ed* n)
38	ignava	ignava	ignavia *errore materiale: forse il puntino sotto l'*i *è della* prima manus.

Consenso dei tre codici: 2 thura (**Ber.** thura) — 7 sociarent (*notevole!:* **Ber.**² sociarem) — 9 permenso — 14 thariste (*notevole:* cfr. ψ cariste) — 17 in erithreo — 17 legiturque in (**Ber.**² *su rasura* legitur quae: *altra concordanza notevole, altro errore comune fra i molti*) — 17 littore — 20 invida quae — 21 homini — 22 nam — 22 gerit — 23 iocunda — 28 adversa — 29 lidius (**Ber.**² lydius) aurifer amnis — 32 cara coniuge — 36 neunt (*notevole*) — 38 dives ... orchus (**V** orcus).

	V	Ambr.	Ber.
III 4 *Rubrica identica nei tre codici.*			
9	omma - *pare di leggere, come osservo in parecchi* omnia *di* V, *ad es. I 5, 29 -, cosicché è incerto se si abbia a leggere* omina *od* omnia.	omina	omnia *l'originale aveva l'*i *senza il puntino* (**Ber.**² omina).

	V	Ambr.	Ber.
9	maturas (**V**[2] *marg.* et vanum ventura, *come* **G**)	maturas	naturaș (**Ber.**[2] vatum natura: *il punto sotto l's̤ di* natura *può essere della 2ª* mano).

L'originale doveva avere l'erroneo maturas: *l'*n *di* **Ber.** *è errore per l'*n *iniziale di* natum *che precede? Non dobbiamo dimenticare che il copista di* **Ber.** *è disattento. L'errore poteva anche essere nel suo esemplare diretto. Per le varianti al passo, v.* Rothstein, de Tib. codd., 64.

	V	Ambr.	Ber.
(?) *11	moneri	moneri	moveri *errore materiale di lettura? Per altro è lezione che si trova altrove.*
12	mendaci	mendaci	mendaciș *errore materiale, subito corretto.*
14	pertimuisse	pertinuisse (**Ambr.**[1])	pertimuisse

Ambr.[2] (*di mano recente*) pertimuisse. *L'originale aveva l'*m: *errore di lettura di* **Ambr.**[1]. **Ber.** *non è copiato su* **Ambr.**

	V	Ambr.	Ber.
28	myrthea	mirthea	mirthea
34	autumno	autumno	automno (*copista distratto*)
35	videbatur	videbatur	videbaṇtur (*svista dello scriba*)
43	rite	rite	ricte (*errore di disattenzione*)
47	cuique	evique	evique

confusione di cu *ed* eu: *errore di lettura, che per altro è comune a parecchi codici, ma non è in* **B** (Parisinus *del* Lachmann).

	V	Ambr.	Ber.
50	ferat	ferat	a (2ª m.) feret *non è lezione sconosciuta, ma potrebbe anche essere errore materiale per l'*e *precedente di* ore. *Gli interpolati dànno qui generalm.* feram.
53	solicitas	solicitas	sollicitas

(*per altro assai più spesso l'ortogr. di* **Ber.** *coincide con quella di* **Ambr.**).

	V	Ambr.	Ber.
6	nocturnis	nocturnis	nocturniịs *uno dei frequenti errori di distrazione.*

	V	Ambr.	Ber.
60	nerea	nerea	neera

Non si può parlare qui, a quanto sembra, di interpolazione nel **Ber**. *L'errore di scrittura di* **Ambr**. *e di* **V** *è così grossolano! Anche un copista poco accorto, come quello del* **Ber**., *può averlo notato, tanto più che tre versi prima si legge* neera, *scritto altrettanto chiaro in* **Ambr**. *e* **V** *come è scritto chiaro nel 60°* il nerea. *L'errore può del resto non essere stato nell'esemplare diretto di* **Ber**.

61, 62 *e* 82 (3 *volte*)	ah	ha	ha
86	flamam	flamam	flammam

Concordanza dei tre codici: 1 dii — 3 vani falsumque avertite visum — 4 votis — 14 inmeritum: **Ber**. îmeritum — 17 ethereum — 17 emersa (**Ber.**[2] emensa *e così* **V**[2]) — 26 humanum nec videt illud opus — 28 tyrio — 33 et cum — 41 locuti **Ber**. *come* **V**; **Ambr**. loquti — 42 tristi dulcia — 45 semele — 45 bachus — 50 quidque — 59 suas — 63 illis (*notevole*) — 64 fide — 65 *verso omesso in* **Ambr**., **V**, **Ber**. *e* **G**[1]. **Ber**. *in margine destro ha la nota* def(icit), *ma nessun supplemento.* **V**[2] *e* **G**[2] *suppliscono in modo diverso, il primo nel margine inferiore, il secondo nel testo e con scrittura di due mani diverse.* **Ambr**. *ha una crocetta marginale, per richiamare l'attenzione sulla lacuna* — 66 posse — 68 invanum — 69 sonora — 70 cordis — 71 cantum — 80 ac (**Ber.**[2] ast) — 81 corpore — 87 consanguinea — 89 submixta — 96 impia.

III 5 *Rubrica identica in tutti e tre i codici.*

	V	Ambr.	Ber.
5	denuntiat	denuntiat	denunciat
12	solicitant	sollicitant	solicitant (2ª m.: sollicitant)
18	facto	fato	fato
23	elysios (*cfr. però 12*)	elisios	elisios
24	chymeriosque	chimeriosque	chimeriosque
27	ñ quicquam (*staccato*)	necquicquam (*tutto unito*)	nec quicquam *La* 2ª m. *unisce* nec *con* quicquam

Nell'originale si aveva certo ñ quicquam *che parve staccato per effetto del segno d'abbreviazione che allontana facilmente la lettera soprassegnata dalle seguenti. Il* **Ber**. *fu fedele all'originale. Non deve tacersi tuttavia che la lezione* nec quicquam *compare in qualche codice. In* ψ *essa è regolarmente* nequicquam.

	V	Ambr.	Ber.
*29	numina	numina	lumina (*corr. da* 2ª m. *in* numina) *errore? bada al* celebrantur *che precede. O è interpolazione?* Heinsius *congetturò qui* flumina. *Confr.* I 3, 79.
29	ninphae (V¹)	limphe (= limphae)	lymphe
32	fata	fata	facta *errore materiale non corretto da* 2ª manus

Concordanza dei tre codici: 1 nos (*propriam. in* V: n Os, with v above) — 3 nunc autem — 3 maxima — 7 deorum — 10 certa — 11 sacrilegis ... amovimus aegros — 12 nefanda (**Ambr.** *e* **Ber.** nephanda) — 13 meditantis — 16 tardo — 29 atque nobis — 31 et.

	V	Ambr.	Ber.
III 6	*Rubrica identica in tutti e tre i codici.*		
14	contulit (V¹)	contudit	contundit
	(V² contudit) — contulit *era anche in* c, d, e *del* Lachmann		
*18	vestrum	urm̃	nostrum

La lezione nostrum *è conosciuta, benché non sia quella degli interpolati in genere. Nulla di impossibile che derivi immediatamente da un esemplare similissimo ad* **Ambr.** *o dall'originale comune per falsa lettura di* nrm̃ *per* urm̃.

	V	Ambr.	Ber.
26	sentiet	sentiat	sentiat
	Il sentiet *di* **V** *è scritto chiarissimo.*		
27	ah	ah	ha
	(*abbiamo visto altrove* ha ha *nel 2º e nel 3º. Notevole* ha *sempre in* **Ber.**).		
30	fata	fata	facta (*come in* 5, 32! — *questo* facta *si trova nell'edizione veneta del 1475*) (1)

32 *Dopo il v. 32 comincia nei tre codici un nuovo carme, che il Mureto congiunse coi precedenti. Il titolo della nuova elegia suona:*

V	Ambr.	Ber.
De Neera que de Amasio conqueritur Rea	De neera conqueritur (que de amasio (2ª manus))	De neera conqueritur *dunque* **Ber.** *come* **Ambr.**[1]

(1) *Del resto lo scambio di* fata *e* facta, fato *e* facto *nei mss. è comunissimo e si trova in parecchie edizioni antichissime.*

	V	Ambr.	Ber.
33	J	Si	Si

in **V**[1] *manca la piccola letterina* (s) *iniziale:* s J, *ma deve trattarsi di facile omissione.*

33	mihi	michi	mihi

(*anche nell'ortografia* **Ber**. *non è identico ad* **Ambr**.)

36	solicitis	sollicitis	sollicitis

(*confronta per altro il v. 61*)

58	linpha	limpha	limpha
59	fugiet	e (2ª manus) fugit	fugit

Il confronto dei tre codici ha qui speciale interesse. L'originale dava fugit.

61	solicitus	solicitus	sollicitus

(*confronta sopra al verso 36*)

Dopo il verso 64, ultimo dell'elegia, seguono in **Ambr.** *e* **V** *i sei versi di III 18 = IV 12, che dovevano essere nell'originale comune.*

Notevolissimo che questi versi, che non sono in **G**, *ma che si trovano anche in codici interpolati, come il Bresciano A. VII. 7* (**Br**. *dello Stampini*), *non sono tutti accolti in* **Ber**., *che si arresta al terzo. I tre versi di* **Ber**., *i sei di* **Ambr**. *e* **V** *hanno varianti rispetto ai medesimi versi che si trovano ripetuti al loro luogo, e più precisam. senza intervallo scritti dopo IV 11. come vedremo più innanzi. Chiamiamo i tre versi α, β, γ:*

α)	sit	sit	sed
			errore grossolano? svista?
	*tam	tam	tum
β)	videor	videor	videor

Per la lezione nella seconda sede, vedi più innanzi sotto IV 12.

γ) *Verso identico nei tre codici. In* **Ber**. *dopo questo 3° verso c'è segno di lacuna al margine sinistro.*

L'omissione degli ultimi tre versi da parte di **Ber**. *e gli spropositi del primo di essi sono una nuova prova che* **Ber**. *non è copia di* **Ambr**. *Solo ci domandiamo come possa essere avvenuta questa omissione. Il copista o il correttore del codice padre di* **Ber**. *s'accorse che i sei versi non erano al loro posto e marginalmente indicò che andavano cancellati. Il copista di* **Ber**. *non intese il 6 e ne copiò tre, oppure s'accorse che non andavano scritti quando aveva già copiato i primi tre. La* 2ª manus, *che aveva sott'occhio un interpolato coi tre distici, segnò lacuna.*

Concordanze dei tre manoscritti: 1 victis (**V Ber.** victis) — 8 pulserit — 13 dites — 15 Armenas — 17 volet — 23 deus hic — 23 quantumque — 34 iocum — 44 carere — 44 tuo — 46 sordida — 46 fide — 51 qui — 52 precor — 58 martia — 62 et — 63 tyrio.

III 7 = IV 1 (1)

Il titolo è identico nei tre codici: Laudes messale (Messalae **V**, Messallae **Ber.**²). *I versi sono tutti nel medesimo ordine di* **Ambr.** *e* **V. Ber.** *omette il v.* 40. *V. sotto, a suo luogo, l'osservazione relativa.*

	V	**Ambr.**	**Ber.**
*1	quanquam	quanquam	si quam *senza alcuna correzione di 2ª mano*
8	phebo	phebo	phoebe *(errore di svista?)*
12	olimpum	olimpum	olympum
18	dicat	dictat	dictat (**Ber.**² dictet)
?*24	audere	audere	audire *(non è lezione nuova)*
*25	seu quod	seu quod	sed quod *(non è lezione nuova)*
26	minus	minus	ramus *(errore di lettura?)*
*39	quique tibi	quique tⁱ	quisque tibi

*L'*i *sopra* t *in* **Ambr.** *è di prima mano; il* quisque *di* **Ber.** *non è nuovo.*

*39	cartis ne	cartis ne	cartis ve (n (2ª m.)) *Il* ve *è anche in* **G**

40 *Il verso è omesso in* **Ber.** *L'omissione è comune, secondo il* Belling (*Prolegomena, 1893, pp. 72-3*), *ai codici della famiglia di* **y** (= **A** *del* Lachmann). *V. anche in proposito* Rothstein, *de Tib. codd., Berlin, 1880, p. 65.*

43	urget	urget	urget *con* s *raso davanti a* u
48	phylos	pylos	pilos
49	Ulixem	Ulixem	Ulixes *(errore di svista?)*

(1) *Il Panegirico segue senza intervallo indicante fine di libro, precisamente come in* **Ambr.** *e* **V.**

	V	**Ambr.**	**Ber.**
51	titan	titan	titam *L'* m *corretta in* n *forse dalla 1ª mano*
55	ciclops	ciclyps (2ª *mano corr.* o)	ciclops
55	tempus	tp͠s	coeptos

In origine doveva leggersi lotos temptatos; lothos *è ancora in* **F**. *L'abbreviazione di* temptatos *si ridusse a* tp͠s, *o almeno così fu letta da* **Ambr.** **V** *interpretò* tempus; *altri, come* **Ber.** (*o il suo originale*) *e* **G**, *per facile confusione tra* t *e* c, *lessero* coeptos (ceptos); *il* captos *di* **F** *non pare dia senso.*

55	convertere	vertere	avertere

Davanti a vertere *in* **Ambr.** *c'è spazio vuoto per una lettera, come fu notato, e come è manifesto, ma potrebbe anche essere lo spazio per un'abbreviazione. Comunque, l'originale qui aveva un segno forse illeggibile;* **V** *interpretò* convertere, *altri* advertere; *altri, tra cui* **Ber.**, *o il suo esemplare diretto,* avertere. *Non è punto improbabile che l'originale avesse* avertere — *e il* **Ber.** *ci aiuta a supporlo* —, *ma* **Ambr.** *non volle trascrivere l'*a *perché il verso avrebbe vacillato metricamente; del che accortosi,* **V** *avrebbe scritto* convertere.

56	et *omesso in* **V**[1]	et *omesso in* **Ambr.**	et *accolto in* **Ber.** *come in* **G** *e in* **Plant.**
60	artacle	artacre	artacre

In **V** *si legge senz'altro* artacle, *e non è il caso di dubitare fra* artacle *ed* artade *come si fa comunemente, sulla fede dell'* Hiller. C *e* l *sono peraltro avvicinate in modo che ad una lettura superficiale può nascere la confusione fra* cl *e* d, *lezione che viene esclusa subito dal confronto della scrittura del* d *affatto diversa da quella che si vede qui: ad ogni modo la* 2ª m. *spiegò interlinearmente* cl. *Nell'originale la parola non doveva essere scritta chiarissima, se si giudica dalla scrittura di* **Ambr.**, *dove mi par di vedere qualche incertezza d'intenzione, come verso una lettera più alta del* c, *dopo il* c. *Ad ogni modo è indubitato che in* **Ambr.** *si legge* artacre.

64	Cimerion	Cymerion	Cymerion
70	ge (2ª m.) termine	ge (2ª m.) termine	ter (2ª m.) tibi geminae

I due puntini sotto t *e* b *lasciavano forse sorvivere gli* i, *così che la correzione tendesse a un* i i i gemine? — *C'è una variante* te geminae.

	V	Ambr.	Ber.
70	nantem	nautem	nãtem

È da notare che il nantem *di* **V** *è correzione certo della stessa* prima manus *su* nautem. *Ciò non vidi finora osservato da altri. L'originale aveva un'abbreviazione?*

	V	Ambr.	Ber.
71	scille	scille	sille
76	vagi	vagi	bagi (*errore di svista*)
77	athlantidos	athlantidos	athalantidos (*non nuova*)
78	feacia	feacia	pheacia
79	hec	hec	hoc (*errore?*)
82	arthos	artos	artes

Così leggo in **V** *e non, come altri lesse,* artes.

	V	Ambr.	Ber.
?*84	nernos	vernos	nervos

Anche qui faccio notare che in **V** *fu letto inesattamente* vernos, *invece di* nernos, *come si legge e che è probabile correzione di* uernos (= vernos, *come in* **Ambr.**) *dell'originale comune.* Nervos *è lezione frequente ed è pur quella degli* **Exc. Par.**: cervos ψ. *È poi notevole che da* uernos *è facilissimo copiare un* nervos.

	V	Ambr.	Ber.
87	et	et	ut

ut *non è soltanto in* **Exc. Par.**, *ma in* **Plaut.**, *nonché in* **B** *e* **C** *del Lachmann.*

	V	Ambr.	Ber.
89	celeremque (V² ve)	celerem ve (*un po' staccati*)	celerem ve
?*91	celerem ve	celerem ve	celerem ne (*come in* G)
*91	Et quis	Et quis	At quis

(*La lezione* At *è frequente*). *V.* Rothstein, *o. c., p. 66.*

	V	Ambr.	Ber.
93	direpto (V² directo)	directo	directo
95	p̱ma	p̱ma	pervia

Il pervia *di* **Ber.** *si legge in altri codd., nell'ediz. veneta del 1475 e nel commento di* Achille Stazio (*ibid. 1567*), *come apprendo dal* Broukhusius, *che chiama erroneamente* " *omnium princeps* „ *la detta edizione* (1). *Ma qui non credo si tratti di interpolazione. Non fu intesa l'abbreviazione dell'originale.* **Ambr.** *e* **V** *trascrissero tale e quale.* **Ber.** (*o il suo esemplare*) *svolse e interpretò* p̱ *come* per *e* ma *come* uia = uia = via.

---

(1) *L'*Huschke *trova il* pervia *nel cod. Lips., nelle ediz. del 1472 e in quella di Reggio.*

	V	Ambr.	Ber.
*110	et arpinis	et arpinis (**Ambr.**[1])	et alpinis (*come* **G**)
113	renoverat (*scritto per esteso*)	renoverat (renovat)	renovaverat *scritto per esteso. Così legge anche il* Cuiacianus. *Così* ψ.
117	chatene	cathene	cathene
119	instat	instant	instant

*L'*instat *di* **V** *è scritto chiarissimo; errore senza dubbio e perciò forse non lo registrano i critici.*

	V	Ambr.	Ber.
*127	ulla nec aereas	*come il* **V**	nullaș hec aerias *L'*ș *col segno di cancellatura dev'esser della* 1ª m. *Il* nulla haec, *benché lezione non comune, non è nuovo. Il* Broukhusius *trovò il* nulla haec *solo nel Commento a Tibullo di* Achille Stazio (*Venezia, 1567*). *Citando quest'opera il* Br. *aggiunge:* " *Usus est autem Statius codicibus antiquis non minus decem* " (1).
131	liquit	linquit	linquit

In **V** *la lettera* q *è scritta così calcata che sembra quasi di vedere la mano del copista affermarsi in modo particolare su di essa come a distruggere il primo dubbio di scrivere* nq.

	V	Ambr.	Ber.
133	additus	additus	aditus *non è lezione nuova. È tuttavia rara.* **Ber.**[2] additus
139	tetereo	te tereo	tetereo

In **Ambr.** *c'è un piccolo intervallo tra* te *e* tereo, *ma tuttavia il filetto superiore dell'*e *tocca quasi il* t *seguente. Il copista fu probabilmente in dubbio, davanti all'originale non chiaro, se si trattasse di una parola o due e trascrisse fedelmente, non accorgendosi della dittografia.* **V** *e* **Ber.** *lessero una parola sola.* Tetereo *è pure nel* Cuiacianus, *nel codice* **P** (*descritto dal* Columba *in Rass. d'antich. class., 1899, p. 69*) *e in non pochi altri; in* ψ *generalmente* Rhoeteo.

	V	Ambr.	Ber.
148	offeret	offerret (*errore*)	offeret

---

(1) *L'*Huschke *annota*: At Lips. et unus St. ' nulla haec '.

	V	Ambr.	Ber.
157	non numquam (*dittografia*)	non unquam	non unquam
159	propior	propior	proprior *errore abbastanza comune*
159	fertur	fertur	fertum (*errore per effetto della* m *di* aestivum *che precede*)
162	neque	nec	nec
165	rigentem	rigentes (**Ambr.**[1]) (rigentem **Ambr.**[2]: *l'm su l's raschiata*). *La scrittura dell'originale comune confermata da* **Ber.**	rigentes
	È errata la nota dello Hiller: rigentes ψ.		
165	interposita	inter posita	inter posita
*169	vertitur	*1ª m. omise: 2ª mano* vertitur	labitur (*come in* **Plant.**)
	La lez. labitur *è del resto comunissima nei mss.*		
170	hinc (*come in alcuni codd. Lachmanniani*)	huic (*errore di lettura*)	hinc (ψ hic)
171	leta	lenta	lenta
180	propior	propior	proprior (*Vedi v. 159*)
182	ut mos est	ut mos est	non mos est
	Il non *è forse errore cagionato dal* non *paralello nella scrittura del verso di sopra.*		
191	memorare	memorare	memorate (r *sopra la* t)
	La 2ª m. di **Ber.** *corresse l'errore di scrittura forse proveniente dal* nostrae *che precede.*		
194	flamae	flãme	flamme
196	parvum ethneae	parvum ethnee	parum ethenee (v *sopra*) (*3 dittonghi*)
	Errori materiali di scrittura in **Ber.** *Il* v *di* parvum *è di 2ª m.; non posso dirlo del puntino sotto l'e.*		
*200	Posse meletheas mallem ||| mittere cartas (nec ... com *sopra*)	Posse meletheas mallem mittere cartas	Posse me letheas nec mallem mittere cartas

V si accorse dell'errore e credette ci fosse lacuna dopo mallem, *ma l'originale non avendo segno di lacuna,* **Ambr.** *copiò fedelmente. La* 2ª m. *di* **V** *aggiunse il* nec. *La stessa* 1ª m. *di* **Ber.** — *a quanto pare — tentò una correzione di* Posse me letheas *in* Possem letheas *unendo con un trattino* Posse *a* me *e segnando sotto l'*e *di* mẹ *un puntino. Il* nec *si legge anche in* **G** *e altrove. Leggono* me letheas *un Vossiano e l'ed. di Reggio, nonché l'*ed. min. *del 1472.*

	V	Ambr.	Ber.
203	statuunt	statuunt	statuent (*come in* **G.**, **Plant.** *e altr.*)
207	rigidos	rigidos	rogidos (i (2ª m.) sopra o) (*in margine* rosidos)
207	ꝑcurrere	ꝑcurre˙˙	percurre (*trascurato il segno dell'originale su* re˙˙)
210	Inquencunque	Inquemcunque	In quemcumque

In **Ambr.** *e* **V** *come una parola sola, perché l'iniziale maiuscola del verso essendo sempre staccata, l'*n *si appoggia quasi del tutto alla parola seguente.*

Concordanza dei tre codici: 1 mea (*notevole*) — 2 valeant — 2 ut — 3 a meritis — 9 Cres — 10 pura (**V**² puro *e così* **Ber.**²) — 11 longior (**V**² *aggiunge interlinearmente* iã, **Ber.**² ni) — 13 terris — 13 leta — 14 pacavit (**Ber.** paçcavit) — 19 desederit — 22 hinc — 24 et — 26 vovemus (*notevole*) — 27 nec — 27 carmine — 30 qua iudex — 37 potius — 43 qualis inaequatum — 45 nam — 46 non alius — 55 non — 59 antiphatemque — 60 gelidos — 60 irrigat — 63 aptaque — 68 discurreret undis — 69 littora — 71 orbe — 72 rabidas — 72 freta — 73 in ore — 73 consumpsit (**Ber.** conisumpsit) — 75 pontum (*notevole*) — 76 violata — 77 calipsos — 78 errorum miseri — 82 nam — 83 praeducere — 86 fontibus ut — 88 et — 94 contendere — 96 grandis venit — 97 amplior — 98 venient — 99 parent — 100 tunc — 102 inaequatis (*tutta una parola e non, come altri lesse in* **Ambr.**, in *separato*) — 103 seu iunctum — 104 dexteraque ut (*notevole*) — 104 sinister (**Ber.** stera (2ª m.)) — 108 iapigiae — 110 armis — 112*a* namque.. secula fame (**Ber.** nanque). *La presenza di questo verso è notevolissima per stabilire la derivazione di* **Ber.** *nel senso che abbiamo sopra indicato. E non solo deve essere considerato che il verso manca per intero in* **B**, **d**, **e**, *ma che in* **c** (*Wittiano, ora*

perduto) esso si trovava con l'ultima parola vitae *in luogo del* fame *di* **O**. *Le parole* saecula famae *di* **O** *sono per manifesta svista una ripetizione della chiusa del verso antecedente. Come abbia potuto avvenire l'errore, cerca di spiegare il* Belling, *Prolegg., 1893, p. 73. Il verso si trova pure in* **G** (1) — 115 audet — 116 domator (*notevole*) — 121 sub tegmine (**V** sub tegmine, **Ambr.** sub tegmine, **Ber.** sub-tegimine. *L'errore della divisione in due parole deriva, come si osserva nell'***Ambr.**, *dalla abbreviazione di* sub *prima di* tegmine, *un po' staccata, come accade spesso, dal resto della parola. L'originale comune doveva dare appunto così. La lineetta che congiunge in* **Ber.** *le due parole in una è di altro inchiostro. L'i cancellato è una svista dello scriba*). — 128 densas depascitur. *In* **Ber.** densas de *su rasura, ma sembra scritto dalla* prima m. — 129 sunt — 129 multa (*notevole*) — 130 inania: *in* **Ber.** innania. *Forse l'errore era nell'originale comune. Così penso osservando che in* **Ambr.** *al di sopra di* n *ed* a *c'è un segno in parte cancellato che poteva indicare la reduplicazione di* n — 136 nunc — 136 sunt.. triumphi: **Ber.**, *sembra tutto di prima mano, ha* triumphūm — 140 nilus (**V** nilius) — 140 lympha — 140 dyaspes (**Ber.** diaspes) — 141 cyri (**Ber.** ciri) — 141 cydnus — 142 Creteis ardet — 142 caristia [*Si osservi la notevole concordanza dei 3 codd. di fronte a lezioni assai varie, qui e nei 2 vv. precedenti*] — 143 tamiris — 146 maginos (*notevole*) — 147 occeanus (*perfino nell'ortografia!*) — 151 circunfuso (**V** *ha l'*m *corretta in* n) — 154 densa (**V**[1] denso, *per svista, corretto sul testo stesso*) — 155 *verso uguale in tutti e tre i mss.* — 157 superegerit (*in* **Ambr.** *e in* **Ber.** *il* super *pare sì e no unito all'*egerit; *in* **V** *unito decisamente*) — 161 ergo (*notevole*) — 164 nulla — 167 utrique (*notevole*) — 168 alter — 168 negat (*notevole*) — 173 confunditur (*notevole*) — 174 exurgitat — 174 oppida (**Ambr.** **V** opida) — 175 poscent — 181 ocia (**Ber.** otia) — 185 fecundis indeficientia mensis (**Ber.** *aggiunge di suo solo errori materiali di scrittura corretti interlinearmente, non è certo se da* 2ª manus, *e scrive precisamente*: feundis (c) indeficentia (i). *La concordanza è anche qui notevole*) — 189 accitus (*anche* **V** *scrive chiarissimo* accitus *e lesse male l'*Hiller: accitos. *Così constato sul codice e così vide il* Postgate - *ediz. Tibull. del 1914*) — 190 re-

(1) *Se il verso si trovava anche in* **Y**, *come vuole il* Rothstein (*De Tib. codicibus cit., p. 57*), *esso doveva avere, come risulta dalla buona congettura del* R., famae *e non* vitae. *V. infatti* Belling, *Quaest. Tib., p. 24.*

lictus (*notevole*) — 193 ausim — 193 rapidas — 195 subsistere — 197 quidcunque — 198 quantalibet — 199 Lidia (**Ber.**[2] Lydia) — 202 inerret — 205 fato (*notevole!*) — 206 figura.

IV 2

Appena terminato il Panegirico, segue, senza intervallo, nei tre codici, il titolo

	V	**Ambr.**	**Ber.**
	Laus Sulpiciae ad deum Martem	Sulpitiae	*come in* **V**
4	ne	ne	neç (*corr. di* 1ª m.)
? *10	comptis est	comptis ẽ	est *omesso*: **Ber.**[2] *l'aggiunse marginalmente col medesimo inchiostro; un'*e *con altro inchiostro è aggiunta davanti a* veneranda (= eveneranda)
*14	decenter	decenter	decentior **Ber.**[2] decenter: *errore materiale? Forse in parte.*
21	pyerides	pierides	pierides
23	solenne	solemne	solemne (**Ber.**[1])
? *23	hoc sumet	*come* **V**	hoc summet (*errore di svista? Il cod. Lips.* sūmet, *l'ediz. vicent.* summet!)
24	vestro	ũro	nostro

Il nostro *di* **Ber.** *è lezione comunissima che potrebbe essere derivata da un errore di lettura del compendio quale è nell'***Ambr.**

Concordanze dei tre codici: 11 tyria (*È da notare che il* tytia *di* **V** *è corretto manifestamente su* tyria) — 14 mille hunc (**Ambr.** hũc: **Ber.**[2] *marg.* hic) — 16 succis — 19 littore — 23 hoc sumet (*v. sopra: in* **Ber.** m *di 1ª mano*?) — 24 thoro.

IV 3

Rubr.	cherinthum dimittenda	cherintum dimictenda	cherintum dimittenda
4	incolumem	incolumem	incolumen (*svista nella scrittura*)
5	adducit (**V**[2] abducit)	abducit	abducit

	V	Ambr.	Ber.
7	est? quae	est? *rasura* quae	est? o que

Davanti al quae *in* **V** *e* **Ambr.** *vedo un segno d'interrogazione. Lo spazio libero di* **Ambr.**, *e precisamente la rasura corrispondente allo spazio di una a due lettere, dice che era stata copiata da* **O** *una parola che aveva probabilmente il segno di espunzione, del che si accorse lo scriba di* **Ambr.** *solo dopo che l'aveva copiata. Lo stesso errore fece* **Ber.** *Comunque è certo che* o *si legge in parecchi codici, in altri* aut.

Concordanza dei tre mss.: 2 umbrosia (**V**[1], *coll'* a *cancellata da* **V**[2]): **Ambr.** *e* **Ber.** umbrosi — 3 pectore — 18 da — 19 tunc — 20 caste (**Ber.** *errore di scrittura:* caster) — 20 tange — 21 et — 21 subrepit — 22 feras (**Ber.** ferras).

IV 4 *Rubrica identica*

	V	Ambr.	Ber.
7	quicquid	quidquid	quicquid
8	rapidis	rabidis	rabidis
8	evehat	eveat (**Ambr.**[2] evehat)	eveat (**Ber.**[2] evehat)
13	vovet	vovet (**Ambr.**[2])	movet

Osservo che vovet *di* **Ambr.**[2] *è manifestamente corretto su* movet *e che pertanto la lezione* movet *era già in* **O**, *scritta poco chiaramente. Non si tratta dunque, in* **Ber.**, *di lezione interpolata.* Movet *si trova in parecchi mss.*

	V	Ambr.	Ber.
17	at	ac	ac

be (2ª m.)

Concordanza dei tre codici: 2 phebe (phe *in* **V**). *In* **Ber.** *la parola è scritta chiarissima. In* **Ambr.** *le parole* phebe superbe coma *sono scritte in carattere più piccolo, e su rasura, da altra mano* — 6 pallida — 8 in (**Ber.** im) — 12 numeranda — 16 *sgg. Ordine dei versi identico, contrariamente ai codd. deteriori* — 24 laetus.

IV 5 *Rubrica identica*

	V	Ambr.	Ber.
9	tura	thura	tura (h 2ª m.)
15	cathena	catena	cathena
?*16	post hac...	post hac...	post hac que (*il* que *corretto marginal. da* 2ª m. *in* quam)

In **V** *lacuna di 3 lettere, sopra cui* nos *interlineare. In* **Ambr.** *lacuna analoga senza correzione. Vedi a proposito* Belling, *Prolegg., p. 72 e*

Cartault, *ediz. di Tib., p. 252. A giudicare dalle traccie di scrittura che ancora si vedono nella rasura di* **Ambr.**, *mi sembra che la prima delle 3 lettere cancellate possa esser stata il* q, *perché la rasura scende sotto la linea* (1); *se ciò è vero, il* que — *erroneo* — *di* **Ber.** *si spiega con la tentata trascrizione dall'originale comune di una parola illeggibile, oppure colla copia tal quale di un errore. Per altro il* Wunderlich *dà la lezione* que *come appartenente ad un Vossiano e la* quam *come di un Colbertino e d'altri. Così vedo anche nell'ediz. dell'* Huschke (*2, 633*).

	V	Ambr.	Ber.
?*18	hic (V² haec)	hic	haec (*come* G)
20	refereṭ	refet	refer

Ber. *omise il segno di abbreviazione e per svista fece un* refer.

*20	clam ve	clam ve	clam ne
	palam ve	palam ve	palam ve

Errore di trascrizione in **Ber.**? *È poco probabile.*

Concordanza dei tre mss.: 1 est (*veramente in* **V** e St *con l'*e *piccola iniziale di guida al miniatore, scritta di 2ª mano; ma la 1ª mano in casi consimili omette abbastanza di frequente nei mss.: anche in* **Ber.** *la* e *come le iniziali minuscole dei componimenti sono spesso scritte da altro mano che non da quella del copista*) — 3 puellis (*osservo tuttavia che in* **V** puellis *è corretto su una prima scrittura* puellae) — 4 dederant — 6 ne de (*propriamente la concordanza è della* prima manus *o almeno della prima intenzione di essa. In seguito* ne *fu cancellato in* **V** *e in* **Ber.** *e l'originale comune doveva avere* ne) — 7 per te — 9 mane — 10 valet — 11 suspiret — 12 tunc — 17 tutius.

IV 6

Rubrica:	recomendatio	recomendatio	recommendatio
	nel resto identica.		
?*8	sed	sed	si (**Ber.**² sed)
11	deprendere	deprendere	deprehendere (*ortografia comune a parecchi codici*)
15	praecipit	praecipit	praeepit *errore di scrittura*

(1) *Il* Belling, *Quaest. Tib., p. 20, osserva:* in rasura quae est inter *hac* et *soluisse*, 'nos' scriptum non fuisse liquet, sed quid fuerit e vestigiis colligere non potui.

	V	Ambr.	Ber.
20	esset	esset	assit

Forse il copista di **Ber.** *trovò* assit *in una correzione interlineare o marginale del suo esemplare. Pare abbia cominciato a scrivere qualcosa di diverso; poscia rase e scrisse* as *su rasura. Ne venne un* assit *in luogo di* esset. *L'*a *manca dei filetti e non è scritta di prima intenzione, se pure è della medesima mano. L'inchiostro non dice nulla. In molti mss. si legge* adsit. **G** *ha* esset.

20 *Dopo questo verso in* **Ambr.** *segue, senza alcun intervallo, il primo verso del carme seguente:* Tandem, *ecc. Poi viene il titolo della nuova elegia, poi un intervallo di due righe e di nuovo il verso:* Tandem, *ecc. La cosa è notata anche in* Postgate (*ediz. Tib., 1914*); *aggiungo che ciò non avvenne in* **Ber.** *e nemmeno in* **V**.

Concordanza dei tre codici: 1 turis (**Ambr.** thuris, **Ber.** thuris) — 5 orandi — 6 occulte (**Ber.** oculte) — 7 ne nos — 9 ullae — 10 cuidam — 13 que *omesso* — 14 sic — 15 optat (**Ber.**[2] quid optet: *correzione interlineare*) — 16 sua — 19 si — 19 veniet.

IV 7			
1	pudore (*l'*e *ha l'occhiolo chiuso, ciò che è ben raro in questo codice. La mano del copista fu incerta tra* e *ed* i*?* **G** *legge* pudore)	pudori *la 1ª volta, la 2ª* pudore, *ma ci vedo un'evidente correzione della stessa prima mano su* pudori	pudori *questa era la lezione dell'originale comune*
3	cyterea	cytherea	citherea

Concordanza dei tre mss.: Titolo identico — 2 magis — 6 suam — 8 me — 8 id — venio (**Ber.**[2] *marg.* nemo): *svarione dell'originale.*

IV 8			
Tit.	Sculpicia Messalae	*come in* **V**	Sulpicia Messale
6	neu	neu	non (*anche in* Cuiacianus)

(*Nel resto tutto il verso è identico, ciò che è notevole*).

Concordanza dei tre codici: 4 aretino (*il segno di raddoppiamento sull'*r *in* **Ber.** *è di* 2ª mano) — 5 messala — 8 quamvis (**Ber.** quanvis) — 8 sinis.

	V	Ambr.	Ber.
IV 9	Ad theoratum de natali die (1)	Ad Thoratum de natali die	Ad Thorratum de natali die

*Evidentemente il segno che è sull'*r *di* **Ambr.**, *e che doveva essere nell'originale comune, fu interpretato come segno di geminazione dell'*r *in* **Ber.**

Concordanza dei tre mss.: 2 non sinet — 2 tuo.

	V	Ambr.	Ber.
IV 10	*Tit.* De Sculpicia	De Sculpicia	De Sulpicia
3	quasillo (?) (*per altro* quas *è abbastanza separato da* illo *nella scrittura*)	quasillo	quas illo *scritte separatamente, come doveva essere nell'originale (cfr. la lez. di* **V**), *e sopra la* 2ª manus *avverte*: canistro
5	soliciti	sollicitі	sollicitі
6	thoro	thoro	thora (sopra: o) (*svista nella scrittura*)

Concordanza dei tre codici: 1 mihi (**Ambr.** m, sopra: i) — 6 nec — 6 credam — 6 causa.

	V	Ambr.	Ber.
IV 11			
3	ah	ha	ha (**Ber.**[2] ah)
5	ah	ha	ha (**Ber.**[2] ah)

Concordanza dei tre codici: Rubrica identica — 1 placitura — 5 quid (**Ber.**[2] quod *e sopra* si) — 6 laeto (**V** laeçto) — ferre (**Ber.** ferra, sopra: e: *errore di svista*).

Seguono immediatamente senza intervallo, in tutti e tre i codici (come del resto in molti altri, tra cui il **G**), *i tre distici di IV 12 (= III 18)*: Ne tibi sim *ecc., quegli stessi che* **Ambr.** *e* **V** *riportano per intero dopo III 6 e di cui, come abbiamo visto,* **Ber.** *riporta in quest'ultimo luogo solo il primo distico e l'esametro del secondo.*

---

(1) *Lo* Heyne *cerca di spiegare il* theoratum *con un* tetrastichon (*Ediz. Tibull.*, Torino, 1821, *2, 406*).

IV 12		V	Ambr.	Ber.
1	1ª *volta*	ne	ne	ne
	2ª „	nec (**V**^{2} ne)	nec	ne
	1ª „	sit	sit	sed (*svista?*)
	2ª „	sim (**V**^{2} sit)	sim	sim
	1ª „	tam	tam	tum (*svista?*)
	2ª „	iam	iam	iam
2	1ª „	videor	videor	videor
	2ª „	videas (**V**^{2} video)	videas	videas

IV 13 *Rubrica identica*

	V	Ambr.	Ber.
15	hec	hoc	hoc
16	sola	sola	sola est: *l'*est *cancellato con un trattino: il copista aveva in mente l'*est *che segue*
*17	credo	credo	cedo (*come in* **F** *e* Cuiacianus)
19	ures	ures	aures

Concordanza dei tre codici: 3 modo — 5 posses — 8 ipse — 16 tibi — 17 heu heu — 18 prodeat — 21 faciam — 23 confidam (*notevole*).

IV 14 *Titolo identico. Identità più notevoli*: 2 me — 3 facta. — *Immediatamente dopo segue:*

	V	Ambr.	Ber.
	Epithaphium Tibulli	Epitaphyum Tybulli	Epytaphium Tybulli
3	elegis	elegis	elegos

Può darsi che elegos *sia una svista (lo scriba può aver pensato ad* elegos molles), *ma in* **Ambr.** *l'*i *pare scritto su rasura da altra mano. Se ciò è vero, la svista poteva essere nell'originale comune. Ricordo tuttavia la variante* elego. *Il correttore del codice padre di* **Ber.** *potrebbe avere scritto un* o *su* elegis *ed espunto l'*s, *così:* elegi$\overset{\text{o}}{\text{ṣ}}$: *il copista corresse l'*i, *ma non cancellò l'*s. *Sennonché* elego *è variante molto rara ed è più probabile la prima ipotesi.*

	V	Ambr.	Ber.
4	aut	aut	ut

scambio comunissimo: errore di lettura?

Concordanza dei tre mss.: 1 virgilio — 2 iuvenem (*propriamente* **V**^{1} *ha* iuvem, *ma è errore materiale del copista, il* ve *è aggiunto sopra di 2ª mano*) — 3 molles (*in* **Ber.** *è scritto su rasura, pare dalla 1ª mano. Del resto in* **Ber.** *non ho notato correzioni di 2ª mano su rasura*).

Il carattere più tipico di *Ber.* è la fedeltà all'originale comune. Abbiamo già detto e cercato di dimostrare, ai singoli luoghi esaminati, che *Ber.* non è copiato su *Ambr.* e nemmeno da *V*, né direttamente né indirettamente per via di esemplari intermedi. Esso adunque deriva da *O* o da un codice a questo parallelo e similissimo, sia per via diretta, sia per mezzo di apografo che conservava errori tipici dell'originale, corretti in *Ambr.* e *V* (1). Pertanto la lezione di *Ber.* concordante con *Ambr.* e *V*, o soltanto con *Ambr.*, conferma lo stato del comune originale. Nessun codice di quelli finora esplorati è più fedele di *Ber.* alla tradizione rappresentata da *Ambr.* e *V* (2).

Il *B* del Lachmann (*Parisinus*, del 1423), strettamente imparentato con *Ambr. V*, differisce da *Ber.* anzitutto perché è probabilmente copia di *Ambr.* (3), poi per aver accolto un numero notevole di interpolazioni, alcune delle quali, forse del tutto sue proprie, sono certo poco felici (4).

Pur prescindendo da queste ultime, troviamo non di rado la lezione di *B* inquinata da interpolazione poco sagace. Così *Semeles* III 4, 43 per *Semelae* di *Ambr.*, *V* e *Ber.*; II 1, 33 *B equitanae* per *aquitanae*; I 1, 37 *B capiti* per *capite*; II 5, 108 *B ipsa* per *ista*; IV 1, 19 *B descenderit* per *desederit*. In IV 1, 115 *B* legge *gaudet*, mentre *Ambr.*, *V* e *Ber.* hanno *audet*; l'*ac* di *Ambr.* e *Ber.* in I 3, 63 corrisponde ad *hac* di *B*, ecc.

Si comprendono bensì l'*uvam* di *Ber.* (*V*[1] *unam* con *v* sovrascritto) in I 10, 21 e il *vota* pur di *Ber.* e di *V* in I 5, 16, di fronte rispettivamente ad *uva* e *voca* di *Ambr.* pedissequamente seguito da *B*, ma sono invece caratteristici alcuni emendamenti di *B*, tra cui

(1) Corretti talvolta, si capisce, e precisamente corretti ora in **Ambr.**, ora in **V**, ora in entrambi i codici.

(2) Abbiamo visto come anche le rubriche di **Ber.** siano assai simili a quelle di **Ambr.** e **V**, e soprattutto di **Ambr.**, con cui hanno in comune anche errori dei più tipici.

(3) Cfr. R. Leonhard, *De codd. Tibullianis*, o. c., cap. *De codice Parisino B*, p. 31 sgg., e il 2° capit. dell'Illmann, *De Tibulli codicis Ambr. auctoritate* (Halis Sax., 1886), dove sono discusse le ipotesi del Baehrens, del Rothstein e del Leonhard intorno al *Parisinus 7989*. Cfr. pure A. Cartault, *A propos du Corpus Tibullianum*, Paris, 1906, p. 475.

(4) Vedile registrate in Leonhard, l. c., e meglio ancora in Illmann, o. c., p. 45. Consulta pure Maurenbrecher, *Philol.* 55, p. 444 sgg.

IV 1, 148 *se offerret in armis*, per giustificare il manifesto errore di *Ambr.* in *sese offerret armis* (dittogr. per *offeret*).

Del resto, pur rimanendo nel campo delle lezioni interpolate, ma non sue esclusive, o quasi, si potrebbero citare non pochi casi in cui *B* si allontana da *Ambr.* e *Ber.* Limitiamoci ad alcuni soltanto: II 3, 78 *Ambr.* e *Ber. iuvet*, *B* e *V iuvat*; III 3, 21 *Ambr.*, *V* e *Ber. homini*, *B hominum*; I 4, 29 *Ambr.*, *V* e *Ber. te perdit*, *B deperdit.* Notevole il *iuventa* di *B* in I 8, 41, da spiegarsi senza dubbio non in favore di un *iuventa* originario in *O*, ma col fatto notato dal Leonhard (l. c.) che la copia di *Ambr.* da parte di *B* è posteriore alla 2ª *manus* di *Ambr.*, mentre (ciò che è notevolissimo) *Ber.* non conosce la 2ª *manus* di *Ambr.*, da cui appunto fu segnato un puntino d'espunzione sotto l'*s* (*iuventaṣ*) (1). Si aggiunga ancora il cattivo *volet* di *B* in I 4, 56 contro il *velit* di *Ambr.*, *Ber.* e forse di *V*¹, e il *si tibi ne de nobis* di IV 5, 6 col *ne* omesso in *B* di fronte ai dubbi di *V* e di *Ber.* che scrissero, poi espunsero (di 2ª *manus*?) il *ne*, conservato invece senza cancellature in *Ambr.*

Si potrebbe tuttavia ricordare qualche caso, ma più raro, in cui *B* conserva la lezione di *Ambr.*, quando *Ber.* si discosta da *O*; per citarne un esempio, in III 1, 15 *B* ha *parvos* mentre *Ber.* lì accoglie il ragionevolissimo ed intuitivo emendamento *per vos.*

In complesso *B* è un codice di cui si può fare abbastanza a meno (2), data la presenza di *Ambr.* Non aggiunge nulla di nuovo a quanto sapevamo il *sentita* di *B* in I 8, 51: così si legge infatti in *Ambr.*¹ (e in *V*): il *sentica* di *Ber.* ci dice invece chiaro che l'originale era appunto così e che lo scriba di *V* lesse *sentita* perché *sentica* non aveva senso e *sontica* non era un vocabolo a lui famigliare; che analogamente accadde allo

---

(1) Ricordo la mia osservazione, fatta di sopra a suo luogo, che anche in *V* si legge *iuventas*.

(2) In questo senso concludeva anche E. Hiller, ediz. Tibulliana, 1885 (*Praef.* VI nota). Le cosiddette lezioni buone di *B* non hanno valore di sincerità; delle tre tanto decantate: *firmaverat* (II 5, 23), *more* (IV 1, 73), *mihi* (IV 13, 3), la prima è inutile correzione di *formaverat*, la seconda e la terza sono emendamenti comuni ad altri codd. Il **Ber.** qui coincide con **Ambr.** e **V.**

scriba di *Ambr.* al primo momento, finché una buona ispirazione o un consiglio di correttore esperto suggerirono la retta correzione dell'originale in *sontica.*

Le differenze tra *A* del Lachmann, l'*Eboracense* del 1425 (ora perduto, che Hiller segna *y*) e il *Ber.* sono meno facili da notare per la conoscenza incerta, scarsa e indiretta che noi abbiamo di *y* attraverso la collazione del Heinsius (1).

Comunque, trattandosi di un codice molto simile ad *Ambr. V*, le cui lezioni, secondo il giudizio di alcuni critici, meritano di essere tuttora eventualmente considerate (2), non credo inutile far seguire un breve confronto con *Ber.*, dove indico semplicemente con 3 il consenso di *Ambr.*, *V*, *Ber.*, mentre alla lezione dell'Eboracense non premetto di solito alcuna indicazione, né sigla, né numero.

I 1, 43 parva satis mensa - *vel* - parva seges satis est, satis est req. lecto. **Ambr. Ber.** *come la seconda delle lezioni indicate* (3) — 44 **y** *ebbe il verso*; **Ber.** *omise* — 54 exiles *vel* hostiles: 3 exiles = 2, 25-26 *forse mancava il pentametro dell'Aurispa coll'esametro seguente: in* **Ber.** *ci sono* — 52 *probabilmente* Hecates: 3 Hecatae — 71 possum: 3 possim = 3, 4 mors precor atra: 3 mors modo nigra — 13 nusquam *vel* quicquam: **Ambr. Ber.** numquam, **V** nusquam — 93 tunc precor: 3 hoc, ψ hunc = 4, 22 freta longa: **Ambr. Ber.** freta summa, **V** summa freta = 5, 27 vitibus *vel* fructibus: **Ambr. Ber.** vitibus (**G V** fructibus) — 76 nat (*come* **G**): 3 nam = 6, 50 invitus: 3 eventus — 77 ast (*come* **V G**): at **Ambr. Ber.** = 7, 3 Equitanas: 3 Aquitanas — 4 Atax *vel* Arabs: 3 Atax — 6 evictos: **Ber.** evinctos (*v. Nota 1ª, p. 1243*) — 35 sopores: 3 sapores — 42 compede *vel* cuspide: 3 cuspide — 42 pulsa *vel* victa: 3 pulsa — 57 nec: 3 ne (*v. Nota 1ª, pag. 1244*) — 61 e *manca come in* 3 = 8, 2 levia (*come* **Ambr.**: *errore*): **V Ber.** lenia

(1) Consulta Belling, *Quaest. Tibull.*, pp. 21-25; Maurenbrecher, o. c., p. 447 sgg., il primo per la collazione dell'Heinsius, il secondo per considerazioni su *E* (*y*).

(2) Cfr. Schanz, *Gesch. d. röm. Litt.*, München 1911³, 2, 1, 241.

(3) Non è facile risolvere il dubbio se nelle lezioni doppie la prima corrisponda alla *prima manus*, e ciò perché in alcuni casi l'Heinsius nomina espressamente la prima e la seconda mano. Il Belling rimane esitante. A me sembra che il dubbio sia stato proprio dell'Heinsius, che non indicò esplicitamente quando non credette di poter indicare.

— 14 colligit (*come* **V**): **Ambr. Ber.** colligat — 30 foveas (*con* ψ) foveat 3 — 38 fingere: 3 figere — 43 tum mutatur: 3 tunc mutatur — 51 rustica causa; $\mathfrak{y}^2$ sontica (*come* **G**): **Ber.** sentica (*v. Nota 1ª, pag. 1245*) = 9, 25 leva: 3 leve — 75 huic (*con* ψ): hunc 3 — 79 victum: 3 vinctum = 10, 21 libaverat *vel* portaverat: 3 libaverat — 33 arcescere: 3 accersere — 41 ut (*come* **V**): **Ambr. Ber.** at — 51 ipso *vel* ipse: 3 ipso.

II 1, 22 ingerat (*con* **V G**): ingeret **Ambr. Ber.** — 27 formosos: 3 fumosos — 33 Equitanae: 3 Aquitanae — 48 annua *vel* aurea terra: 3 annua — 54 ornatus: 3 ornatos — 66 tela sonat latere *vel* pectine tela sonat: *1ª lezione in* 3 — 90 nigra *vel* vana: 3 nigra = 2, 4 a terra: 3 e terra — 9 Cornute *vel* Cherinte (*v. Nota 1ª, pag. 1245*) — 21 natalis anus: **Ambr. Ber.** avis (*manca* **V**[1] *fino a* 3, 49) = 3, 14 *a*: *colmata la lacuna con due pentametri* (*vel...*): *in* **Ambr.** *e* **Ber.** *non c'è supplemento* — 15 texta est de vimine: **Ambr. Ber.** detexta est vimine — 27 phiton (*con* **G**): **Ambr. Ber.** phito — 43 tumultus (*con* ψ): **Ambr. Ber.** tumulti — 51 orbem: 3 urbem — 55 illi sunt: 3 sint — 59 quem *vel* quae: 3 quae — 60 gypsatos *vel* luxatos: *la prima lezione in* **G**, **Ambr.** *e* **V** bipsatos, **Ber.** bipsata (*v. Nota 1ª, pag. 1250*) — 62 resolvat: 3 persolvat — 75: *è colmata la lacuna con un esametro che è dato in doppia forma: 3 manca il supplemento alla lacuna* = 4, 2 paterna, man. 2ª, *come* **G**: 3 pater ve — 17 nec qualis: 3 equalis — 23 donis: 3 fanis — 56 gerit *vel* dedit: 3 gerit = 5, 6-101 *manca* **Ber.**: *notevoli divergenze ha* $\mathfrak{y}$ *da* **Ambr.** *e* **V** *in* 23 fundaverat *con* ψ (*per* formaverat), 27 umbra (*per* umbrae), 68 grataque quod monuit (*per* grata quod admonuit), 74 praetimuisse (*per* praecinuisse) — 102 venit: 3 velit — 110 faveo morbo (*come* 3) *vel* foveo morbum (ψ) = 6, 2 si: 3 sit — 16 si licet (*come* ψ): 3 scilicet — 17 dura: 3 dira — 47 duro: 3 diro — 47 lumine: 3 limine.

III 1, 11 protexit (*con* **Ambr.** *e* **V**): **Ber.** protexat — 21 meritum (*con* **Ambr.** *e* **V**): **Ber.** nuncium = 2, 15 rogate *vel* precatae: 3 rogatae = 3, 17 in Ericteo: 3 in erithreo — 23 sed mihi: 3 sit mihi — 24 et *con* **Ambr.** *e* **V**: **Ber.** at = 4, 3 vanum: 3 vani — 9 et varium (m. 2ª vanum) ventura (*vel*: metuens) hominum genus omnia (*vel*: omina) noctis: **Ambr. V** natum maturas, **Ber.** natum naturas, **G** vanum ventura hominum, **G**[2] metuens: **Ambr.** omina, **V Ber.** omnia — 33 et quam: 3 et cum — 45 *probabilmente* Semeles: 3 Semelae — 69, 70 ne ne: 3 nec nec — 87 non consanguinea: 3 nec c. = 5, 11 sacri-

legos (*come* **G**): 3 sacrilegis — 11 admovimus (*come* **G**[2]): 3 amovimus — 29 at nobis: 3 atque nobis — 29 numina nymphae: **Ambr. V** numina, **Ber.** lumina; **Ambr. Ber.** lymphe, **V**[1] ninphae = 6, 11 recuset (*con* ψ): 3 recusat — 19 in illo: 3 in illis — 30 facta (*come in* **Ber.**): **Ambr. V** fata — 49 veneri, m. 2ª: 3 inerit — 58 temperat: 3 temperet.

IV 1, 1 quanquam (*come* **Ambr.** *e* **V**): **Ber.** si quam — 1 cognita *vel* vivida: 3 cognita — 18 dictat *con* **Ambr. Ber.**: **V** dicat — 19 descenderit: 3 desederit — 24 quocunque: 3 quodcunque — 39 namque tibi *vel* quisque tibi, ma. gerit castrisve fo.: **Ambr. V** quique tibi... cartis ne; **Ber.** quisque tibi... cartis ve — 40 *manca il verso, come in Beriano!* — 87 et **Ambr. V**, **Ber.** ut — 91 et **Ambr. V**, **Ber.** at — 94 levius *vel* melius *vel* brevius: 3 brevius — 95 parma *con* **Ambr. V**: **Ber.** pervia — 104 dexteraque *vel* dexterque: 3 dexteraque — 110 et Arpinis (*con* **Ambr. V**): **Ber. G** et Alpinis — 113 renovaverat m. 1ª, *con* **Ber.** (renoverat **Ambr. V**) — 115 validusque m. 2ª: 3 validisque — 139 tetereo, m. 2ª tereo: 3 tetereo (1) — 145 Patheus *vel* Padus: 3 Padaeus — 158 colori: 3 calori — 160 noctes: 3 luces — 165 rigentem *come* **V** (**Ambr. Ber.** rigentes) — 171 et laeta (*con* **V**): **Ambr. Ber.** lenta — 184 dictantes: 3 ditantes — 199 magna: 3 magni — 202 inhaeret: 3 inerret — 203 statuunt (**Ambr. V**): **Ber.** statuent = 2. 19 litore: 3 littore = 4, 15-24: *versi nel medesimo ordine di* 3 = 5, 16 nos (*come* **G**): **Ber.** que. *Per* **V** *ed* **Ambr.**, *vedi sopra* — 20 clamve palamve (*come* **Ambr. V**): **Ber.** clamne = 6, 19 adveniet (*come* **G**[2]): 3 veniet = 10, 1 tibi: 3 mihi = 11, 5 at: **Ambr. Ber.** ha, **V** ah = 13, 3 te iam: 3 iam te — 15 nec: **Ambr. Ber.** hoc, **V** haec = 14, 3 carmina m. 1ª: 3 crimina = Epitaphium: aeque: 3 aequa.

L'Eboracense *y* sembra pertanto che sia stato molto più interpolato di *Ber.* Poco importa per noi se parecchie lezioni sue, pur tra le poche che conosciamo, compaiano anche in *G*, dacché non possiamo accogliere la tesi del Maurenbrecher (2). Notiamo invece che le interpolazioni di *y* non si trovano, in

---

(1) Vedi meglio sopra nella collazione, al luogo indicato.

(2) L. c., pp. 437-47. A pp. 447-8 il M. studia la derivazione di lezioni speciali di *E* (= *y*) per ricostruire poi il solito 'stemma', che non persuade di più dei molti già proposti. Sarà tempo di pensare a questo quando avremo studiato meglio i molti codici Tibulliani che ancora si conoscono del tutto imperfettamente, e i loro reciproci rapporti.

massima, nel Beriano, come non si trovano in quest'ultimo i supplementi alle lacune dopo II 3, 14 *a*, dopo *ib.* 74, supplementi che l'Eboracense ha, mentre d'altra parte non si può dire con certezza se avesse o no dopo I 2, 25 il noto verso dell'Aurispa, che si trova nel Beriano.

La presenza in entrambi i mss. del verso 112 *a* del Panegirico e l'omissione di *ibid.* 40, e forse anche in *y* della *Vita Tibulli*, non sono dati del tutto trascurabili per una certa qual speciale affinità dei due codici, che non possiamo per altro stabilire neppure con qualche approssimazione.

In complesso la lezione di *y* appare sensibilmente più inquinata che non quella di *Ber.*, di cui può rendere minori servigi per la ricostruzione della forma sincera del testo.

Come dicevamo, la tradizione dei mss. completi è deturpata da lacune, di cui sono innegabili quelle che si riferiscono alla omissione di un solo esametro o di un solo pentametro. In *Ambr.* e V^1 esistono quattro lacune di un verso dopo I 2, 25, II 3, 14 *a*, e prima di II 3, 76 e III 4, 66; nei codici Lachmanniani sono invece tutte colmate (1). Tale interpolazione si nota nel codice *P* illustrato dal Columba (2), nel codice di Lovere illustrato dal Malagoli (3), nel Trivulziano 787 di cui diede notizia il Sabbadini (4), e in genere in tutti i codici del 400. Può essere pertanto un caso singolo quello del Guarneriano (5) sopra citato, che pure ha molti errori e numerose interpolazioni, dove non troviamo supplementi alla prima lacuna.

Il *Ber.* invece ha accolto nel testo soltanto il supplemento, attribuito all'Aurispa, della prima lacuna, quello stesso che com-

---

(1) Solo di *A*, l'Eboracense, di cui abbiamo parlato dianzi (*y* dell'Hiller), non si può dire questo con certezza.

(2) Il codice è illustrato in *Rassegna di Antichità classica. Parte Bibliografica*, 1898, pp. 65-80.

(3) G. Malagoli in *Studi ital. di Filol. classica*, V (1897), pp. 231-40: *Un codice ignorato di Tibullo.*

(4) In *Riv. di Filol.*, 1899, pp. 402-5.

(5) La notizia del Guarneriano è data dal Leonhard (l. c., 2° cap.) in modo inesatto: " *unus For. Guarnerianus unam alteramve lacunarum intactam reliquisse videtur* ". Si tratta solo della prima, come vedo nell'ediz. del Volpi (1749). Vedi anche Illmann, o. c., p. 9.

pare in parecchi codici e che poteva essere già nell'Eboracense, mentre il *B* e il *Vat.* 2794 — il codice che colma la lacuna di V^1 da II 2, 20 a II 3, 49 — compirono diversamente, e diversamente ancora i codici *c, d, e*, cioè il Wittiano, il Datiano, l'Askewiano del Lachmann, tutti e tre della seconda parte del 400 (1). L'unico codice tra i finora esplorati che non colmi di prima mano le lacune sopraindicate, dopo *Ambr.* e *V*, è il *G*, troppo debole argomento in favore dell'importanza del ms. stesso (2); valore soltanto relativo, tanto che il Leo ha potuto giustamente concludere: *ceterum magis origine et adfinitate cum renatarum litterarum studiis hunc codicem conspicuum esse quam auctoritate lectionis apparet* (3).

La questione del *G* dovrebbe ormai essere esaurita. Esaminandolo attentamente, riesce manifesto ch'esso è ritoccato in molti luoghi e che accolse da varie mani esperte correzioni anche su rasura (V. sopra osservaz. a II 1, 36 e 60), correzioni che non derivano certo tutte dagli *Excerpta Parisina*, mentre poi la lezione buona di *G* di fronte ad *Ambr. V* è in massima effetto di facile congettura (4). Si capisce che in *G* non compaiano alcune lezioni erronee che appaiono invece qua e là in *Ber.*, dove non sono certo dovute a congetture, ma sono evidentemente

(1) *Securum in tenebris me facit esse venus* compare anche in V^2 (v. sopra) e nel *Codex Romanus vetustissimus*, le cui lezioni furono trascritte in margine all'Aldina del 1515 da Ottaviano Ferrari (1518-86). Il codice è della metà del 400. Vedi in proposito Sabbadini, *Riv. di Filol.*, 1899, pp. 402-5. L'elenco completo delle varianti attribuite a questo codice è dato in *The classical Review*, 1898, p. 446, da W. M. Lindsay. Di qui vedo che il codice ha interpolazioni ben più frequenti che non il Beriano, parecchie concordanti con *G*.

(2) Il Rothstein, o. c., p. 68, va forse troppo oltre quando suppone che chi copiò il *G* volesse ad arte dar valore d'antichità al suo testo conservandogli le lacune intatte, come ad arte usò una scrittura arcaicizzante.

(3) Fr. Leo in o. c., *Praef.* 11.

(4) Il *G* accoglie emendamenti al testo Tibulliano correnti ai tempi in cui fu scritto. Esso dev'essere alquanto posteriore all'epoca di cui lo aveva creduto il Baehrens (V. Leo, *Praef.* citata, 1), cosicché confrontando parecchi cdd. del secolo XV con *G*, ove questi concordino col *G* in parecchie lezioni, non è esatto dire che siano interpolati su *G*. Comprendo che alcuno potrebbe pensare al codice padre di *G*... (però meno emendato

copia di un errore dell'originale. Il *Ber.* è intanto l'unico tra i codici finora esplorati, al di fuori di *Ambr.*, *V* e *G*, che non abbia supplementi alle 4 lacune indicate, eccetto alla prima, dove un verso ormai celebre ai tempi della composizione del ms. sdrucciolò nel testo da una nota marginale del suo esemplare diretto.

E solo per insistere sul fatto dell'indipendenza di *Ber.* da *Ambr.*, basterà ricordare che in II 3, 75, dove cadde l'esametro, *Ambr.*[2] scrive marginalmente in una sola riga *O ût* (= *utinam*) *veteri peragrantes more puellae*, supplemento di Francesco Filelfo che compare anche altrove, ad esempio nel Trivulziano 787 sec. XV (il Sabbadini, l. c., riporta: in margine con l'aggiunta *Seneca supplevit et Philelphus*). *Ber.* non vide certo *Ambr.*, e non supplì né aggiunse supplemento di *2ª manus.* Ora *Ber.* fu composto quando la *2ª manus* di *Ambr.* aveva già scritto (1). La tradizione di *Ambr. V* è conservata da *Ber.* anche nell'*aquitanae* di II 1, 33, dove i codd. Lachmanniani hanno tutti *equitanae*, e nel caratteristico *semele*, già citato, di III 4, 45, dove i Lachmanniani dànno *semeles*, *G. semelis*, i *Deteriores* in genere *semeles.*

Inoltre è da osservare quanto segue:

Ber. non ha nessuna coincidenza speciale con gli *Excerpta Frisingensia*; solo in I 1, 63 leggiamo *duro* che è pure nei *Fr.*, ma nel 64 *iuncta* con *Ambr. V*, di fronte al *vincta* di *Fr.*

Nessuna particolare interpolazione dagli *Exc. Paris.* entrò nel Beriano. Infatti solo in tre passi noi li troviamo coincidenti e precisamente in:

II 1, 38 *glande* (*Ambr. V grande*: *G*[2] *V*[2] *glande*),

IV 1, 84 *nervos* — come anche *G* (*Ambr. vernos, V nernos, ψ cervos*).

IV 1, 87 *ut* (*Ambr. V*, con *G*, *et*),

---

del figlio!), o magari a quel manoscritto di " tradizione più pura " da cui lo scriba di *G* avrebbe preso un " grande numero " di lezioni, come suppose il Maurenbrecher, *Tibullstudien*, in *Philologus*, 55 (1896), p. 443, ma sono ipotesi che hanno ormai fatto il loro tempo.

(1) Cfr. Aem. Baehrens nella sua ediz. Tibulliana, Lipsiae, 1878, p. vii. Del resto che *Ber.* non sia copia nemmeno indiretta di *Ambr.*, abbiamo dimostrato di sopra.

ma è da osservare che *grande* era un vero e proprio errore di scrittura e che la correzione *glande* s'imponeva da sé: quanto al *nerros*, esso può essere una lettura diretta dell'originale, da cui né *Ambr.* né *V* avevano ricavato nulla di meglio: l'interpolazione vera è il *cervos* di ψ. Finalmente in IV 1, 87 non è esclusa la possibilità di un errore di trascrizione.

E nemmeno col *Fr. Cuiacianum* non troviamo lezioni rispondenti nel nostro codice. Solo in IV 13, 17 in entrambi si trova *cedo* rispondente al *credo* di *Ambr. V*. Sennonché qui la lezione di *O* è derivata da una confusione dello scriba, confusione assai spiegabile (V. Cartault, ediz. Tibulliana, al passo indicato), cosicché *Ber.* può aver evitato l'errore.

Nessuna speciale concordanza non v'è neppure tra *Ber.* e *G*. Il comune *cartisve* di IV 1, 39 compare in parecchi codici contro il *cartis ne* di *Ambr. V*, evidentissimo svarione (davanti a *forore*!), per mala lettura di *n* per *v*, mala lettura che *Ber.* può aver evitato, e quanto all'*et Alpinis* di *Ber.* e *G* (IV 1, 110) contro *et Arpinis* di *O* (cfr. nel *Fr. Cui. arupinis*), si tratta di una congettura contro una congettura di *O*: erano nominate le *Alpes* nel verso antecedente! *Et Alpinis* è lettura del resto di parecchi codd.

Per converso si può citare un buon numero di luoghi dove *Ber.* è contro *G*, ad es.: I 1, 78 *Ber. dites despiciam*, *G despiciam dites*; III, 2 15 *rogatae*, *G precatae*; *ib.* 10 *supra*, *G super*, come *Ber.*[2]: I 5, 67 *iuncta*, *G victa*; II 1, 67 *inter agros*, *G interque greges*; II 4, 2 *pater ve*, *G paterna*; III 5, 11 *sacrilegis*, *G sacrilegos*; III 5, 13 *meditantis*, *G meditantes*; III 6, 8 *pulserit*, *G fulserit*; IV 1, 18 *dictat*, *G dicat*; in massima emendamenti di facile congettura del testo originale, che si vede copiato tal quale nelle lezioni di *Ber.*, emendamenti che in un terzo almeno dei luoghi addotti sono comuni a *G* e ad altri mss. Ma anche quando *Ambr.* difetta, *Ber.* non è sempre con *G*: così in IV 1, 169, dove *Ambr.* ha la lacuna di un vocabolo, *G* accoglie il *vertitur* di *V*, *Ber.* invece ha *labitur*.

Si avvera talora il caso di dissenso: una forma corretta in *Ber.* e *V* e scorretta in *Ambr.* Quale sarà stata la lezione del comune originale? Bisogna procedere con molta cautela. Se la correzione è tale da equivalere pressappoco ad un emenda-

mento di errore di scrittura per disattenzione, essa val poco per la ricostruzione dell'originale. La troviamo in *Ber.* (talvolta in *V*), ma la troveremo ripetuta in altri codici del 400 e spesso nelle prime edizioni a stampa. Poco male se non l'avessimo ritrovata, perché potremmo ricostruirla noi senza esitazione, dato che l'errore sia evidente e più naturale ancora la correzione. Che queste siano da chiamare interpolazioni vere e proprie, è lecito dubitare; certo sono ben diverse da libere interpolazioni con quel carattere di arbitrio nell'alterazione del testo, che si suole attribuire all'interpolazione umanistica. Non da quelle il critico può essere tratto in inganno. Ne abbiamo visti parecchi esempi e su di essi abbiamo richiamata l'attenzione. Dobbiamo ora ripetere che in *Ber.* sono relativamente assai poche e che la mano che le scrisse, forse marginalmente nel codice padre di *Ber.*, era molto prudente, diremmo perfino timida.

Quando *Ber.* conferma *V* contro *Ambr.*, dobbiamo credere che la sua lezione sia sempre congetturale? Cfr. I 8, 39 *iuvant quae* dei due primi contro *Ambr. iuvantque* (errore manifesto); II 3, 42 *ut* (*et Ambr.*, per manifesto errore di lettura); così in I 1, 29 *bidentes*, *Ambr. ludentes*, l'originale era poco leggibile (?) e in I 3, 12, *omina*, l'interpolazione sembra piuttosto di *Ambr.* (1). In I 5, 14 *deveneranda* di *Ambr.* sembra scritto in due parole, *de veneranda*, in *V*; *Ber.* conferma questa lezione non buona, ma di tradizione sincera; due versi sotto legge con *V* giustamente *vota* contro il *voca* evidentemente erroneo di *Ambr.* In I 10, 51 quando *Ber.* con *e lutoque* si avvicina all'*e lucoque* di *V*, tenta una correzione o copia meglio dall'originale che non *Ambr.* con *elutoque*? In ogni caso la correzione tentata è nella lettera *c* del *V*. Forma corretta è certo il *supposuisse* di *V* e *Ber.* in II 1, 42 di fronte al *suppotuisse* di *Ambr.*, ma è correzione dell'originale? Così si dica dell'*et* di II, 3, 68 omesso in *Ambr.*, ma che nessuno ci può dire se sia stato omesso nel comune originale. Correzione dell'originale sembra invece *orbem* di *V* e *Ber.* contro l'*urbem* di *Ambr.* II 4, 17, correzione facile e di evidente congettura. In IV 1, 170 l'*huic* erroneo di *Ambr.*

---

(1) Per *omina*, v. le osservazioni fatte sopra.

è letto *hinc* in *V* e *Ber.*, ma nessuno può dire ragionevolmente che si tratti di interpolazione. Simile è il caso di II 4, 55 *quicquid* di *V* e *Ber.* contro il *quidquam* di *Ambr.* Queste lezioni corrette non si può dire che derivino per congettura. Se gli errori di *Ambr.* che non troviamo in *V* e *Ber.* si ripetono qua e là in altri codici, non significa evidentemente nulla, perché copie di *Ambr.*, dirette ed indirette (o di codici ad esso paralleli) ce ne furono molte, ma neppure per converso si può pensare ad una affinità speciale di *Ber.* e *V*, quando numerosi sono i casi in cui *Ber.* sta contro *V* e non soltanto nelle lezioni buone, ma perfino in errori manifesti derivanti dall'originale comune (1).

Il codice *Ber.* differisce ancora da *Ambr.* e *V* perché alla fine, contro ai primi due, non reca la *Vita Tibulli.* Sennonché alla fine del foglio 40 *v* (numerazione segnata dalla Biblioteca, comprendente nel còmputo i 3 fogli mancanti), dopo le parole *Albii Tybulli liber explicit feliciter*, rimaneva solo lo spazio di 5 linee, mentre la vita accennata esigeva spazio maggiore, tanto più se si còmputi che le prime parole *Albius Tibullus*, in particolare la prima, sarebbero state assai probabilmente scritte in carattere più alto, e che ad ogni modo un certo spazio vuoto doveva rimanere sotto l'*explicit.* Così è possibile che la *Vita* fosse almeno destinata al foglio seguente come appunto in *Ambr.* e in *V*, dove è assegnato ad essa precisamente questo posto, e dopo dovesse seguire l'*Incipit* dei carmi Catulliani, che invece cominciano nel *Ber.* al foglio 41 *r* senza lemma. È possibile, ma non è dimostrato, che la *Vita* mancasse già nel codice padre di *Ber.*, come manca del resto in parecchi codici.

Una caratteristica di *Ambr.* solo e non di *Ber.* e di *V* è il curioso errore di trascrizione dopo IV 6, 20 e che abbiamo di

(1) Il Columba, *Un codice interpolato, ecc.*, p. 73, nota come anche il codice *P* conserva la lezione erronea *dictat* (IV 1, 18) di *Ambr.* contro *dicat* di *VG*. *Dictat* è anche in *Ber.* (e in *F*!), che in III 3, 17 non accoglie, come *P*, la lezione degli *Exc. Par. legitur quae*, ma ha con *Ambr.* e *V legiturque in*: *legitur quae* è riportato da *Ber.*[2] (v. sopra). Il Columba non può determinare quali rapporti esistano tra *P* e *V*, perché " solo in due casi, " salvo errore, si hanno lezioni comuni esclusivamente ai due codd., ed " entrambe son tali che possono essere venute per caso ". Non posso dir nulla di II 5, 95 *tunc operta*, perché nel *Ber.* qui manca il foglio.

sopra notato. uno dei molti indizi da cui risulta in particolare che *Ber.* non deriva da *Ambr.* direttamente.

Finalmente *Ber.* ha delle omissioni che meritano di essere considerate. Non ci fermeremo qui a rilevare quelle d'una sola parola, già del resto discusse di sopra, ma richiamiamo l'attenzione sui seguenti versi omessi per intero:

I 1, 44 (in margine *Ber.*[2] segna l'omissione),
I 3, 37 (in margine *Ber.*[2] segna l'omissione),
IV 1, 40 (omesso anche nell'Eboracense *y*).

È notevole che nessuna di queste omissioni si trova in *Ambr.* e *V.* La prima e la seconda possono dipendere da sbadataggine del copista. Non così la terza, per cui cfr. quanto ho scritto sopra a suo luogo.

Per converso *Ber.* ha due versi omessi in codici deter.: IV 1, 112 *a*; I 3, 25.

Abbiamo già detto che il principale valore di *Ber.* consiste nella conferma che esso ci può dare insieme con *Ambr.* e con *V*, o con uno di essi, soprattutto naturalmente con *Ambr.*, dello stato della tradizione sincera di *O.*

Ciò particolarmente ha luogo tra II 2, 20 e II 3, 49, dove manca la *prima manus* di *V.* Così abbiamo la conferma delle lezioni sincere *armenti* (II 3, 11), *phito* (*ib.* 27, dove anche *y* ha *phiton*), *cruor* (*ib.* 38), *obsistere* (*ib.* 41 contro gli *Exc. Par. obsidere*), *tumulti* (*ib.* 43, lezione rara), contro cui si esercitò l'interpolazione umanistica, come appare, ad. es., dall'*Admeti* e dal *tumultu* di *G.*

Ma in non pochi altri passi ciò accade. Notiamo inoltre: I 5, 32 *arboribus* (contro *ab oribus* di *V*); in I 6, 12 la notevole conferma di *tunc*; in IV 1, 55 la lezione dell'intero verso, sebbene questa non sia soltanto in *Ber.*; in I 8, 41 *iuventas*; in II 3, 61 *Nemesis qui abducit*; in I 5, 76 *nam*, dove altri codd., tra cui *y* e *G*, hanno *nat*; in I 8, 14 la conferma di *colligat* non è senza importanza (v. sopra), mentre dimostra ancora una volta che *Ber.* non è copiato su *Ambr.*, dove la raschiatura dell'*a* tende a fare un *colligit*; in I 10, 41 *at* con gli *Exc. Par.* contro *ut* di *V* e *ac* di ψ, conferma importante; in I 8, 31 *levia* (*V lenia*), II 1, 22 *ingeret* (*V ingerat*); *ib.* 83 *vocate* (*V vacate*); la rubrica di II 2 (per cui vedi sopra); II 1, 67, per cui cfr. la mia osser-

vazione e quella del Belling (*Prolegomena*, p. 74); II 3, 57 *illi* (*V ille*); *ib.* 57 *certent* (*V cernent*); *ib.* 66 *abdere* (*V addere*); *ib.* 78 *iuvet* (*V iuvat*); II 6, 8 *portet* (*V portat*); I 3, 86 *longa* (*V longo*: da aggiungere alla Nota 1ª, pag. 1236); I 4, 22 *freta summa* (*V summa freta*); in I 4, 51 la lez. di *Ambr.* e di *Ber.* conferma, contro *V*, lo stato dell'originale comune (v. sopra); *id.* I 4, 62 *ne* (contro *nec* di *V*); I 5, 27 *vitibus* (*V fructibus*); III 6, 26 *sentiat* (*V sentiet*: vedi sopra); *ib.* 59 *fugit* (*V fugiet*); IV 1, 18 *dictat* (*V dicat*); *ib.* 89 *celerem ve* (*V celeremque*); *ib.* 93 *directo* (*V*¹ *direpto*); *ib.* 131 *linquit* (*V* e *G liquit*); *ib.* 157 *non unquam* (*V non numquam*); *ib.* 162 *nec* (*V neque*); *ib.* 165 *rigentes*, conferma importante della *prima manus* di *Ambr.*; *ib.* 165 *inter posita* (*V interposita*); *ib.* 171 *lenta* (*V leta*); IV 3, 5 *abducit* (*V adducit*); IV 4, 8 *rabidis* (*V rapidis*); IV 7, 1 *pudori* (*V pudore*). — Aggiungi qualche caso dubbio come II 2, 19.

Degli errori particolari di *Ber.* non crediamo di raccogliere qui l'elenco, perché in massima non hanno nessuna speciale importanza. Sono parecchi, ma non molti, e non li riportiamo anche per non dover ripetere in alcuni casi quanto abbiamo già detto di sopra, il dubbio se cioè siano sempre veri e proprî errori di trascrizione dall'originale.

Dall'originale comune erroneo o illeggibile risultano parecchie lezioni di *Ber.*, tra cui *sentica* di I 8, 51 che, per esser lezione comune coi *Deteriores*, non cessa di essere una lezione importantissima denotante lo stato dell'originale. In III 1, 11 il *protexat* esclusivo (o quasi?) di *Ber.* è altrettanto importante per la medesima ragione. A questa si aggiunga l'*haxerat* di II 1, 58, errore esclusivo di *Ber.*, il *bidens vomer vident* di I 10, 49 pure — a quanto mi consta — lezione unica ed errore altrettanto tipico. Anche il *perria* di IV 1, 95 di fronte ad un *pma* di *Ambr.* e *V* (letto *parma*) è tipico errore di lettura del comune originale, per quanto non sia lezione esclusiva di *Ber.*, e in IV 4, 13 il *movet* di *Ber.*, secondo osservai di sopra, conferma, nell'incertezza di *Ambr.*, lo stato dell'originale. Conferma dello stato (erroneo) dell'originale è anche il *Ber.* IV 5, 6 *ne de* di fronte a *ne de* di *Ambr.* e al *ne de* di *V*. Notevolissima lezione erronea esclusiva, a quanto pare, di *Ber.*, è il *nuncium* di III 1, 21, di fronte al *meritum* di *Ambr.* e *V*, pure erroneo.

Ber. derivante da un codice similissimo ad *Ambr.*, ma non da uno sua copia, e forse da un parallelo di *O*, ci rivela qui lo stato d'incertezza della lezione originaria (*meritum* e *nuncium* non sono lontani nella scrittura). *Nuncium* sembra ad ogni modo lezione sincera, mentre *meritam* di *G*, *V*² e d'altri codd. è emendamento di *meritum*.

Il *Ber.* ha anche qualche lezione non comune nei mss. e nelle prime edizioni a stampa, come il *nulla haec* di IV 1, 127, *ib.* 200 *me letheas*, il *posthac que* di IV 5, 16, e qualche altra, riportata sopra nella collazione.

Le interpolazioni di *Ber.* non derivano, a quanto sembra, da correzioni ricavate da un codice unico e riportate da questo sull'originale suo diretto. Di un'ingenuità caratteristica sono il *tondere* di I 2, 86 (1) e il *Tartara bipsata* di II 3, 60, che non ho visto in altri codici; altre, come già dissi, punto esclusive di *Ber.*, correzioni più che ovvie e indiscutibili di errori di scrittura dell'originale comune, spesso compaiono anche in altri codici; altre pochissime risultano dall'accoglimento di un vocabolo mancante in *Ambr.*, e forse nell'originale comune mancante o illeggibile, come è del *labitur* di IV 1, 169 e del *vasti* di II 4, 10, che sono forse interpretazione diretta dell'originale semilacunoso. Altre sono probabilmente errori di lettura, se si pensi ad abbreviazioni male intese, come in II 3, 12 *mihi tonse*, e alla distanza che talora è tra una sillaba e la seguente pur d'una medesima parola: scambiare *in* con *m* è cosa presto fatta e la seconda forma vale *mihi*. Così potrebbe essere del *tibi gemine* (*tergemine*) di IV 1, 70, senza pregiudizio di quanto ho sopra annotato. L'abbreviazione di *tibi* (un *t* sormontato da un piccolo *i* — senza il puntino —) e di *ter* (un *t* sormontato da un piccolo *e*) può essere facilmente scambiata, né è escluso il caso che l'originale desse un *i* senza punto attraversato da un'asticciuola a significare *inter*, letto malamente *tibi*. Il *me letheas* di IV 1, 200 — in due

(1) Non si tratta qui piuttosto di uno svarione? Ecco un caso, non unico, in cui non è facile decidersi tra errore e interpolazione. Né il Broukhusius, né l'Huschke, né il Wunderlich, né il De Golbéry conoscono la variante. Vedi quanto scrissi sopra nella collazione. Per me si tratta di errore.

parole — non fa nessuna impressione di novità voluta, appunto per la distanza che talora si nota senza alcun motivo tra una sillaba e la seguente della medesima parola nei codici mss. (1). O il *Ber.* non fu felice nella lettura in tali casi, mentre *Ambr.* e *V* lessero meglio il comune originale (2), oppure *Ber.* ebbe sott'occhio un codice discendente da *O* in cui tal lettura era più difficile che nell'originale diretto di *Ambr.* e in quello di *V*, oppure *Ber.* deriva da un codice parallelo ad *O* direttamente o indirettamente. Certo — e gli esempi dati ne sono nuova prova — non è una copia di *Ambr.* e nemmeno di *V*.

Le interpolazioni di *Ber.* si riducono dunque a ben poca cosa, e come abbiamo detto all'inizio del nostro studio, a qualche noterella marginale di un correttore, probabilmente del manoscritto padre di *Ber.*, un correttore prudente e di cultura limitata che mutò 'quasi' esclusivamente quanto gli parve di dovere in modo assoluto emendare di errori evidentissimi di scrittura, o di grammatica, o di metrica, o di omissione — in caso di correzioni naturalissime —, rispettando la tradizione sincera del testo, anche se erronea, con uno scrupolo di cui dobbiamo essergli grati. Dire senz'altro ch'egli corresse dove la facile congettura porge la forma buona, è esagerare grandemente. Ciò è vero per altri codici Tibulliani, è falso in generale per il nostro. Alcuni ben rari casi, come il *mea pignora cedo* di IV 13, 17 (contro il *credo* di *Ambr.* e *V*), recano una lezione convalidata da tradizione antichissima: qui, come si disse, dal *Fr. Cuiacianum*. In qualche caso per converso, più unico che raro, l'emendamento, benché largamente accolto, contro *Ambr.* e *V*, ma infelice, passò anche in *Ber.*; cfr. ad es. il *Martis* di II 1, 88.

(1) Abbiamo avvertito sopra a suo luogo che *me letheus* non è lettura esclusiva di *Ber.*: tali invece sembrano *mihi tonse* e *tibi gemin(a)e*.

(2) Che talora, notiamo bene, era erroneo.

L'Accademico Segretario
ETTORE STAMPINI.

INDICE

DEL VOLUME LI.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. LI, DISP. 1ª. **1915-1916**.

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1916

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona – Torino